

УДК 621.385.623.2

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО МОНОТРОНА

А. В. Сморгонский

На основе анализа движения электронов в поле сильной электромагнитной волны рассчитан максимальный КПД релятивистского монотрона (РМ). Определены оптимальные значения параметров прибора и допустимый разброс электронов пучка по энергиям. Показано, что в области значений параметров, при которых достигается высокий КПД, рабочие токи превышают стартовые.

1. Возможность использования для взаимодействия с электронным пучком незамедленных электромагнитных волн принципиально отличает релятивистский монотрон (РМ) с бегущей волной от других приборов с прямолинейными пучками (оротрон, резонансная ЛБВ типа «О» и др.). Линейная теория РМ рассмотрена в [1]. Там же дана оценка максимального электронного КПД, определенного в области параметров, при которых амплитуда высокочастотного поля не слишком велика.

В настоящей работе исследована эффективность РМ в более широком интервале значений амплитуды поля, что позволило, в частности, найти предельный КПД.

Уравнения движения ультрарелятивистских электронов в поле электромагнитной волны, составленные подобно (1) в [1], имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\zeta} &= A \cos \Phi, \\ \frac{d\Phi}{d\zeta} &= B + \mathcal{E}^{-2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathcal{E} = \gamma/\gamma_0$, γ — отношение релятивистской энергии электрона к его энергии покоя, причем $\gamma \gg 1$, $\gamma_0 = \gamma(0)$, Φ — фаза действующего на электрон поля, $\zeta = \frac{\omega z}{2\gamma_0^2 c}$, z — координата, отсчитываемая вдоль пучка,

ω — частота, c — скорость света, $A = \frac{2e\gamma_0 E_0}{mc\omega}$, E_0 — амплитуда продольной компоненты высокочастотного поля в резонаторе РМ, $B = (1 - c/v_\phi) 2\gamma_0^2$, v_ϕ — фазовая скорость волны. В случае моноэнергетического электронного пучка граничные условия для (1) записываются как $E(0) = 1$, $\Phi(0) = \Phi_0$, $0 \leq \Phi_0 < 2\pi$, а электронный КПД (η) определяется равенством

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}(\zeta_k, A, B, \Phi_0) d\Phi_0, \quad (2)$$

где $\zeta_k = \frac{\omega L}{2\gamma_0^2 c}$, L — длина резонатора.

2. Особенности движения ультрарелятивистских электронов в поле большой амплитуды позволяют провести приближенное аналитическое исследование системы (1). Согласно [1], с ростом амплитуды A должен увеличиваться и параметр рассинхронизма B , соответствующий максимальному КПД, так что для не слишком заторможенных электронов можно не учитывать неизохронность их колебательного движения в поле волны*. Те же электроны, которые отдали значительную часть своей энергии, быстро смещаются по фазе относительно волны и, практически не успев изменить своего положения относительно резонатора, вновь попадают в ускоряющее поле и приобретают большую энергию. Следовательно, пока энергия электрона достаточно велика ($\mathcal{E} \sim 1$), в уравнении для фазы можно не учитывать слагаемое $1/\mathcal{E}^2$, когда же энергия мала и существенны оба слагаемых, можно пренебречь смещением электрона по координате.

Воспользовавшись тем, что система (1) имеет интеграл

$$-\frac{1}{\mathcal{E}} + B\mathcal{E} + 1 - B = A (\sin \Phi - \sin \Phi_0), \quad (3)$$

разобьем фазовые траектории на участки, где движение электронов происходит различным образом. Полагая в (3) $\mathcal{E} = 1/\sqrt{B}$ и учитывая, что $B \gg 1$, находим значение фазы, разделяющее эти участки:

$$\Phi_r = \text{Arcsin} \left(\sin \Phi_0 - \frac{B}{A} \right). \quad (4)$$

Для достижения хотя бы одним электроном столь низкого по энергии уровня амплитуда поля должна удовлетворять неравенству $A > B/2^{**}$. В дальнейшем это условие предполагается выполненным, и, следовательно, электроны, имеющие начальные фазы в интервале $\Phi_{01} < \Phi_0 < \Phi_{02}$, где $0 < \Phi_{01} = \text{Arcsin} \left(\frac{B}{A} - 1 \right) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \Phi_{02} = \text{Arcsin} \left(\frac{B}{A} - 1 \right) < \frac{3\pi}{2}$, достигают указанной границы. Пока энергия электрона мала ($\mathcal{E} \ll 1/\sqrt{B}$), фаза его, как видно из (3), меняется в нулевом приближении по параметру $1/B$ на величину $\Delta\Phi = 3\pi - \Phi_r^{(1)}$ (где $\pi < \Phi_r^{(1)} = \text{Arcsin} \left(\sin \Phi_0 - \frac{B}{A} \right) < \frac{3\pi}{2}$). Смещением его по координате в этом приближении можно пренебречь, т. е. считать, что фаза электрона Φ меняется скачком. Для электронов, начальные фазы которых лежат вне этого интервала (т. е. имеющих фазы влета $0 < \Phi_0 < \Phi_{01}$ и $\Phi_{02} < \Phi_0 < 2\pi$), в том же приближении фазы Φ меняются линейно всюду.

