

СОДЕРЖАНИЕ

Кляцкин В. И. Статистическая теория распространения света в случайно-неоднородной среде (функциональные методы) (Обзор)	1629
Лотова Н. А., Верещагина Н. В. Секторная структура неоднородностей межпланетной плазмы	1645
Злотник Е. Я. О гидродинамической неустойчивости электромагнитных и плазменных волн на гармониках гирочастоты	1652
Макеев В. В., Поляков В. М., Рыбин В. В. Нестационарное решение уравнения диффузии в гравитационном поле с учетом переноса частиц и их исчезновения	1660
Ларионцев Е. Г., Серкин В. Н. Взаимодействие встречных сверхкоротких импульсов света в лазере с просветляющимся фильтром	1671
Калинkevич А. А., Ушаков Л. С. Спектроскопическое исследование вращательного перехода $J=21 \rightarrow 22$ в окиси углерода	1676
Рабинович М. И., Штильман Л. Е. О самовоздействии и взаимодействии волн с непрерывным спектром в слабонелинейных средах	1680
Реутов В. П. Применение усредненного вариационного принципа для описания многоволновых взаимодействий упругих поверхностных волн	1690
Кравченко Г. И., Марков В. Ф. Обнаружение сигналов с помощью параметрического генератора	1703
Клибанова И. М. Особенности синхронного взаимодействия колебаний в автоколебательной системе с двумя степенями свободы	1709
Иванова Г. К., Орлов Е. Ф., Раков И. С., Шаронов Г. А. Корреляционная обработка широкополосных процессов (до 1,5 Мгц) с относительным смещением по времени и частоте	1717
Лукин В. П., Покасов В. В. Флуктуации фазы оптической волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере	1726
Шанкин Ю. П. К теории периодических волноводов, нагруженных диафрагмами Худяков Г. И. Рассеяние плоской электромагнитной волны статистически неоднородной импедансной плоскостью	1730
Власов С. Н., Загрядская Л. И., Петелин М. И. Резонаторы и волноводы с модами шепчущей галереи для мазеров на циклотронном резонансе	1743
Ванке В. А., Тимофеев Ю. М. Нелинейные явления в усилителе циклотронно-синхронных волн	1751
Ткаченко В. М., Тютюнник В. Б. Некоторые характеристики тлеющего разряда с цилиндрическим полым катодом в гелии	1759

Краткие сообщения и письма в редакцию

Станкевич В. С. О влиянии полимеров на концентрацию димеров водяного пара в атмосфере Земли вблизи точки насыщения	1767
Волков И. И., Мотов В. В., Прохоров С. А. Об одном методе аппаратурной аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов	1770
Фиалковский А. Т. Открытая на конце несимметричная полосковая линия	1771
Афанасов С. Г., Ашбель И. Я., Жулковский Б. М., Кочетков В. И., Петров С. Г., Чередник В. И. О некоторых результатах экспериментального исследования низковольтных электронно-вакуумных приборов СВЧ	1773

УДК 538.56 : 519.25

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ (ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ)

(Обзор)

В. И. Кляцкин

Современное состояние теории распространения света в случайно-неоднородной среде изложено в работах [1, 2]*. Авторы этих работ исходили из описания процесса распространения света в случайно-неоднородной среде на основе стохастического волнового (или параболического) уравнения и анализировали уравнения для средних величин, возникающие при усреднении стохастических уравнений по ансамблю реализаций поля диэлектрической проницаемости. Следует отметить, что уже в самом понятии усреднения по ансамблю реализаций поля диэлектрической проницаемости содержится определенный функциональный смысл, а именно: эта процедура является вычислением континуального интеграла от решения соответствующего детерминистического уравнения. Более того, можно сказать, что все формулы для статистических средних, применяемые в [1, 2], такие, например, как выражающая тот факт, что среднее от произведения четного числа гауссовых полей равняется сумме, в которой поля усредняются попарно всевозможными способами, формула Фурутцу—Новикова и т. д. являются результатом функционального интегрирования.

Следует отметить, что даже само детерминированное уравнение распространения света допускает вероятностную интерпретацию.

В настоящей работе рассматриваются те же вопросы, что и в работе [2], с функциональной точки зрения. Поэтому эту работу следует считать продолжением работы [2]. Несколько слов о содержании работы. В первом разделе рассматриваются вопросы, связанные со статистическим усреднением по ансамблю реализаций случайного процесса различного рода функционалов. Во втором разделе рассматривается решение детерминистической задачи о распространении света в неоднородной среде на основе параболического уравнения и приводится вероятностная интерпретация полученного решения. Изучение свойств решения соответствующей статистической задачи содержится в третьем разделе. Четвертый раздел посвящен функциональному описанию распространения света в приближении геометрической оптики, и в заключение формулируются основные выводы и обсуждаются вопросы, нуждающиеся в дальнейшем развитии.

* Настоящая статья является продолжением обзора В. И. Кляцкина, В. И. Татарского «Статистическая теория распространения света в турбулентной среде» [2].

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $z(t)$ — случайный процесс*. Статистические свойства этого процесса полностью описываются его характеристическим функционалом (см., например, [3, 4])

$$\Phi[v(\tau)] = \langle \exp \{ i \int d\tau z(\tau) v(\tau) \} \rangle, \quad (1.1)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций процесса $z(t)$.

Разложение функционала $\Phi[v]$ в функциональный ряд Тейлора определяют n -точечные моменты процесса $z(t)$. Удобно представить $\Phi[v]$ в виде

$$\Phi[v] = \exp \{ \Theta[v] \}, \quad (1.2)$$

где разложение функционала $\Theta[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора определяют n -точечные кумулянты (семиинварианты) процесса.

Для гауссова стационарного случайного процесса со средним значением, равным нулю, который обычно рассматривается в статистической теории распространения света, единственной кумулянтной функцией, отличной от нуля, является величина $\langle z(t)z(t') \rangle = B(t-t')$, и функционал $\Theta[v]$ имеет вид

$$\Theta[v] = -\frac{1}{2} \iint d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2). \quad (1.3)$$

Рассмотрим среднее значение от произведения двух функционалов $\langle F[z(\tau)] R[z(\tau')] \rangle$, из которых функционал $F[z]$ задан в явном виде, а функционал $R[z]$ может зависеть от случайного процесса как явно, так и неявным образом. Для вычисления этой средней величины введем детерминированную функцию $\eta(\tau)$ и рассмотрим среднее значение от произведения

$$\begin{aligned} & \langle F[z] R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle \equiv \\ & \equiv \left\langle F[z] \exp \left\{ \int d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle R[\eta(\tau)], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где оператор, стоящий в правой части (1.4), представляет собой оператор функционального сдвига.

Введем также в рассмотрение функционал

$$\Omega[v(\tau)] = \frac{\langle F[z(\tau)] \exp \{ i \int d\tau z(\tau) v(\tau) \} \rangle}{\langle \exp \{ i \int d\tau z(\tau) v(\tau) \} \rangle}. \quad (1.5)$$

Тогда выражение (1.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \langle F[z(\tau)] R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \\ & = \frac{\left\langle F[z] \exp \left\{ \int d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \int d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle} \left\langle \exp \left\{ \int d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle R[\eta(\tau)] \equiv \\ & \equiv \Omega \left[\frac{\delta}{i\delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

* В настоящем разделе мы ограничимся случаем одномерного случайного процесса. Обобщение на многомерный случай очевидно.

Полагая в (1.6) $\eta = 0$, получаем окончательное выражение [5]

$$\langle F[z(\tau)] R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[\frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (1.7)$$

В задаче о статистическом описании распространения света в случайно-неоднородной среде, в силу структуры уравнения, описывающего этот процесс (см. [2]), особое место занимает случай линейного функционала $F[z] \equiv z(t)$.

В этом случае [6, 7]

$$\begin{aligned} \Omega[v] &= \frac{\langle z(t) \exp \{i \int d\tau z(\tau) v(\tau)\} \rangle}{\langle \exp \{i \int d\tau z(\tau) v(\tau)\} \rangle} = \\ &= \frac{1}{\Phi[v]} \frac{\delta \Phi}{i\delta v(t)} \equiv \frac{\delta}{i\delta v(t)} \Theta[v]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для гауссова случайного процесса, описываемого функционалом (1.3), формула (1.8) принимает вид

$$\Omega[v] = i \int d\tau B(t - \tau) v(\tau),$$

и, следовательно, формула (1.7) запишется в виде [8-10]

$$\langle z(t) R[z] \rangle = \int d\tau B(t - \tau) \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad (1.9)$$

это основная функциональная формула в теории, развитой в [2].

Рассмотрим теперь случай, когда функционал $F[z]$ имеет вид

$$F[z] = \exp \left\{ i \int d\tau z(\tau) x(\tau) \right\}.$$

В этом случае $\Omega[v] = \exp \{ \Theta[v + x] - \Theta[v] \}$ и, следовательно, для гауссова случайного процесса

$$\begin{aligned} \Omega[v] &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) [x(\tau_1) x(\tau_2) + \right. \\ &\quad \left. + 2v(\tau_1) x(\tau_2)] \right\}, \end{aligned}$$

поэтому, согласно формуле (1.7),

$$\begin{aligned} \langle \exp \{i \int d\tau z(\tau) x(\tau)\} R[z] \rangle &= \langle \exp \{i \int d\tau z(\tau) x(\tau)\} \rangle \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ i \int d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) x(\tau_2) \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} \right\} R[z] \right\rangle = \\ &= \Phi[x(\tau)] \langle R[z(\tau) + i \int d\tau_1 B(\tau - \tau_1) x(\tau_1)] \rangle, \end{aligned} \quad (1.10)$$

т. е. в правой части (1.10) под знаком усреднения к случайному процессу $z(\tau)$ добавляется детерминированная мнимая составляющая. Формула (1.10) понадобится нам далее во втором и третьем разделах работы.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для описания процесса распространения света в неоднородной среде будем исходить, как и в работе [2], из параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \rho) u, \quad (2.1)$$

$$u(0, \rho) = u_0(\rho),$$

где ось x совпадает с направлением падающей волны, $\rho = \{y, z\}$ — поперечные координаты, $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а $\varepsilon(x, \rho)$ — флуктуирующая часть

поля диэлектрической проницаемости. Используя метод, предложенный Фрадким [11–13] в квантовой теории поля, решение уравнения (2.1) можно представить в операторной форме или в виде континуального интеграла [14]. Для этого рассмотрим вместо (2.1) более сложное уравнение, содержащее произвольную функцию $\tau(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \Phi + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \rho) \Phi + \tau(x) \nabla_{\perp} \Phi(x, \rho), \quad (2.2)$$

$$\Phi(0, \rho) = u_0(\rho), \quad u(x, \rho) \equiv \Phi(x, \rho)|_{\tau=0}.$$

Проинтегрируем уравнение (2.2) по x в пределах $(0, x)$, а затем применим оператор $\delta/\delta\tau(\xi)$, где $0 < \xi < x$. В результате получим

$$\frac{\delta \Phi}{\delta \tau(\xi)} = \int_0^x d\xi_1 \left[\frac{i}{2k} \Delta_{\perp} + i \frac{k}{2} \varepsilon(\xi_1, \rho) + \tau(\xi_1) \nabla_{\perp} \right] \frac{\delta \Phi(\xi_1, \rho)}{\delta \tau(\xi)} + \nabla_{\perp} \Phi(\xi, \rho). \quad (2.3)$$

Так как (2.2) представляет собой уравнение первого порядка по x с граничным условием при $x = 0$, то $\Phi(x, \rho)$ зависит лишь от значений $\tau(\xi')$ при $\xi' \leq x$. Поэтому в (2.3) вариационная производная под знаком интеграла равна нулю при $\xi > \xi_1$, и, следовательно, нижний предел интегрирования следует заменить на ξ . Полагая после этого $\xi = x$, получаем формулу

$$\frac{\delta \Phi(x, \rho)}{\delta \tau(x-0)} = \nabla_{\perp} \Phi(x, \rho), \quad (2.4)$$

и уравнение (2.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{i}{2k} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \tau^2(x-0)} + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \rho) \Phi + \tau(x) \nabla_{\perp} \Phi. \quad (2.5)$$

Будем искать решение (2.5) в форме

$$\Phi(x, \rho) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi-0)} \right\} \varphi(x, \rho). \quad (2.6)$$

Тогда для функции $\varphi(x, \rho)$ получаем уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i \frac{k}{2} \varepsilon \varphi + \tau(x) \nabla_{\perp} \varphi, \quad \varphi(0, \rho) = u_0(\rho), \quad (2.7)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi(x, \rho) = u_0 \left(\rho + \int_0^x d\xi \tau(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_{\xi}^x d\eta \tau(\eta) \right) \right\}. \quad (2.8)$$

Следовательно, с учетом (2.6) и (2.2) получаем

$$u(x, \rho) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi)} \right\} \left\{ u_0 \left(\rho + \int_0^x d\xi \tau(\xi) \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_{\xi}^x d\eta \tau(\eta) \right) \right] \right\} \Big|_{\tau=0}. \quad (2.9)$$

При помощи функционального преобразования Фурье можно записать $u(x, \rho)$ в виде континуального интеграла:

$$u(x, \rho) = \int D\mathbf{v} \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right] \right\} \times \\ \times u_0 \left(\rho + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right), \quad (2.10)$$

$$D\mathbf{v} = \prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi) / \int \dots \int \prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \mathbf{v}^2(\xi) \right\}.$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\rho) = u_0$ и выражение (2.9) принимает вид

$$u(x, \rho) = u_0 \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi)} \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_{\xi}^x d\eta \tau(\eta) \right) \right\} \Big|_{\tau=0}.$$

Выражение (2.10) допускает вероятностную интерпретацию, а именно, его можно формально записать в виде средней величины

$$u(x, \rho) = \left\langle u_0 \left(\rho + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \rho + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}}, \quad (2.11)$$

где усреднение производится по ансамблю поля $\mathbf{v}(\xi)$ ($\xi \leq x$), которое можно рассматривать как «гауссово» случайное поле со средним значением, равным нулю, и с комплексной «корреляционной функцией»:

$$\langle v_{\alpha}(\xi_1) v_{\beta}(\xi_2) \rangle = \frac{i}{k} \delta_{\alpha, \beta} \delta(\xi_1 - \xi_2).$$

Легко видеть, что все формулы, справедливые для обычных гауссовых случайных полей, справедливы и в этом случае. В частности, будет справедлива и формула (1.10).

Представляя (2.11) в виде

$$u(x, \rho) = \int d\mathbf{x} u_0(\mathbf{x}) \exp\{i\mathbf{x}\rho\} \times \\ \times \left\langle \exp\left\{i\mathbf{x} \int_0^x d\xi v(\xi) + i\frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon\left(\xi, \rho + \int_\xi^x d\eta v(\eta)\right)\right\}\right\rangle_{\sigma},$$

где $u_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho u_0(\rho) \exp\{-i\mathbf{x}\rho\}$, можно выполнить усреднение по формуле (1.10) и получить

$$u(x, \rho) = \int d\mathbf{x} u_0(\mathbf{x}) \exp\left\{i\mathbf{x}\rho - i\frac{x^2}{2k} x\right\} \psi(x, \rho, \mathbf{x}), \quad (2.12)$$

где

$$\psi(x, \rho, \mathbf{x}) = \left\langle \exp\left\{i\frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon\left(\xi, \rho + \int_\xi^x d\eta \left[v(\eta) - \frac{x}{k}\right]\right)\right\}\right\rangle_{\sigma}.$$

Возвращаясь обратно к операторному виду, выражение для $\psi(x, \rho, \mathbf{x})$ можно записать в виде

$$\psi(x, \rho, \mathbf{x}) = \exp\left\{\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta\tau^2(\xi)}\right\} \times \\ \times \exp\left\{i\frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon\left(\xi, \rho + \int_\xi^x d\eta \left[\tau(\eta) - \frac{x}{k}\right]\right)\right\} \Big|_{\tau=0}. \quad (2.13)$$

При этом выражение (2.13) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \psi + i\frac{k}{2} \varepsilon\psi - \frac{x}{k} \nabla_{\perp} \psi, \quad (2.14) \\ \psi(0, \rho, \mathbf{x}) = 1.$$

Выражения (2.12)—(2.14) представляют собой разложение решения задачи по плоским волнам. Выражение (2.12) и уравнение (2.14) для величины ψ можно получить, разумеется, и непосредственно из уравнения (2.1). Однако подчеркнем еще раз, что вышеприведенный вывод основывается на анализе решения уравнения (2.1) и на вероятностной аналогии. Кроме того, вышеприведенный вывод остается справедливым и в случае отсутствия соответствующего дифференциального уравнения (см. следующий раздел). Выражение, стоящее в правой части (2.12) под знаком интеграла, описывает дифракцию плоской волны на неоднородностях поля ε . При этом множитель $u_0(\mathbf{x}) \exp\left\{i\mathbf{x}\rho - i\frac{x^2}{2k} x\right\}$ описывает дифракцию в свободном пространстве в отсутствие ε , а множитель ψ описывает влияние неоднородностей на такую дифрагирующую волну.

В заключение отметим, что можно получить выражение в виде континуального интеграла и для решения волнового уравнения в неоднородной среде [14] (см. также [15]).

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ

Перейдем теперь к статистическому описанию распространения света в случайно-неоднородной среде. Как и в работе [2], будем считать, что поле флуктуаций диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{x}, \rho)$ является гауссовым однородным случайным полем, δ -коррелированным по оси x , т. е. корреляционная функция имеет вид

$$\langle \varepsilon(x_1, \rho_1) \varepsilon(x_2, \rho_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2) A(\rho_1 - \rho_2), \quad (3.1)$$

где $A(\rho) = 2\pi \int d\mathbf{x} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \exp\{i\mathbf{x}\rho\}$, а $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ — трехмерная спектральная функция поля $\varepsilon(\mathbf{r})$ от двумерного вектора \mathbf{x} .

Обоснование формулы (3.1) и обсуждение рассматриваемой модели флуктуаций ε содержится в [2]. Отметим, что представление (3.1) в статистической задаче о распространении света представляет собой разложение по малому параметру — отношению радиуса корреляции поля ε к другим характерным масштабам.

В силу формулы (2.12) достаточно изучить статистические характеристики функции ψ . Усредняя формулу (2.13) по ансамблю поля ε , получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \rho, \mathbf{x}) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta\tau^2(\xi)} \right\} \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} A(0) x \right\} \Big|_{\tau=0} \equiv \\ &\equiv \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} A(0) x \right\} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\langle u(x, \rho) \rangle = \int d\mathbf{x} u_0(\mathbf{x}) \exp \left\{ i\mathbf{x}\rho - \frac{i\mathbf{x}^2}{2k} x - \frac{k^2}{8} A(0) x \right\}.$$

Образуя билинейную комбинацию $\psi\psi^*$ и усредняя, получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \rho_1, \mathbf{x}_1) \psi^*(x, \rho_2, \mathbf{x}_2) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta\tau_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta\tau_2^2(\xi)} \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\rho_1 - \rho_2 + \int_\xi^x d\eta \left[\tau_1(\eta) - \tau_2(\eta) - \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{k} \right] \right) \right\} \Big|_{\tau_1=0}, \end{aligned}$$

где $D(\rho) = A(0) - A(\rho)$. Делая функциональную замену переменных $\tau_1 - \tau_2 = \tau$, $\tau_1 + \tau_2 = 2T$, это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \rho_1, \mathbf{x}_1) \psi^*(x, \rho_2, \mathbf{x}_2) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta\tau(\xi) \delta T(\xi)} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\rho_1 - \rho_2 + \int_\xi^x d\eta \left[\tau(\eta) - \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{k} \right] \right) \right\} \Big|_{\tau=T=0} \equiv \\ &\equiv \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\rho_1 - \rho_2 - \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{k} (x - \xi) \right) \right\} \end{aligned}$$

и, следовательно, получить выражение для функции когерентности второго порядка $\langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle$. Аналогичным образом легко получить выражение и для продольной корреляции $\langle u(x_1, \rho_1) u^*(x_2, \rho_2) \rangle$.

Выражения для среднего поля и функции когерентности второго порядка существенно упрощаются для случая плоской падающей волны и принимают вид

$$\begin{aligned} \langle u(x, \rho) \rangle &= u_0 \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} A(0) x \right\}, \\ \langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle &= |u_0|^2 \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} D(\rho_1 - \rho_2) x \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для всех остальных моментов полей $u(x, \rho_1)$, $u^*(x, \rho_2)$ замкнутые выражения получить не удастся. Это обусловлено тем фактом, что в рассмотренных задачах дифракционные эффекты не сказываются на статистическом поведении функций $\langle \psi \rangle$ и $\langle \psi \psi^* \rangle$ (действие соответствующих операторов сводится к единице), в то время как для всех других моментов влияние дифракционного оператора существенно.

Выражения для среднего поля и функции когерентности, естественно, легко получить и непосредственно, усредняя соответствующие стохастические уравнения [2]. В этом смысле для вычисления указанных величин эти методы можно считать эквивалентными. Представляется, однако, существенным, что с помощью операторного метода или континуального интеграла мы можем выписывать выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями (например, выражения, связанные с флуктуациями интенсивности). Так, например, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности четвертого порядка $\Gamma_4 = \langle u(x, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_3) u^*(x, \rho_4) \rangle$, с помощью которого можно затем найти величину $\langle I^2(\rho) \rangle$, полагая в решении $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$. Однако решить аналитически это уравнение не представляется возможным, и оно содержит много излишних параметров, в то время как представление величины $\langle I^2(\rho) \rangle$ в континуальном виде этих параметров не содержит. Поэтому представляется, что такая запись может быть полезна для изучения асимптотических характеристик распределения вероятностей для интенсивности [16].

Кроме того, в ряде случаев представление поля в операторном виде позволяет технически существенно проще найти среднюю характеристику, по сравнению с изучением соответствующего уравнения. Так, в работе [17] при изучении амплитудно-фазовых флуктуаций требовалось вычислить величину $\langle \varepsilon(y, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle$ ($x > y$). Если мы будем исходить при этом из уравнения (2.1), то следует составить дифференциальное уравнение для величины $\varepsilon(y, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_3)$ при $x > y$, усреднить его, установить граничное условие для величины $\langle \varepsilon(y, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_3) \rangle$ при $x = y$, решить полученное уравнение с соответствующим граничным условием, а уже затем положить $\rho_3 = \rho_2$. В то же время вычисление этой величины с помощью представления $I(x, \rho_2)$ в операторном виде мало отличается от вычисления величины $\langle \psi \psi^* \rangle$, рассмотренной выше.

Наконец, существует ряд задач, в которых, по-видимому, только функциональная запись решения позволяет получить ответ. К таким задачам относятся, например, задачи об отражении световой волны от препятствий в случайно-неоднородной среде. В качестве примера рассмотрим задачу об отражении световой волны в случайно-неоднородной среде от бесконечного зеркала, находящегося в плоскости $x = L$ [5]. Отраженная волна описывается стохастическим уравнением (см. рис. 1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u + i \frac{k}{2} \tilde{\varepsilon}(x, \rho) u(x, \rho),$$

$$u(0, \rho) = u_0(\rho),$$
(3.3)

где

$$\tilde{\varepsilon}(x, \rho) = \begin{cases} \varepsilon(x, \rho) & (x \leq L) \\ \varepsilon(2L - x, \rho) & (L \leq x \leq 2L) \end{cases}$$
(3.4)

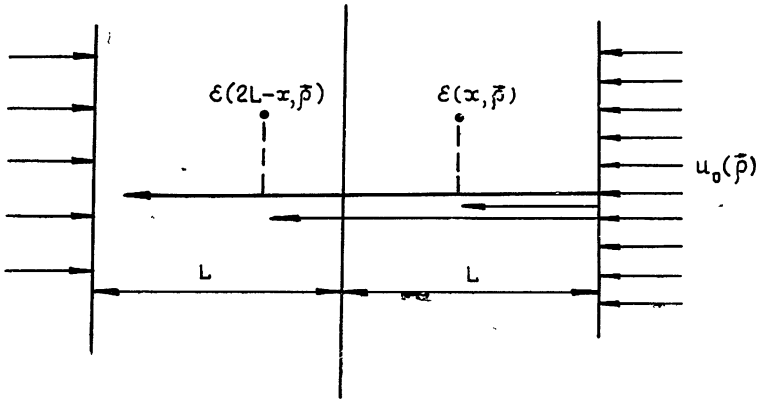


Рис. 1.

Отметим, что приближение диффузионного случайного процесса для уравнения (3.3) с полем диэлектрической проницаемости (3.4) непосредственно не применимо, так как продольный радиус корреляции для поля $\tilde{\varepsilon}(x, \rho)$ порядка L , т. е. того же порядка, что и путь, проходимый волной. Уравнение (3.3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u_{\text{отр}}}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u_{\text{отр}} + i \frac{k}{2} \varepsilon(2L - x, \rho) u_{\text{отр}} \quad (L \leq x \leq 2L),$$

$$u_{\text{отр}}(L, \rho) = u_{\text{над}}(L, \rho).$$
(3.5)

В этом случае поле ε уже будет иметь малый продольный радиус корреляции по сравнению с длиной пути, проходимого волной, однако получить уравнение, например, для среднего отраженного поля не представляется возможным, так как граничное условие для уравнения (3.5) само функционально зависит от поля ε .

Можно однако написать решение уравнения (3.5) в операторном виде, аналогичном формуле (2.9):

$$u_{\text{отр}}(2L, \rho) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_L^{2L} d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi)} \right\} \left\{ u_{\text{над}} \left(L, \rho + \int_L^{2L} d\xi \tau(\xi) \right) \times \right.$$

$$\times \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_L^{2L} d\xi \varepsilon \left(2L - \xi, \rho + \int_{\xi}^{2L} d\eta \tau(\eta) \right) \right\} \Big|_{\tau=0} =$$

$$= \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^L d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(2L - \xi)} \right\} \left\{ u_{\text{над}} \left(L, \rho + \int_0^L d\xi \tau(2L - \xi) \right) \times \right.$$
(3.6)

$$\times \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^L d\xi \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_0^\xi d\eta \tau(2L - \eta) \right) \right] \Big|_{\tau=0}.$$

Учитывая, что в выражение (3.6) всюду входит величина $\tau(2L - \xi)$, можно ввести вместо нее новую функциональную переменную $\tau_1(\xi)$ и переписать (3.6) в виде

$$u_{отр}(2L, \rho) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^L d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau_1^2} \right\} \left\{ u_{пад} \left(L, \rho + \int_0^L d\xi \tau_1(\xi) \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^L d\xi \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_0^\xi d\eta \tau_1(\eta) \right) \right] \right\} \Big|_{\tau_1=0}. \quad (3.7)$$

Используя теперь операторную запись для падающей волны, получаем окончательное выражение:

$$u_{отр}(2L, \rho) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^L d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta \tau_1^2(\xi)} + \frac{\delta^2}{\delta \tau_2^2(\xi)} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ u_0 \left(\rho + \int_0^L d\xi [\tau_1(\xi) + \tau_2(\xi)] \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^L d\xi \left[\varepsilon \left(\xi, \rho + \int_\xi^L d\eta \tau_2(\eta) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \int_0^L d\xi \tau_1(\xi) \right) + \varepsilon \left(\xi, \rho + \int_0^\xi d\eta \tau_1(\eta) \right) \right] \right\} \right\} \Big|_{\tau_1=\tau_2=0}. \quad (3.8)$$

Отметим, что в выражениях (3.7), (3.8) мы уже можем пользоваться приближением диффузионного случайного процесса, так как величина $u_{пад}(L, \rho)$ зависит функционально только от предшествующих значений $\varepsilon(\xi, \rho)$ при $\xi \leq L$. Поэтому, усредняя (3.8) по ансамблю поля ε и используя корреляционную функцию ε вида (3.1), получаем выражение для средней величины отраженной волны

$$\langle u_{отр}(2L, \rho) \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^L d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta \tau_1^2(\xi)} + \frac{\delta^2}{\delta \tau_2^2(\xi)} \right] \right\} \times \\ \times \left[u_0 \left(\rho + \int_0^L d\xi [\tau_1(\xi) + \tau_2(\xi)] \right) \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} A(0)L - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k^2}{4} \int_0^L d\xi A \left(\int_\xi^L d\eta [\tau_1(\eta) + \tau_2(\eta)] \right) \right\} \right] \Big|_{\tau_1=\tau_2=0}. \quad (3.9)$$

Вводя новые функциональные переменные $\tau_1 - \tau_2 = \tilde{\tau}$, $\tau_1 + \tau_2 = \bar{\tau}$, можно переписать (3.9) в виде

$$\langle u_{отр}(2L, \rho) \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^L d\xi \frac{\delta^2}{\delta \bar{\tau}^2(\xi)} \right\} \left[u_0 \left(\rho + \int_0^L d\xi \bar{\tau}(\xi) \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} A(0) L - \frac{k^2}{4} \int_0^L d\xi A \left(\int_{\xi}^L d\eta \tau(\eta) \right) \right\} \Big|_{\tau=0} = \\
 & = \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^L d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi)} - \frac{k^2}{2} A(0) L \right\} \times \\
 & \times \left[u_0 \left(\rho + \int_0^L d\xi \tau(\xi) \right) \exp \left\{ \frac{k^2}{4} \int_0^L d\xi D \left(\int_{\xi}^L d\eta \tau(\eta) \right) \right\} \right] \Big|_{\tau=0}.
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\rho) = 1$, и выражение (3.10) существенно упрощается:

$$\begin{aligned}
 \langle u_{\text{отр}}(2L, \rho) \rangle & = \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} A(0) L \right\} \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^L d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi)} \right\} \times \\
 & \times \exp \left\{ \frac{k^2}{4} \int_0^L d\xi D \left(\int_{\xi}^L d\eta \tau(\eta) \right) \right\} \Big|_{\tau=0}.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Множитель $\exp \left\{ -\frac{k^2}{2} A(0) L \right\}$ описывает затухание отраженной волны в случае отсутствия дифракции, а выражение операторного типа связано с дифракцией световой волны на мелкомасштабных неоднородностях поля диэлектрической проницаемости. Отметим, что выражение (3.11) можно представить также в виде

$$\langle u_{\text{отр}}(2L, \rho) \rangle = \langle u_{\text{пад}}^2(L, \rho) \rangle. \quad (3.12)$$

В общем случае, используя разложение (3.10) по плоским волнам, можно получить выражение, аналогичное формуле (3.12), а именно:

$$\begin{aligned}
 \langle u_{\text{отр}}(2L, \rho) \rangle & = \int dx u_0(x) \exp \left\{ ix\rho - \frac{ix^2}{k} L \right\} \times \\
 & \times \langle \psi_{\text{пад}}(L, \rho, x) \psi_{\text{пад}}(L, \rho, -x) \rangle,
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

где функция ψ описывается уравнением (2.14), решением которого является выражение (2.13).

Таким образом, функциональный подход позволил нам получить определенные связи между статистическими средними падающей на зеркало и отраженной от него световой волны. Отметим, что в этом случае для статистических характеристик отраженной волны нельзя написать соответствующее дифференциальное уравнение.

4. ГЕОМЕТРОПТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим теперь описание амплитудно-фазовых флуктуаций плоской световой волны в приближении геометрической оптики. В этом случае функции $\chi(x, \rho) = \ln A/A_0$ — уровень амплитуды и $S(x, \rho)$ — отклонение фазы волны от фазы плоской волны kx удовлетворяют уравнениям [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{k} \nabla_{\perp} S \nabla_{\perp} \chi + \frac{1}{2k} \Delta_{\perp} S &= 0 \quad (\chi(0, \rho) = 0), \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} S)^2 &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \rho) \quad (S(0, \rho) = 0). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Как указывалось в работе [2], решение уравнения для $\chi(x, \rho)$ можно представить в виде интеграла по траектории $R(x, x'; \rho)$.

Перейдем к фурье-компонентам всех величин по поперечным координатам. Тогда система уравнений (4.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \chi_p(x) &= \frac{p^2}{2k} \int_0^x d\xi S_p(\xi) + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) \chi_{q_2}(\xi), \\ S_p(x) &= S_p^0(x) + \frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^b S_{q_1}(\xi) S_{q_2}(\xi), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\Lambda_{q_1, q_2}^p = (q_1 q_2) \delta(q_1 + q_2 - p), \quad S_p^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_p(\xi)$$

— фаза волны, найденная в первом приближении метода плавных возмущений, и все величины в (4.2) удовлетворяют условию $\varphi_p^*(x) = \varphi_{-p}(x)$ (в силу вещественности полей $\varphi(x, \rho)$).

