ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1973*

УДК 621.396 628 : 523.164

К ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ШУМОВОГО РАДИОИСТОЧНИКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРФЕРОМЕТРА С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

В. В. Сазонов, В. В. Караваев

Среди средств радиоастрономических исследований важное место занимают радиоинтерферометры. Основным их преимуществом по сравнению с непрерывными системами является высокая разрешающая способность, обусловленная использованием большой длины базы D. Однако это преимущество в значительной степени подавляется за счет присущей радиоинтерферометрам угловой неоднозначности, период которой, как известно, равен λ/D. Один из путей преодоления этой неоднозначности состоит в том, что в устройстве обработки когерентно складываются интерференционные картины, соответствующие разным величинам базы D. Для этого в простейшем случае одна из позиций интерферометра остается неподвижной, а вторая последовательно занимает ряд фиксированных положений в узлах некоторой пространственной плоской решетки. Такого рода процедура носит название синтеза Райла [1]. Подавление угловой неоднозначности осуществляется за счет того, что для истинного углового положения источника сложение всех интерференционных картин происходит с одной и той же фазой, а для других угловых положений, вследствие отличия периодов, — сложение интерференционных картин с различными фазами, благодаря чему суммарный выходной эффект уменьшается. При дискретном синтезе Райла полного подавления неоднозначности не происходит, а достигается лишь увеличение ее периода до значения λ/Δ, где Δ — шаг решетки. Очевидно, полностью избавиться от неоднозначности можно, устремляя Δ к нулю, т. е. переходя к непрерывному движению приемника. В последнем случае мы приходим к радиоинтерферометру с синтезированной апертурой.

Синтезированная апертура, естественно, обладает направленностью только в тех плоскостях, для которых отлична от нуля проекция траектории двужущегося приемника. Для того, чтобы получить одновременно направленность в двух перпендикулярных плоскостях, необходимо, чтобы эта траектория была криволинейной. На практике, например, для синтезирования в одном измерении используется естественное вращение Земли, а в перпендикулярном измерении синтезирование достигается установкой приемника на движущейся тележке. Заметим, что синтезированная апертура, подобно обычной антенне с большим раскрывом, обладает разрешением по дальности.

В работе рассмотрены предельные возможности радиоастрономических систем с синтезированной апертурой в общем случае произвольного пространственного движения как первой, так и второй приемных позиций. Эти возможности зависят от статистических свойств сигнальной и шумовой компонент, их относительной интенсивности, времени наблюдения и характера траекторий обоих приемников. Сигнальная и шумовая компоненты предполагаются стационарными нормальными случайными полями со спектрами мощности $S(\omega)$ и $N(\omega)$. Сигнал излучается точечным источником, а шум либо возникает в самих приемниках, либо излучается распределенным радиоисточником. В обоих случаях шумовые компоненты на приемниках могут считаться, очевидно, независимыми. Кроме того, делается естественное предположение о малости характерного времени флуктуаций сигнала и шумов τ_0 по сравнению с временем наблюдения T.

Прежде чем исследовать предельные возможности реальных систем, заметим, что, как было показано в [2], оптимальная обработка принимаемых сигналов в описанной системе заключается, во-первых, в пропускании их через фильтры с частотной характеристикой вида

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{S(\omega)}{N(\omega)\,[2S(\omega) + N(\omega)]}}$$

и, во-вторых, в корреляционной обработке отфильтрованных сигналов, т. е. в образовании величины

$$z(\delta) = \left|\int_0^T u_1(t + \Delta\tau(t))\, u_2^*(t)\, dt\right|^2. \qquad (1)$$

Здесь $\Delta\tau(t) = \dfrac{\Delta R(t)}{c} = \dfrac{R_1(t) - R_2(t)}{c}$, $R_i(t)$ — расстояние от источника сигнала до i-го приемника, при условии, что объект находится в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{R}_0$, отсчитываемым от некоторой средней точки траекторий приемников, а δR_0 — вектор смещения объекта.

Первая часть оптимальной обработки, т. е. фильтрация, для тепловых радиоисточников обычно не реализуется из-за ограниченности полосы приемников и их динамического диапазона. Поэтому в дальнейшем будем считать, что процедура измерения неизвестного смещения заключается в образовании величины $z(\delta)$ по формуле (1) и отыскании ее максимума по δ. Найденная точка максимума и является оценкой истинного значения измеряемых координат источника.

Чтобы найти точность этих оценок, разложим величину $z(\delta)$ в степенной ряд около точки $\delta = 0$, соответствующей истинному положению объекта. Для случайной оценки δ получаем тогда выражение

$$\delta_i = -B_{ik}^{-1} A_k, \qquad (2)$$

где δ_i — компонента вектора положения δ; B_{ik}^{-1} — матрица, обратная матрице $B_{ik} = \left.\dfrac{\partial^2 z(\delta)}{\partial\delta_i\,\partial\delta_k}\right|_{\delta=0}$, $A_k = \left.\dfrac{\partial z(\delta)}{\partial\delta_k}\right|_{\delta=0}$.

