ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1973

УДК 530.145

ЗАРЯД В КВАНТОВАННОМ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

В. Г. Багров, П. В. Бозриков, Д. М. Гитман

Рассматривается движение электрона в поле вторично квантованной плоской электромагнитной волны, вектор-потенциал которой является оператором. Никаких других ограничений на волну не накладывается. Найдены точные решения уравнения Дирака и Клейна — Гордона, изучены их свойства и установлена их связь с решением Волкова.

Решение уравнения Дирака для электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной волны, найденное Волковым [1, 2], в настоящее время представляет особый физический интерес, так как с его помощью могут быть решены теоретически многие вопросы поведения электронов в мощных электромагнитных полях. Это решение изучалось и использовалось в большом числе работ (часть библиографии можно найти в [3, 4]). Однако в решении Волкова использовалось классическое представление электромагнитного поля и квантово-механически описан лишь электрон. В 1969 году появилась интересная работа Берсона [5], где впервые было показано, что может быть точно решена задача о движении электрона в поле квантованной электромагнитной волны в предположении, что последняя является монохроматической линейно поляризованной.

В данной работе найдено точное решение задачи о движении электрона в квантованной плоской электромагнитной волне в случае волны произвольного вида.

1. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА И КЛЕЙНА — ГОРДОНА ДЛЯ ЗАРЯДА В ПРОИЗВОЛЬНОМ КВАНТОВАННОМ СВОБОДНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Движение электрона во внешнем поле будем описывать уравнением Дирака, которое в случае произвольного свободного квантованного внешнего поля имеет вид*

$$(\gamma^{\mu} P_{\mu} - m)\Psi = 0, \quad P_{\mu} = i\partial_{\mu} - eA_{\mu}. \tag{1}$$

Уравнение Клейна — Гордона (частицу, движение которой описывается этим уравнением, будем называть бозоном) запишем в форме

$$(P^{\mu} P_{\mu} - m^2)\Psi = 0. \tag{2}$$

Оператор A_{μ} представляет собой следующее выражение (см. [6], стр. 27):

$$A_{\mu} = \sum_{\varkappa, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{V\varkappa}} \left[c(\varkappa, \lambda)\, e_{\mu}(\varkappa, \lambda)\, e^{-i(\varkappa x)} + c^{+}(\varkappa, \lambda)\, e^{+}_{\mu}(\varkappa, \lambda)\, e^{i(\varkappa x)} \right], \tag{3}$$

где V — нормировочный объем, $\varkappa^{\mu} = (\varkappa, \boldsymbol{\varkappa})$ — вектор энергии-импульса

* Мы используем обозначения и единицы, принятые в [6], причем матрицы Дирака γ^{μ} при конкретных расчетах выбираем в стандартном представлении.

фотона, $e_\mu(0, -\boldsymbol{e})$ — вектор поляризации фотона, λ принимает два значения (две возможные поляризации), c^+, c — операторы рождения и уничтожения фотонов соответственно.

Если (3) описывает свободное поперечное электромагнитное поле, то, при выполнении условия Лоренца, имеют место соотношения: $\delta_{\lambda\lambda'} = e^+_\mu(\varkappa, \lambda)\, e^\mu(\varkappa, \lambda')$, $\varkappa_\mu \varkappa^\mu = e_\mu(\varkappa, \lambda)\, \varkappa^\mu = 0$.

Рассмотрим операторы G_μ полного 4-импульса системы частица + фотоны:

$$G_\mu = i\partial_\mu + \sum_{\varkappa, \lambda} \varkappa_\mu N(\varkappa, \lambda), \quad N(\varkappa, \lambda) = c^+(\varkappa, \lambda)\, c(\varkappa, \lambda).$$

Легко установить, что $[G_\mu P_\nu] = 0$ и, следовательно, полная производная от G_μ по времени равна нулю, т. е. полный 4-импульс системы сохраняется, что очевидно физически. Таким образом, волновую функцию, помимо (1) или (2), можно подчинить дополнительным уравнениям

$$G_\mu \Psi = q_\mu \Psi, \tag{4}$$

где q_μ — собственные числа операторов G_μ.

Совместное решение уравнений (1) и (4) ищем в виде

$$\Psi = U_1 \Phi,$$

где унитарный оператор U_1 выберем в форме

$$U_1 = \exp\Big[i \sum_{\varkappa, \lambda} (\varkappa x)\, N(\varkappa, \lambda)\Big].$$