Решение первого уравнения системы (4.2) можно записать в виде [18]

$$\chi_p(x) = \frac{1}{2k} \int_0^{\infty} d\xi \int dq q^2 D_{p, q}(x, \xi) S_q(\xi), \quad (4.3)$$

где функция $D_{p, p'}(x, x')$ является фурье-образом функции Грина уравнения для χ и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} D_{p, p'}(x, x') &= D_{p, p'}^0(x, x') + \\ &+ \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) D_{q_2, p'}(\xi, x'), \end{aligned} \quad (4.4)$$

а $D_{p, p'}^0(x, x') = \Theta(x - x') \delta(p - p')$ — фурье-образ функции Грина в первом приближении МПВ. При этом функция Грина $D_{p, p'}(x, x')$ связана с траекторией луча $R(x, x'; \rho)$ с помощью соотношения [18]

$$D_{p, p'}(x, x') = 4\pi^2 \Theta(x - x') \delta(p' + R(x, x'; \rho)), \quad (4.5)$$

а выполняя преобразование Фурье по p, p' , имеем

$$D_{p, p'}(x, x') = \frac{1}{4\pi^2} \Theta(x - x') \int dp \exp\{i[p' R(x, x'; \rho) - p\rho]\}. \quad (4.6)$$

Уравнение для фазы волны (4.1), (4.2) является в геометрикооптическом приближении замкнутым. Предположим, что мы знаем его точное решение, т. е. фазу волны как функционал поля диэлектрической прони-

цаемости $S[\varepsilon]$. Тогда можно выписать и точное решение уравнения для χ . Для этого рассмотрим функциональную производную поля S по полю ε . Варьируя уравнение для $S_p(x)$ в системе (4.2) по полю ε , получим

$$\frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')} = \frac{k}{2} D_{p,p'}^0(x, x') + \frac{1}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p S_{q_1}(\xi) \frac{\delta S_{q_2}(\xi)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')}. \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.7) с (4.4), находим, что

$$\frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')} = \frac{k}{2} D_{p,p'}(x, x'), \quad (4.8)$$

и, следовательно, выражение для уровня амплитуды (4.4) можно переписать в виде [19]

$$\chi_p(x) = \frac{1}{k^2} \int_0^x d\xi \int dq q^2 S_q(\xi) \frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_q(\xi)}. \quad (4.9)$$

Таким образом, если нам известно полное решение уравнения для фазы волны, то формула (4.9) является решением уравнения для уровня амплитуды, и, следовательно, статистический характер уровня амплитуды описывается полностью статистическим характером фазовых флуктуаций. Обратимся теперь к статистическому описанию характеристик волны. В силу предполагаемой гауссовости и однородности поля диэлектрической проницаемости различные статистические средние как для фазы волны, так и для уровня амплитуды будут определяться величиной*

$$\langle \varepsilon_p(x) \varepsilon_q(x') \rangle = \delta(p + q) \Phi_q^\varepsilon(x, x'), \quad (4.10)$$

где $\Phi_q^\varepsilon(x, x')$ — двумерный (по поперечным координатам) спектр поля диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим корреляцию фазы волны с полем ε . Используя формулу (1.9), получаем [19]

$$\langle S_p(x) \varepsilon_q(y) \rangle = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \Phi_q^\varepsilon(y, \xi) \langle D_{p,-q}(x, \xi) \rangle. \quad (4.11)$$

Учитывая, что $\langle D \rangle$ в силу (4.5) является плотностью вероятностей для траектории лучей, мы видим, что эта плотность вероятностей связана с корреляцией фазы волны и диэлектрической проницаемости.

Полное статистическое описание фазы волны можно получить, рассматривая характеристический функционал фазы волны:

$$\Phi[u] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^\infty d\xi \int dq u_q(\xi) S_q(\xi) \right\} \right\rangle. \quad (4.12)$$

Используя уравнение для S из (4.12), для $\Phi[u]$ легко получаем уравнение в вариационных производных:

* Здесь и далее мы не накладываем на поле ε условия δ -коррелированности в продольном направлении.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta u_p(x)} = i \frac{k}{2} \left\langle \varepsilon_p(x) \exp \left\{ i \int_0^{\infty} d\xi \int dq u_q(\xi) S_q(\xi) \right\} \right\rangle - \frac{i}{2k} \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p \frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_{q_1}(x) \delta u_{q_2}(x)}. \quad (4.13)$$

С учетом (1.9) первый член в правой части (4.13) можно переписать в виде

$$- \frac{k}{2} \int_0^{\infty} \int d\xi d\eta \int dq \Phi_p^*(x, \eta) u_q(\xi) \Psi_{q, -p}[\xi, \eta; u],$$

где функционал Ψ определяется следующей формулой:

$$\Psi_{p, p'}[x, x'; u] = \left\langle \frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_{p'}(x')} \exp \left\{ i \int_0^{\infty} d\xi \int dq u_q(\xi) S_q(\xi) \right\} \right\rangle. \quad (4.14)$$

Тогда уравнение (4.13) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \Phi}{\delta u_p(x)} = - \frac{k}{2} \int_0^{\infty} \int d\xi d\eta \int dq \Phi_p^*(x, \eta) u_q(\xi) \Psi_{q, -p}[\xi, \eta; u] - \frac{i}{2k} \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p \frac{\delta^2 \Phi}{\delta u_{q_1}(x) \delta u_{q_2}(x)}. \quad (4.15)$$

Уравнение для функционала Ψ получаем, исходя из уравнения (4.7):

$$\Psi_{p, p'}[x, x'; u] = \frac{k}{2} D_{p, p'}^0(x, x') \Phi[u] - \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \int dq_1 dq_2 \Lambda_{q_1, q_2}^p \frac{\delta}{\delta u_{q_1}(\xi)} \Psi_{q_2, p'}[\xi, x'; u]. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.15), (4.16) в совокупности образуют замкнутую систему функциональных уравнений для функционалов Φ и Ψ . Учитывая, что

$$\frac{\delta S_p(x)}{\delta \varepsilon_q(x')} \sim \Theta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x' \\ 1/2 & \text{при } x = x' \\ 0 & \text{при } x < x' \end{cases},$$

можно из уравнения (4.16) найти связь между функционалами Φ и Ψ , а именно:

$$\begin{aligned} \Phi[u] &= \frac{2}{k} \int dp \Psi_{p, 0}[x, x'; u] = \\ &= \frac{4}{k} \int dp \Psi_{p, p'}[x, x; u]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из системы функциональных уравнений (4.15), (4.16) можно получить замкнутое уравнение для функционала Ψ , а функционал Φ определять потом на основании равенств (4.17).

Функционалы Φ и Ψ не только определяют полностью статистические характеристики фазы волны, но также характеризуют и статистическое поведение уровня амплитуды. В самом деле, величина

$$\frac{2}{k} \Psi_{p, p'}[x, x'; 0] = \langle D_{p, p'}(x, x') \rangle \quad (4.18)$$

определяет плотность вероятностей для траектории лучей, а величина

$$-\frac{i}{k^2} \int_0^\infty d\xi \int dq q^2 \frac{\delta}{\delta u_q(\xi)} \Psi_{p, q}[x, \xi; u] \Big|_{u=0} = \langle \chi_p(x) \rangle \quad (4.19)$$

определяет среднее значение уровня амплитуды.

Аналогично, исходя из уравнения (4.7), можно построить системы функционалов, разложения которых в функциональные ряды Тейлора будут определять высшие моменты уровня амплитуды.

Отметим, что в приближении диффузионного случайного процесса можно получить замкнутое уравнение для характеристического функционала $S(x, \rho)$ в плоскости $x = \text{const}$. Это уравнение аналогично уравнению для характеристического функционала поля $u(x, \rho)$ [2]. Однако в силу нелинейности уравнения для фазы волны уравнения для моментов фазы волны будут незамкнутыми.

Отметим также, что с математической точки зрения задача об описании статистических характеристик фазы волны в геометрооптическом приближении в случайно-неоднородной среде аналогична задаче об описании статистических свойств турбулентного потока под действием случайных сил (см. [20]).

Как мы видели из предыдущего рассмотрения, применение функциональных методов к статистической задаче о распространении света в случайно-неоднородной среде приводит к результатам трех типов:

1) использование функциональной записи решения соответствующей задачи эквивалентно решению соответствующих уравнений для средних величин;

2) использование функциональной записи решения позволяет существенно более просто получать различные статистические характеристики по сравнению с методом стохастического уравнения;

3) только использование функциональных методов позволяет получить ответ.

К первому и второму типам относятся рассмотренные выше вопросы о нахождении статистических характеристик волны, таких, например, как среднее поле, функция когерентности второго порядка, корреляция поля диэлектрической проницаемости с интенсивностью волны и т. п. К этим же типам относятся и вопросы, связанные с выводом условий применимости различных приближений (например, приближения параболического уравнения, приближения диффузионного случайного процесса).

К третьему типу относятся задачи, для решения которых необходимо знание точного решения соответствующего стохастического уравнения. Примером такой задачи является рассмотренная выше задача об отражении волн от препятствий. Сюда же относятся и задачи, связанные с флуктуациями интенсивности волны, для которых невозможно написать замкнутое дифференциальное уравнение. К этому же типу относятся и вопросы о нахождении функциональных связей между различными характеристиками волны (например, в геометрооптическом приближе-

нии знание функциональной зависимости фазы волны от поля диэлектрической проницаемости позволяет определить и амплитуду волны). Следует, однако, отметить, что в настоящее время представление решения задачи в виде континуального интеграла представляет собой переключение трудностей из одной области в другую, так как мы, вообще говоря (за исключением некоторых случаев, рассмотренных выше), не умеем их вычислять. Однако, как указывалось выше, такое представление позволяет исключить лишние параметры и получить выражение именно для интересующей нас величины. Для дальнейшего развития теории в этом направлении необходима разработка приближенных методов вычисления континуальных интегралов (главным образом асимптотических методов типа ВКБ-приближения). Кроме того, нельзя забывать в связи с развитием вычислительной техники и о разработке численных методов вычисления континуальных интегралов (такого рода попытки, как нам известно, предпринимались в гидродинамической теории турбулентности).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1, 3 (1970).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 10, 1437 (1972)
3. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидродинамика, ч. II, изд. Наука, М., 1967.
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 65, № 1 (7), 234 (1973).
6. K. Furutsu, JOSA, 62, № 2, 240 (1972).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теор и мат. физика 17, № 2, 273 (1973).
8. K. Furutsu, J. Res. N. B. S., 67-D, 303 (1963).
9. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, № 5 (11), 1919 (1964).
10. M. D. Donsker, Proc. Conf. Theory and Appl. of Analysis in Funct. Space, The M. I. I. Press, 1964, p. 17.
11. Е. С. Фрадкин, Тр. ФИАН, 29 (1965).
12. E. S. Fradkin, Acta Phisica, 19, № 1, 175 (1965)
13. E. S. Fradkin, Nucl. Phys., 76, № 3, 588 (1966).
14. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 58, № 2, 621 (1970).
15. Рао-Liu-Chow, J. Math. Phys., 13, № 8 (1972).
16. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 60, № 4, 1300 (1971).
17. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 540 (1972)
18. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 55, № 8, 662 (1968).
19. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1506 (1969).
20. В. И. Кляцкин, Мех. жидкости и газа, № 4, 120 (1971).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
23 апреля 1973 г.

УДК 533.9.01 : 523

СЕКТОРНАЯ СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МЕЖПЛАНЕТНОЙ ПЛАЗМЫ

Н. А. Лотова, Н. В. Верещагина

Проведен анализ формы кросс-корреляционной функции флуктуаций интенсивности по наблюдениям мерцаний в период 1967—1969 гг. Показано, что в измеряемой по трем пунктам скорости неоднородностей постоянно присутствует тонкая структура, связанная с наличием на луче зрения различных скоростей неоднородностей и характеризующаяся параметром асимметрии S . Эффективное значение S изменяется в зависимости от года.

Проведен анализ ежедневных изменений эффективных параметров неоднородностей: размера, скорости и ее тонкой структуры. Установлена связь между ускоренными потоками солнечного ветра и изменением параметров неоднородностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ межпланетных мерцаний проводился до сих пор в предположении «вмороженности» дифракционной картины, т. е. сохранения пространственной дифракционной картины во времени. При этом форма и размер кросс-корреляционной функции флуктуаций интенсивности

$$B(r, \tau) = \langle \delta I_1(0, t) \delta I_2(r, t + \tau) \rangle \quad (1)$$

повторяет форму и размер автокорреляционной функции

$$B(0, \tau) = \langle \delta I_1(0, t) \delta I_2(0, t + \tau) \rangle, \quad (2)$$

т. е. имеет вид симметричной относительно максимума гауссовой кривой. Однако наблюдения мерцаний показывают (рис. 1), что форма кросс-корреляционных функций не является симметричной. Поэтому возникает задача: обнаружить эффект существования тонкой структуры скорости у неоднородностей межпланетной плазмы и установить характерные особенности ее изменений.

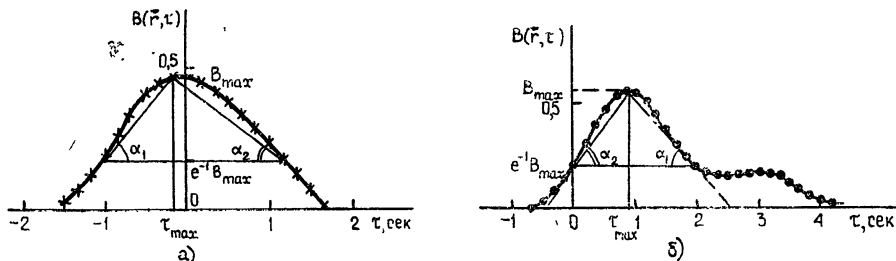


Рис. 1. Примеры кросс-корреляционных функций флуктуаций интенсивности $B(r, \tau)$ по наблюдениям источника ЗС-48:

- а) случай положительной дисперсии скоростей [4], $S > 0$, 20.04.67;
- б) случай отрицательной дисперсии скоростей [4], $S < 0$, 17.04.67.

Тест, при помощи которого можно установить наличие тонкой структуры скорости, обсуждался в работе [1], где было показано, что тонкая

структура скорости характеризуется асимметрией формы кросс-корреляционной функции $B(\mathbf{r}, \tau)$:

$$S = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}, \quad (3)$$

где α_1, α_2 — углы наклона переднего и заднего фронтов кросс-корреляционной функции по уровню e^{-1} (рис. 2).

Знание тонкой структуры скорости важно для понимания природы наблюдаемой на Земле скорости дифракционной картины. Дело в том, что тонкая структура скорости и ее изменения могут быть вызваны различными причинами. Так, в ряде работ [2,3] уже обсуждалась модель протяженной среды, в которой наличие на луче зрения различных скоростей связано с изменением вдоль луча зрения проекции скорости v_{\perp} в предположении, что радиальная скорость неоднородностей постоянна вдоль луча зрения во всем рассеивающем слое. При этом было показано, что учет протяженности среды объясняет наблюдаемое различие скоростей по радиоастрономическим и ракетным измерениям [3].

В работе [4] обсуждались также другие возможные причины появления тонкой структуры скорости, такие, как слоистость истечения вещества, наличие случайного разброса скоростей, а также пространственного спектра скоростей. Однако сравнительная роль различных эффектов по результатам наблюдений до сих пор не обсуждалась.

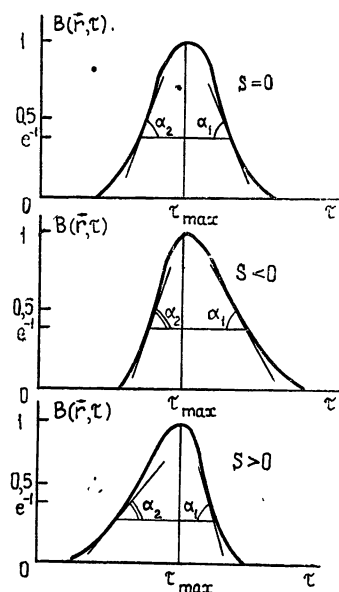


Рис. 2. Иллюстрация определения параметра S , характеризующего искажение симметричной формы кросс-корреляционной функции $B(\mathbf{r}, \tau)$.

2. АНАЛИЗ ФОРМЫ КРОСС-КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ МЕРЦАНИИ

В период 1967—1969 гг. на РАС ФИАН проводились регулярные наблюдения мерцаний интенсивности источника ЗС-48 по трем пунктам [5]. Кросс-корреляционным методом было обработано в 1967 году 24 дня наблюдений, в 1968 году — 19 дней и в 1969 году — 11 дней. Для этих дней мы располагали набором вычисленных на ЭВМ авто- и кросс-корреляционных функций. Из трех кросс-корреляционных функций $B_{ik}(\mathbf{r}, \tau)$ каждого дня отбиралась для дальнейшей обработки та, для которой база \mathbf{r}_{ik} составляла наименьший угол с вектором скорости \mathbf{v}_w , что важно для дальнейшего анализа связи между параметром S и скоростью неоднородностей. Отметим, что для других баз эффект тонкой структуры скорости будет выражен сильнее.

Для каждого дня вычислялся параметр асимметрии S выбранной кросс-корреляционной функции $B_{ik}(\mathbf{r}, \tau)$:

$$S = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}, \quad (4)$$

где α_1 и α_2 — средние углы наклона переднего и заднего фронтов функ-

ции $B(r, \tau)$ на верхнем участке кривой, взятом по уровню e^{-1} (рис. 1). Выбор такой методики связан с наличием большого интервала между точками на кривой $B(r, \tau)$ (рис. 1) вследствие малой продолжительности наблюдения источника, которая составляла в эксперименте 10 мин [5]. Результаты обработки записей представлены в виде гистограмм распределения параметра S на рис. 3.

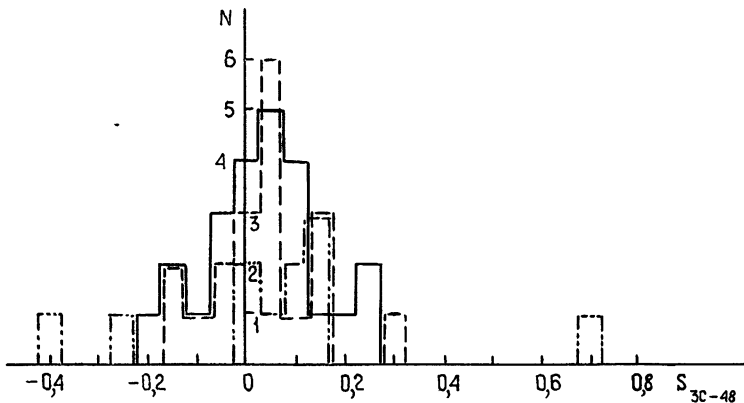


Рис. 3. Сравнительная гистограмма изменений величины параметра $S_{3С-48}$ в период 1967—1969 гг. (Сплошная линия—1967 г., пунктирная—1968 г., штрих-пунктирная—1969 г.)

Рис. 3 показывает, что в измеряемой на Земле эффективной скорости неоднородностей постоянно присутствует тонкая структура, т. е. $S \neq 0$. Величина S характеризует относительный разброс скоростей $\Delta v/v_{эфф}$, который на языке дисперсионного анализа характеризует отношение $\Delta v(\omega)/v_0$ [4].

Из рис. 3 видно, что параметр S принимает в среднем положительные значения. Однако наряду с этим наблюдаются случаи, когда $S < 0$. Точность вычисления средневывборочного значения S ,

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i,$$

где n — общее число дней наблюдения, S_i — значение параметра S для i -го дня, ограничена числом наблюдений, имевшихся в нашем распоряжении, и приведена в табл. 1, где

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2. \quad (5)$$

Таблица 1

Изменение средней величины параметра S и его эффективного значения в зависимости от года

Год	$\bar{S} + \delta$	$S_{эфф}$
1967	$+0,03 \pm 0,02$	$+0,05$
1968	$+0,04 \pm 0,03$	$+0,05$
1969	$+0,06 \pm 0,07$	$+0,15$

Аналогичный анализ формы кросс-корреляционной функции для источника ЗС-48 был выполнен в работе [6]. Сравнительная гистограмма распределений величины S по наблюдениям в 1966 году (сплошная кривая) и по наблюдениям в 1967 году (пунктирная кривая) приведена на рис. 4. Из этого рисунка видно, что эффективные значения параметра S совпадают: $S_{эфф} = 0,05$. Средние значения ($S_{1966} = + (0,032 \pm 0,008)$ и $S_{1967} = + (0,03 \pm 0,02)$) в пределах ошибки совпадают.

Различная точность обработки объясняется различием в объемах выборки. Однако необходимо отметить, что отбор одной кросс-корреляционной функции из трех для каждого дня, уменьшающий точность величины \bar{S} , производился нами специально с целью изучения связи между параметром S и скоростью неоднородностей—при усреднении по трем значениям r_{ik} эта связь теряется.

Рис. 3 показывает, что значения \bar{S} и $S_{эфф}$ изменяются в зависимости от года, т. е. от фазы солнечной активности. Однако для более определенных выводов необходимы более продолжительные наблюдения, охватывающие значительно больший интервал времени.

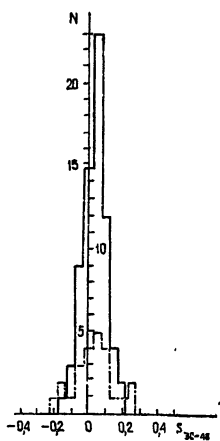


Рис. 4. Сравнительная гистограмма распределений величины параметра $S_{ЗС-48}$ по данным 1966 г. (сплошная кривая) и по данным 1967 г. (пунктирная кривая).

3. СЕКТОРНАЯ СТРУКТУРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ МЕЖПЛАНЕТНОЙ ПЛАЗМЫ

В работе [7] проводилось изучение ежедневных изменений m —меры мерцаний ряда квазаров и был впервые поставлен вопрос о связи мелкомасштабных неоднородностей межпланетной плазмы с секторной структурой солнечного ветра. Анализ ежедневных изменений параметра m на протяжении нескольких месяцев 1971 года показал, что наблюдаются регулярные усиления мерцаний с периодичностью ~ 27 дней. Область усиления мерцаний является долгоживущей с продолжительностью, по крайней мере, до двух месяцев. Изменения m сравнивались с изменениями скорости солнечного ветра, наблюдавшимися в тот же период времени на спутниках. При этом было установлено, что усиление мерцаний вызывается повторением вращающихся вместе с Солнцем более плотных и высокоскоростных потоков плазмы, а увеличение меры мерцаний на 2—3 дня опережает увеличение скорости солнечного ветра.

Совместный анализ ежедневных изменений скорости солнечного ветра и проекции скорости неоднородностей на одну базу (наблюдения по двум пунктам) по мерцаниям источника ЗС-48 был выполнен в Японии [8]. Эти наблюдения показали наличие 24-дневного периода в изменениях проекции скорости неоднородностей и подтвердили связь изменений мелкомасштабной структуры с ускоренными и более плотными потоками плазмы.

Наблюдения мерцаний по трем пунктам, проводившиеся на РАС ФИАН [5], позволяют рассмотреть одновременно характер ежедневных изменений меры мерцаний m , эффективного размера неоднородностей a , скорости неоднородностей и ее тонкой структуры S . Результаты ежедневных изменений этих параметров приведены на рис. 5. Анализ данных, приведенных на рис. 5, позволяет заключить, что области усиленных мерцаний и ускоренных потоков плазмы соответствует ускорение неоднородностей, причем при увеличении их эффективной скорости про-

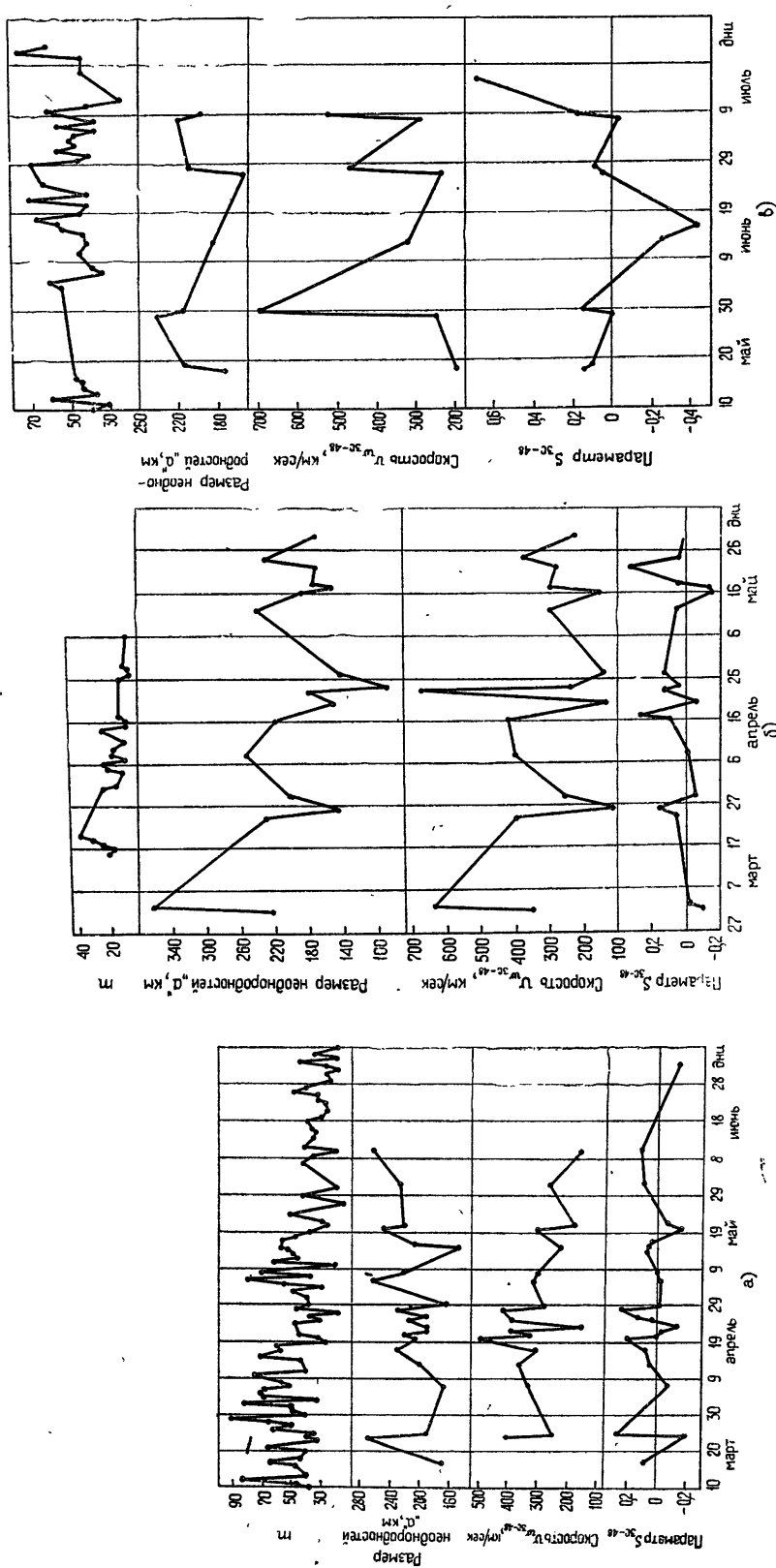


Рис. 5. Ежедневные изменения параметра S, скорости неоднородностей U, размера неоднородностей d , размера мерцаний m по наблюдениям: источника ЗС-48: а) 1967 г., б) 1968 г., в) 1969 г.

исходит увеличение разброса скоростей на луче зрения и увеличение размера неоднородностей. Наличие 24-дневной периодичности в изменениях параметра S , скорости неоднородностей и размера a доказывает их связь с секторной структурой межпланетной плазмы.

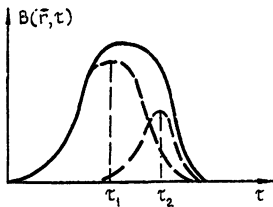
Отличительная особенность корреляции между изменениями параметров m и $v_{эфф}$, связанных с секторной структурой, в период 1967—1969 гг. (годы максимума солнечной активности) состоит в том, что изменения параметров ΔN_e и a коррелируют во времени с изменением их скорости [5]. В то же время, согласно данным 1971 года [7,8], изменения меры мерцаний m на 2—3 дня опережают соответствующие изменения скорости неоднородностей $v_{эфф}$.

Таблица 2

Проценты изменения неоднородностей солнечного ветра, связанные с секторной структурой

Год	$\Delta S/\bar{S}$, %	$\Delta v/\bar{v}$, %	$\Delta a/\bar{a}$, %	$\Delta m/\bar{m}$, %
1967	750	105	83	153
1968	600	124	112	104
1969	780	120	99	142

Изучение секторной структуры межпланетной плазмы позволяет развить представления об эффективных параметрах неоднородностей и получить в каждый момент времени, по крайней мере, два значения для каждого параметра: одно из них соответствует среднему уровню, а другое—усиленной секторной структуре. Так, например, скорость неоднородностей $v_{эфф}$ при прохождении через луч зрения ускоренного потока будет иметь два значения $v_{эфф1} = 330$ км/сек и $v_{эфф2} = 500 \div \div 700$ км/сек. В табл. 2 приведены процентные изменения эффективных параметров неоднородностей за счет секторной структуры околосолнечного пространства.

Рис. 6. Появление отрицательных значений параметра S .

Выделение на луче зрения двух различающихся по плотности и скорости потоков плазмы позволяет объяснить появление отрицательных значений у параметра S . Наблюдаемая при этом дифракционная картина образуется неоднородностями, которые характеризуются двумя спектрами разной мощности $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ [4], с соответствующими им различными скоростями $v_{эфф1}$ и $v_{эфф2}$. Мощность одного из спектров остается постоянной $P_2(\omega) = \text{const}$ и соответствует среднему уровню мерцаний, при этом $v_{эфф2} < v_{эфф1}$. Мощность спектра $P_1(\omega)$ медленно изменяется по мере приближения и удаления ускоренного потока от прицельного расстояния. При условии, когда $P_1(\omega) > P_2(\omega)$ и $v_1 > v_2$, кросс-корреляционная функция $B(r, \tau)$ образуется сложением двух функций вида, показанного на рис. 6, что и обуславливает значения $S < 0$.

Изучение секторной структуры межпланетной плазмы открывает новые возможности как для изучения природы неоднородностей, так и для диагностики явлений в околосолнечной плазме.

Авторы выражают благодарность В. И. Власову за любезно предоставленные им материалы наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. A. Lotova, I. V. Chashey, *Astrophys. Space Sci.*, **20**, 251 (1973).
2. A. T. Joung, *Appl. J.*, **168**, № 3, 543 (1971).
3. J. R. Jokipii, L. C. Lee, *Appl. J.*, **172**, 729 (1972).
4. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, *Геомагнетизм и аэрномия* (в печати).
5. В. В. Виткевич, В. И. Власов, *Астрон. ж.*, **49**, № 3, 595 (1972)
6. M. G. Golley, P. A. Denisson, *Plan. Space. Sci.*, **18**, 95 (1970).
7. Z. Houminer, A. Hewish, *Plan. Space Sci.*, **20**, 1703 (1972).
8. T. Watanabe, T. Kakinuma, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 459 (1972).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
26 марта 1973 г.

SECTORIAL STRUCTURE OF INTERPLANETARY PLASMA INHOMOGENEITIES

N. A. Lotova, N. V. Vereshchagina

The analysis is made of the form of the cross-correlation function of intensity fluctuations according to observations of scintillations in the period of 1967—1969. It is shown that the inhomogeneity velocity measured at three stations has a fine structure associated with the existence of different velocities of inhomogeneities along the line of sight and characterized by the asymmetry parameter S . The effective value of S changes as a function of the year.

Daily variations of the effective parameters of inhomogeneities: dimension, velocity and its fine structure are analysed. The relation between accelerated solar wind fluxes and variation of the inhomogeneity parameters is established.

УДК 538.574 : 533.951

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН НА ГАРМОНИКАХ ГИРОЧАСТОТЫ

Е. Я. Злотник

Рассматривается неустойчивость электромагнитных и плазменных волн в плазме с функцией распределения электронов $f(p_{\parallel}, p_{\perp}) \propto \delta(p_{\parallel}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0)$ на частотах, близких к гармоникам гирочастоты. При учете релятивистской зависимости массы от скорости получены критерии неустойчивости и выражения для инкрементов волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Обсуждается характер гидродинамической неустойчивости двухкомпонентной системы, состоящей из равновесной плазмы и релятивистской плазмы с δ -распределением электронов по импульсам

Задача о гидродинамической неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно возмущений в виде электромагнитных и плазменных волн на частотах ω , близких к гармоникам гирочастоты $s\omega_H$, рассматривалась в ряде работ (см., например, библиографию в [1-3]). При исследовании распространения и генерации электромагнитных волн в неравновесной плазме [4, 5], а также взаимодействия электромагнитных волн с непрямолинейными электронными потоками в волноводах и резонаторах [6-9] выяснилось, в частности, что учет релятивистских эффектов (зависимости массы электронов от скорости) необходим даже в том случае, когда скорость электрона мала по сравнению со скоростью света. Однако изучение продольных циклотронных волн в плазме с электронами, неравновесными по поперечным (относительно магнитного поля) импульсам, обычно проводится в предположении постоянной массы частиц [10, 11].

В настоящей работе мы рассмотрим с учетом релятивистских эффектов неустойчивость электромагнитных и плазменных волн в плазме малой плотности без дисперсии по продольным (p_{\parallel}) и поперечным (p_{\perp}) импульсам электронов. Функцию распределения выберем в виде*

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{1}{2\pi p_{\perp}^0} \delta(p_{\parallel}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0). \quad (1)$$

Движение ионов в поле волны ниже не учитывается.

Согласно [5, 12], распространение плоских волн $\exp(ikr - i\omega t)$ в однородной магнитоактивной плазме описывается дисперсионным уравнением

$$\det[c^2(k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta}) - \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})] = 0, \quad (2)$$

* Отсутствие сдвига по продольным импульсам не ограничивает общности рассмотрения, так как его можно ввести или устранить переходом в систему координат, движущуюся параллельно магнитному полю.

где тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ следующим образом зависит от параметров плазмы и волны:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - i^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta}, \quad L_{\alpha\beta} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})}{\omega - \omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp})} dp_{\parallel}, \quad (3)$$

$$\omega_s = \frac{1}{m} (sm_0\Omega_H + k_{\parallel} p_{\parallel}), \quad D_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2} \frac{m_0}{m^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} p_{\perp} S_{\alpha}^s R_{\beta}^s,$$

$m = (m_0^2 + p_{\perp}^2/c^2 + p_{\parallel}^2/c^2)^{1/2}$ — масса электрона, $\Omega_H = \omega_H m/m_0$ — гирочастота нерелятивистского электрона, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$ — ленгмюровская частота плазмы; функции S_{α}^s и R_{β}^s выражаются через функции Бесселя $J_s(k_{\perp} p_{\perp}/m_0 \Omega_H)$ и производные от функции распределения $f(p_{\parallel}, p_{\perp})$ и приведены в [12].

