ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1973

УДК 523.164

# СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ, ГРАДИЕНТНЫЙ ДРЕЙФ ЧАСТИЦ В ЛИНЕЙНО НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*С. А. Каплан, Х. Оразбердыев, В. Ю. Трахтенгерц*

На основе точного решения уравнения движения заряженной частицы в линейно неоднородном магнитном поле найдены спектр и интенсивность синхротронного излучения этих частиц, полная мощность излучения, адиабатические инварианты, описывающие изменение одних параметров движения в зависимости от изменений других параметров (например, приближение частицы к нейтральной линии при потере энергии на излучение) и т. п. Полученные соотношения могут быть использованы для анализа движения частиц и их излучения вблизи нейтральной линии магнитного поля.

В ряде проблем физики плазмы, физики магнитосферы, астрофизики приходится исследовать движение частиц вблизи нейтрального слоя, где магнитное поле меняет знак. Наиболее типичным примером является хвост магнитосферы. Хорошим приближением для описания магнитного поля в таких областях является случай линейно неоднородного поля

$$H = \left\{ 0,\, 0,\, H_0 \frac{x}{L} \right\}, \qquad (1)$$

где $H_0$ и $L$ — параметры поля, а $x$ — координата, отсчитываемая от нейтрального слоя, расположенного в плоскости $y0z$.

Можно показать, что уравнения движения частиц любой энергии (в том числе и релятивистских) в поле (1) сводятся к точному уравнению типа нелинейного маятника*

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{cp_\perp}{eH_0 L} \sin\varphi = 0, \qquad (2)$$

в том числе и в случае, если энергия частицы меняется под действием сил, параллельных скорости (например, реакции излучения). В (2) использованы обозначения: $p_\perp$ — перпендикулярная магнитному полю компонента импульса, $\varphi$ — полярный угол в пространстве импульсов, т. е. $p = \{p_\perp \sin\varphi,\, -p_\perp \cos\varphi,\, p_z\}$, $\tau$ — безразмерное время,

$$d\tau = \frac{ecH_0}{\mathscr{E}} dt, \qquad (3)$$

$\mathscr{E}$ — энергия частицы. Величина $p_\perp$ в (2) может также зависеть от времени.

Для случая $p_\perp = \text{const}$ (при этом по-прежнему возможно изменение $\mathscr{E}$ из-за изменения $p_z$) можно получить точное решение уравнения (2), выраженное в эллиптических функциях Якоби [3]. Характер движения

* Случай нерелятивистских частиц с сохраняющейся энергией был рассмотрен в [1–3].

частицы зависит от того, пересекает ли траектория нейтральную линию или нет.

Пересекающие траектории всегда симметричны относительно нейтральной линии, и тогда угол $\varphi$ испытывает колебания в ограниченных пределах. Точное решение (2) для этого случая

$$\varphi = 2 \arccos (\mathrm{dn} (u, k)), \tag{4}$$

где параметры эллиптической функции Якоби $\mathrm{dn}(u, k)$ выражаются через параметры движения частиц следующим образом:

$$du = \sqrt{\frac{cp_\perp}{eH_0 L}}\, d\tau = \frac{cp_\perp}{\mathscr{E}} \left(\frac{eH_0}{Lp_\perp}\right)^{1/2} dt; \tag{5}$$

$$k^2 = \frac{x_{\max}}{4r_{\max}} = \frac{eH_0}{cp_\perp} \frac{x_{\max}^2}{4L}; \tag{6}$$

$$r_{\max} = \frac{cp_\perp}{eH_{\max}} = \frac{cp_\perp L}{eH_0 x_{\max}}, \tag{7}$$

где $x_{\max}$ — максимальное отклонение частицы от нейтральной линии, а $r_{\max}$ — ларморовский радиус кривизны траектории частицы при ее максимальном отклонении.

Движение частиц, траектории которых не пересекают нейтральную линию, определяется эллиптической функцией $\mathrm{sn}\,(u, k)$. Здесь

$$\varphi = 2 \arcsin (\mathrm{sn}\,(u, k)), \tag{8}$$

а вместо (5), (6) получаем

$$du = \frac{x_{\max}}{L} d\tau = \frac{ecH_{\max}}{\mathscr{E}} dt; \tag{9}$$

$$k^2 = \frac{4r_{\max}}{x_{\max}} = \frac{cp_\perp}{eH_0} \frac{4L}{x_{\max}^2}. \tag{10}$$

Соотношение (7) остается прежним. У непересекающих траекторий угол $\varphi$ вращается, но с периодически меняющейся угловой скоростью.

Траектории, пересекающие и не пересекающие нейтральную линию, разделяются сепаратрисой

$$\varphi = 2 \arccos (\mathrm{sch}\, u), \tag{11}$$

где $\mathrm{sch}\, u$ — гиперболический косеканс и $k^2 = 1$, $(x_{\max} = 4L)$. При движении по сепаратрисе частицы асимптотически приближаются к нейтральной линии. Правда, эти движения неустойчивы, и при малых возмущениях частица переходит либо на пересекающие (внутри сепаратрисы), или на не пересекающие (вне сепаратрисы) нейтральную линию траектории.