Ограничиваясь только моментами второго порядка по оценкам δ_i, находим для них выражение

$$\langle \delta_i \delta_m \rangle = \langle B_{ik}^{-1} B_{ml}^{-1} A_k A_l \rangle. \qquad (3)$$

Если в (1) выделить по отдельности шумовые ($n_1(t)$ и $n_2(t)$) и сигнальную ($s(t)$) компоненты, то выражение для $z(\delta)$ можно переписать в виде

$$z(\delta) = |B(\delta)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\{B^*(\delta)\,[C(\delta) + D(\delta)]\}, \qquad (4)$$

где

$$B(\delta) = \int_0^T s(t + \Delta\tau)\, s^*(t)\, dt,$$

$$C(\delta)=\int\limits_0^T s(t+\Delta\tau)\,n_2^*(t)\,dt+\int\limits_0^T s^*(t)\,n_1(t+\Delta\tau)\,dt, \tag{5}$$

$$D(\delta)=\int\limits_0^T n_1(t+\Delta\tau)\,n_2^*(t)\,dt.$$

Первое слагаемое в (4) имеет максимум при $\delta=0$ и не вносит поэтому вклада в величину A_k, которая оказывается равной

$$A_k=\frac{\partial}{\partial\delta_k}\,2\,\mathrm{Re}\,\{B^*(\delta)\,[C(\delta)+D(\delta)]\}. \tag{6}$$

Для нахождения элементов матрицы B_{ik} воспользуемся малостью характерного времени флуктуаций сигнала и шума τ_0 по сравнению со временем синтезирования T. Так как величина A_k, согласно (6), имеет порядок τ_0/T, то, ограничиваясь при вычислении $\langle\delta_i\delta_k\rangle$ вторым порядком по этому отношению, для элементов матрицы B_{ik} примем следующее приближенное выражение:

$$B_{ik}=\frac{\partial^2|B(0)|^2}{\partial\delta_i\,\partial\delta_k}. \tag{7}$$

Саму величину $B(\delta)$ в силу эргодичности процесса $s(t)$ будем считать равной

$$B(\delta)=\int\limits_0^T\langle s(t+\Delta\tau(t))\,s^*(t)\rangle\,dt=\int\limits_0^T K^*(\Delta\tau(t))\,dt, \tag{8}$$

где $K(\tau)=\langle s(t)\,s^*(t+\tau)\rangle$ — корреляционная функция сигнала.

Вычисляя с учетом (8) матрицу B_{ik}, находим

$$B_{ik}=2\left\{T\,\mathrm{Re}\,\ddot K(0)\,K(0)\int\limits_0^T\frac{\partial\Delta\tau}{\partial\delta_i}\,\frac{\partial\Delta\tau}{\partial\delta_k}\,dt+|\dot K(0)|^2\int\limits_0^T\frac{\partial\Delta\tau}{\partial\delta_i}\,dt\int\limits_0^T\frac{\partial\Delta\tau}{\partial\delta_k}\,dt\right\}. \tag{9}$$

Вводя матрицу траекторных моментов по формулам

$$M_{ik}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\frac{\partial\Delta R(t)}{\partial\delta_i}\,\frac{\partial\Delta R(t)}{\partial\delta_k}\,dt-\frac{1}{T^2}\left(\int\limits_0^T\frac{\partial\Delta R(t)}{\partial\delta_i}\,dt\right)\left(\int\limits_0^T\frac{\partial\Delta R(t)}{\partial\delta_k}\,dt\right) \tag{10}$$

и пользуясь тем, что для узкополосных процессов

$$\int\limits_0^\infty\omega^2 S(\omega)\,d\omega\approx\omega_0^2\int\limits_0^\infty S(\omega)\,d\omega,$$

получаем окончательное выражение для матрицы B_{ik}:

$$B_{ik}=-2T^2\,\frac{\omega_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty S(\omega)\,d\omega\right)^2 M_{ik}. \tag{11}$$

Найденная матрица симметрична и поэтому соответствующим поворотом системы отсчета приводится к диагональному виду. Считая, что такое преобразование уже совершено, т. е. B_{ik} представлена в виде $\delta_{ik}B_{ii}$, для обратной матрицы B_{ik}^{-1} имеем

$$B_{ik}^{-1} = -\frac{\delta_{ik} c^2}{2T^2 \omega_0^2 M_{ll}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega \right)^{-2}. \tag{12}$$

Далее, для вычисления моментов оценок $\langle \delta_l \delta_k \rangle$ остается найти только среднее значение $\langle A_k A_l \rangle$, т. е. величину

$$\langle A_k A_l \rangle = \frac{4\partial^2}{\partial \delta_k \partial \delta_l'} \langle \mathrm{Re}\,[B^*(\delta)(C(\delta) + D(\delta))] \times \times \mathrm{Re}\,[B^*(\delta')(C(\delta') + D(\delta'))] \rangle |_{\delta=\delta'}, \tag{13}$$