В дальнейшем мы будем считать частоту волны столь близкой к частоте ω_s , что в бесконечной сумме по гармоникам (3) можно оставить только один член, пропорциональный $1/(\omega - \omega_s)$. Поскольку рассматриваемые эффекты неустойчивости существенны только для волн, распространяющихся почти перпендикулярно магнитному полю, мы более подробно изучим случай поперечного распространения ($k_{\parallel} = 0$), а затем приведем оценки для косых волн.

1. В дипольном приближении, когда

$$\chi = \frac{k_{\perp} p_{\perp}^0}{m_0 \Omega_H} = sn_0 \beta_{\perp} \ll 1 \quad (4)$$

$$(\beta_{\perp} = p_{\perp}^0/m_0 c, \quad n_0 = k_{\perp} c/s \Omega_H),$$

дисперсионное уравнение (2) сводится к виду

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \frac{L_{xx}^s}{1 + L_{xx}^s}, \quad (5)$$

где

$$L_{xx}^s = - \frac{1}{4[(s-1)!]^2} \frac{m_0 \omega_p^2}{\omega(m\omega - sm_0 \Omega_H)} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{2s-2} \left[2s - \frac{\omega p_{\perp 0}^2}{\tilde{m} c^2 (\tilde{m} \omega - sm_0 \Omega_H)} \right] \quad (6)$$

$$(\tilde{m} = \sqrt{m_0^2 + p_{\perp 0}^2/c^2}).$$

Используя обозначения

$$\delta_s = \frac{\omega - \omega_s}{s \tilde{\omega}_H}, \quad q = \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_H^2}, \quad A_s = \frac{1}{(s!)^2} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{2s-2} \quad (7)$$

и считая достаточно малыми поперечную скорость электронов ($\beta_{\perp}^2 \ll \ll 1$), плотность плазмы ($q \ll 1$) и отклонение частоты от $s \tilde{\omega}_H$ ($\delta_s \ll 1$), сведем уравнение (5) к алгебраическому уравнению третьего порядка:

$$2\delta_s^3 + \delta_s^2(1 - n_0^2) + \delta_s s A_s q \left(\frac{n_0^2}{2} - 1\right) + \frac{1}{2} A_s q \beta_{\perp}^2 \left(1 - \frac{n_0^2}{2}\right) = 0. \quad (8)$$

а) Если n_0^2 не очень близко к единице ($2\delta_s \ll 1 - n_0^2$), то дисперсионное уравнение (8) сводится к квадратному; его решение имеет вид

$$\delta_s = \{sA_s q(n_0^2/2 - 1) \pm [s^2 A_s^2 q^2 (n_0^2/2 - 1)^2 - 2A_s q \beta_{\perp}^2 (1 - n_0^2/2) \times \\ \times (1 - n_0^2)^{1/2}] [2(1 - n_0^2)]^{-1}\}. \quad (9)$$

Неустойчивость возникает при условии

$$q < q_{\text{кр}}^s = \frac{2\beta_{\perp}^2}{s^2 A_s} \frac{1 - n_0^2}{1 - n_0^2/2}, \quad (10)$$

причем максимальный инкремент

$$\max(\text{Im } \delta_s) = \frac{\beta_{\perp}^2}{2s} \quad (11)$$

достигается при $q_{\text{max}} = \frac{1}{2} q_{\text{кр}}^s$.

На рис. 1 для первой гармоники указаны границы неустойчивости (сплошная линия) и линии равного инкремента $\text{Im } \delta_s / \beta_{\perp}^2$ (пунктир) на плоскости параметров q/β_{\perp}^2 и n_0^2 . В области $1 < n_0^2 < 2$ плазма всегда устойчива, так как согласно (10) при этом $q_{\text{кр}}^s < 0$. Отметим, что в области $n_0^2 \gg 2$ неустойчивость возможна при большей плотности плазмы, чем для продольных плазменных волн ($n_0^2 \gg 1$) и для волн с $n_0 \ll 1$.

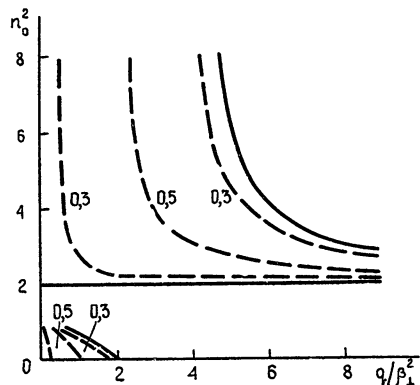


Рис. 1.

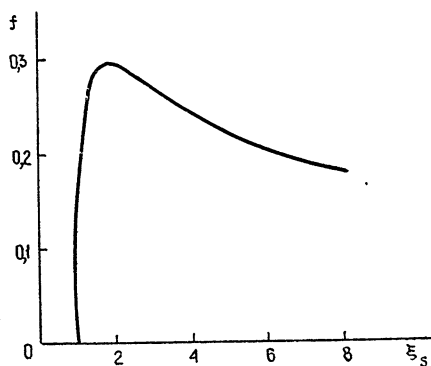


Рис. 2.

б) В случае, когда n_0^2 достаточно близко к единице, а именно $n_0^2 - 1 \ll q$, кубическое дисперсионное уравнение*

$$2\delta_s^3 - \delta_s \frac{sA_s q}{2} + \frac{A_s q \beta_{\perp}^2}{4} = 0 \quad (12)$$

допускает комплексно-сопряженные корни при условии

$$\xi_s = \frac{3\sqrt{3} \beta_{\perp}^2}{2s \sqrt{sA_s q}} > 1. \quad (13)$$

* Уравнение (12) получено и подробно исследовано в [6-9] и других работах тех же авторов для описания взаимодействия электромагнитных волн с непрямолинейными потоками в волноводах и резонаторах.

При этом инкремент имеет вид

$$\text{Im } \delta_s = \frac{\beta_{\perp}^2}{s} f(\xi_s), \quad (14)$$

где функция $f(\xi_s) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \xi_s^{-1} [(\xi_s + \sqrt{\xi_s^2 - 1})^{1/3} - (\xi_s - \sqrt{\xi_s^2 - 1})^{-1/3}]$ приведена на рис. 2. Легко видеть, что максимальный инкремент электромагнитных волн с $n_0^2 \sim 1$ по порядку величины совпадает с максимальным инкрементом (11). Однако он достигается при меньшей плотности плазмы: соответствующее соотношение

$$\frac{q_{\max}(n_0^2 \sim 1)}{q_{\max}(n_0^2 > 2, n_0^2 \ll 1)} = \frac{2\beta_{\perp}^2}{s}. \quad (15)$$

2. На более коротких волнах, когда нарушается дипольное приближение

$$\chi = sn_0 \beta_{\perp} \gtrsim 1, \quad (16)$$

мы будем исследовать только плазменные волны. Это связано с тем, что для не очень высоких гармоник при малых поперечных скоростях электронов ($\beta_{\perp}^2 \ll 1$) условие (16) выполняется только в случае $n_0^2 \gg 1$.

Из дисперсионного уравнения для плазменных волн ($n_0^2 \gg 1$)

$$\delta_s^2 - 2q \frac{J_s J'_s}{\chi} \delta_s + q \beta_{\perp}^2 \frac{J_s^2}{\chi^2} = 0 \quad (17)$$

следует, что плазма становится неустойчивой, если

$$q < q_{\text{кр}}^s = \frac{\beta_{\perp}^2}{(J'_s)^2}; \quad (18)$$

максимальный инкремент

$$\max(\text{Im } \delta_s) = \frac{J_s \beta_{\perp}^2}{2\chi J'_s} \quad (19)$$

достигается при $q_{\max} = q_{\text{кр}}^s/2$.

Границы неустойчивости и линии равного инкремента на плоскости параметров χ и q/β_{\perp}^2 для первой гармоники приведены на рис. 3. Очевидно, что при $\chi \rightarrow 0$ уравнение (17) для плазменных волн совпадает с уравнением (8) для волн в дипольном приближении, если в (17) ограничиться первым членом разложения функции Бесселя в ряд по степеням χ , а в (8) устремить $n_0 \rightarrow \infty$. Поэтому нижняя часть рис. 3, описывающая плазменные волны в дипольном приближении, совпадает с верхней частью (вертикальными прямыми) рис. 2.

Интересно отметить наличие «щелей» в нулях производной функции Бесселя ($J'_s(\chi) = 0$), где неустойчивость возможна при большей плотности плазмы и с большими инкрементами, чем в дипольном приближении. Аналогичная картина с соответствующим смещением нулей J'_s и J_s и уменьшением значений инкремента также имеет место на более высоких гармониках.

Пределы применимости полученных решений связаны с тем, что, во-первых, в бесконечной сумме по гармоникам в дисперсионном уравнении учитывался только один член, пропорциональный δ_s^{-1} , и, во-вто-

рых, реальные распределения электронов по импульсам имеют конечную ширину.

Условие, необходимое для рассмотрения неустойчивости на отдельных гармониках, имеет вид

$$|\delta_s| \ll \frac{|s-n|}{n} \frac{J_s^2}{J_n^2}$$

(s — номер рассматриваемой гармоники, n — все целые числа, за исключением s).

Исследование неустойчивости плазмы с функцией распределения электронов типа $f \propto \exp\{- (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2 - p_{\parallel}^2/a_{\parallel}^2\}$ относительно возмущений в виде плазменных волн проведено в работе [13]. Здесь мы приведем без вывода только условия справедливости решений, полученных выше для δ -распределения:

$$\frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}} \gg 1, \quad \chi \ll \frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}}, \quad |\delta_s| \gg \frac{a_{\perp} p_{\perp}^0}{\tilde{m}^2 c^2}, \quad |\delta_s| \gg \frac{a_{\parallel}^2}{\tilde{m}^2 c^2}. \quad (20)$$

Ограничение на величину инкремента в «щелях», где $J'_s(\chi) = 0$, обусловлено отличной от нуля дисперсией поперечных импульсов электронов: неустойчивость имеет место только при условии

$$q < \frac{16p_{\perp}^{0i}}{a_{\perp}^4 \chi^2 J_s^2 (1 + s^2/\chi^2)^2}.$$

Необходимо еще раз подчеркнуть, что рассмотренная гидродинамическая неустойчивость может иметь место только при учете релятивистской зависимости массы электронов от скорости.

3. При распространении плазменных волн под произвольным углом α к магнитному полю дисперсионное уравнение для плазменных волн имеет вид

$$\delta_s^2 - 2q \frac{J_s J'_s}{\chi} \sin^2 \alpha \delta_s + q \beta_{\perp}^2 \frac{J_s^2}{\chi^2} \sin^2 \alpha (1 - n_0^2 \cos^2 \alpha) = 0. \quad (21)$$

Легко видеть, что необходимым условием неустойчивости является соблюдение неравенства

$$n_0^2 \cos^2 \alpha < 1, \quad (22)$$

т. е. плазменные волны с $n_0^2 \gg 1$ могут быть неустойчивыми только при углах α , близких к $\pi/2$.

Если условие (22) выполнено, то для исследования неустойчивости можно построить картину, аналогичную рис. 3. При этом пределы неустойчивости определяются неравенством

$$q < q_{\text{кр}}^s = \frac{\beta_{\perp}^2 (1 - n_0^2 \cos^2 \alpha)}{(J'_s)^2}, \quad (23)$$

а максимальный инкремент — выражением

$$\max(\text{Im } \delta_s) = \frac{\beta_{\perp}^2 J_s}{2\chi J'_s} (1 - n_0^2 \cos^2 \alpha). \quad (24)$$

В целом картина поведения $\delta_s(q, \chi)$ при условии (22) аналогична случаю перпендикулярного распространения с соответствующим уменьшением инкрементов и сужением «щелей».

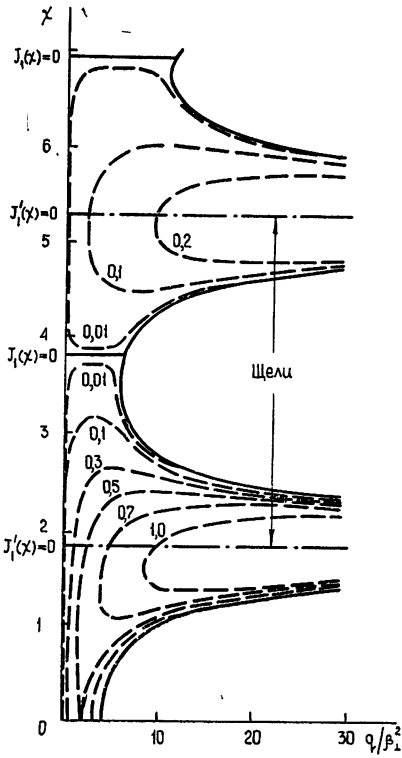


Рис. 3.

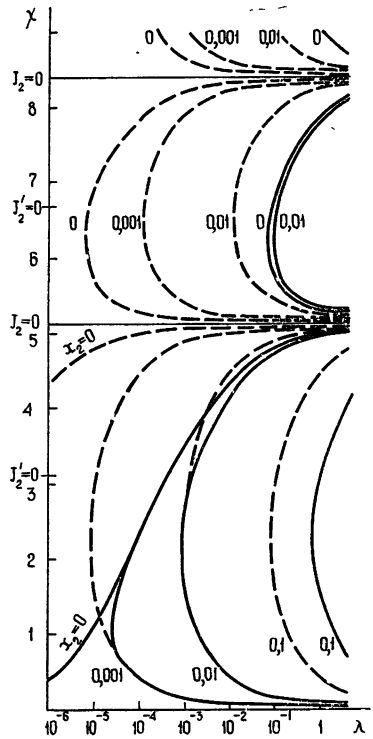


Рис. 4.

4. Рассмотрим теперь неустойчивость плазменных волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю в системе, состоящей из равновесной плазмы с плотностью N_0 и релятивистской плазмы с плотностью N и функцией распределения типа (1). Везде ниже мы будем предполагать $N \ll N_0$ или

$$q = \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} \ll Q = \frac{\Omega_p^2}{\omega_H^2}, \quad (25)$$

где $\Omega_p^2 = 4\pi e^2 N_0 / m$.

а) Если в равновесной плазме не учитывать тепловое движение, то дисперсионное уравнение на s -й гармонике имеет вид

$$1 - \frac{Q}{s^2 - 1 + 2s^2 \delta_s - \beta_{\perp}^2} - \frac{2q}{\chi} \frac{J_s J'_s}{\delta_s} + \frac{q J_s^2 \beta_{\perp}^2}{\chi^2 \delta_s^2} = 0. \quad (26)$$

Легко убедиться, что при $s \geq 2$ рассматриваемая система устойчива относительно плазменных волн, если плотность равновесной плазмы достаточно велика, а именно:

$$Q > s^2 - 1. \quad (27)$$

В случае обратного неравенства неустойчивость возможна при условии

$$q < q_{\text{кр}}^s = \frac{\beta_{\perp}^2}{(J'_s)^2} \left(1 - \frac{Q}{s^2 - 1} \right). \quad (28)$$

Из сравнения (28) с (18) следует, что холодная плазма затрудняет возбуждение плазменных волн на гармониках гирочастоты, и только в случае $Q \ll 1$ поведение корней при $s \geq 2$ не отличается существенным образом от рассмотренного в п. 2.

На первой гармонике ($s = 1$) уравнение (26) сводится к соотношению

$$1 - \frac{Q}{2\delta_1 - \beta_{\perp}^2} - \frac{2qJ_1J'_1}{\chi\delta_1} + \frac{qJ_1^2\beta_{\perp}^2}{\chi^2\delta_1^2} = 0. \quad (29)$$

Если $2\delta_1 \ll \beta_{\perp}^2$, то картина неустойчивости снова качественно совпадает с характерной для однокомпонентной плазмы, так как уравнения (17) и (29) отличаются только коэффициентами при δ_1^2 (единица в уравнении (17) заменяется на $(1 + Q/\beta_{\perp}^2)$ в (29)).

В случае больших значений δ_1 , когда выполняется неравенство

$$2\delta_1 \gg \beta_{\perp}^2, \quad (30)$$

дисперсионное уравнение (25) не допускает комплексно-сопряженных решений. Иными словами, при наличии плотной холодной плазмы неустойчивость на гирочастоте с инкрементами $\delta_1 \gg \beta_{\perp}^2/2$ невозможна.

б) Если в равновесной плазме учесть слабое тепловое движение* ($\beta_T = v_T/c \ll 1$), то, предполагая $Q \ll 1$, вместо (26) получим

$$1 - \frac{2Qe^{-z}I_s(z)}{z(2\delta_s - \beta_{\perp}^2)} - \frac{2qJ_sJ'_s}{\chi\delta_s} + \frac{qJ_s^2\beta_{\perp}^2}{\chi^2\delta_s^2} = 0, \quad (31)$$

где

$$z = \frac{k_{\perp}^2 v_T^2}{2\Omega_H^2} \approx \frac{\chi^2 \mu^2}{2}, \quad \mu = \frac{\beta_T}{\beta_{\perp}} \ll 1, \quad (32)$$

I_s — функция Бесселя мнимого аргумента. В случае

$$2\delta_s \ll \beta_{\perp}^2$$

равновесная плазма практически не влияет на характер неустойчивости, (как и при выполнении аналогичного неравенства для первой гармоники в холодной плазме).

Если выполняется обратное неравенство

$$2\delta_s \gg \beta_{\perp}^2,$$

то картина становится сложнее. Здесь при условии

$$\frac{Qe^{-z}I_s(z)}{z} \gg \frac{2qJ_sJ'_s}{\chi}, \quad (33)$$

когда в уравнении (31) можно пренебречь третьим членом по сравнению со вторым, равновесная плазма играет определяющую роль в подавлении

* Тем самым в уравнении (31) учитывается существование в плазме с равновесным распределением электронов плазменных волн на гармониках гирочастоты (так называемые моды Бернштейна). Эти моды подробно исследованы во многих работах (см., например, [1-3, 11]).

нии неустойчивости. На рис. 4 изображены границы неустойчивости ($x_2 = 0$) и линии равного инкремента $x_2 = \text{Im } \delta_2/Q$ в плоскости параметров $\lambda = q\beta_{\perp}^2/Q^2$ и γ для второй гармоники при $\mu = 0,1$ (сплошные линии) и $\mu = 0,01$ (пунктирные). Из рисунка ясно, что в отличие от однокомпонентной плазмы при выполнении неравенства (33) инкремент возрастает с ростом q .

В случае, обратном (33), когда параметры Q или β_T достаточно малы, равновесная плазма не оказывает существенного влияния на неустойчивость плазменных волн. Заметим, что при переходе от предельного случая (33) к обратному (при увеличении λ) области неустойчивости на рис. 4 сужаются и в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ превращаются в «щели», вблизи производных функций Бесселя (аналогичные изображенным на рис. 3).

И, наконец, неустойчивость плазменных волн в двухкомпонентной плазме с инкрементами $\delta_s \sim \beta_{\perp}^2/2$ описывается кубичным уравнением и нуждается в специальном исследовании.

Автор выражает благодарность В. В. Железнякову, А. А. Андронову и В. Ю. Трахтенгерцу за обсуждение и ценные замечания, сделанные при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд. Мир, М., 1971.
2. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, 1, Атомиздат, М., 1970.
3. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
4. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 1, 57; № 2, 180 (1960).
5. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 455 (1961).
6. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 3, 450; № 5, 836 (1959).
7. А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, 7, 631 (1962).
8. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 1, 104 (1963).
9. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 547 (1961).
10. E. G. Harris, Phys. Rev. Lett., 2, 34 (1959).
11. J. A. Tataronis, F. W. Crawford, J. Plasma Phys., 4, part 2, 231, 249 (1970).
12. А. А. Андронов, В. В. Железняков, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 251 (1964).
13. Е. Я. Злотник, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 ноября 1972 г.

HYDRODYNAMIC INSTABILITY OF ELECTROMAGNETIC AND PLASMA WAVES AT GYROFREQUENCY HARMONICS

E. Ya. Zlotnik

We consider the instability of electromagnetic and plasma waves in plasma with the electron distribution function $f(p_{\parallel}, p_{\perp}) \sim \delta(p_{\parallel}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0)$ at the frequency close to the gyrofrequency harmonics. When the relativistic dependence of the mass on the velocity is taken into account, the instability criteria and the expressions for the increments of waves propagating perpendicularly to the magnetic field are obtained. The character of the hydrodynamic instability of the two-component system consisting of equilibrium cold and relativistic plasmas with δ -distribution of electron velocities is discussed.

УДК 551.510.535

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ И ИХ ИСЧЕЗНОВЕНИЯ

В. В. Макеев, В. М. Поляков, В. В. Рыбин

В работе получено и обсуждается общее решение одномерного уравнения диффузии газовых примесей в планетарных атмосферах с учетом процессов переноса частиц и их исчезновения. Обсуждение ведется на примере ионосферной плазмы, где в качестве примеси рассматривается электронно-ионный газ, и исследуется его диффузия в амбиполярном приближении. Получены аналитические выражения для функции Грина, описывающей динамику процесса перестройки области F_2 , оценена скорость релаксации системы. Для иллюстрации приведены функциональные связи, относящиеся к асимптотическим формам решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В [1] было получено общее решение одномерного уравнения диффузии газовых примесей в планетарных атмосферах. Исследование этих решений показало, что процесс диффузии приводит к формированию характерных слоев, опускающихся в гравитационном поле без дальнейшего перераспределения в них плотности. Такой примесью, в частности, может быть электронно-ионный газ в ионосферной плазме, диффузия которого рассматривается в амбиполярном приближении. Учет рекомбинации приводит к тому, что опускающийся слой, сформированный процессом диффузии в гравитационном поле, устанавливается на определенном высотном уровне и приобретает несколько иную форму высотного распределения плотности.

В настоящей работе рассматривается та же задача, что и в [1], но с учетом исчезновения частиц в реакциях на равномерно распределенной в атмосфере компоненте и эффектов, вызываемых действием однородного ветра или дрейфа. Используемый метод функций Грина дал возможность построить решение для произвольных источников частиц и начальных распределений, а также для произвольных потоков в атмосферу или из нее. Ограничения, при которых рассматривается процесс исчезновения частиц, будут приведены ниже. Следуя [1], мы будем рассматривать уравнение диффузии в следующем виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{D_0 e^z}{H_a^2} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (\delta + 1) \frac{\partial N}{\partial z} + \delta N \right] - N_{p_0} e^{-\epsilon z} - \frac{W}{H_a} \frac{\partial N}{\partial z} + \quad (1.1)$$

$$+ q(z, t),$$

где N — число диффундирующих частиц в 1 см^3 ; $z = \frac{h - h_0}{H_a}$ — отсчитываемая вверх безразмерная координата; H , H_a , H_m — высоты однородных атмосфер соответственно диффундирующей примеси, основной составляющей, определяющей коэффициент диффузии, и составляющей, определяющей исчезновение диффундирующих частиц; W — скорость

однородного движения частиц (ветра или дрейфа); $\beta_0 e^{-\varepsilon z}$ — коэффициент исчезновения частиц примеси; $D_0 e^z$ — коэффициент диффузии; h_0 — фиксированный высотный уровень, выбранный в области рассматриваемых высот; n_0 , β_0 — плотность основной составляющей и коэффициент исчезновения на этом уровне; b — постоянная, входящая в коэффициент диффузии; $q(z, t)$ — плотность источников или стоков частиц в атмосфере; $\delta = H_a/H$; $\varepsilon = H_a/H_m$.

В преобразованном виде [1] уравнение (1.1) выглядит более просто:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \gamma(\xi) + q^*(\xi, t), \quad (1.2)$$

где

$$U = NV^{-1} \exp(c\delta t), \quad a = \frac{b}{4H_a^2 n_0},$$

$$V = \xi^{\delta+1/2} \exp\left(\frac{c}{4a} \xi^2\right), \quad c = \frac{W}{2H_a}, \quad \xi = e^{-z}, \quad (1.3)$$

$$\gamma(\xi) = -d\xi^{-2} \left(\delta - \frac{1}{2}\right) \left(\delta - \frac{3}{2}\right) - \frac{c^2}{4a} \xi^2 - \beta_0 \xi^{2\varepsilon},$$

$$q^*(\xi, t) = qV^{-1} \exp(c\delta t).$$

Мы будем решать уравнение (1.2) в полном виде, введя единственное ограничение при учете исчезновения частиц, заключающееся в предположении, что частицы примеси исчезают на основной компоненте атмосферы, т. е. полагаем $\varepsilon = 1$. Это ограничение не мешает сравнить действие однородного ветра или дрейфа с действием рекомбинации, что полезно при объяснении поддержания ночной области F .

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННЫМ ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА

Уравнение (1.2) без источников будем решать первоначально методом разделения переменных. Положим

$$U = A(t)B(\xi). \quad (2.1)$$

Это приводит к следующим уравнениям:

$$a \frac{d^2 B}{d\xi^2} - \left[a\xi^2 \left(\delta - \frac{1}{2}\right) \left(\delta - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{c^2}{4a} + \beta_0\right) \xi^2 - \lambda \right] B = 0; \quad (2.2)$$

$$A = A_0 \exp(-\lambda t), \quad (2.3)$$

где A_0 и λ — постоянные.

Уравнение (2.2) может быть приведено к стандартному виду уравнения Уиттекера [7]

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{x^2} \right) M = 0, \quad (2.4)$$

если принять

$$x = \xi^2 \left(-\frac{c^2}{4a^2} + \frac{\beta_0}{a} \right)^{1/2},$$

$$M = B\xi^{1/2}, \quad (2.5)$$

$$K = -\frac{\lambda}{4a(c^2/4a^2 + \beta_0/a)^{1/2}};$$

$$\mu = \pm \frac{1-\delta}{2} \equiv \frac{\nu}{2}, \quad \nu = \pm(1-\delta).$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения (2.2) может быть представлено в виде линейной комбинации функций

$$B(\xi) = \xi^{-1/2} M_{k, \mu} \left[\xi^2 \left(\frac{c^2}{4a^2} + \frac{\beta_0}{a} \right)^{1/2} \right], \quad (2.6)$$

где $M_{k, \mu}$ — M -функция Уиттекера. (Мы использовали то условие, что 2μ не является в общем случае целым числом.) В качестве решений уравнения (2.2) вместо M -функций нужно взять B -функцию с индексами $k = 0, \nu/2$, которая может быть выражена через модифицированную функцию Бесселя второго рода (функцию Макдональда):

$$B(\xi) = \xi^{-1/2} M_{0, \mu} [\xi^2 \hat{\beta}] = \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\pi}} \xi^{1/2} K_{\mu} \left(\frac{\xi^2 \hat{\beta}}{2} \right), \quad (2.7)$$

где

$$\hat{\beta} = \left(\frac{c^2}{4a^2} + \frac{\beta_0}{a} \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Отсюда плотность частиц будет:

$$N = \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\pi}} \exp \left[-\frac{\delta-1}{2} z - c\delta t + \frac{c}{4a} \exp(-z) \right] K_{\nu/2} \left[\frac{\hat{\beta}}{2} e^{-z} \right], \quad (2.9)$$

где

$$z = \frac{h-h_0}{H_a} \quad (\nu = 1-\delta).$$

Для упрощения положим $c = 0$ и нормируем это стационарное решение так, чтобы поток частиц из бесконечности, за счет которого поддерживается стационарное распределение, был бы равен единице. В результате получаем

$$N_{\text{стан}} = \frac{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) n_0}{\pi\nu H_a b} \sin \nu\pi \left(\frac{2}{\hat{\beta}} \right)^{\nu/2} \exp \left(-\frac{\delta+1}{2} z \right) K_{\nu/2} \left[\frac{\hat{\beta}}{2} e^{-z} \right]. \quad (2.10)$$

Можно видеть, что выбрав в формуле (2.6) $k = \frac{1}{2} + \mu + n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

мы получим последовательность частных решений, выраженных через обобщенные полиномы Лагерра:

$$U = U_n = \exp \left[-\left(\frac{1}{2} + \mu + n \right) \hat{\tau} - \frac{x}{2} \right] x^{\mu+1/4} L_n^{2\mu}(x), \quad (2.11)$$

где $\hat{\tau} = 2t(c^2 + 4a\beta_0)^{1/2}$ и где мы опускаем постоянный множитель, несущественный при решении линейного уравнения. Заметим, что значения плотности, найденные с использованием этих частных решений,

удовлетворяют условию $N|_{h \rightarrow \pm\infty} = 0$. Весовая функция для обобщенных полиномов Лагерра равна

$$P(x) = e^{-x} x^{2\mu}, \quad (2.12)$$

следовательно, удобно рассматривать следующие две системы ортогональных функций:

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{-x/2} x^\mu L_n^{2\mu}(x), \\ \mu &= \pm \frac{1-\delta}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Выраженное через них решение (2.11) имеет вид

$$U_n = \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \mu + n \right) \hat{\tau} \right] x^{1/2} X_{n, \mu}(x). \quad (2.14)$$

Пусть теперь задано начальное распределение

$$U(\xi, 0) = f(x). \quad (2.15)$$

Его задание равносильно заданию начального распределения плотности

$$N(z, 0) = fV = N_0 \quad (2.16)$$

(см. формулу (1.3)). Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x) = f(x) x^{1/4}. \quad (2.17)$$

Ее разложение в ряд по $X_{n, \mu}$ будет

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_{n, \mu}(x), \quad (2.18)$$

где

$$C_n = \frac{n!}{\Gamma(n + 2\mu + 1)} \int_0^{\infty} \varphi(x_0) X_{n, \mu}(x_0) dx_0. \quad (2.19)$$

Теперь можно видеть, что решением уравнения (1.2) при начальном условии (2.16) является ряд

$$U(x, \hat{\tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{1/4} C_n X_{n, \mu}(x) \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \mu + n \right) \hat{\tau} \right], \quad (2.20)$$

в котором коэффициенты C_n определены выражением (2.19).

3. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Преобразуем далее решение к более компактному виду, просуммировав ряд (2.20) и найдя, таким образом, явное выражение для функций Грина. Это позволит выписать общее решение неоднородного уравнения. Используем формулу Хилле—Харди [3]:

$$\begin{aligned} (1-x_1)^{-1} \left[\exp \left(- \frac{x_2 + x_3}{1-x_1} x_1 \right) \right] (x_1 x_2 x_3)^{-\mu} I_{2\mu} \left[\frac{2(x_1 x_2 x_3)^{1/2}}{1-x_1} \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^{2\mu}(x_2) L_n^{2\mu}(x_3)}{\Gamma(n + 2\mu + 1)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Принимая $x_1 = e^{-\frac{\wedge}{\tau}}$, $x_2 = x$, $x_3 = x_0$, получаем из формулы (2.20)

$$\begin{aligned}
 U(x, \frac{\wedge}{\tau}) &= x^{1/4+\mu} \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \frac{\wedge}{\tau} - \frac{x}{2} \right] \int_0^{\infty} f(x_0) x_0^{-1/4+\mu} e^{-x_0/2} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^{2\mu}(x_0) L_n^{2\mu}(x)}{\Gamma(n+2\mu+1)} e^{-n\frac{\wedge}{\tau}} dx_0 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\wedge}{\tau}} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{1/4} \times \\
 &\times \exp \left(- \frac{x+x_0}{2} \operatorname{cth} \frac{\wedge}{\tau} \right) I_{2\mu} \left[\frac{(xx_0)^{1/2}}{\operatorname{sh} \frac{\wedge}{\tau}} \right] f(x_0) dx_0.
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вернемся теперь к начальным переменным—концентрации N и безразмерной координате $z = \frac{h-h_0}{H_a}$. Можем записать окончательно

$$N(z, \frac{\wedge}{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} N_0(z_0) G_{\pm}(z, \frac{\wedge}{\tau}, z_0) dz_0, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{\pm}(z, \frac{\wedge}{\tau}, z_0) &= \frac{\beta}{2 \operatorname{sh} \frac{\wedge}{\tau}} \exp \left\{ -c\delta t - \frac{\beta}{2 \operatorname{th} \frac{\wedge}{\tau}} \frac{e^{-z} + e^{-z_0}}{2} + \frac{c}{4a} (e^{-z} - e^{-z_0}) - \right. \\
 &\left. - \frac{(\delta+1)z + (1-\delta)z_0}{2} \right\} I_{\nu} \left[\frac{\beta \exp \left(-\frac{z+z_0}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{\wedge}{\tau}} \right],
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

а связь между t и τ определяется формулой (2.13).

Формулы (3.3) и (3.4) определяют общее решение однородного уравнения, выраженное в интегральной форме через начальное распределение, и функцию Грина этого уравнения.

4. ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ФУНКЦИЙ ГРИНА

а) *Функция Грина для «чистой» диффузии.* Общее выражение (3.4) упрощается для ряда важных частных случаев.

Полагая $\beta_0 \rightarrow 0$ и $W \rightarrow 0$ путем предельного перехода $\frac{\wedge}{\tau} \rightarrow 0$ при постоянной величине действительного времени t , т. е. считая, что

$$\lim_{\frac{\wedge}{\tau} \rightarrow 0} \frac{\wedge}{\beta} = \tau = 4at, \quad (4.1)$$

получим из выражения (3.4)

$$G_{\pm}^d = G_{\pm}(z, \tau, z_0) = \frac{1}{\tau} \exp \left\{ -\frac{(\delta + 1) + (1 - \delta)}{2} - \frac{e^{-z} + e^{-z_0}}{\tau} \right\} I_{\nu} \times \left[\frac{2 \exp \left(-\frac{z + z_0}{2} \right)}{\tau} \right], \quad (4.2)$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в работе [1] с помощью интегрального преобразования Фурье—Бесселя. Свойства диффузионных функций Грина (4.2) рассмотрены в той же работе достаточно подробно.