Элементарный анализ процесса группировки электронов в РМ позволяет предположить, что максимум КПД прибора достигается тогда,

* Необходимость выбора достаточно большой начальной расстройки ($B \gg 1$) можно объяснить тем, что для образования компактного сгустка электронов и их синхронного торможения частицы, имеющие существенно различные энергии (при этом скорость их может оставаться ультрарелятивистской), должны смещаться относительно волны с примерно одинаковой скоростью.

** Уравнения (1), полученные в предположении, что энергия всех электронов достаточно велика ($\gamma^2 \gg 1$) [2], не накладывают ограничений на величину A сверху, однако из точных уравнений (7) можно указать область их применимости, которая определяется из условия $A < \frac{B}{2} + \frac{\gamma_0^2 - \gamma_0 \gamma_{\min} + \gamma_{\min}^2 B}{\gamma_0 \gamma_{\min}}$, где γ_{\min} — минимальное значение (безразмерной) энергии электрона, при которой еще выполняется соотношение $\gamma_{\min}^2 \gg 1$.

когда сгусток, образовавшийся после первого скачка фазы электронов, проходит тормозящую фазу поля, т. е. подходит на фазовой траектории к области второго скачка. Длина резонатора, на которой частицы второй раз достигают уровня энергии $\mathcal{E} = 1/\sqrt{B}$, согласно (3) равна

$$\zeta_{\kappa} = \frac{1}{B} (3 \Phi_{\Gamma}^{(1)} - \Phi_0 - \pi). \quad (5)$$

При этом следует рассмотреть три случая:

а) длина резонатора настолько мала, что ни один электрон не доходит второй раз до области энергий $\mathcal{E} \ll 1/\sqrt{B}$, при этом

$$\zeta_{\kappa} < \zeta_{\min} = \frac{1}{B} \left[3 \arcsin \left(\frac{-9B/A + \sqrt{9B^2/A^2 + 64}}{8} \right) - \arcsin \left(\frac{-B/A + \sqrt{9B^2/A^2 + 64}}{8} \right) - \pi \right];$$

б) резонатор достаточно длинный, так что все электроны, у которых фаза может резко меняться, успевают сделать два скачка:

$$\zeta_{\kappa} > \zeta_{\max} = \frac{1}{B} \left[3,5\pi - \arcsin \left(\frac{B}{A} - 1 \right) \right];$$

в) длина резонатора такова, что лишь часть электронов успевает совершить два скачка по фазе $\zeta_{\min} < \zeta_{\kappa} < \zeta_{\max}$.

Сделанные выше допущения о характере движения электронов в РМ при больших амплитудах поля волны позволяют теперь легко проинтегрировать систему уравнений (1) и найти выражение для КПД прибора, которое для случая в) имеет вид

$$\eta = -\frac{A}{2\pi B} \left\{ \int_{\Phi_{01}}^{\Phi_0^{(1)}} [\sin(B\zeta_{\kappa} + \Delta\Phi(\Phi_0) + \Phi_0) - \sin(B\zeta_{\kappa} + \Phi_0)] d\Phi_0 + \int_{\Phi_0^{(1)}}^{\Phi_{02}} [\sin(B\zeta_{\kappa} + 2\Delta\Phi(\Phi_0) + \Phi_0) - \sin(B\zeta_{\kappa} + \Phi_0)] d\Phi_0 \right\}, \quad (6)$$

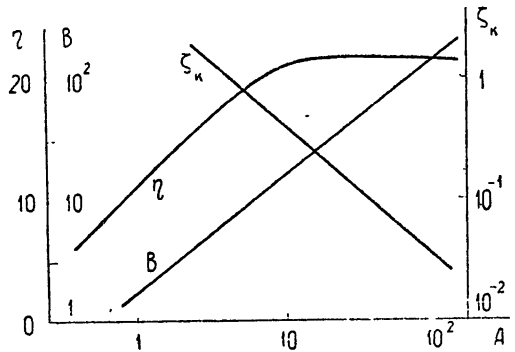
где $\Phi_0^{(1)}$ — корень трансцендентного уравнения (5), лежащий в интервале $\Phi_{01} < \Phi_0^{(1)} < \Phi_{02}^*$. Именно в этом случае КПД достигает своего максимального значения $\eta = 25\%$ (при $\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$, $B\zeta_{\kappa} = 2,1\pi$).

