ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1973*

УДК 621.396.628 : 523.164

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ БАЗЫ ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Б. А. Дубинский

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Запаздывание (τ) и допплеровский сдвиг частоты (F) сигнала источника, поступающего в разнесенные антенны интерферометра, зависят от координат вектора базы ($\bar{R}$) и от координат единичного вектора источника (k). Эта зависимость может быть выражена уравнениями

$$\tau(t) = \frac{1}{c}(\bar{k}\bar{R}),$$
$$F(t) = f\frac{d\tau}{dt}, \tag{1}$$

где c — скорость света, f — рабочая частота интерферометра. Таким образом, наблюдая ряд источников и измеряя достаточно часто функции $\tau(t)$ и $F(t)$ при наблюдении каждого из них, можно определить координаты вектора базы интерферометра и координаты наблюдавшихся источников.

Задачей настоящего доклада является формальный анализ точности определения этих координат с целью выяснения влияния на нее различных условий наблюдений. При этом ошибки измерений считаются нормальными, а их дисперсии — заданными величинами. Полагается, что эти ошибки включают в себя неустранимые флуктуации, вызываемые неоднородностью атмосферы. Систематические поправки к формулам (1) за счет атмосферы, а также конечности времени распространения сигнала от одной антенны к другой считаются учтенными в процессе обработки наблюдений. Влияние неточного совпадения номиналов частот гетеродинов учитывается введением дополнительного параметра, определяемого наряду с искомыми координатами (см. ниже параметр τ_f).

2. СИСТЕМА КООРДИНАТ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

От выбора системы искомых координат или искомых параметров зависит степень сложности аналитических выражений, связывающих их с измеряемыми величинами τ и F, и возможность выражения конечных результатов в аналитическом виде, что всегда желательно.

С этой точки зрения удобной системой оказалась декартова система геодезических координат (ось z направлена вдоль оси собственного вращения Земли). Координаты единичного вектора базы $\bar{R}$ x, y, z в этой системе — постоянные величины, а координаты вектора источника $\bar{k}$ являются функциями времени:

$$K_{xi} = X_i \cos(\Omega t) + Y_i \sin(\Omega t),$$

$$K_{yi} = Y_i \cos(\Omega t) - X_i \sin(\Omega t),$$
$$K_{zi} = Z_i.$$

Здесь X_i, Y_i, Z_i — направляющие косинусы источника в неподвижной относительно звезд системе координат: $X_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i$; $Y_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i$; $Z_i = \sin\delta_i$, где δ_i и α_i — склонение и прямое восхождение i-го источника, t — звездное время координатной оси x геодезической системы (таким образом, фиксируя начало отсчета времени, фиксируют направление оси x).

С учетом сказанного, выражения (1) могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{gathered} \tau_i(t_j) = \tau_{ci} + \tau_{ci}\cos(\Omega t_j) + \tau_{si}\sin(\Omega t_j) + \tau_f \Omega t_j, \\ \frac{1}{f\Omega} F_i(t_j) = -\tau_{ci}\sin(\Omega t_j) + \tau_{si}\sin(\Omega t_j) + \tau_f, \end{gathered} \tag{2}$$

i — номер источника, j — номер момента наблюдения, $j = 1, 2, \ldots, m$. Выше для удобства введены вспомогательные параметры и обозначения:

$$\begin{gathered} \tau_{ci} = \frac{1}{c}(XX_i + YY_i), \\ \tau_{si} = \frac{1}{c}(XY_i - YX_i), \\ \tau_{0i} = \frac{1}{c} ZZ_i, \\ \tau_f = \frac{1}{cf\Omega}(f_2 - f_1), \\ i = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{3}$$

Ω — круговая частота вращения Земли относительно звезд, $f_2 - f_1$ — разность номиналов частот гетеродинов.

Заметим, что величина τ_{0i} включает в себя запаздывание, обусловленное не только разносом антенн, но и расхождением в показаниях местных часов, вызываемым разностью частот гетеродинов, а именно величину $\delta t + \frac{f_2 - f_1}{f} T_{\text{св}}$, где δt — разовая ошибка сверки местных часов, а $T_{\text{св}}$ — время, разделяющее моменты сверки и измерения запаздывания сигнала (здесь принято, что местные часы определяются теми же задающими генераторами, что гетеродины).

3. ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Благодаря введению вспомогательных параметров задача определения координат XYZ и X_i Y_i разбивается на две более простые последовательные задачи:

1) определение параметров τ_{0i}, τ_{ci} и τ_{si} из системы $2m$ уравнений (2),

2) определение искомых координат по данным параметрам τ с помощью системы $3n$ уравнений (3). Соответственно на два этапа разбивается и анализ точности.