б) *Функция Грина с учетом рекомбинации.* Если $W = 0$ ($c = 0$), а $\beta_0 \neq 0$, то

$$G_{\pm}^{\beta} = G_{\pm}(z, \hat{\tau}, z_0) = \sqrt{\frac{\beta_0}{a}} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\hat{\tau}}{2}} \exp \left\{ -\frac{(\delta + 1)z + (1 - \delta)z_0}{2} - \sqrt{\frac{\beta_0}{a}} \frac{e^{-z} + e^{-z_0}}{2 \operatorname{th} \frac{\hat{\tau}}{2}} \right\} I_{\nu} \left[\sqrt{\frac{\beta_0}{a}} \frac{\exp \left(-\frac{z + z_0}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{\hat{\tau}}{2}} \right], \quad (4.3)$$

где

$$\hat{\tau} = 4t \sqrt{a\beta_0}. \quad (4.4)$$

Для малых времен снова получим

$$G_{\pm}^{\beta} \approx G_{\pm}^d. \quad (4.5)$$

Таким образом, рекомбинация заметно проявляет себя (в изменениях G_{\pm}) лишь через время

$$t > \frac{1}{4 \sqrt{a\beta_0}} = \sqrt{T_d T_{\beta}}. \quad (4.6)$$

Здесь

$$T_d = \frac{H_a^2}{4D}, \quad T_{\beta} = \beta^{-1}, \quad (4.7)$$

$$D = \frac{b}{n_0} \exp \left(\frac{h - h_0}{H_a} \right)$$

— коэффициент диффузии. Выражение (4.6) показывает, что для больших характерных времен рекомбинации T_{β} время чисто диффузионного развития велико. С другой стороны, при больших характерных временах диффузии, T_d распределение долго остается близким к начальному δ -распределению, так что влияние на него рекомбинации оказывается незначительным (рекомбинация не искажает формы кривой распределения, при котором частицы расположены в диапазоне высот, меньшем H_m).

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Для больших времен из формулы (3.4) находим

$$G_+ \approx \left(\frac{\hat{\beta}}{2 \operatorname{sh} \frac{\hat{\tau}}{2}} \right)^{\nu+1} \exp \left[-c\delta t - \frac{\hat{\beta}}{2} (e^{-z} + e^{-z_0}) + \frac{c}{4a} \times \right. \\ \left. \times (e^{-z} - e^{-z_0}) - z - \nu z_0 \right]; \quad (5.1)$$

$$G_- \approx \left(\frac{\hat{\beta}}{2 \operatorname{sh} \frac{\hat{\tau}}{2}} \right)^{\delta} \exp \left[-c\delta t - \frac{\hat{\beta}}{2} (e^{-z} + e^{-z_0}) + \frac{c}{4a} \times \right. \\ \left. \times (e^{-z} - e^{-z_0}) - \delta z \right]. \quad (5.2)$$

При рекомбинации опускание слоя все более замедляется за счет исчезновения частиц в его нижней части, а затем слой останавливается на определенной высоте, и его форма после новой перестройки остается неизменной. Эта форма слоя в соответствии с формулами (5.1), (5.2) описывается выражениями

$$G_- \sim \exp \left[-\delta z - \left(\frac{\hat{\beta}}{2} - \frac{c}{4a} \right) e^{-z} \right]; \quad (5.3)$$

$$G_+ \sim \exp \left[-z - \left(\frac{\hat{\beta}}{2} - \frac{c}{4a} \right) e^{-z} \right]. \quad (5.4)$$

Следовательно, единственно возможной формой слоя без источников опять-таки оказывается квазичепменовская форма, но с другим множителем при второй экспоненте по сравнению с чисто диффузионным чепменовским образованием. Ход кривой в нижней части распределения определяется вторым членом в квадратных скобках, и увеличение множителя перед ним соответствует «подъезду» слоя вниз. Такое «подъезду» равносильно перемещению слоя как целого вверх при одновременном уменьшении его величины, форма его при этом сохраняется (остается чепменовской).

Следует особо отметить, что распространение на бесконечность решения уравнения, учитывающего диффузию газа в гравитационном поле, строго говоря, совершенно недопустимо, так как исходные уравнения теряют физический смысл на конечных и не очень больших высотах. Это проявляется в неограниченном возрастании скоростей и потоков диффузии на бесконечности. Поэтому естественно, что форма (5.2) и (5.3) более соответствует физике процесса, нежели стационарная форма (5.4), так как для обоснования последней приходится вводить понятие о постоянном потоке частиц из бесконечности. Применение таких стационарных решений с условиями на бесконечности, например, в [4, 5] было связано, по-видимому, с трудностями математического анализа нестационарных процессов, поэтому само по себе оно не может служить основанием для постулирования реальности таких потоков (см. [6]). Этот вопрос требует специального исследования.

Следует поэтому строго различать не имеющие физического обоснования решения с конечными потоками на бесконечности и физические решения с нулевыми потоками на бесконечности (которые могут быть выражены через G_-). Для последних не теряют силу представления о диффузионных потоках на любых конечных высотах, а стационарные состояния возможны только при наличии источников в атмосфере. Разного рода оценки потоков на бесконечности, найденные на основе стационарных решений, а также, например, понятие о «критическом потоке» [5] являются, на наш взгляд, следствием формального отношения к теории, в том смысле, что используются аналитические продолжения решений на области, в которых исходные уравнения неприменимы, а определяемые параметры теряют физический смысл.

Высотный ход распределений G_- и G_+ , вычисленный в соответствии с формулами (5.3), (5.4), показан на рис. 1. В верхней части распределение плотности близко к распределению плотности в опускающихся слоях (5.1), (5.2).

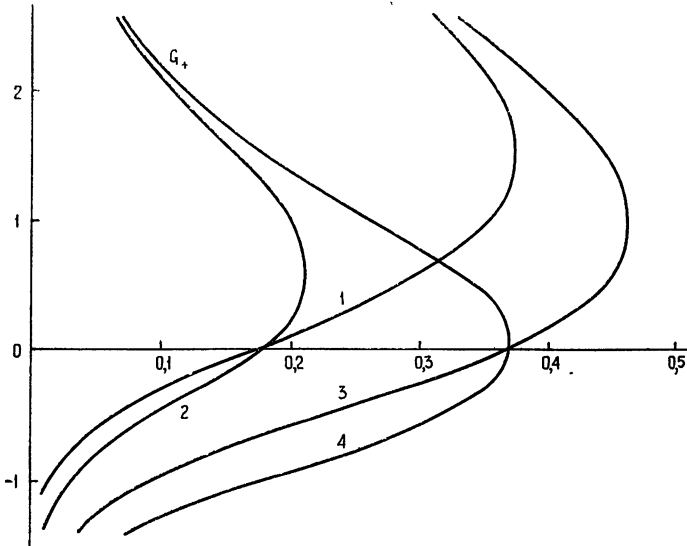


Рис. 1. Опускающиеся (кривые 3, 4) и установившиеся (кривые 1, 2) плазменные слои в ионосфере. (Кривые представляют собой графики правых частей выражений (5.1) и (5.4) соответственно.)

Слой, образовавшийся вначале ниже уровня асимптотического максимума, перемещается вверх за счет интенсивного исчезновения диффундирующих частиц в нижней части распределения и приобретает форму (5.3), (5.4). Кривые перемещения максимумов показаны на рис. 2.

«Подъездание» слоя внизу выводит его из области интенсивной рекомбинации, при этом изменение плотности для больших времен происходит одинаково для всей кривой (независимо от высоты) и определяется экспонентами

$$\exp \left\{ -t \left[\delta c + (2 - \delta) \sqrt{c^2 + 4a\beta_0} \right] \right\} \text{ для } G_+; \quad (5.5)$$

$$\exp \left\{ -t \left[\delta c + \delta \sqrt{c^2 + 4a\beta_0} \right] \right\} \text{ для } G_-. \quad (5.6)$$

В отсутствие ветра ($c = 0$) время уменьшения концентрации в слое в e раз («Время жизни» слоя) T_0 определяется в соответствии с формулами (5.6) выражением

$$T_0 = \frac{2}{\delta} \sqrt{T_\beta T_d}. \quad (5.7)$$

В табл. 1 (верхняя строка) даны значения T_0 , вычисленные по модели Яки для ряда значений экзосферных температур $T_{\text{экс}}$, приведенных в нижней строке таблицы.

Таблица 1

$W = 0$	$W = 5 \text{ м/сек}$	$W = 10 \text{ м/сек}$	$W = 20 \text{ м/сек}$	$T_{\text{экс}}/^\circ\text{K}$
0 ч 53 мин	0 ч 58 мин	1 ч 03 мин	1 ч 15 мин	600
1 16	1 25	1 36	2 16	700
1 42	1 58	2 16	2 58	800
2 10	2 33	3 00	4 02	900
2 37	3 09	3 45	5 11	1000
3 05	3 47	4 37	6 33	1100
3 24	4 18	5 18	7 37	1200
3 55	4 55	6 08	8 59	1300
4 17	5 27	6 50	10 06	1400
4 41	5 59	7 30	11 09	1500
5 03	6 30	8 16	12 28	1600
5 24	7 00	8 56	13 27	1700
5 44	7 28	9 35	14 31	1800
6 04	7 55	10 06	15 25	1900
6 22	8 19	10 36	16 02	2000

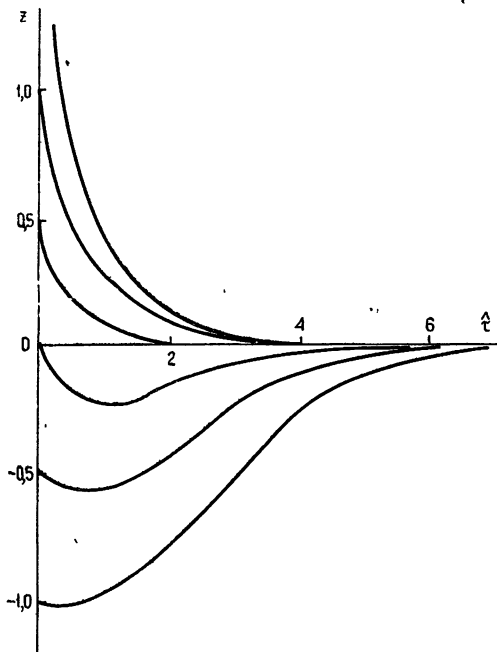


Рис. 2. Перемещение слоев ионосферной плазмы, сформированных на различных высотах.

«Время жизни» ночного слоя с учетом действия ветра определяется выражением

$$T_n = \frac{2}{\delta} \frac{1}{[1/T_d T_\beta + W^2/H_a^2 - W/H_a]^{1/2}}. \quad (5.8)$$

Из формулы (5.8) следует, что уже довольно слабый дрейф плазмы вверх резко увеличивает время жизни слоя F_2 , поднимая его максимум и выводя заряженные частицы из области действия рекомбинации. Значения T_n , вычисленные в соответствии с формулой (5.8) для значений скорости вертикального дрейфа 5, 10 и 20 м/сек, приведены в той же табл. 1. Причиной такого подъема может быть, в частности, горизонтальный нейтральный ветер, направленный к экватору. Примерные величины скорости такого меридионального ветра, создающего эквивалентный подъем слоя F на широте 45° , приведены в правом столбце таблицы.

Выполненный здесь расчет должен рассматриваться как приближенный. Значения скорости ветра могут быть, по-видимому, еще меньше, так как рекомбинация характеризуется, как было сказано в разд. 1, параметром, приблизительно в 1,75 раза меньшим принятого в расчете.

6. ВЫСОТНЫЕ УРОВНИ УСТАНОВЛЕНИЯ МАКСИМУМОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Из формул (5.3) и (5.4) получаем следующее выражение для высоты максимума:

$$Z_{\max}^{(-)} = \ln \left(\frac{\frac{\hat{\beta}}{2} - \frac{c}{4a}}{\delta} \right) \quad \text{для } G_-; \quad (6.1)$$

$$Z_{\max}^{(+)} = \ln \left(\frac{\hat{\beta}}{2} - \frac{c}{4a} \right) = Z_{\max}^{(-)} + \ln \delta \quad \text{для } G_+. \quad (6.2)$$

Подставляя в выражения (6.1) значения параметров из формул (1.3), получим, что слой без учета оттока частиц должен устанавливаться на высоте, где

$$\delta^2 T_\beta = T_d, \quad (6.3)$$

что для ионосферной плазмы (область F , где $\delta \approx 0,4$) дает

$$T_\beta = 6,25 T_d \quad (6.4)$$

(для упрощения здесь не учитывалось действие ветра). Значения высот установления асимптотических плазменных слоев для различных условий в ионосфере, вычисленные согласно формулам (6.1) и (6.2), приведены в табл. 2. В верхней строке приведены высоты, где выполняется соотношение (6.1), во второй строке — высоты, где выполняется соотно-

Таблица 2

$Z_{\max}^{(-)}$	250,5	263	296,7	312,5	328,3	339,5	км
$Z_{\max}^{(+)}$	212	219,5	247	258,5	270	279	км
$T_{\text{экз}}$	600	800	1000	1200	1400	1600	°К

шение (6.2), нижняя строка указывает значения экзосферных температур, которые были приняты в модели атмосферы Якки. Для времени

рекомбинации принято выражение $T_{\beta} = 10^4 \exp \frac{300-h}{50}$, для расчета

времени диффузии использовано выражение для коэффициента диффузии из [2] и данные модели Якки. Как видно из таблицы, различие в уровнях установления асимптотических слоев составляет примерно высоту однородной атмосферы. Высота максимума для решения без оттока частиц оказывается выше уровня, где $T_{\beta} = T_a$, и близка к действительным высотам основного максимума электронной концентрации в ионосфере.

Несмотря на то, что некоторые вопросы требуют уточнения, по-видимому, можно считать, что основная аналитическая задача определения в линейном приближении физических свойств атмосферы (ионосферы) как динамической системы, подверженной постоянной диффузионной перестройке, в общих чертах решена. Аналогично [1] можно записать общее решение неоднородного уравнения, которое однозначно определится при задании начального распределения N_0 и источников возникновения частиц q . Поток на бесконечности полагаем равным нулю, используя функцию G_- . Тогда решение примет вид

$$N = \int_{-x}^x N_0(z_0) G_-(\tau, z, z_0) dz_0 + \int_0^{\tau} d\tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} q(z_0, \tau_0) G_-(\tau - \tau_0, z, z_0) dz_0. \quad (6.5)$$

Полученные аналитические зависимости могут быть полезны при математическом моделировании ионосферных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 840 (1972).
2. В. М. Поляков, В. В. Рыбин, Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца, вып. 18, изд. Наука, М., 1971, стр. 25.
3. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М—Л, 1963.
4. S. A. Bouhill, J. Atmosph. Terr. Phys., 24, 503 (1962).¹
5. J. E. Geisler, S. A. Bouhill, Aeronomy Report, № 5, 1965.
6. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
7. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ИФМЛ, М., 1963, стр. 162.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
28 августа 1972 г.

NONSTATIONARY SOLUTION OF DIFFUSION EQUATION IN GRAVITATIONAL FIELD WITH CONSIDERATION OF DISAPPEARANCE OF PARTICLES AND THEIR TRANSFER

V. V. Makeev, V. M. Polyakov, V. V. Rybin

The general solution of one-dimensional diffusion equation of gaseous admixtures in planetary atmospheres with consideration of disappearance of particles and their transfer is considered and discussed in this paper. This discussion is made taking as an example the ionospheric plasma, where electron-ion gas and its diffusion in ambipolar approximation is considered as the admixture. Analytical expressions for Green's function describing dynamics of the process of reformation of F-region have been found, relaxation speed of the system has been estimated. Functional relations, which apply to asymptotical forms of solution are shown for illustration.

УДК 535.14

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВСТРЕЧНЫХ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ СВЕТА В ЛАЗЕРЕ С ПРОСВЕТЛЯЮЩИМСЯ ФИЛЬТРОМ

Е. Г. Ларионцев, В. Н. Серкин

Рассмотрена динамика формирования сверхкоротких импульсов света в лазере стоячей волны с просветляющимся фильтром, расположенным в центре резонатора.

В лазере стоячей волны с просветляющимся фильтром процесс формирования сверхкоротких импульсов света более сложен, чем в лазере бегущей волны. Частота следования импульсов зависит от положения фильтра внутри резонатора [1].

Установившийся режим самосинхронизации мод в лазере стоячей волны исследовался теоретически в [1]. Динамика формирования сверхкоротких импульсов исследовалась лишь в случае фильтра, расположенного вплотную к одному из зеркал [2]. При этом развитие генерации происходит так же, как и в лазере бегущей волны [3-5].

В настоящей работе анализируется процесс формирования сверхкоротких импульсов света в лазере стоячей волны с просветляющимся фильтром, расположенным в центре резонатора.

1. КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА

Образование сверхкоротких импульсов света в лазере с просветляющимся фильтром носит статистический характер и состоит в выделении наиболее интенсивных флуктуационных выбросов интенсивности в процессе взаимодействия поля с фильтром. В случае бегущей волны коэффициент поглощения безынерционного фильтра κ зависит от амплитуды поля E в виде

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{1 + (E/E_s)^2}. \quad (1)$$

Здесь κ_0 — коэффициент поглощения непросветленного фильтра, E_s — амплитуда поля, при которой поглощение ослабляется вдвое.

Если внутри фильтра одновременно существуют две встречные волны с амплитудами E_1 и E_2 , то в результате интерференции волн возникает стоячая волна и коэффициенты поглощения фильтра $\kappa_{1,2}$ для встречных волн оказываются следующими [2]:

$$\kappa_{1,2} = \frac{\kappa_0}{2} \left(\frac{E_{1,2}}{E_s} \right)^{-2} \frac{\sqrt{1 + 2 \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_s^2} + \left(\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_s^2} \right)^2} \pm \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_s^2} - 1}{\sqrt{1 + 2 \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_s^2} + \left(\frac{E_1^2 - E_2^2}{E_s^2} \right)^2}}. \quad (2)$$

Выражения (2) справедливы для безынерционного фильтра, т. е. при условии, что разность частот встречных волн $\Delta\omega$ и длительности встречных импульсов $\tau_{1,2}$ удовлетворяют неравенству $(\Delta\omega)^{-1}$, $\tau_{1,2} \gg T_b$ (T_b — время релаксации просветленного состояния фильтра).

Предположим, что интенсивности встречных волн существенно различаются ($E_1^2 \gg E_2^2$). Тогда из (2) получим

$$x_1 = \frac{x_0}{1 + \left(\frac{E_1}{E_s}\right)^2}, \quad x_2 = \frac{x_0}{\left[1 + \left(\frac{E_1}{E_s}\right)^2\right]^2}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что в направлении слабой волны фильтр оказывается более просветленным ($x_2 < x_1$). Большая прозрачность фильтра связана с отражением сильной волны от неоднородности поглощения, созданной полем стоячей волны.

В процессе просветления фильтра выделяется наиболее интенсивный флуктуационный выброс интенсивности, поскольку для него фильтр является наиболее прозрачным. Если фильтр расположен в центре резонатора, этот импульс (назовем его основным) проходит через фильтр через интервалы времени $\Delta t = T/2$, где $T = 2L/c$ — период резонатора, L — длина резонатора. Одновременно с основным импульсом через фильтр во встречном направлении проходит более слабый флуктуационный импульс, возникающий через интервал времени $T/2$ после основного. Поскольку в соответствии с выражениями (2), (3) для слабого импульса фильтр более прозрачен, при последовательных прохождении импульсов через резонатор будет происходить выравнивание их амплитуд. В результате после просветления фильтра на выходе из резонатора может возникнуть последовательность сверхкоротких импульсов света с частотой следования $f = 2/T$, тогда как при расположении фильтра вплотную к одному из зеркал резонатора частота следования вдвое меньше.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим одномерную модель лазера. Пусть в центре плоскопараллельного резонатора с координатами зеркал $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ и коэффициентами отражения R_1, R_2 помещен безынерционный просветляющийся фильтр, занимающий область $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, причем $l \ll L$. Будем полагать, что просветление фильтра происходит при полях, недостаточных для насыщения усиления активной среды, т. е. среда линейна.

Поле излучения представим в виде суммы двух встречных волн:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (E_1(x, t) e^{i(\omega t - kx)} + E_2(x, t) e^{i(\omega t + kx)}) + \text{к. с.}$$

Внутри фильтра (при $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$) амплитуды волн $E_{1,2}$ подчиняются уравнениям [2]

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_{1,2}}{\partial t} \pm \frac{\partial E_{1,2}}{\partial x} = \mp \frac{x_{1,2}}{2l} E_{1,2}, \quad (4)$$

где $x_{1,2}$ определяются выражениями (2).

Будем считать, что поглощение фильтра мало ($x_{1,2} \ll 1$). Тогда решение уравнений (4), дающее связь между амплитудами поля на входе и выходе фильтра, можно приближенно представить в виде

$$\begin{aligned} E_1\left(\frac{l}{2}, t\right) &= E_1\left(-\frac{l}{2}, t\right) \left[1 - \frac{x_1}{2}\right], \\ E_2\left(-\frac{l}{2}, t\right) &= E_2\left(\frac{l}{2}, t\right) \left[1 - \frac{x_2}{2}\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассматривая распространение волн в резонаторе с активной средой, получим соотношения

$$\begin{aligned} E_1\left(-\frac{l}{2}, t\right) &= E_2\left(-\frac{l}{2}, t - \frac{T}{2}\right) R_1, \\ E_2\left(\frac{l}{2}, t\right) &= E_1\left(\frac{l}{2}, t - \frac{T}{2}\right) K^2 R_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где R_1, R_2 — коэффициенты отражения зеркал, K — коэффициент усиления среды.

Используя соотношения (5) и (6), приходим к системе уравнений в конечных разностях

$$E_{1,2}(t + T) = E_{1,2}(t) [1 - x_{1,2}] K^2 R_1 R_2. \quad (7)$$

Здесь обозначено $E_1(t) \equiv E_1\left(\frac{l}{2}, t\right)$, $E_2(t) \equiv E_2\left(-\frac{l}{2}, t\right)$.

Уравнения (7) можно приближенно заменить дифференциальными уравнениями

$$T \frac{dE_{1,2}}{dt} = E_{1,2}(\beta - \alpha - x_{1,2}), \quad (8)$$

где $\alpha = \ln \frac{1}{R_1 R_2}$ — линейные потери за проход, β — усиление за проход.

Уравнения (8) справедливы при условии, что изменение поля за время прохода T мало. Это условие с достаточной точностью выполняется для фильтров с начальным поглощением $x_0 \leq 30\%$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ПРОСВЕТЛЕНИЯ ФИЛЬТРА

Уравнения (8) описывают изменение флукутационной структуры излучения в процессе просветления фильтра. Однако аналитическое решение этих уравнений в общем случае затруднительно. Рассмотрим частный случай, когда основной флукутационный выброс интенсивности излучения, описываемый функцией $F_1(t)$, значительно больше, чем флукутационный выброс $F_2(t)$, задержанный на время $T/2$, т. е. $F_1(t) \gg \gg F_2(t)$.

В этом случае уравнения (8) существенно упрощаются:

$$T \frac{dF_1}{dt} = F_1 \left(\beta - \alpha - \frac{x_0}{1 + F_1^2/E_s^2} \right); \quad (9a)$$

$$T \frac{dF_2}{dt} = F_2 \left(\beta - \alpha - \frac{x_0}{[1 + F_1^2/E_s^2]^2} \right). \quad (9b)$$

Решение уравнения (9 а) получено в работах [2-4]. Преобразование профиля поля основного импульса в процессе просветления фильтра определяется известным соотношением

$$F_1(t) = \text{const} [F_{10}(t)]^p, \quad (10)$$

где $F_{10}(t)$ — профиль поля до просветления фильтра, $p = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha - x_0}$

— параметр нелинейности фильтра.

Решив уравнение (9 б), можно получить соотношение

$$\frac{F_2^2(t)}{F_1^2(t)} = p \frac{F_{20}^2(t)}{F_{10}^2(t)}, \quad (11)$$

которое показывает, что после просветления фильтра начальное отношение флуктуационных выбросов $F_{20}^2(t)/F_{10}^2(t)$ увеличивается в p раз. Отсюда следует, что параметр p определяет не только сужение и выделение основного флуктуационного выброса $F_1(t)$ [2-5], но также характеризует эффективность выравнивания флуктуационных выбросов, одновременно просветляющих фильтр во встречных направлениях.

Поскольку обычно p велико ($\sim 10^2$), в соответствии с (11) в процессе просветления фильтра должно происходить существенное выравнивание амплитуд импульсов $F_1(t)$ и $F_2(t)$, что приводит к образованию двух импульсов на периоде T .

Аналогичным образом можно объяснить возникновение трех, четырех и т. д. импульсов на периоде при помещении фильтра на расстояниях $L/3$, $L/4$ и т. д. от зеркала.

Рассмотренный механизм выравнивания амплитуд встречных импульсов позволяет легко понять влияние паразитных отражений внутри резонатора на временную структуру излучения [6]. За счет отражения основного импульса должен возникнуть дополнительный импульс на периоде T , задержанный относительно основного на время $\Delta t = 2x/c$, где x — расстояние от фильтра до отражающей поверхности.

Некоторые выводы можно сделать относительно генерации сверхкоротких импульсов в кольцевых лазерах. В кольцевом лазере независимо от положения фильтра возникнут сверхкороткие импульсы во встречных направлениях, причем относительное расположение импульсов определяется фильтром: импульсы во встречных направлениях должны пересекаться в среде фильтра. Период следования импульсов в каждом из направлений равен L/c , где L — периметр резонатора. В кольцевом лазере с дополнительным зеркалом на периоде L/c возникнут два импульса: основной и менее интенсивный дополнительный импульс, задержанный относительно основного на время $\Delta t = 2\Delta l/c$, где Δl — оптический путь, который проходит основной импульс от фильтра до дополнительного зеркала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Кузнецова, В. И. Малышев, А. С. Маркин, ЖЭТФ, 52, 438 (1967).
2. Т. И. Кузнецова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 10, 1560 (1968).
3. В. С. Летохов, ЖЭТФ, 55, 1077 (1968).
4. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 208 (1969).

5. Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецова, УФН, 106, 47 (1972).

6. В. И. Малышев, А. С. Маркин, А. А. Сычев, ЖПС, 7, 662 (1967).

Научно-исследовательский институт
ядерной физики МГУ

Поступила в редакцию
24 января 1973 г.

INTERACTION OF OPPOSITE SUPER-SHORT LIGHT PULSES
IN THE LASER WITH ABSORBING FILTER

E. G. Lariontsev, V. N. Serkin

The dynamics of forming super-short light pulses in a standing-wave laser with the absorbing filter inserted in the center of the cavity has been considered.

УДК 543.42

СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА $J=21 \rightarrow 22$ В ОКИСИ УГЛЕРОДА

А. А. Калинин, Л. С. Ушаков

Исследована зависимость поглощения окиси углерода от давления в области $60 \div 500$ тор и $T = 295^\circ\text{K}$ при использовании излучения $\lambda = 118$ мкм лазера на парах воды. Определены коэффициент поглощения в центре линии чисто вращательного перехода $J = 21 \rightarrow 22$ и параметр уширения линии из-за столкновений CO—CO ($\gamma_0 = (4,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$ см⁻¹, $K = 2,4 \pm 0,35$ Мгц/тор).

Молекула окиси углерода представляет двухатомную молекулу с неравным нулю дипольным моментом ($\mu = 0,112 \pm 0,005 D$) [1]. В работе [2] исследовалось уширение давлением линий вращательных переходов в C¹²O¹⁶ вплоть до $J = 19$. Для изучения вращательного перехода $J = 21 \rightarrow 22$ в окиси углерода можно воспользоваться излучением субмиллиметрового лазера на парах воды. Частота излучения линии 118 мкм лазера на H₂O измерена с высокой точностью в работе [3] и равна $\nu = 2527,9528 \pm 0,0003$ Ггц. Резонансную частоту перехода $J = 21 \rightarrow 22$ C¹²O¹⁶ легко вычислить, используя значения вращательных постоянных $B_0 = 57\,635,970 \pm 0,003$ Мгц, $D_0 = 0,18390 \pm 0,00014$ Мгц, $H_0 = 0,174$ гц из [4], $\nu_0 = 2\,528,1552 \pm 0,0001$ Ггц.

Расстояние между частотой излучения и частотой перехода составляет 202 Мгц — менее 0,01% от основной частоты. Информацию о спектральной линии можно получить при исследовании зависимости поглощения окиси углерода от давления на фиксированной лазерной частоте.

Коэффициент поглощения γ , соответствующий вращательному переходу, дается выражением

$$\gamma = \frac{8 \pi^3 \nu_0 N f [1 - \exp(-h \nu_0 / kT)]}{3ch} |\mu_{ij}|^2 f(\nu, \nu_0), \quad (1)$$

где N — плотность молекул газа, f — относительное число молекул, находящихся в нижнем из рассматриваемых состояний i и j , между которыми происходит переход, $|\mu_{ij}|^2$ — квадрат матричного элемента дипольного момента, ν_0 — частота этого перехода, ν — частота, на которой происходит измерение поглощения, $f(\nu, \nu_0)$ — функция, описывающая форму линии поглощения.

При уширении линии давлением используют формы линии по Лоренцу, по Ван Флеку-Вейскопфу, по кинетическому уравнению. В случае, когда полуширина линии поглощения $\Delta\nu \gg |\nu - \nu_0|$ и $\Delta\nu \ll \nu_0$, различие между ними практически отсутствует. В данной работе эти условия выполняются, поэтому для анализа воспользуемся одной из этих форм, например, примем, что $f(\nu, \nu_0)$ дается по кинетическому уравнению [5]

$$f(\nu, \nu_0) = \frac{4 \nu^2 \Delta\nu}{\pi[(\nu^2 - \nu_0^2)^2 + 4\nu^2 \Delta\nu^2]} \quad (2)$$

Уширение, обусловленное давлением, выражается соотношением

$$\Delta\nu = KP, \tag{3}$$

где K — коэффициент уширения линии, P — давление. С учетом (2) и (3) выражение (1) можно записать в виде

$$\gamma(P) = \frac{\gamma_0}{(P_0/P)^2 + 1}, \tag{4}$$

$$\gamma_0 = \frac{8\pi^3\nu_0 Nf [1 - \exp(h\nu_0/kT)]}{3ch} |v_{ij}|^2 \frac{1}{\pi KP},$$

γ_0 — коэффициент поглощения в центре линии не зависит от давления, поскольку N прямо пропорционально давлению; $P_0 = \frac{|\nu^2 - \nu_0^2|}{2\nu K}$ есть давление, при котором $\gamma = \gamma_0/2$.

Из выражения для γ_0 видно, что $\gamma_0 K$ есть величина постоянная для данного перехода. В случае $C^{12}O^{16}$ для $J = 21 \rightarrow 22$ вычисления дают

$$(\gamma_0 K)_{\text{теор}} = (11,5 \pm 1,5) \cdot 10^{-2} \text{ Мгц/см} \cdot \text{тор}$$

при $\mu = 0,112 \pm 0,005 D$ и $T = (295 \pm 1)^\circ K$. Таким образом, значение параметра уширения можно определить двумя способами:

$$K_1 = \frac{(\gamma_0 K)_{\text{теор}}}{\gamma_{\text{эксп}}} \quad \text{и} \quad K_2 = \frac{|\nu^2 - \nu_0^2|}{2\nu P_{\text{эксп}}}. \tag{5}$$

В первом случае для вычисления K используется теоретическое значение $(\gamma_0 K)_{\text{теор}}$, во втором случае — теоретическое значение ν_0 .

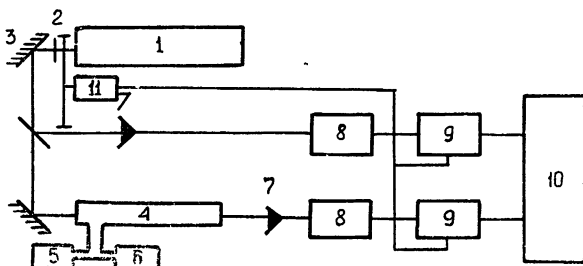


Рис. 1. Блок-схема радиоспектроскопа:
 1 — лазер, 2 — тефлоновая пластинка, 3 — кристалл KRS-5, 4 — поглощающая ячейка, 5 — система напуска CO, 6 — система контроля давления, 7 — детекторы, 8 — усилители, 9 — синхронные детекторы, 10 — двухканальный самописец, 11 — модулятор.

Установка, на которой происходило исследование (см. рис. 1), включает в себя лазер, поглощающую ячейку, систему газонаполнения и контроля давления, регистрирующую систему. Устройство лазера практически не отличается от описанных конструкций [6]. В выходном излучении было обнаружено три компоненты примерно одинаковой интенсивности с $\lambda = 28 \text{ мкм}$, $\lambda = 79 \text{ мкм}$, $\lambda = 118 \text{ мкм}$, при этом относительные интенсивности существенно зависели от режима разряда и от юстировки резонатора. Кроме того, излучение с $\lambda = 28 \text{ мкм}$ отрезалось тефлоновой пластинкой толщиной 3 мм (пропускание на $\lambda = 28 \text{ мкм}$ менее 1%, 118 мкм — 70%), а излучение с $\lambda = 79 \text{ мкм}$ подавлялось отражением от KRS-5 (отражение 79 мкм — 4%, 118 мкм — 50%). В режиме, оптимальном для генерации линии 118 мкм, интенсивности линий 28 и 79 мкм после прохождения излучения лазера через тефлоновую пластинку и отражения от KRS-5 были не менее чем на 2,5 порядка сла-

бее интенсивности излучения с $\lambda = 118$ мкм. Линию 220 мкм обнаружить не удалось.