Уравнения (4) при этом перепишутся в виде

$$i\partial_\mu \Phi = q_\mu \Phi,$$

и их решение находится без труда:

$$\Phi = \exp[-i(qx)]\, \psi, \quad \Psi = \exp[-i(qx)]\, U_1 \psi. \tag{5}$$

Функция ψ зависит лишь от переменных, на которые действуют операторы c, c^+. Таким образом, в случае свободного электромагнитного поля переменные x^μ всегда отделяются, ψ удовлетворяет уравнению, получающемуся из (1) после подстановки (5) с последующим умножением слева на $U_1^+ \exp[i(qx)]$:

$$\begin{gathered}(\gamma^\mu \tilde{P}_\mu - m)\psi = 0, \quad \tilde{P}_\mu = q_\mu - \sum_{\varkappa, \lambda} \varkappa_\mu N(\varkappa, \lambda) - \varepsilon Q_\mu, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} e, \\ Q_\mu = \sum_{\varkappa, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi e^2}{V\varkappa}}\, [c(\varkappa, \lambda)\, e_\mu(\varkappa, \lambda) + c^+(\varkappa, \lambda)\, e^+_\mu(\varkappa, \lambda)].\end{gathered} \tag{6}$$

Решение уравнения (2) для бозона запишем в виде

$$\Psi = \exp[-i(qx)]\, U_1 F, \quad (\tilde{P}_\mu \tilde{P}^\mu - m^2) F = 0. \tag{7}$$

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА И ДИРАКА ДЛЯ ЗАРЯДА В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Будем теперь считать волну плоской. В этом случае $\varkappa^\mu = \varkappa n^\mu$, где n^μ — вектор, не зависящий от $\varkappa$ и обладающий следующими свойствами: $n^\mu = (1, \boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$, $n^2 = n_\mu n^\mu = n^\mu e_\mu = n^\mu e^+_\mu = 0$. Различные $\varkappa$ можно теперь перечислять, например, в порядке возрастания и занумеровать одним индексом ($\varkappa \to \varkappa_k$). Считая, в частности, что волна периодична в кубе объемом V, можно положить $\varkappa_k = \varkappa_0 k$, $\varkappa_0 = 2\pi V^{-1/3}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

Рассмотрим сначала решение для бозона. Нетрудно установить, что в случае плоской волны, помимо G_μ, сохраняется также величина Rn^μ:

$$R = \sum_{k,\lambda} \varkappa_k N(k, \lambda) + \frac{e(qA)}{(nq)} - \frac{e^2 A^2}{2(nq)}. \tag{8}$$

Если исключить взаимодействие между зарядом и фотоном (т. е. положить $e = 0$), то оператор Rn^μ представляет собой энергию-импульс фотонов. Следовательно, в общем случае это оператор энергии-импульса фотонов, взаимодействующих с зарядом. Волновую функцию бозона можно выбрать в качестве собственной функции оператора R. Если обозначить

$$q_\mu = p_\mu + Rn_\mu, \tag{9}$$

где уже R — собственные числа* оператора (8), и учесть равенство $(nq) = (np)$, то для функции F из (7) можно получить уравнение

$$\left[\sum_{k,\lambda} \varkappa_k N(k, \lambda) + \varepsilon \frac{(pQ)}{(np)} - \frac{Q^2}{2(np)} - R\right] F = 0. \tag{10}$$

Уравнение (7) при этом сведется к алгебраическому

$$p^2 = m^2. \tag{11}$$

Исходя из (9) и (11), видим, что p^μ имеет смысл энергии-имульса заряда, взаимодействующего с фотоном.

Таким образом, решение уравнения (2) свели к решению уравнения (10). Оказывается, что и решение уравнения Дирака (1) также сводится к решению уравнения (10). Покажем это.

В случае плоской волны для уравнения Дирака сохраняется оператор $\tilde{R}n^\mu$:

$$\tilde{R} = \sum_{k,\lambda} \varkappa_k N(k, \lambda) + \frac{e(qA)}{(nq)} - \frac{e^2 A^2}{2(nq)} - \frac{ie}{4(nq)} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Полагая в (5) $\psi = U_2 \chi$, где оператор U_2 выбран в виде

$$U_2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2(nq)} \hat{n} \hat{Q}, \quad U_2^{-1} = \gamma^0 U_2^+ \gamma^0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2(nq)} \hat{n} \hat{Q},$$

и требуя, чтобы Ψ была собственной функцией оператора $\tilde{R}$, найдем что χ удовлетворяет уравнению (10), а уравнение Дирака (1) сводится в этом случае к алгебраической системе уравнений

$$[\hat{q} - \hat{n}(R + a\gamma^5) - m]\chi = 0. \tag{12}$$

При выводе уравнения (12) были использованы свойства

$$\hat{Q}\hat{Q} = Q^2 + \sum_{k,\lambda} \frac{2\pi e^2}{V \varkappa_k}(1 + \hat{e}\hat{e}^+), \quad \hat{n}(1 + \hat{e}\hat{e}^+) = -i\hat{n}\gamma^5 (n[ee^+])$$

* Мы впредь не будем использовать оператор (8), и такое обозначение не вызовет недоразумений.

