ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1973

УДК 523.164

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ И УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЛИНЕЙНО НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С НЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Х. Оразбердыев, В. Ю. Трахтенгерц

Анализируется движение и ускорение частиц в линейно неоднородном магнитном поле с нейтральной линией при наличии вертикальной составляющей поля и компоненты электрического поля вдоль нейтральной линии. Использование методов усреднения теории нелинейных колебаний позволяет получить физически наглядные и простые результаты, касающиеся движения и ускорения частиц в нейтральном слое. Рассмотрено изменение координат и импульса частицы при «столкновении» ее с нейтральным слоем, а также влияние релятивизма на движение частиц вблизи нейтральной линии. Обсуждаются условия возникновения ловушки для частиц вблизи нейтральной линии при наличии вертикальной составляющей магнитного поля.

1. Проблема движения частиц в магнитных конфигурациях, где поле, меняя знак, проходит через нуль, давно превлакала внимание [1]. В последнее время интерес к указанной проблеме возрос в связи с открытием хвоста магнитосферы [2] и возможностью использовать процессы, происходящие в области нейтральной линии (где $H=0$), для объяснения происхождения хромосферных вспышек на Солнце [3].

В данной работе рассматриваются особенности движения и ускорения частиц в сравнительно простой модели линейно неорнородного магнитного поля с медленно меняющимися (в пространстве и во времени) параметрами при наличии вертикальной составляющей магнитного поля и компоненты электрического поля вдоль нейтральной линии.

Указанные вопросы частично уже затрагивались в литературе. Так, в работах [4—6] было детально изучено движение заряженных частиц в линейно неоднородном магнитном поле с нейтральной линией. Ускорение частиц в таком поле при наличии электрического рассматривалось в работах Спейсера [7, 8], а также в [9]. Спейсер провел некоторые численные расчеты ускорения и при наличии вертикальной составляющей магнитного поля [8].

Детальный анализ движения и ускорения частиц в кусочно-однородном знакопеременном магнитном поле был проведен в работах [10, 11], где предполагалось также наличие вертикальной составляющей магнитного поля и электрическое поле.

В данной статье для анализа движения и ускорения частиц используются асимптотические методы теории нелинейных колебаний, которые раньше не привлекались к решению подобного рода задач. Использование этих методов позволяет получить простые и физически наглядные результаты для довольно широкого класса систем, включающих и рассмотренные ранее в [7—11]. В частности, в настоящей работе обобщены результаты [10, 11] на случай произвольного градиента магнитного поля в нейтральном слое. Рассмотрено также влияние релятивизма и медленных изменений параметров на движение и ускорение частиц.

2. Будем рассматривать движение частиц в квазистатических магнитном и электрическом полях вида

$$H = \left\{ h(\mu r,\ \mu t), 0,\ H_0(\mu r,\ \mu t)\frac{x}{L} \right\},$$
$$E = \{0, E(\mu r,\ \mu t), 0\}, \tag{1}$$

где μ — малый параметр.

Система релятивистских уравнений, описывающих движение частиц в электромагнитном поле (1), имеет вид

$$\varphi_{\tau\tau} + \frac{r_H}{L}\sin\varphi = \frac{d}{d\tau}\left\{ \left(\frac{Wu}{P_\perp c^2} + \frac{h}{H_0}\frac{P_z}{P_\perp} \right)\sin\varphi \right\},$$
$$\frac{dP}{d\tau} = -\frac{P_\perp}{P}\frac{Wu}{c^2}\cos\varphi, \tag{2}$$
$$\frac{dP_z}{d\tau} = \frac{h}{H_0}P_\perp\cos\varphi.$$

Здесь введено новое время

$$d\tau = \frac{eH_0c}{W}dt \tag{3}$$

и использованы следующие обозначения: $P\{P_\perp \sin\varphi, -P\cos\varphi, P_z\}$ — импульс частицы, $P = WV/c^2$, $W = m_0c^2/(1-\beta^2)^{1/2}$, V — скорость частицы, $\beta = V/c$, $u = cE/H_0$, $r_H = P_\perp c/eH_0$.