Движение частиц, траектории которых пересекают нейтральную линию, подобно колебаниям нелинейного маятника относительно нижнего устойчивого положения равновесия, но с большим размахом, который может быть лишь немного меньшим 180°. Непересекающие траектории соответствуют круговым движениям нелинейного маятника с переходом его через точку верхнего неустойчивого равновесия. Движение по сепаратрисе эквивалентно асимптотическому приближению к верхней точке неустойчивого равновесия.

Знание точного выражения для угла $\varphi$ позволяет легко рассчитать все параметры и характеристики движения. Приведем здесь без выводов, которые будут даны в другой работе, некоторые соотношения.

*1. «Градиентный» дрейф.* Неоднородность магнитного поля вызывает дрейф частиц в направлении оси $0y$, перпендикулярной магнитному полю и его градиенту. Скорость дрейфа есть [2, 3]

$$\frac{v_d}{v_\perp} = -\langle \cos\varphi \rangle = 1 - 2\frac{E(k)}{K(k)}; \qquad (12)$$

$$\frac{v_d}{v_\perp} = -\langle \cos\varphi \rangle = \frac{2}{k^2}\left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) - 1 \qquad (13)$$

— для движений внутри и вне сепаратрисы соответственно. Здесь $v_\perp$ — перпендикулярная магнитному полю компонента скорости, а $E(k)$ и $K(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Скорость дрейфа при движении внутри сепаратрисы равна нулю в частном случае $k^2 \approx 0{,}83$ (т. е. при $x_{\max} \approx \sqrt{3{,}3\, cp_\perp L/eH_0}$). Здесь траектория частицы представляет собой правильную восьмерку. При переходе через $k^2 \approx 0{,}83$ направление скорости дрейфа меняет знак.

*2. Полная мощность магнитотормозного излучения частицы любой энергии, двигающейся в линейно неоднородном магнитном поле*

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{8}{3}\frac{e^3 H_0}{mcL}\left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^3 \left[\frac{E(k)}{K(k)} - (1 - k^2)\right]; \qquad (14)$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{8}{3}\frac{e^3 H_0}{mcL}\left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^3 \frac{E(k)}{k^2 K(k)} \qquad (15)$$

— для движения внутри и вне сепаратрисы соответственно. При $k^2 \to 0$ мощность излучения (14) также стремится к нулю, ибо в этом случае $x_{\max} \to 0$ и частицы двигаются почти строго вдоль нейтральной линии. С другой стороны, при $k^2 \to 0$ в (15) последнее выражение переходит в обычную формулу для мощности магнитотормозного излучения в однородном магнитном поле.

*3. Спектр и угловое распределение синхротронного излучения.* Для расчета этих параметров удобнее всего воспользоваться методом Владимирского [4], который в явном виде учитывает направленность синхротронного излучения вдоль мгновенной скорости частицы. Нетрудно убедиться, что угол $\varphi$ в (2) близок к азимутальному углу (тоже обозначаемому через $\varphi$) в плоскости орбиты, который характеризуется максимальной интенсивностью мгновенного излучения ультрарелятивистских частиц.

Приведем выражения для спектральной интенсивности излучения, рассчитанной на единичный интервал частот и на единичный интервал азимутального угла в плоскости орбиты (подчеркиваем, что имеется в виду интервал линейного, а не телесного угла):

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{\sqrt{3}\, e^3 H_{\max}}{2\pi mc}\left(1 - \frac{cp_\perp}{eH_0}\,\frac{4L}{x_{\max}^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1/2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) d\omega\, d\varphi, \qquad (16)$$

где $F(\omega/\omega_c)$ — обычная функция, определяющая вид спектра синхротронного излучения,

$$F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \frac{\omega}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta, \qquad (17)$$

а параметр $\omega_c$, характеризующий частоту максимума спектра, равен

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{eH_{max}}{mc}\left(1 - \frac{cp_\perp}{eH_0}\frac{4L}{x_{max}^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \tag{18}$$

Выражения (16), (17) справедливы как для движений внутри сепаратрисы, так и для движений вне ее.

Таким образом, синхротронное излучение частиц в линейно неоднородном магнитном поле формально отличается от синхротронного излучения в однородном магнитном поле только перенормировкой последнего, т. е. заменой $H$ на $H_{max}\left(1 - \frac{4r_{max}}{x_{max}}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{1/2}$. Однако по существу это приводит к ряду новых следствий. Во-первых, излучение при движении внутри сепаратрисы имеет ограниченную диаграмму направленности в плоскости орбиты:

$$|\varphi| \leqslant 2\arcsin\left(\frac{eH_0 x_{max}^2}{4cp_\perp L}\right)^{1/2}; \tag{19}$$

при этом излучение имеет максимальную интенсивность вдоль дрейфовой скорости (параллельно нейтральной линии); частота, отвечающая максимуму спектра, достигает наибольшего значения при излучении в том же направлении; как интенсивность, так и частота максимума спектра спадают до нуля к краям диаграммы направленности.