и введено обозначение

$$a = i \sum_{k,\lambda} \frac{\pi e^2}{(nq)V\varkappa_k}(n\,[ee^+]). \tag{13}$$

Из (12) следует, что спинор χ следует выбрать в виде $\chi = Fu$, где F — функция, удовлетворяющая уравнению (10), а u — удовлетворяет уравнению (12) и является постоянным спинором. Связь величины q с R определяется из условия равенства нулю определителя системы (12).

Подсчитывая этот определитель, найдем

$$[(q - nR - na)^2 - m^2][(q - nR + na)^2 - m^2] = 0.$$

Отсюда вытекает, что система (12) имеет решение при условии либо $q = p + nR + na$, либо $q = p + nR - na$, причем в обоих случаях $p^2 = m^2$, $(nq) = (np)$. Если еще учесть легко проверяемое соотношение

$$U_1 U_2 = \left(1 + \frac{e}{2(np)}\hat{n}\hat{A}\right) U_1,$$

то итогом наших рассуждений будет следующее. Уравнение Клейна—Гордона имеет решение вида

$$\Psi = \exp\,[-i(qx)]\, U_1 F, \quad q = p + nR, \quad p^2 = m^2,$$

уравнение Дирака —

$$\Psi = \exp\,[-i(qx)]\left(1 + \frac{e}{2(np)}\hat{n}\hat{A}\right) U_1 Fu,$$

$$q = p + n(R + \zeta a), \quad p^2 = m^2, \quad \zeta = \pm 1,$$

где функция F является решением уравнения (10), а оператор U_1 равен $U_1 = \exp\,[i(nx)\sum_{k,\lambda}\varkappa_k N(k,\lambda)]$. Спинор u постоянен и удовлетворяет алгебраической системе уравнений

$$[\hat{p} - m + a\hat{n}(\zeta - \gamma^5)]\,u = 0, \tag{14}$$

величина a определена выражением (13).

Исследуем сначала систему (14). Как следует из (13) и из замечания в [6] на стр. 42, величина a связана со степенью круговой поляризации волны и определяется параметрами Стокса $\xi_2(k,\lambda)$:

$$a = \sum_{k,\lambda} \frac{\pi e^2 \xi_2(k,\lambda)}{(np)V\varkappa_k}.$$

По общей идеологии квантовой электродинамики сумма распространяется на все k, λ и в этом случае $a = 0$, так как

$$\xi_2(k,\lambda) = -\xi_2(k,\lambda'), \quad \lambda \neq \lambda'.$$

Следовательно, спинор u удовлетворяет свободному уравнению Дирака $(\hat{p} - m)\,u = 0$. Общее решение этого уравнения можно выбрать в форме, предложенной в [7],

$$u = (\hat{p} + m)\,\hat{n}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где v — произвольный постоянный двухкомпонентный спинор, 0 — нулевой двухкомпонентный спинор.

Как показано в [8], спинор v можно выбрать так, чтобы волновая функция описывала электрон с ориентированным спином. Однако можно было считать, что в сумме по k, λ присутствуют лишь некоторые члены (в работе [5] сумма сводится к одному члену), причем в этом случае может быть $a \neq 0$. Тогда решение уравнения (14) отличается своеобразием. Несложное исследование приводит к выводу, что при $a \neq 0$ решение (14) возможно, если u удовлетворяет двум уравнениям

$$(\hat{p} - m) u = 0, \quad \hat{n}(\zeta - \gamma^5) u = 0.$$

Общее решение первого дается формулой (15), подстановка которой во второе приводит к уравнению для спинора $(\boldsymbol{\sigma n}) v = \zeta v$. Как показано в [8], последнее соответствует тому, что спин электрона ориентирован по направлению волны (при $\zeta = 1$ спин направлен по $\boldsymbol{n}$, при $\zeta = -1$ — против $\boldsymbol{n}$).

Хотя такой результат возникает лишь при приближенном рассмотрении (учитываются не все члены суммы по k, λ), он интересен физически — возникает корреляция между спином фотонов и электрона. Впрочем, этот результат может рассматриваться и как предостережение: не всякое приближение в квантовой электродинамике хорошо. В частности, если бы в [5] рассматривался фотон круговой (а не линейной!) поляризации, то Берсон встретился бы с определенными трудностями (он не получил бы формулы (19) из [5], хотя решение уравнения Дирака методом Берсона в этом случае также возможно). Далее мы полагаем $a = 0$.

Подсчитаем плотность тока электронов:

$$j^{\mu} = \overline{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi = \frac{u^{+} u}{p_0} F^{+} \left[p^{\mu} - \varepsilon Q^{\mu} + \frac{n^{\mu}}{2(np)} (2 \varepsilon (pQ) - Q^2) \right] F. \tag{16}$$

Как видим, это выражение аналогично соответствующему выражению в квантовой механике (см. [6], стр. 172).