Полагая $u = u_0 f_1(\mu r,\ \mu t)$, $h = h_0 f_2(\mu r,\ \mu t)$, введем безразмерные параметры

$$\mu_1 = u_0/c,\quad \mu_2 = h_0/H_0. \tag{4}$$

В большинстве практически интересных случаев $\mu_{1,2} \ll 1$.

Ограничиваясь в правой части первого уравнения системы (2) членами первого порядка по $\mu_{1,2}$, получим исходную для решения систему уравнений

$$\varphi_{\tau\tau} + \frac{r_H}{L}\sin\varphi = \left(\mu_1\frac{\varepsilon}{p_\perp}f_1 + \mu_2\frac{p_z}{p_\perp}f_2 \right)\cos\varphi\,\varphi_\tau,$$
$$\frac{dp^2}{d\tau} = -2\mu_1 p_\perp \varepsilon f_1\cos\varphi, \tag{5}$$
$$\frac{dp_z}{d\tau} = \mu_2 p_\perp f_2\cos\varphi,$$

где $\varepsilon = W/m_0c^2$, $p_\perp = P_\perp/m_0c$, $p_z = P_z/m_0c$. В нулевом приближении ($\mu_{1,2} = 0$) энергия частицы сохраняется и движение описывается хорошо изученным уравнением нелинейного маятника:

$$\varphi_{\tau\tau} + \frac{r_H}{L}\sin\varphi = 0. \tag{6}$$

При этом можно выделить два типа траекторий, разделенных сепаратрисой: 1) траектории частиц, не пересекающих нейтральную линию магнитного поля; 2) траектории частиц, пересекающих нейтральную линию и образующих собственно нейтральный слой с толщиной $\Delta x = 2\sqrt{0{,}83\, r_H L}$. Интересно, что скорость дрейфа внутри нейтрального слоя направлена в одну сторону, а вне его—в другую*.

В общем случае решение (7) выражается через эллиптические функции Якоби [6]. Наиболее простой вид оно принимает вблизи нейтральной линии (7) и вдали от нее (8):

$$\varphi = A \sin \omega_1 \tau, \quad A = \frac{x_{\max}}{L\omega_1}, \quad \omega_1 = \left(\frac{r_H}{L}\right)^{1/2}; \tag{7}$$

$$\varphi = \omega_2 \tau + \frac{r_H}{L} B \sin \omega_2 \tau, \quad \omega_2 = \frac{x_{\max}}{L}, \quad B = \frac{1}{\omega_2^2}. \tag{8}$$

Решение (5) будем строить, следуя обычной методике усреднения при построении асимптотических решений подобных систем с быстрой фазой. Рассмотрим сначала изменение характера движения внутри сепаратрисы. Полагая A и $\lambda = \omega_1 \tau$, $p_\perp$ и p_z медленными функциями времени и координат, нетрудно составить для них уравнения, усредненные по быстрой фазе λ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A}\frac{dA}{d\tau} &= \mu_1 f_1 \frac{\varepsilon}{p_\perp} + \mu_2 \frac{p_z}{p_\perp} f_2, \\ \frac{dp^2}{d\tau} &= -2 p_\perp \varepsilon \mu_1 f_1, \\ \frac{dp_z}{d\tau} &= \mu_2 f_2 p_\perp. \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (9) написаны для нерезонансного случая, когда в спектре f_1 и f_2 не содержится гармоник с частотами, близкими к гармоникам частоты ω_1.

Два последних уравнения системы (5) имеют следующий 1-й интеграл (для простоты взято $f_1 = f_2 = 1$):

$$p^2 = -2\frac{\mu_1}{\mu_2} p_z + c_1 \quad \left(\beta^2 = \frac{V^2}{c^2} \ll 1\right); \tag{10а}$$

$$p + \frac{\mu_1 p_z}{\mu_2} = c_2 \quad (1 - \beta^2 \ll 1). \tag{10б}$$

В нерелятивистском случае, подставляя (10а) в (9), получим выражения для p_z, $p_\perp$ и A:

$$p_z = -\frac{\mu_1}{\mu_2} + \left[p_{\perp 0}^2 + \left(p_{z0} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2\right]^{1/2} \sin(\mu_2 \tau + \psi_0); \tag{11}$$

$$p_\perp = [p_{\perp 0}^2 + (p_{z0} + \mu_1/\mu_2)^2]^{1/2} \cos(\mu_2 \tau + \psi_0); \tag{12}$$

$$\begin{gathered} A \cos(\mu_2 \tau + \psi_0) = A_0 \cos \psi_0 = \mathrm{const}, \\ \sin \psi_0 = (p_{z0} + \mu_1/\mu_2)/[p_{\perp 0}^2 + (p_{z0} + \mu_1/\mu_2)^2]^{1/2}. \end{gathered} \tag{13}$$