где штрихи при смещениях δ определяют порядок дифференцирования. Используя снова эргодичность рассматриваемых процессов, получаем

$$\langle \mathrm{Re}\,(B^*(\delta) C(\delta)) \mathrm{Re}\,(B^*(\delta') C(\delta')) \rangle = = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \int_0^T K^*(\Delta\tau)\, dt \int_0^T K(\Delta\tau')\, dt' \left[\int_0^T K^*(t-t' + \Delta\tau - \Delta\tau') K_0(t-t')\, dt\, dt' + + \int_0^T K(t-t') K_0^*(t-t' + \Delta\tau - \Delta\tau')\, dt\, dt' \right] \right\}; \tag{14}$$

$$\langle \mathrm{Re}\,(B^*(\delta) D(\delta)) \mathrm{Re}\,(B^*(\delta') D(\delta')) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \int_0^T K^*(\Delta\tau)\, dt \times \times \int_0^T K(\Delta\tau')\, dt' \int_0^T K_0^*(t-t' + \Delta\tau - \Delta\tau') K_0(t-t')\, dt\, dt' \right\}, \tag{15}$$

где $K_0(\tau) = \langle n_l(t) n_l^*(t+\tau) \rangle$ —корреляционная функция шума, а штрихи при относительной задержке $\Delta\tau$ означают, что она берется в момент времени t' и при $\delta = \delta'$.

После несложных выкладок находим, что производная от (14) дается выражением

$$\frac{T^3}{c^2} \omega_0^2 M_{kl} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega \right)^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N(\omega) S(\omega)\, d\omega \right), \tag{16}$$

а производная от (15) оказывается равной

$$\frac{T^3 \omega_0^2 M_{kl}}{2c^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega \right)^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N^2(\omega)\, d\omega \right). \tag{17}$$

При выводе этих выражений мы воспользовались тем, что для узкополосных процессов

$$\int_0^\infty \omega^2 S(\omega) N(\omega)\, d\omega \approx \omega_0^2 \int_0^\infty S(\omega) N(\omega)\, d\omega, \\ \int_0^\infty \omega S(\omega) N(\omega)\, d\omega \approx \omega_0 \int_0^\infty S(\omega) N(\omega)\, d\omega. \tag{18}$$

Подставляя (12), (16) и (17) в (3), находим для интересующих нас моментов оценок выражение

$$\langle \delta_l \delta_m \rangle = \frac{M_{lm}}{M_{ll} M_{mm}} \frac{\lambda^2}{2\pi T} \frac{\int\limits_0^\infty S(\omega) N(\omega)\, d\omega + \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty N^2(\omega)\, d\omega}{\left(\int\limits_0^\infty S(\omega)\, d\omega \right)^2}.$$

В наиболее частом случае, когда спектры сигнала и шума определяются только полосой приемников, можно считать, что отношение сигнал/шум μ равно $S(\omega)/N(\omega)$, а величина $\Delta\omega = \frac{\left(\int S(\omega)\, d\omega\right)^2}{\int S^2(\omega)\, d\omega}$ может служить численной мерой ширины спектра. При этом

$$\langle \delta_l \delta_m \rangle = \frac{M_{lm}}{M_{ll} M_{mm}} \frac{\lambda^2}{2\pi T \Delta\omega} \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

Таким образом, задача сводится к вычислению моментов M_{lm}, определяемых видом траекторий и относительным положением объекта. В качестве простейшего примера рассмотрим случай, когда один приемник неподвижен, а второй движется относительно него равномерно и прямолинейно вдоль оси x. Исследуемый объект находится в зените, на расстоянии R. Неизвестными параметрами являются направление на объект θ и расстояние до него. Из простых геометрических соображений находим

$$c\tau_1 = R,$$

$$c^2 \tau_2^2 = (R\theta - x(t))^2 + R^2.$$

Подставляя производные

$$c \frac{\partial \tau_1}{\partial \theta} = 0, \quad c \frac{\partial \tau_1}{\partial R} = 1,$$

$$c \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} \approx -x(t), \quad c \frac{\partial \tau_2}{\partial R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2(t)}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x(t)}{R} \right)^2$$

в формулу (10), получаем для траекторных моментов

$$M_{\theta\theta} = \frac{D^2}{12}, \quad M_{RR} = \frac{1}{45} \left(\frac{D}{R} \right)^2,$$

где D — длина синтезированной апертуры. Эти же выражения справедливы, конечно, и для прямолинейного дискретного синтеза Райла с достаточно большим числом шагов.

Полученные результаты не допускают непосредственного перехода к случаю двухпозиционного интерферометра. Это вполне естественно, так как рассматривая обработку сигналов в форме (1), мы тем самым намеренно устранили фазовый интерферометрический эффект двух приемников. Что же касается корреляционного интерферометрического эффекта, то он был исключен из рассмотрения несколько позднее как гораздо более слабый по сравнению с эффектом направленности за счет когерентного синтезирования апертуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, **15**, № 3, 427 (1970).
2. В. В. Караваев, В. В. Сазонов, Радиотехника и электроника, **17**, № 7, 1521 (1972).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
9 января 1973 г.