Если нормировать F на единицу, то волновая функция бозона также будет нормирована на единицу. Волновая функция электрона будет нормирована на единицу при условии

$$u^{+} u = \left[1 - \frac{\overline{Q^2} - 2 \varepsilon (p \overline{Q})}{2 p_0 (np)} \right]^{-1}, \quad u^{+} u = 4 p_0 (np) v^{+} v, \tag{17}$$

которое получается из (16) при $\mu = 0$ ($\overline{Q^2}$ — среднее значение оператора Q^2 по функциям F).

Приступим теперь к решению основного уравнения (10). Выберем, следуя [5], «координатное» представление операторов c, c^{+}:

$$c(\boldsymbol{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_{\boldsymbol{k}, \lambda} + \frac{\partial}{\partial \xi_{\boldsymbol{k}, \lambda}} \right), \quad c^{+}(\boldsymbol{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_{\boldsymbol{k}, \lambda} - \frac{\partial}{\partial \xi_{\boldsymbol{k}, \lambda}} \right),$$

$$N(\boldsymbol{k}, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\xi^2_{\boldsymbol{k}, \lambda} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2_{\boldsymbol{k}, \lambda}} - 1 \right).$$

Разложим волну по компонентам линейной поляризации, а векторы поляризации выберем вещественными, не зависящими от $\boldsymbol{k}$ (это, как известно [6], не уменьшает общности рассмотрения). При этом из (13) следует, что $a = 0$ без всяких дополнительных условий,

$$e^{\mu}(k,1)=(0,e_1),\quad e^{\mu}(k,2)=(0,e_2),\quad e_\lambda^{+}=e_\lambda,\quad (e_\lambda e_{\lambda'})=\delta_{\lambda,\lambda'},\ (ne_\lambda)=0,$$
$$Q^{\mu}=(0,Q),\quad Q=\sum_{k,\lambda}\sqrt{\frac{\delta(np)}{\varkappa_k}}\,\xi_{k,\lambda}\,e_\lambda,\quad \delta=\frac{4\pi e^2}{(np)V}. \tag{18}$$

Уравнение (10) принимает вид

$$\Big\{\sum_{k,\lambda}\left[\frac{\varkappa_k}{2}\left(\xi^2_{k,\lambda}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2_{k,\lambda}}-1\right)-\varepsilon\,p_\lambda\,\xi_{k,\lambda}\sqrt{\frac{\delta}{\varkappa_k(np)}}\right]+$$
$$+\frac{\delta}{2}\sum_{k,s,\lambda}\frac{\xi_{k,\lambda}\,\xi_{s,\lambda}}{\sqrt{\varkappa_k\varkappa_s}}-R\Big\}F=0,\quad p_\lambda=(pe_\lambda).$$

Методика решения этого уравнения состоит в нахождении такой замены переменных ξ, после которой переменные разделились бы. Заменив сначала $\xi_{k,\lambda}=\sqrt{\varkappa_k}\,y_{k,\lambda}$, получим

$$\left[\frac{1}{2}\sum_{k,l,\lambda}a_{kl}\,y_{k,\lambda}\,y_{l,\lambda}-\frac{1}{2}\sum_{k,\lambda}\frac{\partial^2}{\partial y^2_{k,\lambda}}-\sum_k\varkappa_k-\varepsilon\sqrt{\frac{\delta}{(np)}}\sum_{k,\lambda}p_\lambda\,y_{k,\lambda}-R\right]F=0,$$
$$a_{kl}=\varkappa_k^2\,\delta_{lk}+\delta.$$

Теперь ясно, что следует провести преобразование $y_{k,\lambda}=\sum\limits_l\alpha_{kl}\,\eta_{l,\lambda}$, где α_{kl} — ортогональная матрица, диагонализующее форму $\sum\limits_{k,l,\lambda}a_{kl}\,y_{k,\lambda}\,y_{l,\lambda}$. При ортогональном преобразовании форма $\sum\limits_{k,\lambda}\frac{\partial^2}{\partial y^2_{k,\lambda}}$ остается диагональной. Известно, что такая ортогональная матрица существует и определяется из уравнения (см. [9], стр. 250)

$$\sum_j a_{ij}\,\alpha_{jk}=r_k^2\,\alpha_{ik}, \tag{19}$$

где через r_k^2 обозначены собственные числа матрицы a_{ij} (легко видеть из структуры a_{ij}, что все ее собственные числа положительны), индекс k нумерует собственные числа r_k в порядке возрастания.