Анализируя систему уравнений (2), легко заключить, что оба входящие в нее уравнения равноценны или существенно дополняют друг друга (с точки зрения точности определения параметров), если стандартные ошибки измерений связаны условием

$$\sigma_\tau = \sigma_F \frac{1}{f\Omega}. \tag{4}$$

Простота зависимостей τ и F от вспомогательных параметров (линейная зависимость) позволяет произвести анализ точности определения этих параметров в общем виде (в буквенной записи). Так, в частности, был произведен вывод формул вторых моментов ошибок параметров τ_0, τ_c, τ_s, τ_f для случая определения их по трем измерениям τ и F в моменты, разнесенные по времени на равные интервалы Δt. Дисперсии их в этом случае определяются выражениями

$$\sigma_0^2 \approx \frac{1{,}5 + [1 - \cos(\Omega\Delta t)]^2}{[1 - \cos(\Omega\Delta t)]^2}\, \sigma_э^2,$$

$$\sigma_c^2 \approx \frac{1{,}5}{[1 - \cos(\Omega\Delta t)]^2}\, \sigma_э^2,$$

$$\sigma_s^2 \approx \frac{1{,}5 + [1 - \cos(\Omega\Delta t)]^2}{[1 - \cos(\Omega\Delta t)]^2}\, \sigma_э^2,$$

$$\sigma_f^2 \approx \frac{1{,}5}{[1 - \cos(\Omega\Delta t)]^2}\, \sigma_э^2.$$

Здесь $\sigma_э^2 = \sigma_\tau^2 \equiv \sigma_F^2 / (f\Omega)^2$. Коэффициенты корреляции меньше 30%, если $\Delta t \gg 4$ *час.*

4. ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ

Как уже говорилось, искомые координаты находятся решением системы из $3n$ нелинейных уравнений (3). Для того, чтобы эта система могла быть однозначно разрешена относительно всех неизвестных, необходимо определить параметры τ_{0i}, τ_{si}, τ_{ci} по меньшей мере для трех источников ($n \geqslant 3$).

Система нелинейных уравнений по правилам способа наименьших квадратов линеаризуется путем разложения функций в ряд Тейлора возле априорных значений искомых координат и с сохранением только первого члена ряда. Искомыми величинами в этом случае являются поправки к априорным значениям координат, а роль исходных данных играют поправки к параметрам τ: $\Delta\tau_{0i} = \tau_{0i} - \tau_{0i}^0$, $\Delta\tau_{ci} = \tau_{ci} - \tau_{ci}^0$, $\Delta\tau_{si} = \tau_{si} - \tau_{si}^0$, где τ_{0i}^0, τ_{ci}^0, τ_{si}^0 — значения параметров, соответствующие априорным значениям координат i-го источника и вектора базы.

Матрица вторых моментов ошибок координат определяется выражением

$$S = C^{-1}. \tag{5}$$

Матрица C находится по известным априори коэффициентам системы линеаризованных уравнений (3), представленных в виде матрицы A, с помощью следующего матричного равенства:

$$C = A^\tau P A. \tag{6}$$

Здесь P — матрица так называемых весов ошибок параметров τ или, иначе, обратная матрица вторых моментов ошибок этих параметров, A^τ — транспонированная матрица A.

Простые аналитические выражения для всех элементов матрицы C

(причем более половины их становится равными нулю) получаются при условии, если выбрать ось x так, чтобы она проходила в меридиане вектора базы ($Y \equiv 0$), и положить координаты α_i всех источников так же равными нулю (что не влияет на результирующую оценку точности, но упрощает вычисления).

Выражения для дисперсий ошибок координат (диагональные элементы матрицы S) имеют вид

$$s_{6j} = \frac{1,5}{[1 - \cos(\Omega \Delta t)]^2} c^2 \sigma_э^2 q_{6j}$$

— для координат вектора базы и

$$s_{ij} = \frac{1,5}{[1 - \cos(\Omega \Delta t)]^2} \frac{c^2 \sigma_э^2}{|\overline{R}|^2} q_{ij}$$

— для координат i-го источника, где $j = x, y, z$ (заметим, что $s_{iz} \equiv \equiv s_{ix} \operatorname{ctg}^2 \delta_i$ в силу тождества $X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 \equiv 1$).

Коэффициенты q определяются матрицей S и зависят от числа наблюдавшихся источников, их углов склонения, от числа моментов наблюдения каждого источника, от длины базы $|\overline{R}|$ и от угла между вектором $\overline{R}$ и экваториальной плоскостью (φ_6).

В качестве конкретного примера были вычислены коэффициенты q для случая $m = 3$, $\varphi_6 \approx 67°$ (база Серпухов — Симеиз) при наблюдении четырех источников W-3, W-75, W-51, Ori-A. Результаты представлены в таблице.

Таблица 1

	База $\varphi_6 = 67°$	W-3 $\delta = 61°53'$	W-75 $\delta = 42°11'$	W-51 $\delta = 14°23'$	Ori-A $\delta = -5°23'$
q_x	0,38	2,7	1,0	0,08	0,01
q_y	0,5	6,6	7,2	7,3	7,4
q_z	0,94	0,8	1,25	1,3	1,2

В рассматриваемом примере при $\sigma_\tau = 0,5$ *мксек*, $\sigma_F = 0,8$ *гц*, $|\overline{R}| = 1,1$ тыс. *км* (Серпухов — Симеиз) и $\Delta t = 4$ *час* среднеквадратичные ошибки измерения координат базы имеют величину $0,15 \div 0,25$ *км*, а ошибки координат источников $\sim 0,5$ *угл мин*.

Повышение точности возможно путем уменьшения ошибок измерения запаздывания и частоты, а также путем увеличения количества наблюдаемых источников и числа точек наблюдения каждого из них.

Институт радиотехники и электроники АН СССР

Поступила в редакцию 2 декабря 1972 г.