Прошедший через ячейку сигнал сравнивался с контрольным сигналом, затем вводилась поправка на разницу в коэффициентах усиления контрольного и измерительного трактов. Стабильность излучения лазера была невысокой, заметное падение уровня сигнала наблюдалось за несколько минут, после чего необходимо было проводить подстройку резонатора. Поскольку нестабильность длины резонатора не позволяет удерживать частоту генерации в какой-либо точке доплеровского контура усиления активной среды лазера, который составляет около 20 МГц, необходимо принять, что частота излучения лазера во время измерений меняется относительно средней частоты в районе ± 10 МГц. При значении параметра уширения $K \sim 2,5$ МГц/тор и для формы линии вида (2) такая ошибка в коэффициенте поглощения составляет несколько процентов.

При каждом давлении снималось не менее 10 точек через интервал времени 30 сек.

Поглощающая ячейка представляет собой стеклянную трубу длиной $L = 700$ мм и диаметром $2a = 40$ мм. Окна на концах выполнены из тефлона толщиной 1 мм.

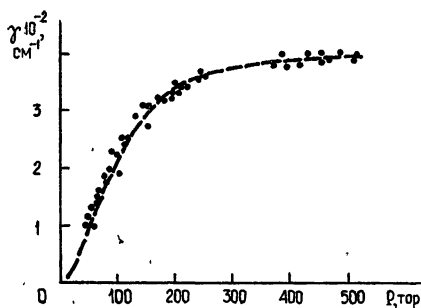


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения от давления.

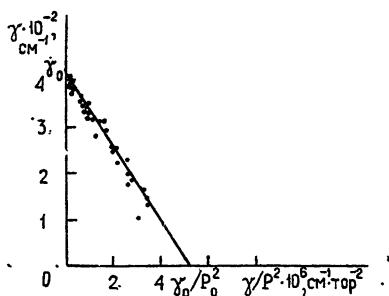


Рис. 3. Определение средних значений параметров γ_0 и P_0 из экспериментальных данных.

Получение и очистка окиси углерода проводилась по методике [8] с дополнительной фракционированной перегонкой.

Измерения проводились при комнатной температуре. Результаты измерений представлены на рис. 2. Уравнение (4) можно записать в виде

$$\gamma(P) = \gamma_0 - P_0^2 \frac{\gamma(P)}{P^2}; \quad (6)$$

в координатах γ , γ/P^2 —это прямая линия. Такое построение приведено на рис. 3. Для давлений 60 ÷ 500 тор методом наименьших квадратов проведена прямая, которая дает $\gamma_0 = (4,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$ см⁻¹, $P_0 = (86 \pm 7)$ тор, что соответствует значениям $K_1 = 2,8 \pm 0,4$ МГц/тор, $K_2 = 2,3 \pm 0,2$ МГц/тор и среднему значению $K = 2,4 \pm 0,35$ МГц/тор. Сравнение экспериментальных данных по уширению давлением с теоретическими проведено с помощью рис. 4: теоретическая зависимость параметра K от J для квадруполь-квадрупольного взаимодействия в СО при двух значениях Q взята из работы [9], экспериментальные значения для $J = 1; 2$ и для $J = 6 \div 19$ —из [2], для $J = 21$ приведено значение $K = 2,4 \pm 0,35$ МГц/тор, полученное в данной работе.

Расхождение между теоретическими и экспериментальными дан-

ными вызвано, по-видимому, неучетом более высоких степеней в разложении потенциала взаимодействия между молекулами CO в ряд по степеням обратного молекулярного расстояния. Эти члены существенны для молекул типа CO, обладающих малой величиной дипольного момента.

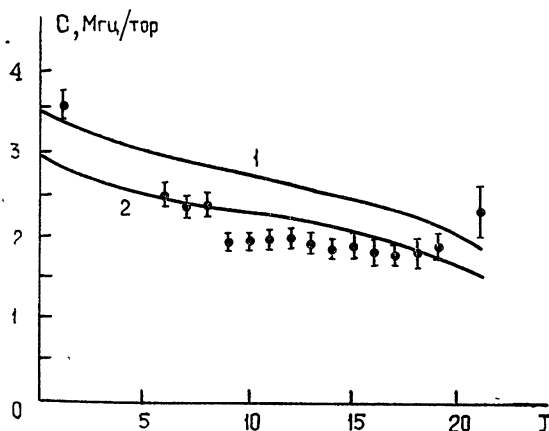


Рис. 4. Зависимость параметра уширения от J . Экспериментальные данные до $J=19$ взяты из работы [2]. Значение $K=(2,4 \pm 0,35)$ Мгц/тор получено в данной работе. Кривые представляют теоретический расчет квадруполь-квадрупольного взаимодействия в CO при двух значениях Q [7]. 1— $Q=5 \cdot 10^{-26}$ ед. CGSE, 2— $Q=4 \cdot 10^{-26}$ ед. CGSE.

Проведенный расчет показал, что переходов в $C^{12}O^{16}$, близких к одной из линий излучений 28, 79, 220 мкм настолько, что они могли бы повлиять на результаты измерений для $J=21 \rightarrow 22$, не существует. Аналогичные расчеты были выполнены и для изотопов CO (вращательные постоянные брались из [7]). Они показали, что влиянием изотопов в исследуемом газе также можно пренебречь.

Приведенная ошибка среднего значения коэффициента уширения линии $K=2,4 \pm 0,35$ Мгц/тор соответствует доверительной вероятности 0,92.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. A. Burrus, J. Chem. Phys., 28, 427 (1958).
2. J. M. Dowling, JQSRT, 9, 1613 (1969).
3. L. Frenkel et al., Appl. Phys. Lett., 11, 344 (1967).
4. D. H. Rank et al., J. Mol. Spectros., 18, 418 (1965).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
6. Техника субмиллиметровых волн, под редакцией Р. А. Валитова, М., 1969.
7. B. Rosenblum et al., Phys. Rev., 109, 400 (1958).
8. Руководство по препаративной неорганической химии, под редакцией Г. Бауэра, М., 1956.
9. W. S. Benedict, R. Herman, JQSRT, 3, 265 (1963).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
24 июля 1972 г

SPECTROSCOPIC INVESTIGATION OF ROTATIONAL TRANSITION $J=21 \rightarrow 22$ IN CARBON OXIDE

A. A. Kalinkevich, L. S. Ushakov

The dependence of carbon oxide absorption on the pressure ranged from 60 to 500 torr and at $T=295^\circ$ when using the water vapour laser emission at $\lambda=118 \mu$ is investigated. The absorption coefficient in the line center of purely rotational transition $J=21 \rightarrow 22$ and the parameter of the line broadening due to collisions of CO—CO ($\gamma_0=(4,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, $K=2,4 \pm 0,35 \text{ Mc/s torr}^{-1}$) are determined.

УДК 538.574

О САМОВОЗДЕЙСТВИИ И ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

М. И. Рабинович, Л. Е. Штильман

Предлагается метод описания процессов взаимодействия волн с произвольным, ограниченным снизу спектром в слабонелинейных средах. Показано, что в случае, когда фаза меняется хаотически, уравнения первого приближения переходят в известное кинетическое уравнение для волн. Для решения уравнений первого приближения предлагается метод разделения переменных, основанный на приближении заданной структуры спектров взаимодействующих волн. Показано, что частным случаем такого подхода является метод усреднения по стационарным волнам [5]

Интерес к исследованию процессов самовоздействия и взаимодействия волн с непрерывным (сплошным) спектром возник в связи с задачами физики твердого тела и проблемами турбулентности в плазме [2, 3] и гидродинамике. Основные результаты в этом направлении получены, как известно [1-3], с помощью метода кинетического уравнения для волн. Это уравнение для спектральных интенсивностей волн может быть получено из соображений баланса энергии в предположении, что фазы всех полей не сказываются на процессе взаимодействия. Предположение о хаотическом изменении фаз позволяет описывать процессы взаимодействия волн лишь в терминах интенсивностей или числа квантов, при этом взаимодействие волн не отличается от взаимодействия квазичастиц и описывается с помощью интеграла столкновений. Естественно, что в рамках кинетического уравнения не могут быть учтены такие эффекты, как дисперсионное распыливание, дифракция и т. д. Кроме того, с точки зрения общей теории и для многих конкретных задач (например, для исследования взаимодействия частотно-модулированных волн) представляет интерес получение приближенных уравнений, описывающих взаимодействие неодномерных волн со сплошным спектром с не обязательно хаотизированными фазами. Как частные случаи из этих уравнений должны следовать в первом приближении кинетическое уравнение для волн и уравнения, описывающие взаимодействие одномерных волн с дискретным спектром, т. е. периодических [5].

Ниже дается способ получения таких приближенных уравнений для описания процессов взаимодействия волн с непрерывным спектром в слабонелинейных неодномерных системах. Предлагаемый подход является развитием асимптотического метода, изложенного в [4].

1. Рассмотрим слабонелинейную среду, которая описывается системой уравнений

$$A(\rho, \tau) \frac{\partial u}{\partial t} + B(\rho, \tau) \nabla_r u + C(\rho, \tau) u = \sum_m \mu^m f^m(u, u_x, r, t, \rho, \tau) \quad (1.1)$$

$$(\rho = \rho_0 + \mu r, \quad \tau = \tau_0 + \mu t, \quad \mu \ll 1),$$

где B и A, C — квадратные матрицы с числом элементов соответственно $3n^2$ и n^2 ; f, u — n -мерные векторы, причем переменная u включает в себя компоненты векторного и скалярного полей, а f допускает преобразование Фурье.

В нулевом приближении ($\mu = 0$) поле в среде можно представить в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^a \int \Psi^l(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k})) a_l(\rho_0, \tau_0, \mathbf{k}) \times \exp\{i[\omega_l(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r}]\} d\mathbf{k}. \quad (1.2)$$

Здесь $a_l(\rho_0, \tau_0, \mathbf{k})$ — комплексный спектр поля, определяемый начальными и граничными условиями, связь $\omega_l = \omega_l(\mathbf{k})$ дается дисперсионным уравнением

$$D(\omega_l, \mathbf{k}, \rho_0, \tau) = \text{Det} |A \omega_l - B\mathbf{k} - iC| = 0, \quad (1.3)$$

l — индекс нормальной волны (ветви дисперсионного уравнения), а $\Psi^l(\mathbf{k})$ — поляризационный вектор, определяемый системой

$$(A \omega_l - B\mathbf{k} - iC) \Psi^l = 0. \quad (1.4)$$

Из-за влияния малой нелинейности и плавно меняющихся параметров среды спектр поля $a(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))$ плавно зависит от \mathbf{r}, t . Это, естественно, справедливо лишь в том случае, когда в спектре (1.2) не представлены низкие частоты и малые волновые числа, т. е. локальный спектр $a(\mathbf{k}, \rho, \tau)$ — медленно меняющаяся функция по сравнению с $\exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})]$, где $\mathbf{k}_0, \omega_0(\mathbf{k}_0)$ — минимальные составляющие спектра. Именно этим ограничением и будем пользоваться в дальнейшем, полагая, что волны с параметрами $\omega < \omega_0, k_x < k_{0x}, k_y < k_{0y}, k_z < k_{0z}$ либо лежат за пределами полосы прозрачности среды (1.1) и быстро затухают, либо среда в области низких частот обладает сильной дисперсией и возбуждаемые малой нелинейностью волны с $\omega < \omega_0$ и $k_i < k_{0i}$ из-за отсутствия синхронизма (резонанса) остаются малыми при любом \mathbf{r} и t .

В соответствии со сказанным решение (1.1) при $\mu \neq 0$ будем искать в виде

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^q \int_{k_0}^{\infty} \Psi^i(\mathbf{k}, \rho, \tau) a_i(\mathbf{k}, \rho, \tau) \exp[i\theta_i(\mathbf{k}, \rho, \tau, \mathbf{r}, t)] d\mathbf{k} + \text{к. с.} + \sum_{n=1}^m \mu^n \omega^{(n)}, \quad (1.5)$$

где $a_i(\mathbf{k}, \rho, \tau)$ — медленно меняющаяся амплитуда \mathbf{k} -й компоненты спектра, а θ_i — полная фаза. Заметим, что в отличие от случая волн с дискретным спектром, даже если параметры среды меняются мало (т. е. A, B, C — матрицы с постоянными элементами), $\theta_i \neq \omega_i t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_i$, при $\mu = 0$, поскольку \mathbf{k} — независимая переменная. В (1.5) должны быть учтены все возникающие из-за нелинейности поля, удовлетворяющие условию резонанса $n_i \theta_i + n_j \theta_j = n_l \theta_l + \theta_0$. Функции a_i и θ_i определим уравнениями (ср. [4])

$$\frac{\partial a_i}{\partial \tau} = F_1^i\{\mathbf{k}, \tau, \rho, a_1, \dots, a_i, \theta_1, \dots, \theta_i\} + \mu F_2^i + \dots$$

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} = \Phi_0^l \{ \mathbf{k}, \tau, \rho, a, \dots, a_l, \theta_1, \dots, \theta_l \} + \mu \Phi_1^l + \dots, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial r} = -\mathbf{k} = \bar{\Phi}_0^l.$$

Здесь F и Φ — дифференциальные операторы в частных производных по \mathbf{k} , ρ и τ , которые определяются из условия малости функций $w^{(n)}(\mathbf{r}, t)$. Последние два уравнения системы (1.6) несимметричны, а именно, оператор Φ_0^l неопределен и в общем случае зависит от ρ и τ , оператор же $\bar{\Phi}_0^l = -\mathbf{k}$ — текущий аргумент. Указанная несимметрия в (1.6) связана с тем, что решение (1.5) представляется в виде непрерывного разложения по нормальным волнам, каждой из которых соответствует свое текущее \mathbf{k} , т. е. пространственная производная от полной фазы \mathbf{k} -й пространственной гармоники всегда задана. Если бы в (1.5) разложение производилось по нормальным колебаниям, то следовало бы считать заданным $\Phi_0 = \omega$, а оператор $\bar{\Phi}_0 = \bar{\Phi}_0(\omega, \rho, \tau)$ подлежал бы определению.

Уравнения для $w^{(n)}$ получим после подстановки (1.5), (1.6) в (1.1), потребовав равенства нулю коэффициентов при μ^n :

$$(A \Phi_0^l - B\mathbf{k} - iC) \Psi^l = 0; \quad (1.7)$$

$$A \frac{\partial w^{(n)}}{\partial t} + B \nabla w^{(n)} + C w^{(n)} = h^{(n)}(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}, \rho, \tau), \quad (1.8)$$

где $\Phi_0^l = \omega_l(\mathbf{k}, \rho, \tau)$ определяется дисперсионным уравнением

$$D(\Phi_0^l, \mathbf{k}, \rho, \tau) = \text{Det} | A \Phi_0^l - B\mathbf{k} - iC | = 0, \quad (1.9)$$

а $h^{(1)}$ и $h^{(n)}$ равны

$$h^{(1)} = f^{(1)} - \sum_{i=1}^a \int_{k_0}^{\infty} \left\{ A \left[\Psi^l \left(F_1^l + i a_l \Phi_1^l + \frac{\partial \omega_l}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} a_l \right) + a_l \left(\frac{\partial \Psi^l}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega_l}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l \right) \right] + B \left[\Psi^l \left(\nabla_{\rho} a_l + \nabla_{\rho} \omega \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\nabla_{\mathbf{k}} a_l \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \right) + a_l \left(\nabla_{\rho} \Psi^l + \nabla_{\rho} \omega_l \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l \right) \right) \right] \right\} \exp(i \theta_l) d\mathbf{k}, \quad (1.10)$$

$$h^{(n)} = f^{(n)} - \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial u} w^{(1)} + \dots - \sum_{c=1}^q \int_{k=0}^{\infty} [A \Psi^l (F_n^l + i a_l \Phi_n^l)] \times \\ \times \exp(i \theta_l) d\mathbf{k} - A \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial \tau} - B \nabla w^{(n-1)} \quad (n \geq 2),$$

где под $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega}$ понимается вектор $\left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right)^{-1}, \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right)^{-1}, \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right)^{-1} \right)$.

Теперь, считая τ и ρ параметрами, определим условия, которые необходимо наложить на правые части линейных уравнений (1.8), чтобы $w^{(l)}$ были ограничены. Ввиду того, что τ и ρ здесь параметры, полную фазу l -й нормальной волны можно представить в виде $\theta_l = \omega_l t - \mathbf{k} \mathbf{r} + \varphi_l$.

После преобразования Фурье по \mathbf{r} , t из (1.8) получаем

$$(A \omega - B\mathbf{k} - iC) W_{\omega \mathbf{k}} = i \left[\sum_{l=1}^q H_l(\mathbf{k}) + \bar{H}(\omega, \mathbf{k}) \right]. \quad (1.11)$$

Здесь фурье-образ функции $h(\mathbf{r}, t, \rho_0, \tau_0)$ представлен в виде двух слагаемых: $H(\mathbf{k}) = \sum_{l=1}^q H(\omega_l, \mathbf{k})$ — часть спектра, которая соответствует собственным волнам системы (ω_l и \mathbf{k} связаны дисперсионным уравнением (1.3), и $\bar{H}(\omega, \mathbf{k})$ — возникший из-за нелинейности и сторонних полей спектр, для которого ω и \mathbf{k} не удовлетворяют (1.3). Вынужденное решение (1.8) также представляется в виде $W_{\omega, \mathbf{k}} = \sum_{l=1}^q W_l(\mathbf{k}) + \bar{W}(\omega, \mathbf{k})$, где $W_l(\mathbf{k}) = W(\omega_l(\mathbf{k}), \mathbf{k})$. Решение $\bar{W}(\omega, \mathbf{k})$ существует и ограничено без каких-либо условий, накладываемых на правую часть $H(\omega, \mathbf{k})$. Для $W_l(\mathbf{k})$ ограниченное решение, как известно, существует лишь при выполнении условий ортогональности

$$(\zeta_l(\mathbf{k}), H_l(\mathbf{k})) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, q), \quad (1.12)$$

где ζ — собственный вектор системы, сопряженной (1.8). Подставив сюда выражение для $H(\mathbf{k})$, найдем вид искоемых операторов F и Φ .

Учитывая, что

$$\begin{aligned} H_l^{(1)}(\mathbf{k}) = & -A \left[\Psi^l \left(F_1^l + i a_l \Phi_1^l + \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} a_l \right) + a_l \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l \right) \right] - B \left[\Psi^l \left(\nabla_{\rho} a_l + \nabla_{\rho} \omega \left(\nabla_{\mathbf{k}} a_l \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \right) + \right. \\ & \left. + a_l \left(\nabla_{\rho} \Psi^l + \nabla_{\rho} \omega_l \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l \right) \right) \right] + \langle f^{(1)}(u^0, \nabla_r u^0, u_r^0, \mathbf{r}, t) \times \\ & \times \exp[-i(\omega_l(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_l)] \rangle, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$u^0 = u - \sum_{i=1}^m \mu^i \omega^{(i)},$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{r}, t) \rangle = & \frac{1}{(2\pi)^4} \int_x^{x+\Delta_x} \int_y^{y+\Delta_y} \int_z^{z+\Delta_z} \int_t^{t+T} \varphi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt \\ & \left(\Delta_l \gg \frac{2\pi}{k_{0l}}, \quad T \gg \frac{2\pi}{\omega(k_0)} \right); \end{aligned} \quad (1.14)$$

получим из (1.12)

$$F_1^l = -\mathbf{v}_l \nabla_{\rho} a_l - \left(\nabla_{\rho} \omega_l + \frac{\partial \omega_l}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \nabla_{\mathbf{k}} a_l - a_l G_l^{(1)} + \text{Re } f_l^{(1)},$$

$$\Phi_1^l = \frac{1}{a_l} \text{Im } f_l^{(1)},$$

где

$$f_l^{(1)} = \sum \frac{D_{ij}^l(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k})) \langle f_i^{(n)} \exp[-i(\omega_l t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_l)] \rangle}{\Psi_j D_{\omega_l}^l(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}))},$$

а

$$\begin{aligned} G_l^{(1)} = & \left(\zeta, \left[A \left(\Psi_r^l + \frac{\partial \omega_l}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l \right) + B \left(\nabla_{\rho} \Psi_l + \nabla_{\rho} \omega \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l \right) \right) \right] \right) [(\zeta, A \Psi)]^{-1}. \end{aligned}$$

В (1.14) использованы соотношения

$$v_l = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{(\zeta^l, B \Psi^l)}{(\zeta^l, A \Psi^l)}, \quad \frac{\zeta_k^*}{(\zeta^l, A \Psi^l)} = \frac{D_{kj}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})}{D' \omega_l \Psi^l}.$$

В соответствии с (1.6), (1.14) уравнения первого приближения для a_l и θ_l представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_l}{\partial t} + v_l \nabla_r a_l + \left(\nabla_r \omega_l + \frac{\partial \omega_l}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \nabla_k a_l = \\ = \mu a_l G_l^{(1)} + \mu \operatorname{Re} f_l^{(1)}(a, \mathbf{k}, \rho, \tau, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \theta_t), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \omega_l(\mathbf{k}, \rho, \tau) = \frac{\mu}{a_l} \operatorname{Im} f_l^{(1)}(a, \mathbf{k}, \rho, \tau, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \theta_t)$$

$$(l = 1, 2, \dots, q).$$

Полученные уравнения как по виду, так и по смыслу отличаются от соответствующих уравнений для одномерных волн с дискретным спектром [4]. В данном случае уравнения помимо пространственных и временной переменных содержат еще независимую переменную \mathbf{k} . Этим, в частности, определяется появление в уравнении для амплитудного спектра дополнительного слагаемого $\nabla_k a$, характеризующего деформацию волнового пакета из-за неоднородности и нестационарности параметров среды; по той же причине уравнения для θ_l в первом приближении линейны (в отличие от a_l). Подчеркнем также, что уравнения (1.15) описывают поведение сколь угодно широких пакетов волн в слабонелинейной среде с произвольной дисперсией (при $\omega > \omega_0$), при этом скорость изменения локального пространственно-временного спектра волны определяется как нелинейностью и дисперсией, так и начальными и граничными условиями, т. е. скоростью изменения формы волны по r или t при $t = t_0$ или $S = S_0$ (под S_0 понимается поверхность, на которой заданы граничные условия)*.

Найдем теперь уравнения второго приближения, ограничившись для простоты выкладок случаем $f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$, т. е. будем считать, что скорость изменения формы волны, определяемая дисперсией или начальными и граничными условиями, существенно больше величины нелинейности. Учитывая (1.14), представим $H_l^{(1)}$ в виде

$$\begin{aligned} H_l^{(1)}(\mathbf{k}) = (A\mathbf{v} - B) \Psi^l \nabla_\rho a_l + \left(A \frac{\partial \omega_l}{\partial t} - B \nabla_\rho \omega_l \right) \Psi^l \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \times \\ \times \nabla_k a_l + a_l \left[A \left(\Psi^l G_l^{(1)} - \frac{\partial \Psi^l}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega_l}{\partial \tau} \left(\nabla_k \Psi^l \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \right) - \right. \\ \left. - B \left(\nabla_\rho \Psi^l + \nabla_\rho \omega \left(\nabla_k \Psi^l \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Определив затем $W_l^{(1)}(\mathbf{k})$, из (1.11) (см. аналогично [4]) и потребовав ограниченности $W_l^{(1)}(\mathbf{k})$, найдем F_2^l и Φ_2^l :

* В [4] получены соответствующие уравнения для квазигармонических волн, а в [5] для квазипериодических волн произвольной формы.

$$F'_2 = a_l G_l^{(2)} + \text{Re } f_l^{(2)}, \tag{1.17}$$

$$G_l^{(2)} = \left(\alpha^l(\mathbf{k}) \nabla_\rho \frac{\partial \theta_l}{\partial \tau} \right) + \beta^l \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \theta_l}{\partial \chi_\alpha \partial \chi_\beta};$$

$$a_l \Phi_2^l = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{x_\alpha} \partial k_{x_\beta}} \left[\frac{\partial^2 a_l}{\partial \chi_\alpha \partial \chi_\beta} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_\rho a_l \right) \times \right. \\ \times \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_\rho \omega \right) \frac{\partial^2 a_l}{\partial \chi_\alpha \partial k_\beta} \right] + \alpha^l(\mathbf{k}) \frac{\partial \omega_l}{\partial \tau} \times \\ \times \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \right) \frac{\partial a_l}{\partial \tau} - \alpha^l \nabla_\rho a_l G_l^{(1)} + P_l + \text{Im } f_l^{(2)}, \tag{1.18}$$

$$\alpha^l = \frac{(\zeta^l, A \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l)}{(\zeta^l, A \Psi^l)}, \quad \beta^l(\mathbf{k}) = \frac{(\zeta^l, B \nabla_{\mathbf{k}} \Psi^l)}{(\zeta^l, A \Psi^l)};$$

$$P_l = \alpha^l(\mathbf{k}) \nabla_\rho \text{Im } f_l^{(1)}.$$

После подстановки (1.17), (1.18) в (1.16) получим окончательно уравнения второго приближения:

$$\frac{\partial a_l}{\partial t} + \mathbf{v}_l \nabla_r a_l + \left(\nabla_r \omega_l + \frac{\partial \omega_l}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right) \nabla_{\mathbf{k}} a_l = \\ = \mu a_l G_l^{(1)} + \mu + \mu^2 a_l G_l^{(2)} + \mu^2 \text{Re } f_l^{(2)}, \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \omega_l + \frac{1}{2a_l} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{x_\alpha} \partial k_{x_\beta}} \left[\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_r \omega \right) \frac{\partial^2 a_l}{\partial x_\alpha \partial k_\beta} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_r a_l \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial x_\beta} \right] - \\ - \frac{\alpha^l(\mathbf{k})}{a_l} \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \nabla_{\mathbf{k}} \right) \frac{\partial a_l}{\partial t} = \frac{\mu^2}{a_l} \text{Im } f_l^{(2)} - \\ - \mu^2 \frac{1}{a_l} \alpha^l \nabla_r a_l G_l^{(1)} + \mu^2 P_l. \tag{1.19}$$

Для среды, параметры которой с точностью до μ постоянны, левая часть уравнений по виду совпадает с уравнениями второго приближения для квазигармонических волн.

2. Воспользовавшись (1.19), получим уравнение, описывающее распространение в изотропной среде пучка с узким угловым спектром. Это уравнение является обобщением на случай волны с непрерывным частотным спектром известного нелинейного параболического уравнения [6]. Будем считать процесс стационарным и предположим, что зависимость спектральной амплитуды от координаты z вдоль распространения пучка имеет более высокий порядок малости по μ , чем зависимость от поперечных координат. Из сделанных выше предположений следует: ввиду изотропности среды

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{x_i} \partial k_{x_j}} = \delta_{ij} \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{k_{x_i} k_{x_j}}{k^2} - \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{k_{x_i} k_{x_j}}{k^3}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_{x_i}} = \frac{k_{x_i}}{k} \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

ввиду узости углового спектра $k \approx k_z$ и, следовательно, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{x_i} \partial k_{x_j}} = 0$ при $i \neq j$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_z^2} = v'_k$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k_{x,y}^2} = \frac{v}{k}$; кроме того, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2, y^2} \gg \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$.

Будем также считать, что параметры среды постоянны. Тогда из (1.19), принимая во внимание сказанное, получим $\left(a = a_i \exp \left[i \int \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial t} - \omega_i \right) dr \right] \right)$

$$v a'_z + \frac{i}{2} \frac{v}{k} \Delta_{\perp} a + i \beta \frac{\partial k}{\partial \omega} \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial k} = \mu^2 f^{(2)} \quad (2.2)$$

или для задачи с граничными условиями ($\omega \rightleftharpoons k$)

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} a'_z + \frac{i}{2\omega} \frac{\partial k}{\partial \omega} \Delta_{\perp} a + i \beta v \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \omega} = \mu^2 f^{(2)}. \quad (2.3)$$

Если рассматривать распространение квазимонохроматического пучка электромагнитных волн в среде с кубичной нелинейностью ($f_i^{(2)}$ — полином третьей степени относительно a), то из (1.19) следует известное параболическое уравнение, используемое в теории стационарной самофокусировки [6]:

$$\Delta_{\perp} a - 2ik + k^2 Q_{NL}(a^2)a = 0. \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнение (2.2), в отличие от (2.4), обладает рядом особенностей, которые связаны с зависимостью спектральной амплитуды от k . В частности, для нелинейных сред, в которых возможна самофокусировка, диффузия энергии по спектру, описываемая слагаемым $\beta \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial^2 a}{\partial z \partial \omega}$, может либо способствовать, либо препятствовать самофокусировке в зависимости от знака дисперсии.

3. Рассмотрим связь полученных уравнений первого приближения (1.15) с кинетическим уравнением для волн. Естественно предположить, что если на характерных пространственных интервалах изменения амплитуд фазы спектральных компонент многократно меняются, то в первом приближении для нелинейного процесса существенны лишь средние по фазам комбинации физических величин, например интенсивности полей. Этот постулат является основным при описании нелинейных взаимодействий с помощью кинетического уравнения для волн. Поскольку простейшими комбинациями полей, среднее от которых не обращается в нуль, являются квадратичные, кинетическое уравнение обычно записывают для средних спектральных интенсивностей полей:

$$I_k(k, \rho, \tau) = \langle S_k S_{k'} \rangle \delta(k - k'), \quad (3.1)$$

где (см. (3.2))

$$S = a e^{i\varphi}.$$

Причины, вызывающие быстрое изменение фаз* (по сравнению с амплитудами), могут быть самыми различными, но основными являются, по-видимому, присутствие в системе сторонних полей со случайными фазами или случайные неоднородности среды (с характерным размером $\ll 2\pi/k_0$), либо начальные (при $t = 0$) или граничные (на

* Фазы должны оставаться медленно меняющимися функциями по сравнению с $\exp[i(\omega_0 t - k_0 r)]$.

поверхности S_0) флуктуации фазы, т. е. начальный или граничный шум. Хаотизация фаз может произойти и в чисто динамической нелинейной системе в результате чрезвычайно большого числа взаимодействий. Облегчающим обстоятельством в этом случае является наличие в среде слабой дисперсии, которая препятствует, как правило, синхронизации фаз взаимодействующих волн. Заметим, однако, что в нелинейных средах и с дисперсией и без дисперсии возможны и чисто регулярные решения, например стационарные волны или простые и ударные волны. Какой процесс — регулярный или стохастический — реализуется при регулярных начальных данных в конкретной нелинейной системе, зависит, по-видимому, от устойчивости регулярных решений, и в данной работе этот вопрос не рассматривается (см., например, [7]).

Таким образом, для получения из (1.15) кинетического уравнения следует предполагать, что фаза $\theta_i(\mathbf{k}, \rho, \tau)$ меняется по ρ и τ много быстрее, чем амплитуда, и провести в (1.15) усреднение по фазам, преобразовав их так, чтобы они содержали лишь четные степени комбинаций полей. Поскольку фаза изменяется много быстрее амплитуды, характерный интервал изменения которой суть минимальный из интервалов, определяемых нелинейным взаимодействием либо изменением параметров среды, при усреднении по фазам медленное изменение параметров среды можно не учитывать. Поэтому здесь будем считать (напомним,

$$\text{что } \varphi_i(\rho, \tau) = \int \Omega(\rho, \tau) d\tau, \quad \Omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} - \omega$$

$$\theta_i = \omega_i(\mathbf{k}, \rho', \tau')t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_i(\rho, \tau),$$

$$\mu \ll \varepsilon \ll 1, \quad \rho' = \varepsilon\rho, \quad \tau' = \varepsilon\tau,$$
(3.2)

где φ_i — быстро, по сравнению с a_i , меняющаяся величина. Согласно (3.2), на интервалах $R', T' (R, T \ll R', T' \ll R_\omega, T_\omega$, где R_ω, T_ω — характерные интервалы изменения параметров среды) вместо (1.15) можно написать одно уравнение для комплексного спектра:

$$\frac{\partial S_i}{\partial \tau} + \varepsilon \left[\frac{\partial S_i}{\partial \tau'} + (\mathbf{v}_i \nabla_\rho \cdot S_i) + \left(\nabla_\rho \cdot \omega_i + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau'} \right) \times \right. \\ \left. \times \nabla_{\mathbf{k}} S_i \right] = S_i G_i^{(1)} + f_i^{(1)}(S, \mathbf{k}, \rho, \tau, \rho', \tau').$$
(3.3)

В (3.3) учтено, что зависимость S_i от ρ, τ определяется на R', T' лишь зависимостью φ_i от ρ, τ (быстро меняется только фаза). После усреднения по фазам в (3.3) останется только зависимость S_i от ρ', τ' . Умножая (3.3) на $S_i^*(\mathbf{k})$ и складывая с сопряженным уравнением, после усреднения по фазам и интегрирования по τ получим кинетическое уравнение*:

$$\frac{\partial I_i}{\partial \tau'} + (\mathbf{v}(\mathbf{k}, \rho', \tau') \nabla_\rho \cdot I_i) + \left(\nabla_\rho \cdot \omega_i + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau'} \right) \nabla_{\mathbf{k}} I_i = \\ = I_i G_i^{(1)} + \langle S_i^* f_i^{(1)}(S, \mathbf{k}, \rho, \tau, \rho', \tau') + \text{к. с.} \rangle.$$
(3.4)

Здесь угловые скобки означают усреднение по фазам, т. е. за время $T_\omega \gg T \gg T_\varphi$, что эквивалентно усреднению по ансамблю волновых

* Подчеркнем то обстоятельство, что с помощью (3.4) может быть исследована пространственная структура турбулентности (в том числе и в замкнутом объеме — (3.4) при этом следует дополнить граничными условиями).

полей со случайными фазами [3, 8]. Частным случаем (3.4) является кинетическое уравнение для волн в прозрачной квадратичной среде [7].