Уравнения (19) могут быть записаны так:

$$\left(\varkappa_i^2-r_k^2\right)\alpha_{ik}+\delta\,S_k=0,\quad S_k=\sum_i\alpha_{ik}. \tag{20}$$

Отсюда имеем

$$\alpha_{ik}=\delta\,S_k\left(r_k^2-\varkappa_i^2\right)^{-1}.$$

Поскольку α_{ik} — ортогональная матрица, то

$$\sum_i\alpha_{ik}^2=1=\delta^2S_k^2\sum_i\left(r_k^2-\varkappa_i^2\right)^{-2}.$$

Далее находим окончательно явный вид α_{ik}:

$$\alpha_{ik}=\left(r_k^2-\varkappa_i^2\right)^{-1}\left[\sum_j\left(r_k^2-\varkappa_j^2\right)^{-2}\right]^{-1/2}. \tag{21}$$

Подставляя (21) в исходное уравнение (20), получим уравнение для определения чисел r_k:

$$\sum_l \left(r_k^2 - \varkappa_l^2\right)^{-1} = \delta^{-1}. \tag{22}$$

Из (21) с учетом (22) элементарно проверяем ортогональность:

$$\sum_l \alpha_{ik}\,\alpha_{ij} = \delta_{kj}\,.$$

То обстоятельство, что вид матрицы преобразования (21) (вообще говоря, бесконечной!) и уравнение для собственных чисел (22) могут быть выписаны в явном виде, представляется далеко не тривиальным.

Непосредственное вычисление дает два следующих полезных соотношения:

$$a_{ij}^{-1} = \varkappa_i^{-2}\,\delta_{ij} - \varkappa_i^{-2}\varkappa_j^{-2}(1+\nu\delta)^{-1}\,\delta, \qquad \sum_k r_k^{-2} S_k^2 = \nu(1+\nu\delta)^{-1}$$

$$\left(\nu = \sum_l \varkappa_l^{-2}\right).$$

Отметим, что величина δ пропорциональна постоянной тонкой структуры e^2, и решение уравнения (22) можно искать в виде ряда по δ. Первые члены этого ряда имеют вид

$$r_k^2 = \varkappa_k^2 + \delta + \delta^2 \sum_{s\neq k} \left(\varkappa_k^2 - \varkappa_s^2\right)^{-1} + \ldots \tag{23}$$

Для α_{ik} с точностью до членов, линейных по δ, из (21) с учетом (23) следует

$$\alpha_{ii} = 1, \quad \alpha_{ik} = \delta\left(\varkappa_k^2 - \varkappa_i^2\right)^{-1} \quad (i \neq k). \tag{24}$$

Если волна периодична ($\varkappa_k = \varkappa_0 k$), то некоторые выражения можно упростить. Вводя обозначения

$$\gamma = \frac{\pi^2\delta}{2\varkappa_0^2} = \frac{e^2\varkappa_0}{4(np)}, \qquad \rho_k = \frac{\pi r_k}{\varkappa_0}$$

и учитывая известную сумму (см. [10], формула 1.421.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^2 - n^2 a^2)^{-1} = \frac{\pi^2}{2a^2}\left(\frac{\pi x}{a}\right)^{-2}\left(\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{a} - 1\right),$$

получим, что уравнение (22) переходит в трансцендентное уравнение для ρ_k:

$$\mathrm{tg}\,\rho_k = \frac{\gamma\rho_k}{\rho_k^2 + \gamma}.$$

Кроме того,

$$\alpha_{ik} = \frac{2\gamma\rho_k(\gamma^2 + 3\gamma + \rho_k^2)^{-1/2}}{\rho_k^2 - \pi^2 i^2}, \qquad \nu = \sum_k \varkappa_k^{-2} = \frac{\pi^2}{6\varkappa_0^2},$$

$$S_k = \rho_k(\gamma^2 + 3\gamma + \rho_k^2)^{-1/2}, \quad \nu\delta = \gamma/3.$$

Вместо (23) получаем $r_k^2 = \varkappa_k^2 + \delta - \dfrac{3}{4\varkappa_k^2}\delta^2 + \ldots$

Если сделать еще одну замену

$$\eta_{k,\lambda} = r_k^{-1/2} x_{k,\lambda} + \varepsilon\, r_k^{-2}\, v_\lambda\, S_k \sqrt{\frac{\delta}{(np)}},$$

то окончательно уравнение (10) приведем к виду

$$\left[\frac{1}{2}\sum_{k,\lambda} r_k\left(x^2_{k,\lambda}-\frac{\partial^2}{\partial x^2_{k,\lambda}}-1\right)-R'\right]F=0,\quad R'=R-\Omega_1+\Omega_2,$$
$$\Omega_1=\sum_k (r_k-\varkappa_k),\qquad \Omega_2=\frac{\nu\delta p^2_\perp}{2(np)(1+\nu\delta)},\quad p^2_\perp=\sum_\lambda p^2_\lambda. \tag{25}$$

Переменные $\xi_{k,\lambda}$ и $x_{k,\lambda}$ связаны соотношениями

$$x_{k,\lambda}=\sum_l\sqrt{\frac{r_k}{\varkappa_l}}\,a_{lk}\,\xi_{l,\lambda}-\varepsilon p_\lambda S_k\sqrt{\frac{\delta}{(np)r^3_k}},$$
$$\xi_{l,\lambda}=\sum_k\sqrt{\frac{\varkappa_l}{r_k}}\,a_{lk}\,x_{k,\lambda}+\frac{\varepsilon p_\lambda}{(1+\nu\delta)}\sqrt{\frac{\delta}{(np)\varkappa^3_l}}. \tag{26}$$

Нормированное на единицу решение уравнения (25) выражается через функции Эрмита [10]

$$F=\left(\prod_k\frac{r_k}{\varkappa_k}\right)^{1/2}\prod_{l,\lambda}U_{N_{l,\lambda}}(x_{l,\lambda}),\quad U_n(x)=\left(\sqrt{\pi}\,2^n n!\right)^{-1/2}\times$$
$$\times H_n(x)\exp(-x^2/2), \tag{27}$$

где $N_{l,\lambda}$ — целые числа (числа заполнения фотонов).