3. Полученное выше в приближении сильного поля значение КПД РМ могло, вообще говоря, оказаться и не наибольшим, так как своего максимального значения КПД мог, в принципе, достигать и при не слишком большой амплитуде волны. Поэтому уравнения (1) были проинтегрированы численно при различных значениях амплитуды A . Точность вычисления энергии на каждом шаге по ζ составляла 10^{-5} , а интеграл по Φ_0 в (2) заменялся суммой из 16 слагаемых, соответствующих 16 эквидистантным значениям Φ_0 . Это обеспечивало точность вычисления КПД около 1%.

* Для случаев а), б) и в), когда оба корня уравнения (5) лежат в указанном интервале, выражения для КПД записываются аналогично, следует лишь соответствующим образом изменить границы области интегрирования по Φ_0 .

На рис. 1 представлено поведение КПД при оптимальных значениях параметров расстройки (B) и длины резонатора (ζ_k), а также изменение этих параметров в зависимости от амплитуды поля A , которая считалась постоянной вдоль резонатора*. При малых A ($A < 1$) вычисленные значения КПД совпадают с найденными в [4]. При увеличении амплитуды КПД растет до величины $\eta = 21,5\%$ (при $A = 10$), а затем остается постоянным. Это соответствует сделанному ранее выводу о том, что в сильном поле КПД не зависит от амплитуды A , а определяется лишь отношением A/B . Значение КПД, найденное численно, на 3% меньше полученного аналитически. Ошибка при аналитических расчетах связана, по-видимому, с пренебрежением конечностью времени скачка фаз электронов и неточностью вычисления фаз (и координат) электронов, подходящих достаточно близко к области значений энергий порядка $1/\sqrt{B}$.

Рис. 1. Зависимость КПД и оптимальных параметров РМ от амплитуды поля для РМ с ультрарелятивистским пучком.



Об эффективности РМ при других значениях длины и амплитуды поля можно судить на основании рис. 2, где даны линии равных η , построенные при подборе в каждой точке оптимального значения расстройки B .

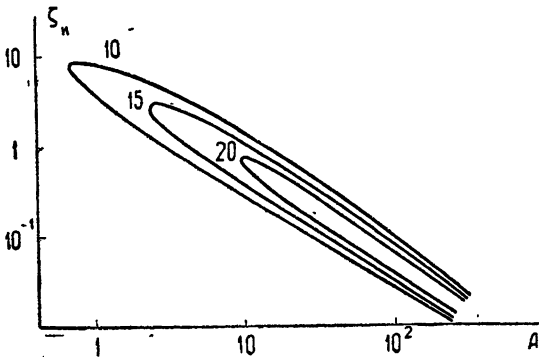


Рис. 2. Линии равного КПД, максимизированного по расстройке, для прибора с ультрарелятивистским пучком.

4. Уравнения (1) справедливы лишь для ультрарелятивистского пучка (см. п. 2). Поскольку при не слишком больших начальных энергиях (при условии $\gamma_0^2 \gg 1$) это требование может оказаться невыполненным, имеет смысл оценить КПД, пользуясь точными уравнениями для фазы Φ и энергии:

$$\frac{d\gamma}{d\zeta_n} = A_n \cos \Phi, \tag{7}$$

* Оптимизация производилась простым перебором параметров.

$$\frac{d\Phi}{d\zeta_n} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - B_n,$$

где $\zeta_n = 2\gamma_0^2\zeta$, $A_n = A/2\gamma_0$, $B_n = 1 - B/2\gamma_0^2$.

Уравнения были проинтегрированы численно для моноэнергетического пучка с электронами, равномерно распределенными по фазам влета. Напряжение пучка задавалось равным $U = 1$ МэВ, КПД вычислялся по формуле

$$\eta = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \left[1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(A_n, B_n, \zeta_{nk}, \Phi_0) d\Phi_0 \right]. \quad (8)$$

Получившиеся зависимости η от параметров A_n , B_n и ζ_{nk} сходны с соответствующими зависимостями для ультрарелятивистского пучка (рис. 3, 4). С ростом амплитуды до $A_n = 0,5$ КПД увеличивается, а затем остается постоянным и равным 22,5% вплоть до $A_n = 1,2$. При дальнейшем росте амплитуды некоторые электроны в процессе взаимодействия с полем полностью теряют скорость. Для них уравнения (7) становятся некорректными, так как при их написании предполагалось выполненным условие синхронизма бегущей волны с пучком, которое, естественно, нарушается при сильном торможении электронов.