---

* Строго говоря, скорость дрейфа меняет знак не на сепаратрисе, а на фазовой траектории (в пространстве (φ, φ_τ)), лежащей вблизи сепаратрисы (внутри нее, где $k^2 = 0{,}83$).

Напомним, что в нулевом приближении амплитуда $A \sim 1$ разделяет траектории внутри и вне сепаратрисы.

Рассмотрим теперь движение вне сепаратрисы. Вдали от нее решение можно представить в виде $\varphi = \psi + B(r_H/L)\sin\psi$, где B и ψ — медленно меняющиеся функции. Для них с помощью системы (5) нетрудно получить следующие усредненные уравнения:

$$\frac{1}{2B^2}\frac{dB}{d\tau} = -\frac{r_{H0}}{L}\left(\mu_1\frac{\varepsilon}{p_\perp}f_1 + \mu_2\frac{p_z}{p_\perp}f_2\right), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = B^{-1/2},$$
$$\frac{dp^2}{d\tau} = \mu_1 p_\perp \varepsilon B\left(\frac{r_H}{L}\right)f_1, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = -\frac{1}{2}\mu_2 f_2 p_\perp B\frac{r_H}{L}. \tag{14}$$

Остановимся сначала на случае, когда вертикальная составляющая магнитного поля отсутствует ($\mu_2 = 0$). Из формул (11)—(13) и системы (14) при $\mu_2 \to 0$ имеем ($p_z = \text{const}$, $\varepsilon \approx 1$)

$$\frac{p_\perp}{p_{\perp 0}} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^{-1} = 1 - \frac{\mu_1}{p_{\perp 0}}\tau \quad \text{внутри сепаратрисы;} \tag{15}$$

$$\frac{p_\perp}{p_{\perp 0}} = \left(\frac{B_0}{B}\right)^{1/4} = \left(1 + \mu_1\frac{r_H^{(0)}}{L}\frac{ct}{x^{(0)}}\right)^{1/4} \quad \text{вне сепаратрисы.} \tag{16}$$

Ускорение в нейтральном слое возникает, когда электрическое поле (для положительно заряженных частиц) направлено по скорости дрейфа ($\mu_1 < 0$) При этом вне нейтрального слоя частицы замедляются и приближаются к нейтральной линии. Происходит как бы «стягивание» всех частиц к нейтральному слою. Последнее обстоятельство позволяет, в принципе, использовать системы с нейтральной линией для получения тонких пучков ускоренных частиц.

Характер движения частиц существенно меняется при наличии малой вертикальной составляющей магнитного поля. В этом случае, как следует из формул (11)—(13), нерелятивистская частица может находиться в нейтральном слое лишь конечное время

$$\Delta\tau \sim \frac{\pi}{\mu_2} \quad \left(\Delta t \approx \frac{\pi}{\mu_2\,\omega_{H0}}\right).$$

Используя формулы (12), (13), нетрудно найти изменение координат (y, z) и импульса частицы при однократном пересечении нейтрального слоя ($\mu_1 < 0$). При подлете к нейтральному слою продольный импульс частицы $p_{z0} < 0$. Далее продольный импульс сначала уменьшается до нуля, а затем возрастает до значения, больше исходного на величину

$$\Delta p_z = 2\frac{|\mu_1|}{\mu_2} = 2\frac{E_0}{h_0}. \tag{17}$$

Поперечный импульс сначала возрастает, а затем уменьшается до прежнего значения. Изменение координат частицы после прохождения нейтрального слоя можно оценить по формулам

$$\Delta y = c\int_0^{\pi/\mu_2\omega_{H0}} p_\perp\,dt = \frac{2}{\mu_2\,\omega_{H0}}\left(p_{z0}c + c\frac{E_0}{h_0}\right),$$
$$\Delta z = c\int_0^{\pi/\mu_2\omega_{H0}} p_z\,dt = \frac{\pi}{\mu_2\,\omega_{H0}}\frac{E_0}{h_0}c. \tag{18}$$