Для собственных значений R имеем формулу

$$R=\sum_{k,\lambda}r_k N_{k,\lambda}+\Omega_1-\Omega_2. \tag{28}$$

Таким образом, решение поставленной задачи найдено.

Сейчас несложно, например, найти по функциям (27):

$$-\overline{Q^2}=\delta(np)\sum_{k,\lambda}r_k^{-1}S^2_k\left(N_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\nu\delta p_\perp}{1+\nu\delta}\right)^2,\qquad \overline{Q}=\frac{\nu\delta p_\perp}{1+\nu\delta}.$$

Для периодической волны

$$-\overline{Q^2}=2\varkappa_0(np)\pi^{-2}\sum_{k,\lambda}\rho_k\left(N_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right)(\gamma^2+3\gamma+\rho^2_k)^{-1}+\left(\frac{\gamma p_\perp}{3+\gamma}\right)^2.$$

Вообще говоря, следовало бы раскрыть еще действие оператора U_1 на функцию F. Однако при конкретных расчетах (например, при вычислениях различных матричных элементов) гораздо удобнее не делать этого, а при необходимости записать в явном виде интегральное представление для U_1F, воспользовавшись общим правилом:

$$\exp\left[\sum_k\beta_k N(k)\right]f(\xi)=$$
$$=\int f(x)\prod_l\left[\pi(1-a^2_l)\right]^{-1/2}\exp\left[\frac{4x_l a_l\xi_l-(x^2_l+\xi^2_l)(1+a^2_l)}{2(1-a^2_l)}\right]dx_l \tag{29}$$
$$(a_l=\exp\beta_l),$$

β_l — постоянные (относительно ξ). Это соотношение несложно получить с помощью формулы Мёллера. Запись интегрального представления (29) столь громоздка, что мы ее не приводим.

В заключение этого раздела отметим, что в частном случае монохроматической волны, когда в суммах присутствует лишь один член, получаются, естественно, результаты работы [5].

3. КРАТКОЕ ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

С физической точки зрения наиболее важным нам представляется следующий вывод. Диагонализуя путем преобразования (26) уравнение (10), мы вводим вместо фотонов, взаимодействующих с частицей, новые частицы (назовем их «квазифотонами»), уже не взаимодействующие друг с другом. Таким образом, система заряд + взаимодействующие с ним фотоны плоской волны эквивалентна системе из невзаимодействующих квазифотонов. Если «выключить» взаимодействие электрона с фотоном ($e = 0$), то, очевидно, волновые функции системы перейдут в произведение функций свободного электрона и свободных фотонов. При этом p^μ является вектором энергии-импульса электрона, а Rn^μ —свободных фотонов. С учетом взаимодействия p^μ представляет собой аналог соответствующего вектора в квантовой механике (см. [6], стр. 172). Частоты квазифотонов r_k не совпадают с частотами фотонов $\varkappa_k$ и зависят как от $\varkappa_k$, так и от параметров частицы (от p^μ).

Величина R не содержит нулевой энергии типа $\frac{1}{2}\sum_k \varkappa_k$. Это достигнуто за счет соответствующего выбора вида оператора U_1 (наш оператор отличается от примененного в [5] на величину нулевой энергии). Однако все же R содержит расходящееся (при бесконечном числе k) выражение Ω_1. Действительно, например, в случае периодической волны при больших k имеем

$$r_k \approx \varkappa_0 k + \frac{\varkappa_0 \gamma}{\pi^2 k} + O(k^{-2}),$$

откуда следует, что $\Omega_1 \approx \frac{\varkappa_0 \gamma}{\pi^2} \sum_k \frac{1}{k}$ содержит логарифмическую расходимость, типичную для квантовой электродинамики. Такую же расходимость содержит и $\overline{Q^2}$, а следовательно, и условие нормировки (17). При любом конечном числе k этих расходимостей нет, т. е. они появляются лишь при учете взаимодействия электрона с бесконечным числом фотонов.

Если все числа заполнения $N_{l,\lambda}$ положить равными нулю, получим волновую функцию электрона, взаимодействующего с электромагнитным вакуумом (точнее, с его частью, учтенной плоской волной).