Во-вторых, поскольку для траекторий одинакового вида (т. е. с одинаковыми $k^2$) максимальное отклонение от нейтральной линии $x_{max} \sim \sim \sqrt{p_\perp} \sim \sqrt{\mathscr{E}}$ и $H_{max} \sim x_{max} \sim \sqrt{\mathscr{E}}$, то с ростом энергии частота максимума в спектре растет как $(\mathscr{E}/mc^2)^{5/2}$. В третьих, при движении вне сепаратрисы излучение также анизотропно, хотя и направлено во все стороны — с удалением от нейтральной линии анизотропия исчезает. В-четвертых, форма спектра и характер поляризации всегда остаются подобными случаю излучения в однородном магнитном поле.

4. *Адиабатический инвариант.* Как известно, для уравнений движения типа (2) всегда можно определить адиабатический инвариант

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \dot{\varphi}^2 dt = \frac{T}{2\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2_{\varphi=0} + \frac{2c^3 eH_0 p_\perp}{L\mathscr{E}^2}(\langle\cos\varphi\rangle - 1)\right], \tag{20}$$

где $T$ — период движения (измеренный в истинном времени $t$). Формулу (20) легко получить, воспользовавшись первым интегралом уравнения (2) (этот интеграл остается справедливым и при переменной энергии). Учитывая определение периода эллиптических функций Якоби ($4K(k)$), а также формулы (12) и (13), находим

$$J = \frac{8}{\pi}\left(\frac{cp_\perp}{eH_0L}\right)^{1/2}\frac{ecH_0}{\mathscr{E}}[E(k) - (1 - k^2)K(k)]; \tag{21}$$

$$J = \frac{8}{\pi}\frac{cp_\perp}{eH_{max}L}\frac{ecH_0}{\mathscr{E}}\frac{E(k)}{k^2} \tag{22}$$

— для движений внутри и вне сепаратрисы соответственно.

Формулы (21) и (22) точные, но во многих случаях удобнее пользоваться их асимптотическими значениями при $k^2 \ll 1$. Полагая, кроме того, $cp_\perp \approx \mathscr{E}$ (для релятивистских частиц), получаем

$$J \approx \frac{1}{2}\left(\frac{eH_0}{\mathscr{E}L}\right)^{3/2} cx^2_{\max}; \tag{23}$$

$$J \approx \frac{ecH_0}{\mathscr{E}L} x_{\max} = \frac{ecH_{\max}}{\mathscr{E}} \tag{24}$$

— для движений внутри и вне сепаратрисы соответственно. Можно отметить некоторую аналогию формул (14), (15) и (21), (22).

Как известно, при медленных изменениях параметров величина адиабатического инварианта сохраняется. В частности, из (23) и (24) следует, что при медленной потере энергии на излучение уменьшается и $x_{\max}$, т. е. частица приближается к нейтральной линии. Аналогичным образом действует и уменьшение $L$, т. е. при увеличении градиента магнитного поля частицы тоже стягиваются к нейтральной линии.

При движении в слабонеоднородном магнитном поле сохраняется адиабатический инвариант $p^2_\perp/H = \text{const}$. Следует подчеркнуть, что этот последний инвариант может быть получен из уравнения, определяющего изменение импульса, а не из уравнения вида (2), которое в случае однородного магнитного поля превращается в тривиальное условие $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ecH}{\mathscr{E}} = \text{const}$. Поэтому полученный выше инвариант не переходит в условие $p^2_\perp/H = \text{const}$, и аналог последнего инварианта может быть найден, если уравнение (2) дополнить условием изменения импульса $p_\perp$. Инварианты (21) и (22) имеют место в связи с тем, что уравнение (2) точно описывает движение частиц и при потере энергии на излучение. Это означает также, что эти инварианты нельзя использовать, по крайней мере, без дополнительного анализа, в тех случаях, когда изменение энергии связано с силами, не параллельными скорости (например, при ускорении частиц электрическим полем).

Выражаем благодарность Е. В. Суворову и Ю. В. Чугунову за обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. E. H. Parker, Phys. Rev., 107, 924 (1957).
2. P. W. Seymour, Austr. J. Phys., 12, 307 (1959).
3. Х. Оразбердыев, Изв. АН Туркм. ССР, сер. ФТХГ, 1972.
4. В. В. Владимирский, ЖЭТФ, 18, 392 (1948).


Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 3 мая 1972 г.

## SYNCHROTRON RADIATION, ADIABATIC INVARIANT, GRADIENT DRIFT OF PARTICLES IN A LINEARLY INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

*S. A. Kaplan, Kh. Orazberdyev, V. Yu. Trakhtengerts*

Using the exact solution of a charged particle motion in a linearly inhomogeneous magnetic field we find the spectrum and intensity of synchrotron emission of these particles, the total radiation power, adiabatic invariants describing the change of one motion parameters depending on the change of the others (for example, the approach of a particle to the neutral line at the radiation energy loss) etc. The obtained relations may be used to analyse the particle motion and their radiation near the neutral line of the magnetic field.