4. При исследовании динамики слабонелинейных распределенных систем с дисперсией простейшим и в то же время эффективным является подход, основанный на фиксировании пространственной структуры полей. Предположение о том, что структура поля $u(\mathbf{r})$ не меняется во времени, позволяет свести задачу к сосредоточенной. Аналогичный подход может быть использован и при решении уравнений (1.15), (1.19), отличающихся от уравнений, описывающих взаимодействие квазигармонических волн [4], тем, что неизвестные функции помимо \mathbf{r} , t зависят от \mathbf{k} . В случае, когда взаимодействие различных волн не приводит в первом приближении к изменению их формы, целесообразно считать фиксированной спектральную структуру полей.

Полагая, что структура спектров взаимодействующих волн фиксирована, представим решение (1.15) в виде

$$S_i(\rho, \tau, \mathbf{k}) = R_i(\mathbf{k})C_i(\rho, \tau, \mathbf{k}^0), \quad (4.1)$$

где $R_i(\mathbf{k})$ — нормированный комплексный спектр l -й волны, который задается из граничных или начальных условий и дисперсионных и нелинейных свойств среды, а $C_i(\rho, \tau, \mathbf{k}^0)$ — амплитуда поля, подлежащая определению. Непосредственно из подстановки (4.1) в (1.15) следует, что волновые взаимодействия с сохранением спектра возможны либо в однородных и стационарных средах, либо в средах, параметры которых меняются специальным образом. Ограничимся рассмотрением взаимодействия двух плоских волн, распространяющихся в среде с кубичной нелинейностью. Из (4.1), (1.5) для этого случая следуют уравнения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C_{1,2}}{\partial \tau} + V_{1,2} \nabla_{\rho} C_{1,2} \right) R_{1,2}(\mathbf{k}) = \int \{ \gamma_{1,2}(\mathbf{k}) C_{1,2} R_{1,2}(\mathbf{k}) + \\ & + C_{1,2} |C_{1,2}|^2 \Psi_{1,2} [R_{1,2}(\mathbf{k}') R_{1,2}(\mathbf{k}'') R_{1,2}(\mathbf{k}''')] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{k}''') + \\ & + C_{1,2} R_{1,2}(\mathbf{k}) \Theta_{1,2} [|C_{2,1}|^2 |R_{2,1}(\mathbf{k}')|^2] d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' d\mathbf{k}''', \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\gamma_{1,2}$ действительны, а \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' , \mathbf{k}''' могут быть как положительными, так и отрицательными, причем $R(\mathbf{k}) = R(-\mathbf{k})$. В (4.2) функция $\Psi_{1,2}$ содержит все слагаемые, ответственные за самовоздействие поля, а $\Theta_{1,2}$ — перекрестные члены, связанные с взаимодействием полей. Здесь учтено, что при взаимодействии в среде с постоянными параметрами двух волн с широким спектром, распространяющихся с различными скоростями, условия резонанса выполнены лишь для несинхронных взаимодействий, поэтому функция Θ зависит лишь от квадратов модулей полей, причем $\Theta|0\rangle = 0$.

Равновесный спектр $R_{1,2}(\mathbf{k})$ определяется из условия обращения в нуль правой части (4.2) при $C_{2,1} = 0$, т. е. из уравнения

$$|C_0|^2 \int \Psi [R(\mathbf{k}') R(\mathbf{k}'') R(\mathbf{k}''')] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' - \mathbf{k}''') = -\gamma(\mathbf{k}) R(\mathbf{k}). \quad (4.3)$$

В средах, где нет диссипации энергии, $\gamma(\mathbf{k}) \equiv 0$ и амплитуда определяется лишь начальными или граничными условиями. В средах, где возможно как поглощение, так и выделение энергии, величина $|C_0|^2$ определяется балансом энергии, причем равновесная амплитуда поля зависит от интегральных характеристик $R(\mathbf{k})$. Действительно, умножая (4.3) на $R^*(\mathbf{k})$ и интегрируя по \mathbf{k} , найдем

$$|C_0|^2 = \frac{\int \gamma(\mathbf{k}) |R(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}}{\int R^*(\mathbf{k}) \Psi(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' d\mathbf{k}'''} \quad (4.4)$$

При учете взаимодействия форма волн, как следует из (4.2), сохраняется в двух случаях: когда взаимодействуют волны одинаковой формы ($R_1(\mathbf{k}) = R_2(\mathbf{k})$), например встречные, либо когда среда обладает пренебрежимо малой дисперсией (V, γ, Θ не зависят от \mathbf{k}), тогда амплитуды полей удовлетворяют уравнениям ($\gamma_{1,2} \neq 0$)

$$\frac{\partial C_{1,2}}{\partial \tau} + V_{1,2} \nabla_{\rho} C_{1,2} = C_{1,2} \left(1 - \frac{|C_{1,2}|^2}{|C_{0,1,2}|^2} - \alpha_{1,2} |C_{2,1}|^2 \right) \beta_{1,2} \quad (4.5)$$

Здесь учтено, что в отсутствие дисперсии или при взаимодействии встречных волн с одинаковым спектром $\int \Theta_{1,2}[\dots] d\mathbf{k}$ в (4.2) можно представить как

$$\int \Theta_{1,2} [|C_{2,1}|^2 |R_{2,1}(\mathbf{k}')|^2] d\mathbf{k}' = |C_{2,1}|^2 \alpha'_{1,2} \quad (4.6)$$

В (4.5) введены обозначения: $\beta = \int \gamma(\mathbf{k}) |R(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} / \int |R(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$, $\alpha_{1,2} = \alpha'_{1,2} / \int \gamma_{1,2}(\mathbf{k}) R_{1,2}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$, параметры α и β зависят от амплитуды полей и характеризуют их форму. Если взаимодействующие нелинейные волны периодические (спектры $R(\mathbf{k})$ дискретны и эквидистантны), то эти параметры есть просто средние за периоды от квадратичных комбинаций полей, а уравнения (4.5) могут быть получены при помощи метода усреднения по стационарным волнам, изложенного в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, М., 1956.
2. А. А. Веденов, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1965.
3. Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
4. М. И. Рабинович, Докл. АН СССР, 191, № 6, 1253 (1970).
5. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 214 (1967).
6. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
7. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, вып. 2, 193 (1971).
8. В. Н. Цытович, УФН, 108, вып. 1, 143 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
1 ноября 1972 г.

SELF-ACTION AND INTERACTION OF WAVES WITH NONCONTINUOUS SPECTRUM IN WEAKLY-NONLINEAR MEDIA

M. I. Rabinovich, L. E. Shtil'man

A method is suggested to describe the interaction of waves with arbitrary spectrum limited from below in weakly-nonlinear media. It is shown that in the case when the phase varies chaotically, the first approximation equation transforms into the known kinetic equation for waves. A method of separation based on the approximation of the given structure of spectra of interacting waves is suggested to solve the first-approximation equation. It is shown that the method of averaging over stationary waves [6] is the particular case of this approach.

УДК 621.372.3

ПРИМЕНЕНИЕ УСРЕДНЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ОПИСАНИЯ МНОГОВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В. П. Реутов

С помощью асимптотического метода [1–3], модифицированного применительно к граничным волновым задачам, показано, что для описания процесса взаимодействия упругих поверхностных волн справедлив усредненный вариационный принцип [4, 5]. На основе этого принципа получены уравнения, описывающие взаимодействие гармоник в изотропном упругом полупространстве.

В настоящей статье рассматриваются многоволновые взаимодействия квазигармонических волн Рэлея, связанные с нелинейностью упругих свойств среды.

Как известно, для поверхностных волн, концентрирующих энергию источника в узкой (порядка длины волны) области, нелинейные явления могут наблюдаться при сравнительно небольших излучаемых мощностях [6]. Генерация гармоник рэлеевских волн исследовалась в ряде работ (см. библиографию к обзору [6]), в частности, в [7] рассматривалась генерация второй гармоники в приближении заданного поля. При достаточно больших интенсивностях волн приближение заданного поля, очевидно, нарушается и следует учитывать взаимодействие волн. Такая задача решалась лишь феноменологически—путем вычисления коэффициентов нелинейного взаимодействия из экспериментальных данных [8].

В данной работе для получения уравнений, описывающих взаимодействие поверхностных волн, используются общие асимптотические методы теории нелинейных волн [1–3]. Показано, что для упругих поверхностных волн справедлив усредненный вариационный принцип [4, 5], обоснование которого проводилось лишь в случае однородных плоских волн [13]. Использование этого принципа позволяет упростить нахождение коэффициентов нелинейного взаимодействия, а также установить их свойства симметрии. Развитый метод получения усредненных уравнений применим также к другим краевым задачам.

1. О ЛАГРАНЖЕВОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Анализ взаимодействия поверхностных волн сводится к решению уравнений движения упругой среды совместно с граничными условиями на свободной поверхности. Уравнения движения при конечных деформациях и малых потерях запишем в виде [9–12]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial a_k} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial a_k}, \quad (1.1)$$

где ρ_0 — плотность недеформированного вещества, а a_k — координаты Лагранжа, u_i — компоненты вектора смещений, P_{ik} — первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа [9] (модифицированная матрица напря-

жений [10]), σ'_{ik} — диссипативная часть линейного тензора напряжений; по дважды повторяющимся индексам производится суммирование ($i, k = 1, 2, 3$). Компоненты тензора P_{ik} выражаются через внутреннюю энергию единичного объема недеформированного тела [9, 12]:

$$P_{ik} = \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right)} \right]_s. \quad (1.2)$$

В первом приближении нелинейность в (1.1) квадратична и получается в соответствии с (1.2) из кубичных по $\frac{\partial u_i}{\partial a_k}$ членов разложения U по степеням тензора деформаций; процесс предполагается адиабатическим.

Граничные условия на возмущенной свободной поверхности также представляются через модифицированные напряжения [10]. Полагая, что в невозмущенном состоянии среда занимает полупространство $x_r < 0$, имеем

$$P_{ik} n_k + \sigma'_{ik} n_k = 0 \Big|_{a_r=0}, \quad (1.3)$$

где n_k — единичный вектор нормали к элементу недеформированной поверхности в точке (здесь $n_r = 1, n_\alpha = 0$ ($\alpha \neq r$)). Примем также, что $u_i \rightarrow 0$ при $a_r \rightarrow -\infty$ (необходимое условие ограниченности энергии поверхностной волны).

В (1.1) и (1.3) учтено, что при малых нелинейности и потерях (на длине волны) можно оставить только линейные члены, ответственные за диссипацию. Тогда в (1.1) и (1.3) войдет диссипативная часть линейного тензора напряжений, которую в соответствии с [12] представим в форме

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial a_k} \right)}, \quad (1.4)$$

где $\dot{u}_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t}$, Ψ — плотность диссипативной функции (квадратичная форма градиентов $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial a_k}$).

Соотношения (1.1) — (1.4) могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа второго рода. Действительно, вводя плотность функции Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 - U, \quad (1.5)$$

вместо (1.1) — (1.4) получим (ср. [16])

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} + \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right)} - \frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial a_k} \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial a_k} \right)}; \quad (1.6a)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial a_r} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_r} \right)} = 0 \Big|_{a_r=0}. \quad (1.6b)$$

Уравнения (1.6 а) и граничные условия (1.6 б) следуют также из требования наименьшего действия

$$\int_{t_1}^{t_2} \int (\delta L + \delta w) dt d^3a = 0, \quad \delta w = - \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\partial \dot{u}_t}{\partial a_k} \right)} \delta \frac{\partial u_t}{\partial a_k}, \quad (1.7)$$

где δw — плотность элементарной работы диссипативных напряжений; граница пространственного объема интегрирования состоит из некоторых кусков поверхностей $a_r = 0$, $a_r = -\infty$ и соединяющей их границы произвольной поверхности. При варьировании значения u_i на границе $a_r = 0$ в моменты $t_1 < t < t_2$ считаются свободными.

2. ВЫВОД УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Приближенные уравнения для амплитуд волн, взаимодействующих в среде, допускающей лагранжево описание, можно получить, как известно, из так называемого усредненного вариационного принципа [5, 6]. Соответствующая процедура удобна тем, что требует знания лишь среднего лагранжиана и, по существу, не использует исходных нелинейных уравнений. Справедливость усредненного вариационного принципа, однако, не очевидна, и ниже приводится его обоснование, которое заключается в сравнении уравнений для амплитуд, полученных асимптотическим методом, и уравнений, следующих непосредственно из усредненного вариационного принципа (аналогично см. [13]).

Плотность функции Лагранжа запишем в виде

$$L = L_0 + \mu L_{NL}, \quad (2.1)$$

где L_0 — плотность лагранжиана линейной системы, а L_{NL} ответственно за нелинейность в (1.1) и (1.3); μ — малый параметр, пропорциональный величине нелинейности и диссипации (считаем $\Psi \rightarrow \mu\Psi$). Поскольку явный вид L и Ψ для упругой среды сложен, будем при решении исходить из некоторых обобщенных их выражений, включающих, в частности, случай упругой среды. Пусть волна распространяется вдоль одной из осей координат x_i ($i \neq r$), обозначим $a_i \equiv x$, $a_r \equiv y$. Учитывая, что $u = u(x, y, t)$, примем

$$L_0 = \frac{1}{2} (\tilde{u}_t A u_t + \tilde{u}_x B u_x + u_y C_y u_y + \tilde{u}_x D u_y); \quad (2.2a)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} (\tilde{u}_x G_1 \dot{u}_x + \dot{u}_y G_2 \dot{u}_y + \tilde{u}_x G_3 \dot{u}_y); \quad (2.2b)$$

$$L_{NL} = M_1^{ijk} u_x^i u_x^j u_x^k + M_2^{ijk} u_x^i u_y^j u_y^k + \\ + M_3^{ijk} u_y^i u_y^j u_y^k + M_4^{ijk} u_x^i u_x^j u_x^k. \quad (2.3)$$

Здесь u — вектор-столбец (1×3); \sim означает транспонирование; $A, B, C, D, G_{1,2,3}$ — матрицы (3×3); M_1^{ijk} — постоянные коэффициенты; $u_{x,y}^i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x, \partial y}$. Матрицы $A, B, C, G_{1,2}$ без ограничения общности

можно считать симметричными. Заметим, что (2.3) соответствует случаю лишь квадратичной нелинейности, но рассматриваемый подход справедлив и в случае произвольной нелинейности.

Окончательно уравнения задачи (1.6) приводятся к виду

$$Au_{tt} + Bu_{xx} + \frac{1}{2}(D + \tilde{D})u_{xy} + Cu_{yy} = \mu f + \mu f_1 \quad (2.4a)$$

с граничными условиями при $y = 0$

$$Cu_y + \frac{1}{2}\tilde{D}u_x = \mu\Phi + \mu\Phi_1 \Big|_{y=0}, \quad (2.4b)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} f &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_{NL}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_{NL}}{\partial u_y} \right), & \Phi &= -\frac{\partial L_{NL}}{\partial u_y}, \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{u}_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{u}_y} \right), & \Phi_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{u}_y}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку в дальнейшем будут исследоваться поверхностные волны в упругой среде, предположим, что решение линейной консервативной ($\mu = 0$) задачи (2.4), удовлетворяющее условию $u \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$u = a \sum_{\alpha=1}^3 \xi_{\alpha} \exp(\beta_{\alpha} y) \exp(i\omega t - ikx) + \text{к.с.}, \quad (2.6)$$

где a — комплексная амплитуда, $\beta_{\alpha} = \beta_{\alpha}(\omega) > 0$, а векторы $\xi_{\alpha} = \xi_{\alpha}(\omega)$ определяются следующими из (2.4), (2.6) уравнениями вида

$$\left[-(\omega^2 A + k^2 B) - \frac{1}{2} ik \beta_{\alpha} (D + \tilde{D}) + \beta_{\alpha}^2 C \right] \xi_{\alpha} = 0; \quad (2.7a)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left(\beta_{\alpha} C - \frac{1}{2} ik \tilde{D} \right) \xi_{\alpha} = 0. \quad (2.7b)$$

Дисперсионное уравнение

$$\Delta(\omega, k) = 0 \quad (2.8)$$

для поверхностных волн, как обычно, следует из условия существования нетривиального решения (2.7). Решение слабонелинейной ($\mu \ll 1$) задачи ищем в форме [2]

$$\begin{aligned} u &= \sum_s a_s(\tau, \chi) \left(\sum_{\alpha=1}^3 \xi_{\alpha}^s \exp(\beta_{\alpha}^s y) \right) \exp(i\omega_s t - ik_s x) + \\ &+ \text{к.с.} + \mu w^{(1)}(t, x, y, \tau, \chi) + \mu^2 w^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $a_s = A_s \exp(i\varphi_s)$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды, $\tau = \mu t$, $\chi = \mu x$, $\beta_{\alpha}^s \equiv \beta_{\alpha}(\omega_s)$, $\xi_{\alpha}^s \equiv \xi_{\alpha}(\omega_s)$, $w^{(l)} \sim 1$ — добавки; в сумме по s включены волны ($\Delta(\omega_s, k_s) = 0$), находящиеся в синхронизме (число таких волн должно быть конечным).

Уравнения для амплитуд a_s ищем в виде

$$\frac{\partial a_s}{\partial \tau} = \mu F_s^{(1)}(\tau, \chi) + \mu^2 F_s^{(2)}(\tau, \chi) + \dots, \quad (2.10)$$

где $F_s^{(l)}$ — неизвестные функционалы. Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.4) и требуя обращения в нуль коэффициента при μ , получим линейное уравнение относительно $w^{(1)}(\tau, \chi)$ являются параметрами)

$$A\omega_{tt}^{(1)} + B\omega_{xx}^{(1)} + \frac{1}{2}(D + \tilde{D})\omega_{xy}^{(1)} + C\omega_{yy}^{(1)} = H^{(1)} \quad (2.11a)$$

с граничным условием при $y = 0$

$$C\omega_y^{(1)} + \frac{1}{2}\tilde{D}\omega_x^{(1)} = R^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad (2.11b)$$

где обозначено

$$H^{(1)} = - \sum_s \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ 2i\omega_s A F_s^{(1)} - \left[2ik_s B - \frac{1}{2}\beta_\alpha^s (D + \tilde{D}) \right] \frac{\partial a_s}{\partial \chi} \right\} \times \\ \times \xi_\alpha^s \exp(\beta_\alpha^s y) \exp(i\omega_s t - ik_s x) + \text{к. с.} + f(u_0) + f_1(u_0), \quad (2.12)$$

$$R^{(1)} = - \sum_s \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{2} \tilde{D} \xi_\alpha^s \frac{\partial a_s}{\partial \chi} \exp(i\omega_s t - ik_s x) + \text{к. с.} + \Phi^0 + \Phi_1^0.$$

Здесь u_0 — главная часть решения (2.9), $\Phi^0 \equiv \Phi(u_0)|_{y=0}$.

Правые части (2.11) разложим в ряд Фурье по x, t . Комплексные амплитуды разложения запишутся так:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_m^{(1)}(y, \tau, \chi) \\ R_m^{(1)}(\tau, \chi) \end{array} \right\} = \frac{1}{T\Lambda} \int_x^{x+\Lambda} \int_t^{t+T} \left\{ \begin{array}{l} H^{(1)} \\ R^{(1)} \end{array} \right\} \exp(-i\omega_m t + ik_m x) dx dt. \quad (2.13)$$

Решение линейной задачи (2.11) ищем в виде

$$\omega^{(1)} = \sum_s W_s \exp(i\omega_s t - ik_s x) + \sum_c W_c \exp(i\omega_c t - ik_c x), \quad (2.14)$$

где в первую сумму объединены волны, ω и k которых удовлетворяют дисперсионному уравнению (2.8), а во вторую, — для которых оно не выполняется. Подставляя (2.14) в (2.11), учитывая (2.13) и то, что $u = 0|_{y=-\infty}$, получим для W_s такие уравнения и граничные условия:

$$\hat{N}_s W_s \equiv C \frac{d^2 W_s}{dy^2} - \frac{1}{2} ik_s (D + \tilde{D}) \frac{dW_s}{dy} - (\omega_s^2 A + k_s^2 B) W_s = H_s^{(1)}; \quad (2.15a)$$

$$\hat{B}_s W_s \equiv C \frac{dW_s}{dy} - \frac{1}{2} ik_s \tilde{D} W_s = R_s^{(1)} \Big|_{y=0}, \quad W_s = 0|_{y=-\infty}. \quad (2.15b)$$

Вводя новую переменную $W'_s = W_s - V_s(y)$, где функция $V_s(y)$ удовлетворяет соотношениям (2.15б), получим следующую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\hat{N}_s W'_s = H_s^{(1)} - \hat{N}_s V_s(y); \quad (2.16a)$$

$$\hat{B}_s W'_s = 0|_{y=0}, \quad W'_s = 0|_{y=-\infty}. \quad (2.16b)$$

Если порождаемая (2.16) однородная сопряженная краевая задача имеет отличные от нуля собственные функции, необходимым условием ограниченности (существования) W'_s (только тогда представление решения (2.9) корректно) является ортогональность к ним правых частей (2.16а) [2]. Нетрудно показать, что однородная краевая задача, порождаемая (2.16), — самосопряженная, т. е.

$$(\hat{N}v_1, v_2) = (v_1, \hat{N}v_2), \quad (2.17)$$

где $(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^0 u_1^* u_2 dy$ — скалярное произведение векторов u_1 и u_2 , $v_{1,2}$ — функции, удовлетворяющие краевым условиям (2.16 б). Тогда условие ортогональности примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^3 \int_{-\infty}^0 \tilde{\xi}_\alpha^{s*} \exp(\beta_\alpha^s y) [H_s^{(1)} - \hat{N}_s V_s] dy = 0 \quad (2.18)$$

и после преобразований запишется в форме

$$\sum_{\alpha=1}^3 \left(-\tilde{\xi}_\alpha^{s*} R_s^{(1)} + \int_{-\infty}^0 \tilde{\xi}_\alpha^{s*} H_s^{(1)} \exp(\beta_\alpha^s y) dy \right) = 0. \quad (2.19)$$

При получении (2.19) интегралы, содержащие V_s , в (2.18) следует брать по частям, величину $C \left(\frac{dV_s}{dy} \right)_{y=0}$ заменить из краевого условия для $V_s(y)$, тогда, поскольку каждая s -я волна удовлетворяет (2.7), слагаемое, включающее $\int_{-\infty}^0 V_s \exp(\beta_\alpha^s y) dy$, обращается в нуль.

Входящие во вторую сумму (2.14) W_c ограничены, так как сопряженная краевая задача для них имеет лишь нулевые собственные функции ($\Delta(\omega_c, k_c) \neq 0$). Полученное таким образом условие (2.19) ограниченности W_s является необходимым. В Приложении 1 дан несколько иной его вывод, из которого следует, что оно также и достаточное*.

Используя (2.19), с учетом (2.13) и (2.12) найдем $F_s^{(1)}$. В результате получим укороченные уравнения первого приближения для амплитуд a_s в виде

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial a_s}{\partial x} = \frac{1}{g_s} \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ \tilde{\xi}_\alpha^{s*} (\Phi_s^0 + \Phi_{1s}^0) - \int_{-\infty}^0 \tilde{\xi}_\alpha^{s*} (f_s + f_{1s}) \exp(\beta_\alpha^s y) dy \right\}, \quad (2.20)$$

где

$$g_s = -2i\omega_s \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{\beta_i^s + \beta_j^s} \tilde{\xi}_i^{s*} A \xi_j^s,$$

$$\left\{ \begin{matrix} f_s \\ \Phi_s \end{matrix} \right\} = \frac{1}{T\Lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\Lambda} \left\{ \begin{matrix} f(u_0) \\ \Phi(u_0) \end{matrix} \right\} \exp(-i\omega_s t + ik_s x) dt dx,$$

$$v_s = \frac{1}{g_s} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{\beta_i^s + \beta_j^s} \tilde{\xi}_i^{s*} \left[2ik_s B + \frac{1}{2} (\beta_i^s \tilde{D} - \beta_j^s D) \right] \xi_j^s \right\},$$

причем постоянная v_s совпадает с групповой скоростью s -й поверхностной волны (Приложение 2).

Покажем теперь, что укороченные уравнения (2.20) можно записать в лагранжевой форме. Введем средний лагранжиан и диссипативную функцию соотношениями

* Для краевой задачи на конечном интервале доказательство достаточности приведено в [17].

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L} \\ \bar{\Psi} \end{array} \right\} = \left\langle \int_{-\infty}^0 \left\{ \begin{array}{l} L(u_0) \\ \Psi(u_0)_s \end{array} \right\} dy \right\rangle, \quad (2.21)$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по всем быстрым осцилляциям. В нулевом приближении по μ получим

$$\bar{L} \approx \sum_s \bar{L}_s^{(0)} |a_s|^2, \quad \bar{\Psi} \approx \sum_s \bar{\Psi}_s^{(0)} |a_s|^2, \quad (2.22)$$

где $\bar{L}_s^{(0)} |a_s|^2$, $\bar{\Psi}_s^{(0)} |a_s|^2$ — усредненные лагранжиан и диссипативная функция s -й волны в линейной задаче.

Учитывая (2.2), (2.3), непосредственными вычислениями (которые достаточно проделать для трехволнового процесса) нетрудно доказать тождественность системы уравнений (2.20) и уравнений вида

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial a_s}{\partial x} = -\mu \left(i \frac{\partial \bar{L}_{NL}^{(0)}}{\partial a_s^*} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\Psi}_s^{(0)}}{\partial \omega_s} a_s \right) / \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s}, \quad (2.23)$$

где $\bar{L}_{NL}^{(0)}$ получается усреднением L_{NL} (см. (2.21)) после подстановки туда u_0 при фиксированных a_s . Уравнения (2.23) удобны для расчета, поскольку в них явно не входят постоянные коэффициенты представлений (2.2) и (2.3). В то же время они следуют из усредненного вариационного принципа. Последний состоит в требовании минимума для усредненного действия:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (\delta \bar{L} + \delta \bar{\omega}) dt dx = 0. \quad (2.24)$$

При этом обобщенными координатами являются амплитуды A_s и фазы φ_s волн, а поле представляется в виде

$$u = \sum_s A_s \Omega_s(y) \exp(i\omega_s t - ik_s x + i\varphi_s) + \text{к.с.}, \quad (2.25)$$

где $\Omega_s(y)$ — множитель, описывающий поперечную структуру поля в линейной задаче.

Воспользовавшись (2.2), (1.7) и (2.25), нетрудно показать, что в нулевом приближении $\delta \bar{\omega} \rightarrow - \sum_s \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \omega_s} \delta \varphi_s$. В результате (2.24)

приводит к уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi_{st}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi_{sx}} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi_s} = - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \omega_s}; \quad (2.26a)$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial A_s} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial A_{st}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial A_{sx}} \right) = 0. \quad (2.26b)$$

Уравнения (2.26) преобразуем, используя (2.1), (2.2 а), (2.25). Применяя (2.26 а), (2.26 б) к линейной системе, получим соответственно равенства $v_s = - \frac{\partial \bar{L}_0}{\partial k_s} / \frac{\partial \bar{L}_0}{\partial \omega_s}$, $\bar{L}_s^{(0)} = 0$ (см. также Приложение 2). В нелиней-

ном случае приходим к таким же уравнениям для A_s и φ_s , что следуют из (2.23).

Таким образом, для многоволновых взаимодействий упругих поверхностных волн справедлив усредненный вариационный принцип. Отметим, что он может быть применен и к анализу многоволновых взаимодействий упругих волн в произвольной направляющей структуре, поскольку уравнения движения и граничные условия при этом также записываются в лагранжевой форме. В последнем случае усреднять следует, очевидно, плотность функции Лагранжа, проинтегрированную по поперечному сечению структуры.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИК УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В случае рэлеевских волн векторы ξ_s^s не зависят от частоты, а $\beta_s^s \sim \omega_s$. Кроме того, так как U в (1.5) не зависит от u_i , в (2.23) следует положить

$$\bar{L}_{NL}^{(0)} = -\bar{U}_{NL}^{(0)}, \quad \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s} = 2\rho_0 \omega_s \sum_{l,j=1}^3 \frac{\tilde{\xi}_l^* \xi_j}{\beta_l^s + \beta_j^s}, \quad (3.1)$$

где $\bar{U}_{NL}^{(0)}$ — среднее от той части U , которая кубична по градиентам $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$.

Отметим, что для процесса генерации второй гармоники в приближении заданного поля ($A_2 \ll A_1$) в среде без потерь ($f_1, \Phi_1 = 0$) уравнение (2.20) дает результат, аналогичный [7]. В этом можно убедиться, если учесть, что в стационарном режиме ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) решение имеет вид

$$\frac{da_2}{dx} = \Gamma a_1^2(0), \quad a_2 = \Gamma a_1^2(0) x, \quad (3.2)$$

и, полагая в (2.20) $f_i = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}$, $\Phi_i = P_{ir} |_{a_r=0}$, а также используя равенства (3.1) и $g_s = -i \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s}$, найти значение Γ .

Рассмотрим теперь взаимодействие упругих поверхностных волн в изотропной среде. В этом случае

$$U_{NL} = \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial u_r}{\partial x_p} \frac{\partial u_r}{\partial x_q} + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} \right)^2 + \frac{A}{12} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial u_q}{\partial x_r} \frac{\partial u_r}{\partial x_p} + \frac{B}{2} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + \frac{C}{3} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r} \right)^3, \quad (3.3)$$

$$\Psi = \eta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_p}{\partial x_q} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_q}{\partial x_p} \right) - \frac{1}{3} \delta_{pq} \frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_l} \right]^2 + \frac{\zeta}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_l} \right)^2,$$

где сохранены обозначения [12]*. Решение линейной задачи хорошо известно [12]:

* Здесь x_q — координаты Лагранжа.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = a \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^1 \\ i \zeta_1^2 \end{pmatrix} \exp(x_1 k x_2) + \begin{pmatrix} \zeta_2^1 \\ i \zeta_2^2 \end{pmatrix} \exp(x_2 k x_1) \right\} \exp(i \omega t - i k x_1) + \text{к.с.}, \quad (3.4)$$

где $x_1 = \sqrt{1 - \xi^2}$, $x_2 = \sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2} \xi^2}$, $k = \frac{\omega}{c_t \xi}$, $\zeta_1^1 = \frac{x_1^2 + 1}{2}$, $\zeta_1^2 = \frac{x_1^2 + 1}{2 x_1}$, $\zeta_2^1 = -1$, $\zeta_2^2 = -x_2$, причем $(x_1^2 + 1)^2 = 4 x_1 x_2$ ($x_1 k = x_2$, $x_2 k = x_1$ [12]).

Упругие поверхностные волны не обладают дисперсией. Рассмотрим поэтому задачу о взаимодействии гармоник в n -волновом приближении* (n — конечное). Главная часть решения (2.9) запишется тогда в виде

$$u_0 = \sum_{s=1}^n a_s \left(\sum_{l=1}^2 \xi_l \exp(s x_l k x_2) \right) \exp(i \omega s t - i k s x_1) + \text{к.с.} \quad (3.5)$$

Найдем теперь величины, входящие в (2.23). Используя (3.4) и (3.1), получим

$$\frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s} = \rho_0 c_t \xi \left[\frac{x_1^2 + 1}{x_1^2} (x_2 - 2 x_1) + \frac{x_2^2 + 1}{x_2} \right]. \quad (3.6)$$

Чтобы вычислить $\bar{U}_{NL}^{(0)}$, введем обозначения

$$u_{0m}^q = a_m \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^q \exp \left[m (i \omega t - i \sum_{\beta=1}^2 k_{\alpha\beta} x_\beta) \right] + \text{к.с.}, \quad (3.7)$$

$$k_{\alpha\beta} = -i^{\beta+1} k x_{\alpha\beta}, \quad \xi_\alpha^q = -i^{q+1} \zeta_\alpha^q \quad (\alpha, \beta, q = 1, 2),$$

где $x_{11} = x_{21} = 1$, $x_{12} = x_1$, $x_{22} = x_2$, u_{0m}^q — q -я компонента m -й гармоники вектора смещений. Тогда

$$\bar{U}_{NL}^{(0)} = i \sigma_{211} a_1^2 a_2^* + i \sigma_{321} a_1 a_2 a_3^* + \text{к.с.} + \dots, \quad (3.8)$$

где коэффициенты σ_{slm} ($s = l + m$, считаем также $l \geq m$) равны:

$$\sigma_{slm} = Y_{slm} + Y_{sml} \quad (l \neq m), \quad (3.9)$$

$$\sigma_{sll} = Y_{sll};$$

Y_{slm} действительны и имеют вид

$$Y_{slm} = slm k^2 \sum_{\substack{p, q, r, \\ \gamma, \alpha, \delta=1, 2}} \left(\mu + \frac{A}{4} \right) [(-1)^r \varepsilon_1 + (-1)^q \varepsilon_2 + (-1)^p \varepsilon_3] \zeta_\alpha^p \zeta_\gamma^r \zeta_\delta^r x_{\alpha q} x_{\gamma p} x_{\delta q} +$$

$$+ \left(\frac{B + K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) [(-1)^{r+p+q} \varepsilon_1 + (-1)^r \varepsilon_2 + (-1)^p \varepsilon_3] \zeta_\alpha^r \zeta_\gamma^p \zeta_\delta^p x_{\alpha r} x_{\gamma q} x_{\delta q} +$$

$$+ \frac{A}{12} [(-1)^r \varepsilon_1 + (-1)^p \varepsilon_2 + (-1)^q \varepsilon_3] \zeta_\alpha^p \zeta_\gamma^q \zeta_\delta^r x_{\alpha q} x_{\gamma r} x_{\delta p} + \frac{B}{2} [(-1)^r \varepsilon_1 +$$

$$(3.10)$$

* Такое приближение применимо на не слишком большом расстоянии от источника, либо при достаточно большой по сравнению с нелинейностью вязкости, или при наличии дисперсии в области $(n + 1)$ -й гармоники.

$$+ (-1)^r \varepsilon_2 + (-1)^{r+p+q} \varepsilon_3] \zeta_\alpha^p \zeta_\gamma^q \zeta_\delta^r x_{\alpha q} x_{\gamma p} x_{\delta r} + (-1)^{p+r+q} \frac{C}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \zeta_\alpha^r \zeta_\gamma^p \zeta_\delta^q x_{\alpha r} x_{\gamma p} x_{\delta q},$$

где $\varepsilon_1 = (s x_{\alpha 2} + l x_{\gamma 2} + m x_{\delta 2})^{-1}$, $\varepsilon_2 = (l x_{\alpha 2} + s x_{\gamma 2} + m x_{\delta 2})^{-1}$, $\varepsilon_3 = (l x_{\alpha 2} + m x_{\gamma 2} + s x_{\delta 2})^{-1}$.