4. СВЯЗЬ С РЕШЕНИЕМ ВОЛКОВА

В [5] было показано, что решение Волкова получается построением когерентного состояния и последующим переходом к пределу $V \to \infty$. Это справедливо и в нашем случае, однако доказательство такого факта более сложно, чем в [5]. Рассмотрим соответствующее построение для бозона, так как после этого построение функции Волкова для электрона не вызывает затруднений.

Построим когерентное состояние

$$\Psi^{\text{ког}} = \sum_{N_{k,\lambda}} \prod_{k,\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}|z_{k,\lambda}|^2\right) (N_{k,\lambda}!)^{-1/2} z_{k,\lambda}^{N_{k,\lambda}} \Psi_{N_{k,\lambda}}(\xi),$$

где $\Psi_{N_{k,\lambda}}$ — волновая функция бозона, равная

$$\Psi_{N_k,\lambda} = \exp[-i(px)]\, U_1 \exp[-iR(nx)] \prod_{k,\lambda} \left(\frac{r_k}{\varkappa_k}\right)^{1/2} U_{N_k,\lambda}(x_k,\lambda),$$

$z_{k,\lambda}$ — произвольные комплексные числа.

Учитывая свойства полиномов Эрмита [10], формулу (29), где следует положить $a_k = \exp[i\varkappa_k(nx)]$, и выражение (28), получим

$$\Psi^{\text{ког}} = De^{-iWx} \int e^M \prod_{l,\lambda} dy_{l,\lambda}, \quad D = \prod_k \frac{r_k^{1/2}}{\pi\sqrt{\pi}\,\varkappa_k^{1/2}(1-a_k^2)},$$

$$M = -\sum_{l,j,\lambda} b_{lj}\, y_{l,\lambda}\, y_{j,\lambda} + \sum_{l,\lambda} c_{l,\lambda}\, y_{l,\lambda} - d,$$

$$b_{lj} = \frac{1}{2}\,\frac{1+a_l^2}{1-a_l^2}\,\delta_{lj} + \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{lk}\alpha_{jk}\frac{r_k}{\sqrt{\varkappa_l\varkappa_j}},$$

$$c_{l,\lambda} = \sum_k \left[\sqrt{\frac{2r_k}{\varkappa_l}}\,\alpha_{lk}\, z'_{k,\lambda} + \varepsilon r_k^{-1} S_k p_\lambda \alpha_{lk}\sqrt{\frac{\delta}{(np)\varkappa_l}}\right] + \frac{2a_l\xi_{l,\lambda}}{1-a_l^2},$$

$$d = \frac{1}{2}\sum_{l,\lambda}\left[\frac{1+a_l^2}{1-a_l^2}\xi_{l,\lambda}^2 + z'^2_{l,\lambda} + |z'_{l,\lambda}|^2 + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon S_l z'_{l,\lambda}\, p_\lambda \sqrt{\frac{2\delta}{(np)r_l^3}} + \frac{\delta S_l^2 p_\lambda^2}{(np)r_l^3}\right],$$

$$z'_{k,\lambda} = z_{k,\lambda}\exp(-ir_k(nx)), \quad W = p - n(\Omega_1 - \Omega_2).$$

Следовательно, нахождение когерентного состояния свелось к вычислению интегралов вида

$$J = \int \exp\left(-\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) \prod_i dx_i.$$

Матрица b_{ij} такова, что ее вещественная часть определяет положительную квадратичную форму, что необходимо и достаточно для существования интеграла J.

Отмечая, что две вещественные квадратичные формы, одна из которых положительно определенная, всегда можно некоторым вещественным преобразованием привести одновременно к диагональному виду (см. [9], стр. 254), и используя свойства этого преобразования, найдем

$$J = \left(\frac{\pi^n}{\det b_{ij}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{1}{4}\sum_{i,j} c_i\, b_{ij}^{-1} c_j\right).$$

Определение $\Psi^{\text{ког}}$ сводится к нахождению обратной матрицы b_{ij}^{-1}. После нахождения когерентного состояния следует перейти к пределу $V \to \infty$, $z_{k,\lambda} \to \infty$, причем так, что $z_{k,\lambda} V^{-1/2}$ остаются постоянными. Очевидно, что такой предельный переход эквивалентен пределу $\delta \to 0$, $z_{k,\lambda} \to \infty$, $\sqrt{\delta}\, z_{k,\lambda}$ — постоянные. Из вида b_{ij} и $c_{l,\lambda}$ следует, что ненулевой вклад в пределе могут внести лишь члены не выше первой степени по δ. Таким образом, достаточно найти b_{ij}^{-1} и $c_{l,\lambda}$ приближенно, с точностью до членов $\sim\delta$. А это, используя (23) и (24), можно сделать в явном виде.