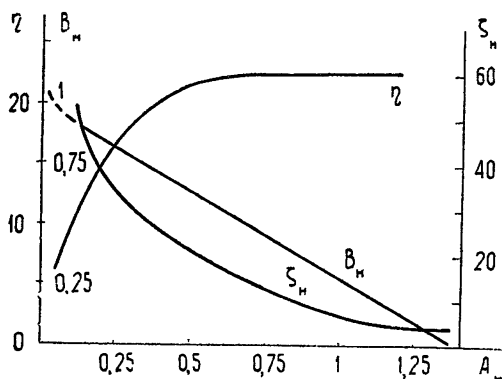


Рис. 3. Значения КПД и оптимальных параметров РМ в зависимости от амплитуды поля при напряжении пучка 1 МэВ.

При работе РМ в импульсном режиме возникает вопрос о возможности самовозбуждения его при заданном значении параметров. Для исследования такой возможности сравнивались значения стартовых токов [1] и рабочих токов, вычисленных на основе графиков $\eta(A_n)$, приведенных на рис. 4. В той области параметров, где рабочие токи больше стартовых ($I_p > I_{ст}$), возможно самовозбуждение при произвольном способе включения, если только отсутствует сложностехнический режим. При других значениях длины и амплитуды поля (при оптимальных значениях расстройки), когда $I_p < I_{ст}$ (эта область на рис. 4 заштрихована), режим возбуждения генератора жесткий и вопрос о возможности работы требует особого рассмотрения. Следует указать на то, что и здесь, по крайней мере вблизи границы этих областей, может быть выполнено обратное неравенство (т. е. I_p станет больше $I_{ст}$), если выбрать расстройку отличной от оптимальной.

Влияние немоноэнергетичности пучка на достижимые значения КПД можно оценить, воспользовавшись зависимостью $\eta(\gamma)$, приведенной на рис. 5. Эти кривые, полученные при значениях длины и амплитуды поля, оптимальных для моноэнергетического пучка напряжением 1 МэВ, позволяют определить, с каким КПД работает та или иная энерге-

тическая группа электронов. Ширина этих кривых на уровне 0,5 составляет 0,3 γ_0 .

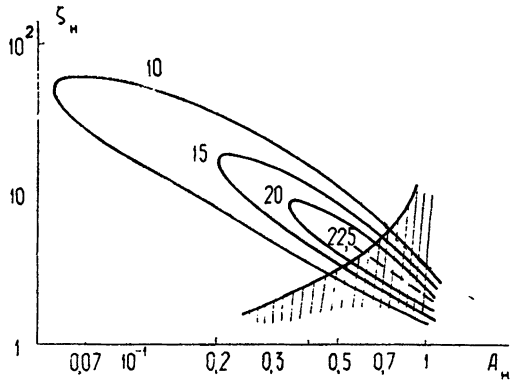


Рис. 4. Линии равного КПД на плоскости параметров, пропорциональных длине и амплитуде поля ($U = 1$ Мв). Область жесткого режима возбуждения ($I_p < I_{ст}$) заштрихована.

5. Таким образом, в режиме большого сигнала КПД РМ может превышать 20%. Прибор относительно мало чувствителен к качеству пучка. Самовозбуждение его происходит в широкой области параметров, в том числе и в оптимальном режиме. Отсутствие замедляющей системы или других конструктивных элементов с размерами порядка длины волны, наряду с возможностью освоения больших токов, делает РМ перспективным с точки зрения его практической реализации и использования для генерации импульсов мощного СВЧ излучения.

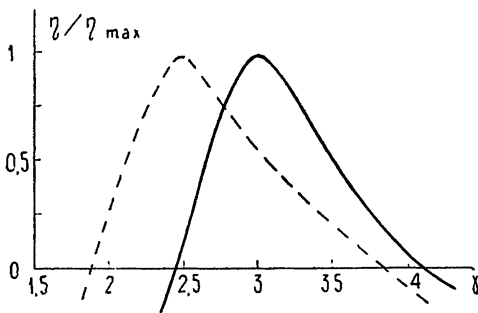


Рис. 5. Зависимость КПД от разброса электронов по энергиям (пунктир—линейная теория, сплошная кривая—численный расчет). Средняя энергия $\gamma = 3$.

Приношу благодарность В. К. Юлпатову за постоянное внимание к работе и М. И. Петелипу за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 13, № 12, 1784 (1970).
2. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 13, № 10, 1586 (1970).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию
16 марта 1972 г.

THE NONLINEAR THEORY OF A RELATIVISTIC MONOTRON

A. V. Smorgonskii

The maximum efficiency of the relativistic monotron (RM) is calculated on the basis of analysing the electron motion in the field of a strong electromagnetic wave. The optimal parameter values of the device and the admissible electron energy distribution are determined. It is shown that in the region of the parameter values at which the high efficiency is achieved the operating currents exceed the starting ones.