Подставляя (3.8) и (3.6) в (2.23), получим уравнения для амплитуд. В стационарном случае $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)^*$ имеем (ср. [8])

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dx} &= -\Gamma_{121} a_1^* a_2 - \Gamma_{132} a_2^* a_3 - \dots - \nu_1 a_1, \\ \frac{da_2}{dt} &= \Gamma_{211} a_1^2 - \Gamma_{231} a_1^* a_3 - \dots - \nu_2 a_2, \\ \frac{da_3}{dt} &= \Gamma_{321} a_1 a_2 - \dots - \nu_3 a_3, \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь коэффициенты Γ_{slm} действительны и равны

$$\Gamma_{slm} = -\sigma_{slm} \left/ \left(v \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s} \right) \right. \quad (s = l + m, l \geq m); \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{slm} = \Gamma_{lsm} = \Gamma_{msl} \\ 2\Gamma_{sll} = \Gamma_{lst} \end{cases} \quad (l \neq m), \tag{3.13}$$

где $v = c_t \xi$ — групповая скорость гармоник.

Условия симметрии (3.13) коэффициентов нелинейного взаимодействия являются следствием прозрачности среды и могут быть получены непосредственно из общей записи (3.11) и законов сохранения волновой энергии и импульса.

Декременты затухания ν_s определяются после нахождения $\bar{\Psi}_s^{(0)}$ с помощью (3.3) и имеют вид

$$\begin{aligned} \nu_s &= \left(v \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s} \right)^{-1} \frac{s^2 \omega^2}{c_t \xi} \sum_{\alpha, \gamma, l, p=1, 2} (x_{\alpha 2} + x_{\gamma 2})^{-1} \left[\eta (x_{\alpha p} x_{\gamma l} \zeta_\alpha^l \zeta_\gamma^l + x_{\alpha p} x_{\gamma l} \zeta_\alpha^l \zeta_\gamma^p) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p+l} \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) x_{\alpha p} x_{\gamma l} \zeta_\gamma^l \zeta_\alpha^p \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Они вычислялись раньше на основе линейной теории в [14] для изотропного твердого тела и в [15] для кристаллов. Задача сравнения (3.14) с формулой в [14] остается пока открытой.

Ввиду выполнения условий симметрии (3.13) процесс генерации и взаимодействия гармоник упругих поверхностных волн качественно не отличается от аналогичного процесса в случае объемных волн — происходит перенос энергии вверх по спектру и затухание нелинейной вол-

* К таким же уравнениям сведется нестационарная задача после замены $t' = t - \frac{x}{v}$, $x' = x$.

ны. Количественный анализ целесообразно, по-видимому, проводить с помощью вычислительной техники, тогда он сведется к вычислению коэффициентов Γ_{slm} по формуле (3.12) и интегрированию уравнений (3.11).

Автор благодарен М. И. Рабиновичу за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения, а также Л. А. Островскому за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Покажем справедливость (2.19). Решения (2.15 а), обращаясь в нуль при $y \rightarrow -\infty$, имеют вид

$$W = \sum_{j=1}^3 K_j \xi_j \exp(\beta_j y) + \psi(y), \quad (\text{П.1.1})$$

где K_j — постоянные, $\psi(y)$ — вынужденное решение (2.15 а), причем $[\psi]_{y=-\infty} = 0$ (такое ψ существует, так как $H^{(1)} \sim \exp(\beta_i + \beta_j)y$); индекс волны s здесь и в дальнейшем опущен. Подставляя (П.1.1) в (2.15 б), получим такое соотношение:

$$MK = -C \frac{d\psi'}{dy}(0) + \frac{1}{2} ik \tilde{D} \psi(0) + R^{(1)}, \quad (\text{П.1.2})$$

где M — матрица с элементами $M_{ij} = \sum_{q=1}^3 \left(C_{iq} \beta_j - \frac{1}{2} ik \tilde{D}_{iq} \right) [\xi_j]_q$ ($[\xi_j]_q$ — q -я компонента ξ_j), $K = (K_j)$ — вектор-столбец. Необходимым и достаточным условием ограниченности K является ортогональность правой части (П.1.2) собственному нуль-вектору ζ матрицы, сопряженной с M [1, 2, 17].

Покажем, что $\zeta = \sum_{j=1}^3 \xi_j$. Подставляя в однородную ($H^{(1)} = 0$) систему (2.15 а) ее решение v , домножая получившееся тождество на $\tilde{\xi}_\alpha^* \exp(\beta_\alpha y)$ слева и интегрируя по y от $-\infty$ до 0, найдем, что

$$\tilde{\xi}_\alpha^* \left\{ C \frac{dv}{dy}(0) - \left[\frac{1}{2} ik (D + \tilde{D}) + \beta_\alpha C \right] v(0) \right\} = 0. \quad (\text{П.1.3})$$

Полагая в (П.1.3) $v = \sum_{j=1}^3 \xi_j \exp(\beta_j y)$ и учитывая (2.7 б), получим выражение вида

$$\sum_{j=1}^3 \left(\beta_\alpha C + \frac{1}{2} ik \tilde{D} \right) \xi_\alpha^* \tilde{\xi}_j = 0, \quad (\text{П.1.4})$$

которое означает, что ζ имеет указанную выше форму. Тогда условие ортогональности запишется так:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\xi}_\alpha^* \left[-R^{(1)} + C \frac{d\psi}{dy}(0) - \frac{1}{2} ik \tilde{D} \psi(0) \right] = 0. \quad (\text{П.1.5})$$

Выразим в (П.1.5) $\psi'(0)$, $\psi(0)$ через $H^{(1)}$. Подставляя $\psi(y)$ в си-

стему (2.15 а), домножая на $\sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\xi}_{\alpha}^* \exp(\beta_{\alpha} y)$ и интегрируя по y от $-\infty$ до 0, с учетом (2.7 б) получим, что

$$\sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\xi}_{\alpha}^* \left[C \frac{d\psi}{dy}(0) - \frac{1}{2} ik\tilde{D}\psi(0) \right] = \sum_{\alpha=1}^3 \int_{-\infty}^0 \tilde{\xi}_{\alpha}^* H^{(1)} \exp(\beta_{\alpha} y) dy. \quad (\text{П.1.6})$$

С помощью (П.1.6) (П.1.5) сводится к виду (2.19).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Найдем выражение для групповой скорости v_s . Подставляя в линейную консервативную ($\mu = 0$) систему (2.4) решение в виде

$$\hat{u}_s = z_s(y) \exp(i\omega_s t - ik_s x), \quad (\text{П.2.1})$$

получим после дифференцирования по k_s следующие соотношения (см. также (2.15)):

$$\begin{aligned} \hat{N}_s \Omega_s &= 2 \left(A \omega_s \frac{d\omega_s}{dk_s} + B \right) z_s - \frac{1}{2} i (D + \tilde{D}) \frac{dz_s}{dy}, \\ \hat{B} \Omega_s &= \frac{1}{2} i \tilde{D} z_s \Big|_{y=0}, \quad \Omega_s = 0 \Big|_{y=-\infty}, \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

где $\Omega_s = \frac{\partial z_s}{\partial k_s} + \frac{\partial z_s}{\partial \omega_s} \frac{d\omega_s}{dk_s}$. Поскольку Ω_s ограничено, выполнено условие ортогональности типа (2.19). Подставляя в правые части (П.2.2)

$$z_s = \sum_{j=1}^3 \xi_j^s \exp(\beta_j^s y) \quad \text{и используя (2.19), получим искомую формулу для}$$

$$v_s = \frac{d\omega_s}{dk_s}.$$

Вычислим теперь $\bar{L}_s^{(0)}$ и найдем выражение для v_s в лагранжевой форме. Подставляя (2.9) в (2.2), имеем

$$\bar{L}_s^{(0)} = \sum_{l,j=1}^3 \frac{1}{\beta_l^s + \beta_j^s} \tilde{\xi}_l^{s*} \left[\omega_s^2 A + k_s^2 B + \beta_l^s \beta_j^s C + \frac{1}{2} ik_s (\beta_l^s D - \beta_j^s \tilde{D}) \right] \xi_j^s. \quad (\text{П.2.3})$$

Умножим (2.7 а) слева на $\tilde{\xi}_l^{s*} / (\beta_l^s + \beta_j^s)$ и просуммируем по l, j от 1 до 3. Находя из получившегося равенства величину $\sum_{l,j=1}^3 \tilde{\xi}_l^{s*} (\omega_s^2 A + k_s^2 B) \xi_j^s / (\beta_l^s + \beta_j^s)$, подставляя ее в (П.2.3) и учитывая (2.7 б), получим, что $\bar{L}_s^{(0)} = 0$.

$$\text{Используя (П.2.3), нетрудно показать, что } v_s = - \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial k_s} \Big/ \frac{\partial \bar{L}_s^{(0)}}{\partial \omega_s}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970)
2. М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, ПММ, 36, № 2, 330 (1972).
3. М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, Докл. АН СССР, 199, № 3, 575 (1971).

4. Д. Б. Уитем, сб. Нелинейная теория распространения волн, изд. Мир, М., 1970.
5. W. F. Simmons, Proc. Roy. Soc. Lond., A309, 551 (1969).
6. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, УФН, 102, № 4, 549 (1970).
7. P. O. Loren, J. Appl. Phys., 39, № 12, 5400 (1968)
8. E. G. Lean, C. C. Tseng, J. Appl. Phys., 41, 10, 3912 (1970).
9. P. H. Терстон, сб. Физическая акустика, 1, ч А, изд. Наука, М., 1965.
10. F. D. Murnaghan, Finite Deformation of an Elastic Solid, John Wiley, N. Y., 1951.
11. R. N. Thurston, K. Brugger, Phys. Rev., 133, 6A, A1604 (1964).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, изд. Наука, М., 1965.
13. Е. Н. Пелиновский, М. И Рабинович, Изв высш уч зав — Радиофизика, 14, № 9, 1373 (1971).
14. F. Press, J Healy, J. Appl. Phys., 28, № 11, 1323 (1957).
15. P. J. King, F. W. Sheard, J. Appl. Phys., 40, 5189 (1969).
16. Д. Бленд, Нелинейная динамическая теория упругости, изд. Мир, М., 1972.
17. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М, 1958, стр. 320

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 октября 1972 г.

APPLICATION OF AVERAGED VARIATION PRINCIPLE FOR DESCRIBING MULTI-WAVE INTERACTION OF ELASTIC SURFACE WAVES

V. P. Reutov

Using the asymptotic method [1-3] modified in application to boundary wave problems it is shown that the averaged variation principle [4, 5] holds for description of the interaction of elastic surface waves. Based upon this principle the equations are deduced which describe the interaction of harmonics in an isotropic elastic half-space.

УДК 621.373 7

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА

Г. И. Кравченко, В. Ф. Марков

В работе обсуждается возможность изменения вероятности ложной тревоги при обнаружении синхронных сигналов с помощью одночастотного параметрического генератора в режиме однократного запуска. Показано, что данную вероятность можно устанавливать посредством введения в параметрический контур вспомогательного сигнала, частота которого совпадает с частотой субгармоники. Проводится сравнение характеристик параметрического генератора и оптимального приемника

Возможность использования одночастотного параметрического генератора (ОПГ) для обнаружения синхронных с субгармоникой синусоидальных сигналов изучалась в [1, 2]. В этих работах, однако, рассмотрены режимы, при которых однократный запуск ОПГ приводит к вероятности ложной тревоги, равной 0,5, независимо от отношения сигнал/шум на входе. Уменьшение данной вероятности заставляет многократно запускать систему, что связано с увеличением времени анализа.

Ниже исследуется способ однократного запуска ОПГ, при котором вероятность ложной тревоги устанавливается так же, как и в идеальном приемнике при изменении порога [3]. Это сокращает до минимума время анализа и расширяет круг технических задач, которые могут быть решены с помощью ОПГ.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОПГ

Будем рассматривать случай обнаружения синусоидального сигнала на фоне нормального белого шума $\eta(t)$, для чего предварительно установим, что стационарные фазы субгармоники связаны в ОПГ с широкополосной внешней силой.

В [4] найдено, как установление указанных фаз заканчивается на линейном этапе нестационарных процессов. В связи с этим анализ явлений в ОПГ имеет смысл проводить на линейной модели.

Линейную модель ОПГ представим как последовательное соединение индуктивности L_k , активного сопротивления $r(t)$, которое меняется по закону

$$r(t) = \begin{cases} r_1 & \text{при } t < t_1 \\ r_2 & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases},$$

емкости $C(t) = C_0(1 + m \sin 2\omega_0 t)^{-1}$ и источника ограниченной широкополосной внешней силы $\varepsilon(t)$.

Подберем значения r_1 , r_2 и коэффициента модуляции m ($m \ll 1$) так, чтобы условия возбуждения субгармоники выполнялись лишь после момента t_1 . Движения в системе опишем уравнением для заряда q на емкости $C(t)$:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \delta(t) \Omega \frac{dq}{dt} + \Omega^2 (1 + m \sin 2\omega_0 t) q = -\frac{1}{L_k} \varepsilon(t). \quad (1)$$

Здесь $\Omega = (L_k C_0)^{-1/2}$, $\delta(t) = r(t)/\Omega L_k \ll 1$.

Субгармонический процесс $q(t)$ будем определять в форме $q(t) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t$, считая функции $q(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ непрерывными в точке t_1 .

Точные уравнения для переменных a и b записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= Q_a(a, b, t) + F_a(t), \\ \frac{db}{dt} &= Q_b(a, b, t) + F_b(t). \end{aligned} \quad (2)$$

В этих уравнениях слагаемые $F_a(t) = \frac{1}{\Omega L_k} \varepsilon(t) \sin \omega_0 t$ и $F_b(t) = -\frac{1}{\Omega L_k} \varepsilon(t) \cos \omega_0 t$ учитывают внешнее воздействие, а $Q_a(a, b, t)$ и $Q_b(a, b, t)$ могут быть найдены из (1).

Так как в нашем случае внешняя сила имеет широкий спектр, решение (2) проводим методом частичного укорачивания, для чего оператором усреднения $M\{\cdot\} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \{\cdot\} dt$ ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$) действуем лишь на функции $Q_a(a, b, t)$ и $Q_b(a, b, t)$. В результате получим (при $\omega_0 = \Omega$) укороченные уравнения

$$\frac{da}{dt} = p_{1,2} a + F_a(t); \quad (3a)$$

$$\frac{db}{dt} = \rho_{1,2} b + F_b(t), \quad (3б)$$

в которых индекс «1» относится к интервалу $(-\infty, t_1)$, индекс «2» — к интервалу $[t_1, t_2]$. Здесь же $p_{1,2} = \frac{\Omega}{2} \left(\frac{m}{2} - \delta_{1,2} \right)$, $p_1 < 0$, $p_2 > 0$, $\rho_{1,2} = \frac{\Omega}{2} \left(-\frac{m}{2} - \delta_{1,2} \right)$, $\rho_{1,2} < 0$, $\delta_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\Omega L_k}$.

Будем считать длину Δt интервала $[t_1, t_2]$ достаточно большой, для того чтобы к моменту t_2 фаза субгармоники установилась почти достоверно. При этом должно выполняться неравенство $a(t_1) \gg b(t_2)$, и интересующая нас фаза определится величиной $\text{sgn } a(t_2)$. Последнюю найдем из (3а):

$$\begin{aligned} \text{sgn } a(t_2) &= \text{sgn} \left\{ \exp [p_2 (t_2 - t_1)] \left[a(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \exp [-p_2 (t - t_1)] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times F_a(t) dt \right] \right\} = \text{sgn} \left[a(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \exp [-p_2 (t - t_1)] F_a(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (4a)$$

В данном выражении

$$a(t_1) = \int_{\infty}^{t_1} \exp [p_1 (t_1 - \tau)] F_a(\tau) d\tau. \quad (4б)$$

Обозначим установившуюся фазу субгармоники символом λ ($\lambda = \pm 1$) и введем в рассмотрение (посредством замены в (4) фиксированных моментов t_1 и t_2 текущими моментами $t - \Delta t$ и t) непрерывную функцию

$$I(t) = \int_{-\infty}^{t-\Delta t} \exp [p_1(t - \Delta t - \tau)] F_a(\tau) d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \exp [p_2(t - \Delta t - \tau)] \times \\ \times F_a(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h_{\text{ОПГ}}(t - \tau) F_a(\tau) d\tau = L \{ \varepsilon(t) \sin \omega_0 t \},$$

где L — линейный стационарный оператор с нормированной весовой функцией

$$h_{\text{ОПГ}}(t) = \begin{cases} \exp [p_2(t - \Delta t)] & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta t \\ \exp [p_1(t - \Delta t)] & \text{при } t > \Delta t \end{cases}. \quad (5)$$

Тогда выражение, связывающее стационарную фазу с внешней силой (алгоритм преобразования сигнала в ОПГ), запишется следующим образом:

$$\lambda = \text{sgn } I(t_2), \\ I(t) = L \{ \varepsilon(t) \sin (\omega_0 t + \gamma_0) \}. \quad (6)$$

Заметим, что в рассмотренной ситуации (отсутствует расстройка между собственной частотой системы Ω и частотой субгармоники ω_0) $\gamma_0 = 0$. Применяя, так же как и в [4], линейное преобразование координат, находим, что расстройка вносит в (5) и (6) следующие коррективы:

$$p_{1,2} = \frac{\Omega}{2} \left(-\delta_{1,2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} \right), \quad \xi = -1 + \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2, \\ \gamma_0 = -\arctg \frac{\xi}{m + \sqrt{m^2 + \xi^2}}.$$

Следовательно, алгоритм (6) имеет достаточно общий характер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПОСОБА РЕГУЛИРОВКИ ВЕРОЯТНОСТИ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ

Рассмотрим два варианта приборной реализации оптимального приемника, решающего при заданном времени анализа T_a задачу обнаружения сигнала $x(t) = A_c \sin (\omega_0 t + \gamma_0)$ на фоне шума $\eta(t)$.

Первый вариант характеризуется схемой «перемножитель—интегрирующее звено—пороговое устройство» [3]. В такой схеме имеет место умножение процесса $\varepsilon(t) = x(t) + \eta(t)$ на опорный сигнал $\sin (\omega_0 t + \gamma_0)$. Интегрирующее звено превращает продукт перемножения в процесс

$$I(t) = L_0 \{ \varepsilon(t) \sin (\omega_0 t + \gamma_0) \} = \frac{1}{T_a} \int_{t-T_a}^t \varepsilon(t) \sin (\omega_0 t + \gamma_0) dt, \quad (7)$$

а пороговое устройство определяет в момент t_2 факт превышения функцией $I(t)$ порога E_n и в соответствии с этим выдает бинарный сигнал $\lambda = \pm 1$. Превышению порога отвечает равенство $\lambda = +1$. Момент $t_2 - T_a$ есть начало анализа, t_2 — конец анализа.

Операцию сравнения $I(t)$ с порогом E_n отражает зависимость

$$\lambda = \text{sgn } [I(t_2) - E_n]. \quad (8)$$

Вероятность ложной тревоги в системе определяется значением E_n .

Второй вариант приемника обладает схемой «перемножитель—интегрирующее звено — знаковое устройство». Для того, чтобы данный приемник выдавал сигнал (8), на его вход необходимо наряду с $\varepsilon(t)$ подавать вспомогательное колебание $y(t) = A_n \sin(\omega_0 t + \varphi_n)$, удовлетворяющее условию $L_0\{y(t) \sin(\omega_0 t + \gamma_0)\} = -E_n$.

Алгоритм обработки сигналов в последнем случае запишется так:

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{sgn} I(t_2), \\ I(t) &= L_0\{[\varepsilon(t) + y(t)] \sin(\omega_0 t + \gamma_0)\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что установление того или иного значения вероятности ложной тревоги в схеме со знаковым устройством связано с подбором амплитуды A_n и фазы φ_n колебания $y(t)$.

Сопоставляя (9) и (6), заключаем, что ОПГ при однократном запуске позволяет так же, как и приемник со знаковым устройством, решать задачу обнаружения процесса $x(t)$ при любой заданной вероятности ложной тревоги, если только сумма $x(t) + \eta(t)$ дополнена вспомогательным сигналом $y(t)$, параметры которого согласованы со свойствами оператора L .

СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМНИКА И ОПГ

Учитывая (7), запишем выражение для оптимального оператора в форме

$$L_0\{z(t)\} = \frac{1}{T_a - \infty} \int_{-\infty}^t h_0(t - \tau) z(\tau) d\tau,$$

где

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T_a \\ 0 & \text{при } 0 > t > T_a \end{cases}.$$

Сравнение приемников проведем, сопоставляя графики весовых функций $h_{\text{опг}}(t)$ и $h_0(t)$ (см. рис. 1).

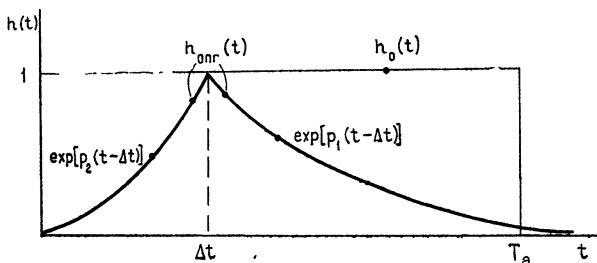


Рис. 1.

Графики показывают, что накопление энергии сигнала в оптимальном устройстве производится на протяжении всего времени анализа T_a с единичным весом. Что же касается ОПГ, то здесь весовая функция равна единице лишь в одной точке (в момент возникновения субгармонического процесса). В другие моменты времени имеет место накопление с весом, меньшим единицы. При этом проигрыш ОПГ будет зависеть от выбора величин p_1 , p_2 , Δt и T_a .

Определим характеристики обнаружения (зависимость вероятности

пропуска сигнала α от вероятности ложной тревоги β) изучаемых систем в случае, когда $p_1 = p_2 = p_0$, $T_a = 2 \Delta t$.

Воспользовавшись обычными методами преобразования случайных сигналов [3], для приемника с ОПГ из (6) находим:

$$\alpha = 1 - F \left\{ \frac{A_n E_3}{\sqrt{N_0 E_1}} \right\}, \quad \beta = 1 - F \left\{ \frac{(A_c - A_n) E_3}{\sqrt{N_0 E_1}} \right\}.$$

В данных выражениях $F \{ \cdot \}$ — интеграл вероятности, N_0 — спектральная плотность шума, A_n — амплитуда вспомогательного колебания $y(t)$, фаза которого отличается от фазы сигнала на π радиан,

$$E_1 = \int_0^{\Delta t} \exp [2 p_0 (t - \Delta t)] \sin^2 (\omega_0 t + \gamma_0) dt,$$

$$E_3 = \int_0^{\Delta t} \exp [p_0 (t - \Delta t)] \sin^2 (\omega_0 t + \gamma_0) dt.$$

Представленные на рис. 2 характеристики обнаружения оптимального приемника [3] (штриховые линии) и ОПГ (сплошные линии) построены для конкретных значений $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-4}$ сек, $p_0 = 0,184 \cdot 10^6$ рад/сек, $N_0 = 1$ вт/гц, $d = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ ($d = \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}$, E_s — энергия сигнала на интервале $2 \Delta t$).

Графики указывают на то, что характеристики ОПГ отличаются в худшую сторону от оптимальных кривых.

Существует возможность приблизить алгоритм ОПГ к оптимальному — для этого достаточно перейти к новому закону суперизации (закону изменения сопротивления r). Например, если r менять так, чтобы на протяжении некоторого времени перед возбуждением выполнялось условие $\frac{m}{2} \approx \frac{r}{\Omega L_k}$, весовая

функция $h_{\text{ОПГ}}(t)$ будет отличаться от $h_0(t)$ значительно меньше, поскольку увеличится интервал, в пределах которого $h_{\text{ОПГ}}(t) \approx 1$.

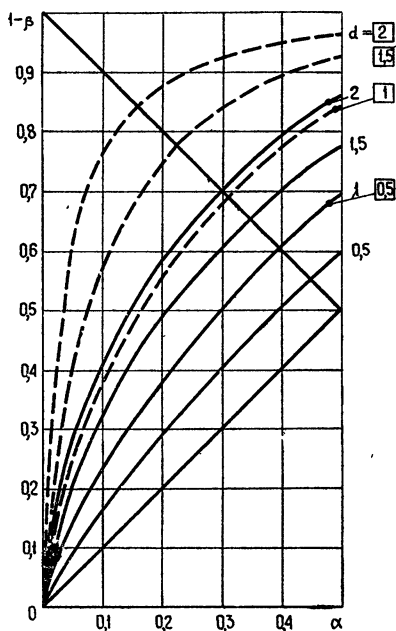


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Комолов, А. С. Рошаль, И. Т. Трофименко, Параметроны в цифровых устройствах, изд. Энергия, М., 1968.
2. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1367 (1970).
3. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1968.
4. А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов, Параметрические генераторы и делители частоты, изд. Сов. радио, М., 1966.

DETECTION OF SIGNALS BY MEANS OF PARAMETRIC OSCILLATOR

G. I. Kravchenko, V. F. Markov

The paper discusses the possibility of changing the probability of false alarm signal when detecting synchronous signals in a single-start regime. It is shown that this probability may be established by introducing in the parametric circuit the additional signal which frequency coincides with that of a subharmonic. The characteristics of the parametric oscillator are compared with those of an optimal receiver.

УДК 621.391 : 62 — 505.7

ОСОБЕННОСТИ СИНХРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

И. М. Клибанова

Рассмотрена задача о взаимной синхронизации в автоколебательной системе с двумя степенями свободы. Выявлены возможные режимы синхронного взаимодействия и получены условия их реализации. Рассмотрена фазовая плоскость фаз синхронных колебаний, что позволило дать качественную оценку характеру изменения набега фазовых флуктуаций при наличии шумов из-за синхронного взаимодействия автоколебательных систем. Показано, что соответствующим подбором связи можно добиться стабилизации колебаний не только при дробно-кратной синхронизации, но и в режиме одночастотного синхронного взаимодействия «Неудачный» подбор связи может привести в обоих случаях к существенной дестабилизации автоколебаний

Изучение стабильности автоколебательных систем с двумя и более степенями свободы, проведенное в ряде работ [1-6, 12], выявило наличие эффектов стабилизации и дестабилизации автоколебаний системы при синхронном взаимодействии. При этом было получено, что одно и то же шумовое воздействие приводит к прямо противоположным результатам при одночастотной [1, 2] и дробно-кратной [3-6] взаимной синхронизации, т. е. влияние шумового воздействия оказывается существенно связанным с соотношением частот взаимодействующих автоколебаний. Естественно было предположить, что последнее связано с особенностями динамики системы. Однако усмотреть их, опираясь на те исследования, которые содержатся в опубликованных на эту тему работах [7-11], трудно, поскольку случаи одночастотной и дробно-кратной синхронизации всегда рассматриваются обособленно и, как правило, в пределах первого приближения по малой связи. При этом из рассмотрения исключаются некоторые области синхронного взаимодействия, соответствующие практически важным режимам работы системы.

Для того, чтобы выявить особенности динамики синхронного взаимодействия автоколебаний и зависимость их от характера связи и соотношения частот, в настоящей статье с единой точки зрения рассмотрена задача о взаимной синхронизации в автоколебательных системах с двумя степенями свободы. При этом выявлены возможные режимы синхронного взаимодействия, их зависимость от соотношения частот, мощностей, величин связи; получены условия реализации различных режимов. Рассмотрена фазовая плоскость фаз синхронных колебаний, что позволило дать качественную оценку характеру изменения набега фазовых флуктуаций при наличии шумов из-за синхронного взаимодействия автоколебательных систем. При этом показано, что соответствующим подбором связи можно добиться стабилизации колебаний не только при дробно-кратной синхронизации, но и в режиме одночастотного синхронного взаимодействия. Вместе с тем неудачный подбор связи, может привести в обоих случаях к существенной дестабилизации авто-

колебаний. Таким образом, показано, что в этом смысле одночастотный и двухчастотный режимы равноценны.

1. Рассмотрим динамическую автоколебательную систему, близкую к линейной консервативной системе и описываемую системой уравнений четвертого порядка:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - x_1 \ddot{x}_2 &= f_1(x_1, \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - x_2 \ddot{x}_1 &= f_2(x_2, \dot{x}_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь через $f_i(x_i, \dot{x}_i)$ обозначены функции, описывающие малые потери и нелинейности, ω_{0i} — парциальные частоты системы, x_i — коэффициенты связи. В общем случае x_i — комплексные. Мы ограничимся случаем действительных x_i .

В такой системе возможны два типа стационарных периодических движений: одночастотное, которое реализуется при достаточной близости парциальных частот ($\omega_{01} \approx \omega_{02}$), и двухчастотное, которое возможно при достаточной близости отношения парциальных частот к отношению целых чисел r/s ; r/s — несократимая дробь. В первом случае периодическое решение системы запишем в виде, близком к гармоническому, а во втором — представим в виде суперпозиции «почти гармонических» колебаний (см., например, [1, 12]). Опуская общеизвестную процедуру получения укороченных уравнений, приведем их для двухчастотного синхронного режима:

$$\dot{\alpha}_i(t) = -p_i \alpha_i + (-1)^{i-1} \lambda_i \cos \theta; \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}_i(t) = -\Delta_i + \lambda_i \sin \theta + \frac{\chi_i^0}{2} \sin 2\theta; \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = s\dot{\varphi}_2 - r\dot{\varphi}_1 = \Delta - \lambda \sin \theta + q \sin 2\theta. \quad (4)$$

Здесь $\alpha_i(t)$, $\varphi_i(t)$ — медленные функции времени, характеризующие соответственно относительное изменение амплитуд и изменение фаз колебаний связанных генераторов из-за синхронного взаимодействия, p_i имеют смысл прочности предельного цикла автоколебаний свободных генераторов, $\Delta_i \approx \omega_i - n_i$ — смещение нормальных частот n_i при синхронизации, $\Delta \approx sn_2 - rn_1$ — обобщенная начальная расстройка нормальных частот, $\theta = \delta\varphi_2 - r\varphi_1$ и ω_i — обобщенная разность фаз и частоты синхронных колебаний.

Параметры λ_i характеризуют собой величины синхронизирующего воздействия и определяются уровнем комбинационных частот, близких к частотам автоколебаний и образующихся на нелинейных элементах генераторов. Их выражения для случая полиномиальных характеристик $f_i(x_i, \dot{x}_i)$ приведены в [12]; $\lambda_1 = l_1 A_{02}^2 \frac{\Lambda}{r}$, $\lambda_2 = l_2 A_{01}^2 \frac{\Lambda}{s}$ (Λ — коэффициент, определяемый соотношением частот и амплитуд A_{0i} свободных колебаний, а также характером нелинейности, l_i — коэффициенты распределения). Параметры

$$\chi_i^0 = \lambda_i \left[\left(\frac{r\lambda_1}{p_1} - \frac{s\lambda_2}{p_2} \right) + 2(-1)^i \frac{\lambda_i}{p_i} \right] \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

характеризуют неизохронность, возникающую при синхронном взаимодействии. Коэффициенты

$$\lambda = r\lambda_1 - s\lambda_2, \quad q = \frac{1}{2} (s\chi_2^0 - r\chi_1^0) \quad (6)$$

определяют соответственно результирующую величину сигнала синхронизации и суммарную неизохронность.

Уравнения (2)–(4) получены в предположении устойчивости автоколебаний свободных генераторов ($p_1, p_2 > 0$) и малости связи ($x_1, x_2 \ll 1$), вследствие чего принято, что $\alpha_i \ll 1$, а $\lambda_i \ll p_i$ (время релаксации амплитуд p_i^{-1} существенно меньше времени релаксации фаз λ_i^{-1}).

Следует отметить, что в силу принятых предположений коэффициенты χ_i^0, q являются величинами второго порядка малости по сравнению с λ_i . Однако, как будет видно из дальнейшего, ими не всегда можно пренебречь.

Сопоставим теперь уравнения (2)–(4) с системой укороченных уравнений, описывающей поведение амплитуд α_i и фаз φ_i одночастотного синхронного режима (см., например, [7, 8]). Нетрудно заметить, что их отличие несущественно и связано лишь со смещением обобщенной разности фаз θ на $\pi/2$. Следовательно, для того, чтобы система (2)–(4) была пригодна для описания поведения α_i и φ_i одночастотного синхронного режима, достаточно в уравнениях (2)–(4), соотношениях (5), (6) и в соответствующих обозначениях положить $r = s = 1$

и вместо θ ввести фазу $\theta' = \theta + \gamma$, где $\gamma = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s \\ \pi/2 & \text{при } r = s = 1 \end{cases}$. Смысл параметров $\Delta_i, \Delta, p_i, \lambda_i, \lambda, q, \chi_i^0$ — прежний, а выражения для коэффициентов λ_i (см., например, [7, 8]) будут:

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{\omega}}{2} \frac{x_1 A_{02}}{A_{01}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tilde{\omega}}{2} \frac{x_2 A_{01}}{A_{02}} \quad (7)$$

($\tilde{\omega}$ — синхронная частота). Таким образом, величины α_i при $r \neq s$ характеризуют изменение амплитуд нормальных колебаний, а при $r = s = 1$ — амплитуд колебаний x_i при синхронном взаимодействии генераторов. То же самое следует иметь в виду и в отношении φ_i .