Следует также учесть, что полученная в результате предельного перехода функция заметно отличается от нуля лишь в точках $\xi_{k\,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_{k,\,\lambda} + z^{+}_{k,\,\lambda})$. После простых, но громоздких вычислений найдем

$$\Psi^{\text{ког}}_{V\to\infty} = e^{-iS} \prod_{k,\,\lambda} f(\xi_{k,\,\lambda};\; z_{k,\,\lambda}), \tag{30}$$

где

$$S = (px) + \frac{\delta}{2} \sum_{k,\,\lambda} \frac{|z_{k,\,\lambda}|^2}{\varkappa_k}(nx) -$$

$$- i\varepsilon \sqrt{\frac{\delta}{2(np)}} \sum_{k,\,\lambda} \varkappa_k^{-3/2} p_\lambda \left[z_{k,\,\lambda} \exp(-i\varkappa_k(nx)) - z^{+}_{k,\,\lambda} \exp(i\varkappa_k(nx))\right] +$$

$$+ \frac{i\delta}{4} \sum_{k,\,j,\,\lambda} \frac{z_{k,\,\lambda} z_{j,\,\lambda} \exp[-i(\varkappa_k + \varkappa_j)(nx)] - z^{+}_{k,\,\lambda} z^{+}_{j,\,\lambda} \exp[i(\varkappa_k + \varkappa_j)(nx)]}{\sqrt{\varkappa_k \varkappa_j}\,(\varkappa_k + \varkappa_j)} +$$

$$+ \frac{i\delta}{2} \sum_{\substack{k,\,j,\,\lambda \\ k \neq j}} \frac{z_{k,\,\lambda} z^{+}_{j,\,\lambda}}{\sqrt{\varkappa_k \varkappa_j}(\varkappa_k - \varkappa_j)} \exp[i(\varkappa_j - \varkappa_k)(nx)].$$

Функция $f(\xi, z) = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 + \sqrt{2}\,z\xi - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}|z|^2\right)$ представляет собой нормированную функцию основного состояния осциллятора с центром в точке $\frac{1}{\sqrt{2}}(z+z^{+})$ и средним импульсом $\frac{i}{\sqrt{2}}(z^{+} - z)$.

Прямой проверкой можно убедиться, что S можно свернуть в замкнутую форму:

$$S = (px) + \int \left[\frac{e}{(np)}(pA_{\text{кл}}) - \frac{e^2}{2(np)} A^2_{\text{кл}}\right] d(nx),$$

где $A_{\text{кл}}$ — классический потенциал,

$$A^{\mu}_{\text{кл}} = (0, \mathbf{A}_{\text{кл}}),\; \mathbf{A}_{\text{кл}} = \sum_{k,\,\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{V\varkappa_k}} \left[z_{k,\,\lambda} \exp(-i\varkappa_k(nx)) +\right.$$

$$\left. + z^{+}_{k,\,\lambda} \exp(i\varkappa_k(nx))\right] \mathbf{e}_\lambda,$$

плоской электромагнитной волны произвольного вида, разложенной по волнам линейной поляризации. Следовательно, функция (30) представляет собой решение Волкова для бозона (см. [8]).

Действуя на (30) слева оператором $1 + \frac{e}{2(np)}\hat{n}\hat{A}$ и учитывая при этом свойства

$$cf = zf,\quad c^{+}f = \left[z^{+} + \sqrt{2}\left(\xi - \frac{z + z^{+}}{\sqrt{2}}\right)\right] f \approx z^{+} f,$$

умножая справа (30) на постоянный спинор u, определяемый формулой (15), получим предельное когерентное состояние для электрона, совпадающее с решением Волкова (см. [6], стр. 171). Отметим при этом, что в условии (17) $\overline{Q^2} \to 0$ при $V \to \infty$. Следовательно, с точки зрения квантовой электродинамики решение Волкова является особого рода предельным когерентным состоянием.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. M. Volkov, Zs. Phys., **94**, 250 (1935).
2. Д. М. Волков, ЖЭТФ, 7, 1286 (1937).
3. H. R. Reiss, J. H. Eberly, Phys. Rev., **151**, 1058 (1966).
4. F. Ehlotzky, Zs. Phys., **203**, 119 (1967).
5. И. Берсон, ЖЭТФ, **56**, 1627 (1969).
6. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Релятивистская квантовая теория, ч. 1, изд. Наука, М., 1968.
7. И. И. Гольдман, ЖЭТФ, **46**, 1412 (1964).
8. I. M. Ternov, V. G. Bagrov, A. M. Khapaev, Ann. Phys., **22**, 25 (1968).
9. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1954.
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.

Томский политехнический институт

Поступила в редакцию
25 января 1972 г.

THE CHARGE IN A QUANTUM FIELD OF A PLANE WAVE

V. G. Bagrov, P. V. Bozrikov, D. M. Gitman

The motion is considered of an electron in the field of a secondarily quantized plane electromagnetic wave the vector-potential of which is an operator. No other limitations on the wave are imposed. Exact solutions of Dyrack and Klain-Gordon equations are found, their properties are studied and their relation with Volkov's solution is established.