Формулы (17), (18) полностью описывают «столкновение» частицы с нейтральным слоем. Остается не определенным направление вылета частицы из нейтрального слоя (в $+x$- или $-x$-направлении), которое можно найти, лишь рассматривая движение вблизи сепаратрисы. Полученные выше результаты (7), (8) для нерелятивистской частицы хорошо согласуются с расчетами [10, 11], где впервые было описано «столкновение» частицы с нейтральным слоем в приближении кусочнооднородного знакопеременного магнитного поля.

Несколько иная картина имеет место в ультрарелятивистском случае $\varepsilon \gg 1$. Здесь систему (9) удобно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{d\tau_0} = \frac{\mu_2 \cos\theta + \mu_1}{p\sin\theta},$$

$$\frac{dp}{d\tau_0} = -\mu_1 \sin\theta, \tag{19}$$

$$\frac{\dfrac{d\theta}{d\tau_0}}{(\mu_1\cos\theta + \mu_2)^2} = (-\mu_1\cos\theta_0 - \mu_2)\,p^{(0)},$$

где $\tau_0 = \omega_{H0} t$, $p_z = p\cos\theta$, $p_\perp = p\sin\theta$, $\omega_{H0} = eH_0/m_0c$. Интегралы (19) довольно громоздки, и мы их выписывать не будем. Отметим качественные особенности решения системы (19). В отличие от случая нерелятивистских частиц здесь возможно стягивание частиц к нейтральной линии при наличии ускоряющего электрического поля и при отличной от нуля вертикальной составляющей h, если выполнены условия

$$|\mu_1|\cos\theta_0 > \mu_2, \quad \mu_1 < 0. \tag{20}$$

Импульс частицы при этом растет по линейному закону

$$p \approx p^{(0)} + \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2}\,\omega_{0H} t.$$

В заключение подчеркнем, что полученные выше результаты легко обобщаются на случай произвольных медленных изменений параметров задачи. В частности, это касается зависимости вида $H = H_0 x/L(1 + \mu|x|)$, которой можно аппроксимировать широкий класс реальных магнитных полей с конечных значением H на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Данжи, Космическая электродинамика, Госатомиздат, М., 1961.
2. N. F. Ness, The Geomag. Tail, Magnetospheric Physics, 1969, p. 97.
3. С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, 50, 1133 (1966); Астрон. ж., 43, 340 (1966).
4. E. N. Parker, Phys. Rev., 107, 924 (1957).
5. P. W. Seymour, Austral. J. Phys., 12, 307 (1959).
6. Х. Оразбердыев, Изв. Туркм. ССР, сер. ФТХГ, № 5 (1969); Изв. Туркм. ССР, сер. ФТХГ (в печати).
7. T. W. Speiser, J. Geophys. Res., 70, 1717 (1965); J. Geophys. Res., 70, 4219 (1965)
8. T. W. Speiser, J. Geophys. Res., 72, 3919 (1967).
9. Х. Оразбердыев, В. Ю. Трахтенгерц, Геомагнетизм и аэрономия, 12, № 6, 1067 (1972).
10. И. И. Алексеев, А. П. Кропоткин, Геомагнетизм и аэрономия, 10, 953 (1970).
11. V. P. Shabanskii, Space Sci. Rev., 12, № 3 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 апреля 1972 г.

SOME PECULIARITIES OF PARTICLE MOTION AND ACCELERATION IN A LINEARLY INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD WITH A NEUTRAL PLANE

Kh. Orazberdyev, V. Yu. Trakhtengerts

We analize the particle motion and acceleration in a linearly inhomogeneous magnetic field with a neutral line in the presence of the vertical component of the field.and that of the electrical field along the neutral line. The use of averaging methods of the nonlinear oscillation theory enables one to obtain physically visual and simple results on the particle motion and acceleration in the neutral layer. The change of coordinates and pulse of a particle when it collides with the neutral line is considered, as well as the influence of relativism on the particle motion near the neutral line. The conditions of appearance of a particle trap near the neutral line in the presence of the vertical component of the magnetic field are discussed.