2. Стационарные значения $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\varphi}_i, \theta'_0$ определяются уравнениями

$$\tilde{\alpha}_i = (-1)^{i-1} \frac{\lambda_i}{p_i} \cos \theta'_0, \quad \Delta_i = \lambda_i \sin \theta'_0; \quad (8)$$

$$\Delta = \lambda \sin \theta'_0 - q \sin 2\theta'_0. \quad (9)$$

Синхронный режим будет устойчив, если $p_i > 0$ (что для рассматриваемого случая парциально-возбужденных генераторов выполняется) и при

$$D = \lambda \cos \theta'_0 - 2q \cos 2\theta'_0 > 0. \quad (10)$$

Условием $D > 0$ определяются устойчивые значения стационарной разности фаз θ'_0 . Максимальное значение расстройки $|\Delta| = \Delta_0$, при которой соотношение (9) справедливо, есть не что иное, как полоса синхронизации. Величина ее, равно как и устойчивые значения стационарной разности фаз, а следовательно, и стационарные значения $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\varphi}_i$, смещения частот Δ_i определяются параметрами λ и q . Здесь возможны следующие случаи, отличающиеся качественно различным поведением

параметров θ'_0 , D , α_i , Δ_i при изменении обобщенной начальной расстройки Δ в полосе синхронизации:

$$\text{а) } |\lambda| \geq 2|q| \text{ и б) } |\lambda| < 2|q|.$$

На рис. 1 представлена деформация зависимости обобщенной фазы $\theta'_0(\Delta)$. Видно, что в первом случае, когда $|\lambda| \geq 2q$, имеет место непрерывное и однозначное соответствие между фазой θ'_0 и начальной расстройкой. При этом «прочность по фазе» D обращается в нуль только на границе области синхронного режима (при $\Delta = \pm \Delta_0$).

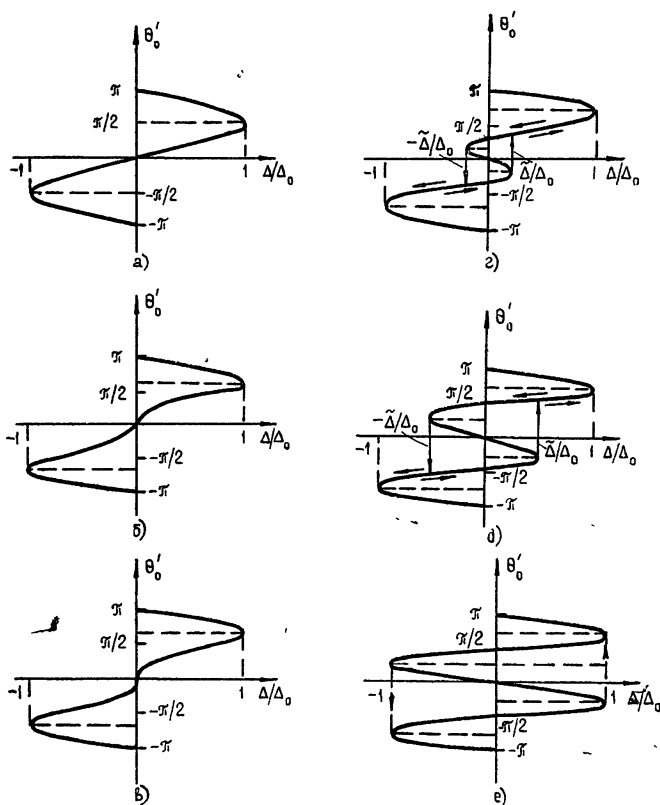


Рис. 1. а) $\lambda \gg q$ ($K \in \bar{I}$); б) $\lambda = 4q$ ($K \in \bar{I}$); в) $\lambda = 2q$ ($K \in \bar{I}$); г) $\lambda = q$ ($K \in I$); д) $\lambda = q/2$ ($K \in I$); е) $\lambda \ll q$ ($K \in I$).

При переходе параметра $|\lambda|$ через значение, равное $2|q|$, зависимость $\theta'_0(\Delta)$ претерпевает качественное изменение: в полосе синхронизации возникают скачки стационарных значений θ'_0 , и связь обобщенной фазы с начальной расстройкой в некотором интервале $[-\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}]$ (область затягивания) становится неоднозначной. С уменьшением $|\lambda|$ область затягивания растет и при $|\lambda| \rightarrow 0$ сливается с областью синхронного режима. Последнее означает, что в предельном случае область затягивания исчезает и при плавном изменении начальной расстройки в полосе синхронизации не будет скачков стационарных значений параметра θ'_0 . Однако, как видно из рисунка, неоднозначность зависимости θ'_0 от Δ остается и, какой из кривых будет соответствовать ее изменению с расстройкой—определяется начальными условиями.

Поведение параметров $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\Delta}_i, D$ с изменением расстройки целиком определяется зависимостью $\theta'_0(\Delta)$. В силу этого качественная картина деформации зависимости $\tilde{\alpha}_i(\Delta), \tilde{\Delta}_i(\Delta), D(\Delta)$ при изменении отношения $|\lambda|/|q|$ будет аналогична вышеописанной.

Обращаясь к соотношениям (6), (7), нетрудно заметить, что первое неравенство заведомо выполняется, если параметры λ_1 и λ_2 имеют различные знаки. Если же $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, то оно будет справедливо лишь тогда, когда $r\lambda_1$ и $s\lambda_2$ достаточно разнятся между собой. Введем параметр K , равный их отношению:

$$K = -r\lambda_1/s\lambda_2. \quad (11)$$

Назовем его коэффициентом взаимной связи. Он является количественной характеристикой относительного влияния парциальных систем на процесс взаимной синхронизации и параметры синхронного режима и определяется величиной и фазой вносимых напряжений. Нетрудно убедиться в том, что «бескачковый» режим синхронной работы ($|\lambda| \geq 2|q|$) реализуется почти при всех значениях K , исключая область $I \equiv \left[-1 - \frac{2s\lambda_2}{p_2}, -1 + \frac{2s\lambda_2}{p_2} \right]$ вблизи $K = -1$, т. е. тогда, когда участие парциальных систем в процессе синхронизации различно. Следуя [8], назовем этот режим режимом неидентичной синхронизации.

При значениях $K \in I$, т. е. в случае, когда вклад парциальных систем во взаимную синхронизацию почти одинаков, имеет место идентичная синхронизация, для которой характерно наличие скачкообразных изменений параметров $\theta'_0, D, \alpha_i, \Delta_i$. И, наконец, в предельном случае, когда $K = -1$, влияние парциальных систем на синхронизацию совершенно одинаково, реализуется режим «абсолютно идентичной» синхронизации, в котором скачки стационарных значений параметров отсутствуют, но неоднозначность их зависимости остается (рис. 1е). Предельные значения $K = 0$ и $K = \pm \infty$ соответствуют случаю односторонней синхронизации одним из генераторов.

На основании (6), (7), (9) получаем, что

$$K = \mp \frac{\kappa_1 \omega_2^2 A_{02}^2}{\kappa_2 \omega_1^2 A_{01}^2}, \quad (12)$$

где отрицательный знак соответствует случаю $r = s = 1$, а положительный — случаю $r \neq s$. Таким образом, режим синхронной работы системы определяется тремя независимыми параметрами: отношением мощностей A_{02}^2/A_{01}^2 , отношением частот ω_2^2/ω_1^2 и отношением коэффициентов связи κ_1/κ_2 автоколебательных систем. Первые два параметра являются характеристикой автоколебаний парциальных систем, а третий определяется условиями их взаимосвязи.

Выясним влияние условий взаимосвязи на режим синхронной работы автоколебательной системы. Как следует из (12), при симметричной связи, когда $\kappa_1 \kappa_2 > 0$, коэффициент взаимной связи отрицателен в одночастотном режиме и положителен — в двухчастотном. Следовательно, в этом случае в одночастотном синхронном режиме возможна, в зависимости от величины отношения λ_1/λ_2 , как неидентичная синхронизация ($K \in I$), так и идентичная ($K \in I$), в то время, как в двухчастотном режиме всегда будет неидентичная синхронизация*.

* Заметим, что при $\kappa_1 \equiv \kappa_2$ выбор того или иного режима определяется только регулировкой амплитуд A_{01}, A_{02} свободных колебаний.

При несимметричной связи, когда $\chi_1 \chi_2 < 0^*$, коэффициент взаимной связи положителен в одночастотном режиме и отрицателен в двухчастотном. Следовательно, при несимметричной связи в одночастотном режиме возможна только неидентичная синхронизация, а в двухчастотном — любая.

Зависимость полосы синхронизации Δ_0 от соотношения параметров λ и q приведена на рис. 2, откуда видно, что при неидентичной синхронизации $\Delta_0 \approx |\lambda|$, а при $|\lambda| \ll |q|$ полоса $\Delta_0 = |q|$, т. е. является величиной второго порядка малости.

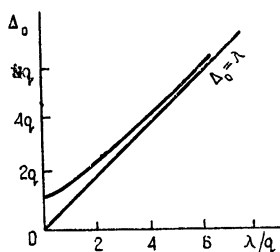


Рис. 2.

Известно, что анализ качественной картины поведения фазы колебания дает возможность сделать определенные выводы и о характере структуры спектра колебания при наличии шумов. Так фаза колебания свободного генератора может быть любой в зависимости от начальных условий. При наличии шумов это приводит к неограниченному росту дисперсии фазовых флуктуаций и уширению спектральной линии. Фаза же генератора, синхронизованного монохроматическим напряжением, жестко «привязана» к фазе эталонного колебания, и уширения спектральной линии нет.

Посмотрим, к каким качественным изменениям поведения фазы колебания приводит взаимная синхронизация генераторов с тем, чтобы представить, какие изменения в структуре спектров колебаний можно при этом ожидать. С этой целью рассмотрим фазовую плоскость $r\psi_1, s\psi_2$ уравнений (3). Линеаризация их в окрестности стационарного режима (8), (9) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} r\dot{\psi}_1 &= r(D_1 + \chi_1)(s\psi_2 - r\psi_1); \\ s\dot{\psi}_2 &= s(D_2 + \chi_2)(s\psi_2 - r\psi_1), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$D_i = \lambda_i \cos \theta'_i, \quad \chi_i = \chi_i^0 \cos 2\theta'_i. \quad (14)$$

Равновесные состояния — это совокупность точек прямой $r\psi_1 = s\psi_2$; они устойчивы при $D > 0$. Интегральные кривые уравнений представляют собой семейство параллельных прямых. Тангенс наклона их равен $\mu = \frac{r(D_1 + \chi_1)}{s(D_2 + \chi_2)}$, т. е. зависит от начальной расстройки Δ и коэффициента взаимной связи K (см. (5) — (7), (12), (14)).

Поведение интегральных прямых при изменении K (т. е. в различных режимах синхронного взаимодействия) при $\Delta = 0$ представлено на рис. 3. Вертикальному и горизонтальному расположению прямых соответствует односторонняя синхронизация ($K = 0, K = \pm \infty$). Бифуркационным значениям $K = K_{\delta_i}$ (где $D = 0$) соответствуют интегральные прямые, параллельные прямой равновесных состояний.

Примечательным является тот факт, что все возможные случаи расположения интегральных кривых имеют место как в области неиден-

* Несимметричную связь двух автоколебательных систем можно реализовать, в частности, с помощью независимых связующих элементов (например, катодных повторителей, ферритовых вентилей и т. п.) Несимметричному случаю соответствует также связь генераторов через общую активную нагрузку. Реактивная взаимосвязь приводит к симметричному случаю.

тичной ($K \notin I$), так и в области идентичной ($K \in I$) синхронизации (см. рис. 3).

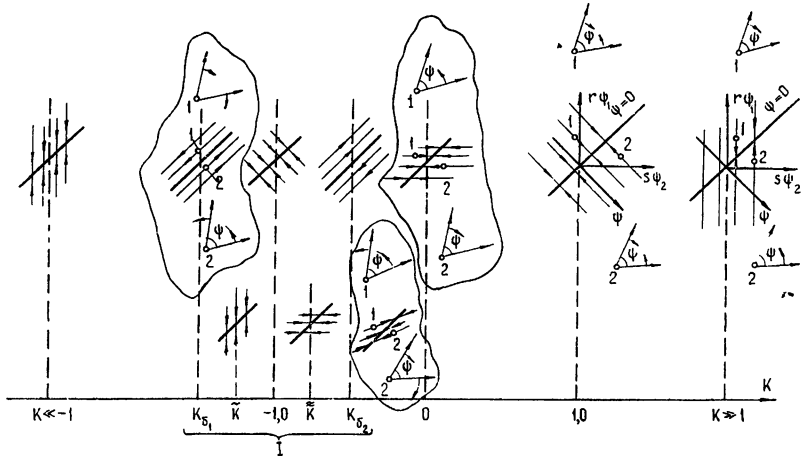


Рис. 3.

Рассмотрение фазовой плоскости фаз синхронных колебаний (приведенных к обобщенной частоте $\omega_0 = r\omega_1 = s\omega_2$) позволяет выявить два различных характера установления стационарного режима: при отрицательном наклоне интегральных прямых стационарная фаза θ_0 устанавливается при «встречном» изменении фаз $r\psi_1, s\psi_2$ синхронных колебаний, а при положительном — при «однаправленном» их изменении (рис. 3). Ясно, что в первом случае не может быть существенного изменения величины фазового набега из-за синхронного взаимодействия генераторов и, более того, при определенных условиях можно ожидать некоторой компенсации фазовых уходов, т. е. одновременной стабилизации автоколебаний. Однаправленное же изменение фаз приводит к дополнительному «накручиванию» фаз автоколебаний и тем большему, чем меньше различаются скорости движения различных фаз $\left(\frac{1}{r\lambda_1}, \frac{1}{s\lambda_2}\right)$. Бифуркационному случаю соответствуют, очевидно, одинаковые скорости изменения фаз автоколебаний (рис. 3), что приводит при любом сколь угодно малом случайном возмущении к неограниченному возрастанию фазового набега из-за синхронного взаимодействия. Разумеется, ожидать одновременной стабилизации автоколебаний при таком характере установления стационарной разности фаз не приходится.

Высказанные выше качественные соображения подтверждаются точным анализом флуктуационных характеристик синхронных автоколебаний [1-4].

Интересно отметить, что если при $K > 0$ наклон μ интегральных прямых всегда отрицателен и меняется от нуля до $-\infty$ при изменении $K \in [0, \infty)$, то при $K < 0$ наклон μ может быть как положительным, так и отрицательным. При этом изменению μ в интервале $[0, \infty)$ соответствует изменение коэффициента взаимной связи в интервале $\tilde{K} < K < \tilde{\tilde{K}}$, причем можно показать, что $|\tilde{K} - \tilde{\tilde{K}}| \approx \lambda_2^2/p_2^2$, т. е. этот интервал на порядок уже области идентичной синхронизации. Следовательно, одновременную стабилизацию автоколебаний можно ожидать не только при неидентичной синхронизации, но и в режиме абсолютно идентичной синхронизации. Правда, в этом случае стабилизация дол-

жна быть весьма критичной к изменению параметров системы. Эти выводы согласуются с результатами теоретического анализа флуктуационных явлений в автоколебательных системах с двумя степенями свободы [1-6, 11].

Если при этом учесть, что при симметричной связи коэффициент K положителен в режиме дробно-кратной синхронизации и отрицателен при синхронизации на близких частотах, то становится понятной стабилизация колебаний в первом случае [3-6, 11] и дестабилизация [1, 2, 11] — во втором (при $K \neq -1$). Очевидно, что при несимметричной связи все будет наоборот.

В заключение приношу искреннюю благодарность А. Н. Малахову за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1966.
2. И. М. Клибанова. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 720 (1966)
3. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
4. И. М. Клибанова, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 1022; № 7, 1238 (1969)
5. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 9, 1361 (1969).
6. Я. С. Вирник, А. С. Ковалев, Е. Г. Ларионцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 12, 1769 (1970).
7. К. Ф. Теодорчик, Радиотехника, 1, № 3—4, 3 (1946)
8. Г. Н. Раппопорт, Радиотехника, 6, № 4, 53 (1951).
9. М. Е. Жаботинский, ЖЭТФ, 20, № 5, 421 (1950).
10. Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 2, № 1, 44 (1957).
11. И. М. Клибанова, Диссертация, ГГУ, Горький, 1970.
12. И. М. Клибанова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 11, 1676 (1968)

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
3 ноября 1972 г.

PECULIARITIES OF SYNCHRONOUS INTERACTION OF OSCILLATIONS IN A SELF-OSCILLATING SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

I. M. Klibanova

The problem of mutual synchronization in a self-oscillating system with two degrees of freedom is considered. Possible regimes of synchronous interaction are revealed and the conditions of their realization are obtained. The phase plane of synchronous oscillation phases is considered. This enables one to give a qualitative estimation of the character of changing the shift of phase fluctuations in the presence of noises due to synchronous interaction of self-oscillating systems. It is shown that using the proper choice of coupling one may achieve the oscillation stabilization not only at the fractional stabilization but also in the regime of a single-frequency synchronous interaction. „Unsuccessful“ choice of coupling may lead in both cases to an essential de-stabilization of self-oscillations.

УДК 535.338.3

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ОБРАБОТКА ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПРОЦЕССОВ (ДО 1,5 МГц) С ОТНОСИТЕЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЕ

Г. К. Иванова, Е. Ф. Орлов, И. С. Раков, Г. А. Шаронов

Рассмотрен метод оптической обработки сигналов в некогерентном свете при измерении корреляции сигналов с базой 10^8 в полосе частот до $\sim 1,5$ МГц, имеющих априори неизвестные сдвиги во времени и по частоте.

Для проведения радиоастрономических измерений с высоким угловым разрешением и, в частности, в радиоинтерферометрии с независимыми гетеродинами [1–3] для обеспечения необходимой чувствительности приемной системы возникает задача измерения взаимной корреляции процессов, имеющих базу (произведение ширины полосы на длительность сигнала) $10^8 \div 10^9$ в полосе до нескольких мегагерц. В настоящее время реализованы системы измерения корреляции с использованием ЭВМ и с предварительной записью сигналов на видеомагнитофон в полосе до 2 МГц [3]. Расширение полосы с целью повышения чувствительности интерферометра существенно усложняет систему регистрации сигналов с требуемой точностью [4]. В связи с этим представляет интерес рассмотрение возможностей оптических систем обработки информации [5], которые качественно отличаются от электрических аналоговых и цифровых вычислительных систем. Основное преимущество оптических систем заключается в том, что элементарной операцией, выполняемой оптическими системами, является операция измерения интеграла от произведения двух функций, задаваемых изменением прозрачности двумерных транспарантов. Вследствие двумерности оптических устройств число значений функций, над которыми выполняются операции, достигает $10^5 \div 10^6$, причем ввод всех значений функций в устройство обработки происходит одновременно и практически мгновенно. Преимуществом также является относительная простота как используемых систем оптической записи сигналов на транспарант (фотопленку), так и оптико-механических систем корреляционной обработки.

В данной работе в приближении геометрической оптики рассмотрен принцип действия оптических модуляционных систем корреляционной обработки, функционирующих в некогерентном свете, применительно к широкополосным сигналам, имеющим относительный сдвиг как по времени, так и по частоте. Рассмотрены факторы, ограничивающие величину базы сигналов в таких системах.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Предположим, что сигналы на выходах антенн интерферометра представляют собой узкополосный случайный процесс и могут быть записаны в виде

$$u_1(t) = a_0(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + z_1'(t),$$

$$u_2(t) = a_0(t - \tau_{np}) \sin [\omega_0(t - \tau_{np}) + \varphi(t - \tau_{np})] + z'_2(t), \quad (1)$$

где $a_0(t)$ и $\varphi(t)$ — медленные по сравнению с $2\pi/\omega_0$ изменения амплитуды и фазы, $z'_1(t)$ и $z'_2(t)$ — аддитивный шум приемных устройств, $\tau_{np} = (D/c) \sin \theta_0$ — временная задержка сигнала, обусловленная пространственной разностью хода (D — длина базы интерферометра), θ_0 — угловое положение источника, отсчитываемое от нормали к базовой линии интерферометра, c — скорость распространения волн.

После гетеродинирования сигналы регистрируются при помощи некоторой системы памяти в виде

$$\begin{aligned} v_1(t) &= a(t + \tau_0) \cos [(\omega_0 - \omega_1)(t + \tau_0) + \varphi(t + \tau_0) + \psi_1] + z_1(t + \tau_0), \\ v_2(t) &= a(t - \tau_{np}) \cos [(\omega_0 - \omega_2)(t - \tau_{np}) + \varphi(t - \tau_{np}) + \psi_2] + z_2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где τ_0 — неточность совмещения записей во времени, ψ_1 и ψ_2 — случайные фазы гетеродинных сигналов, ω_1, ω_2 — частоты гетеродинов.

Сигналы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ представляют собой шумовые сигналы, сдвинутые по частоте из-за различия в частотах гетеродинов и наличия частоты интерференционной картины, связанной с изменением τ_{np} от времени при вращении Земли на величину $\omega = \omega_1 - \omega_2 + \omega_0 \frac{d\tau_{np}}{dt}$, и по времени на величину $\tau = \tau_{np} + \tau_0$. Для того, чтобы выделить сигнал на выходе интерферометра с автономным приемом, необходимо выполнить следующую математическую операцию [4]:

$$\begin{aligned} B_{1,2}(\tau', \Omega) &= \langle v_1(t) v_2(t + \tau') \rangle = \{ \langle \langle v_1(t) v_2(t + \tau') \rangle_{T_1} \times \\ &\times \cos(\omega + \Omega)t \rangle_{T_1} + \langle \langle v_1(t) v_2(t + \tau') \rangle_{T_1} \sin(\omega + \Omega)t \rangle_{T_1} \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где первое усреднение за время T_1 выполняется с целью уменьшения объема информации, по которой должен производиться фурье-анализ, T — полное время наблюдения. Величина частотного сдвига сигналов ω выбирается, исходя из априорных сведений о разностной частоте гетеродинов и частоте интерференции. Время предварительного усреднения T_1 определяется из условия $T_1 \ll 2\pi/\omega$. При этом необходимое разрешение по частоте $\delta\Omega$ зависит от полного времени накопления T ($\delta\Omega \sim 2\pi/T$), а требуемая точность совмещения принимаемых сигналов во времени $\delta\tau$ определяется шириной полосы сигналов $\Delta\omega$ ($\delta\tau \sim 2\pi/\Delta\omega$). При априорно известном законе изменения пространственной задержки $\tau_{np}(t)$ можно достигнуть требуемого разрешения по частоте путем компенсации доплеровского сдвига частоты изменением частоты гетеродина по заданной программе. Однако, вследствие неточности априорных данных о законе изменения $\tau_{np}(t)$ необходимо проведение спектрального анализа с разрешением $\delta\Omega$ в полосе частот $\Delta\Omega$, определяемой неточностью компенсации доплеровского сдвига. При полосе частот принимаемого сигнала $1 \div 10$ Мгц и точности компенсации $\sim 10^{-3}$ полоса анализа $\Delta\Omega$ составляет $10^{-4} \div 10^{-6} \Delta\omega$, т. е. $1 \div 100$ гц.

Вследствие наличия априори неизвестного сдвига как по частоте, так и по времени имеют место два существенно различных по скорости временных процесса. Это приводит к соответствующему корреляционному анализу высокочастотных сигналов и фурье-анализу низкочастотных компонент. Поэтому можно использовать двухступенчатое усреднение предварительно за время T_1 и за полное время наблюдения T . Для $\Delta\omega = 2\pi \cdot 10^6$, $T = 10^2$ сек, $\omega = 2\pi \cdot 10^2$ интервал первичного усреднения составит $T_1 \ll 10^{-2}$ сек, вторичного — $T \sim 10^2$ сек. Выражение (3), описывающее выполняемую над сигналом операцию, можно представить без второго усреднения по времени в виде

$$\begin{aligned}
 B_{1,2}(t, \tau') = & \int_t^{t+\tau_1} a(t+\tau_0) a(t-\tau_{\text{нр}}+\tau') \cos [(\omega_0-\omega_1)(t+\tau_0)+ \\
 & + \varphi(t+\tau_0)+\psi_1] \cos [(\omega_0-\omega_2)(t-\tau_{\text{нр}}+\tau')+\varphi(t-\tau_{\text{нр}}+\tau')+\psi_2]+ \\
 & + \int_t^{t+\tau_1} z_1(t+\tau_0) z_2(t+\tau') dt.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь предполагается, что $v(t)$ и $z(t)$ статистически независимы. Выполняя частичное интегрирование за $T_1 \ll 2\pi/\omega$, получим

$$\begin{aligned}
 B_{1,2}(t, \tau') = & A(t) \operatorname{sinc} \left\{ \frac{\Delta\omega T_1}{2} (\tau_{\text{нр}}+\tau_0-\tau') \right\} \cos [(\omega_1-\omega_2)t - \\
 & - \omega_0(\tau_{\text{нр}}+\tau_0-\tau')+\psi_2-\psi_1] + z(t),
 \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 A(t) = & \int_t^{t+\tau_1} a(t+\tau_0) a(t-\tau_{\text{нр}}-\tau') \cos [\varphi(t+\varphi_0)-\varphi(t-\tau_{\text{нр}}+\tau')] dt, \\
 z(t) = & \int_t^{t+\tau_1} z_1(t+\tau_0) z_2(t+\tau') dt.
 \end{aligned}$$

Для достаточно больших значений произведения $\Delta\omega T_1$ функцию $\operatorname{sinc} \left\{ \frac{\Delta\omega T_1}{2} (\tau_{\text{нр}}+\tau_0-\tau') \right\}$ можно заменить на $\delta(\tau_{\text{нр}}+\tau_0-\tau')$. Осуществляя поиск по задержке τ' , можно скомпенсировать неточность временного совмещения записей τ_0 и систематические ошибки закона изменения пространственной задержки $\tau_{\text{нр}}(t)$.

Вторая ступень обработки — фурье-анализ полученной медленно меняющейся функции времени $B_{1,2}(t, \tau')$ — может быть представлена в виде

$$B_{1,2}(\tau^*, \Omega) = \int_0^T \int_0^{\tau_{\text{макс}}} B_{1,2}(t, \tau') \delta(\tau^*-\tau') \cos [(\omega+\Omega)t + \psi'] d\tau' dt \quad (6)$$

для некоторой полосы частот $\Delta\Omega$ и всех возможных значений ψ' , что эквивалентно обработке (3).

Функция $B_{1,2}(\tau^*, \Omega)$ представляет собой выход интерферометра с автономным приемом, причем под выходом понимается максимальное значение этой функции. Дальнейшая обработка зависит от задач, выполняемых интерферометром, и описана, например, в [6].

2. МЕТОД ОПТИЧЕСКОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ

Оптический метод измерения взаимной корреляции сигналов при выборке объемом $\sim 10^8$ точек заключается в следующем. Исходные временные сигналы регистрируются двумя идентичными устройствами построено в плотностном виде на движущуюся в продольном направлении фотопленку. При записи безусловно должны быть приняты меры по синхронизации строчной развертки от местного стабильного эталона частоты и синхронизации начала записи, чтобы возможная ошибка начала отсчета записи τ_0 была много меньше длительности записи одной строки $T_{\text{стр}}$. Величина $T_{\text{стр}}$ зависит от ширины полосы регистрируемого сигнала и числа точек на строке $N_{\text{стр}}$:

$$T_{\text{стр}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} N_{\text{стр}}.$$

Полученные таким образом двумерные растровые изображения сигналов на фотопленках используются затем при обработке для измерения скользящей функции взаимной корреляции с усреднением за время T_1 , которое соответствует выборке с числом точек $\sim 10^5$, при помощи оптического коррелометра с использованием некогерентного света [7].

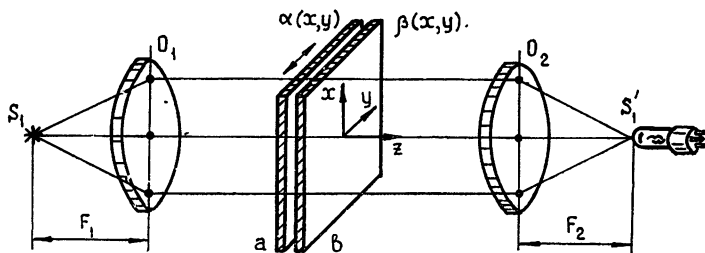


Рис. 1. Оптическая схема, используемая для измерения корреляции.

Результаты измерения функции взаимной корреляции $B_{1,2}(t, \tau')$ регистрируются вторично на TRANSPARENTE в виде плотностной растровой записи, которая в свою очередь подвергается спектральной обработке по формуле (6).

Рассмотрим подробнее каждый из этапов оптической обработки. Корреляционная обработка двумерных растровых записей заключается в измерении светового потока, прошедшего последовательно через записи сигналов. Пространственный сдвиг одного изображения сигнала относительно другого эквивалентен временной задержке τ' . Оптическая схема измерений приведена на рис. 1. При сканировании величины τ' получается одна строка выходной растровой записи с усреднением по времени T_1^* . Каждая строка записи содержит $\sim 10^2$ значений задержек τ' и является усреднением примерно $300 \times 300 \approx 10^5$ точек входного сигнала. Остальные строки регистрируются при продольном одновременном движении обоих транспарантов. При общем объеме выборки $\sim 10^8$ выходная запись будет содержать 10^3 строк по $\sim 10^2$ элементов в строке.

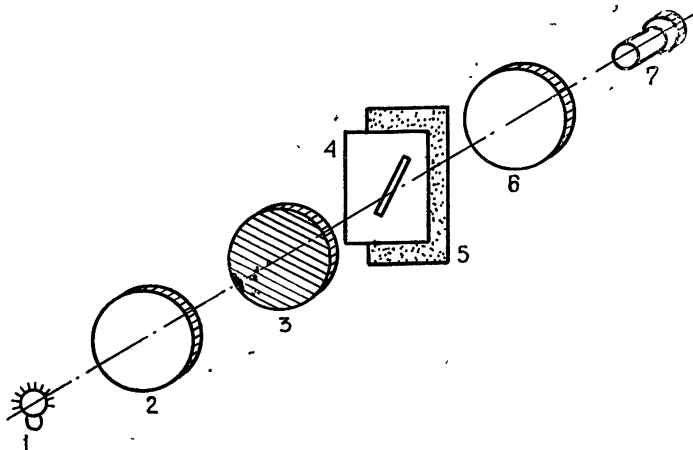


Рис. 2. Оптическая схема вторичной обработки записей корреляционных функций:

1—источник некогерентного света; 2, 6—линзы; 3—оптические решетки, образующие синусоидальный растр; 4—диафрагма; 5—транспарант; 7—фотоэлемент.

* При такой обработке часть мощности сигнала может быть потеряна. Максимальные потери определяются отношением $(\tau_{\max}/T_{\text{стр}})^{1/2}$. Если $\tau_{\max} = 0,1 T_{\text{стр}}$, то потери составят $\sim 3\%$, что вполне допустимо.

Вторичная обработка полученной функции $B_{1,2}(t, \tau')$ может быть осуществлена при помощи устройства типа ОСА-2 [5]. Схема такого устройства изображена на рис. 2. Существенным отличием этой схемы от описанного в [5] устройства является наличие диафрагмы 4, которая должна соответствовать закону изменения пространственной задержки $\tau_{\text{пр}}(t)$. Для априорно известного закона изменения $\tau_{\text{пр}}(t)$ нетрудно реализовать форму диафрагмы, соответствующую этому закону. Сканированием диафрагмы по оси τ' осуществляется поиск по всем значениям задержки τ^* (см. (6)) с целью измерения максимального значения корреляционной функции $B(\tau^*, \Omega)$, которое представляет собой выход радиоинтерферометра с автономным приемом. В частном случае, когда закон изменения $\tau_{\text{пр}}(t)$ можно аппроксимировать линейной функцией на интервале времени накопления ($10 \div 100$ сек), диафрагмирование осуществляется узкой прямолинейной щелью. Поскольку априорные параметры изменения задержки $\tau_{\text{пр}}(t)$ (постоянное смещение и угол наклона) известны с определенной точностью, необходим поиск по этим параметрам.

Результаты обработки могут быть представлены в цифровой форме. Необходимо заметить, что здесь рассмотрена обработка сигналов полностью оптическая, хотя возможны варианты объединения оптической обработки и при помощи ЭВМ, например, первичное усреднение выполняется оптической системой, а вторичная обработка уменьшенного количества информации — ЭВМ.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ МЕТОДА

Экспериментальное исследование возможностей оптического модуляционного метода измерения взаимной корреляции широкополосных сигналов с большим объемом выборки было проведено предварительно на моделях с сохранением величины базы. Моделирование сигналов на выходах антенн интерферометра с автономным приемом осуществлялось при помощи гетеродинирования высокочастотного узкополосного процесса, задаваемого генератором шума, в двух каналах с независимыми кварцевыми гетеродинами, имеющими небольшую расстройку по частоте. Естественно, поскольку отсутствует переменная пространственная задержка, сдвиг по времени двух сигналов оставался постоянным для всего наблюдения. Полученные таким образом два электрических сигнала регистрировались на фотопленку независимыми оптическими системами (фототелеграфные аппараты), которые были синхронизованы стабильным эталоном частоты. Образец записи шумовых сигналов приведен на рис. 3а. На фотопленке регистрируются $\sim 10^6$ бит информации. Двумерная автокорреляционная функция такого изображения сигнала представлена на рис. 3б, а сечение ее на рис. 3в. Отклик двумерной корреляционной функции показывает интервалы корреляции сигнала по обеим координатам. Рис. 4 иллюстрирует результат перемножения двух записей, полученных на автономных системах записи сигналов. Горизонтальные полосы представляют собой низкочастотную компоненту корреляционной функции, связанную с наличием сдвига сигналов по частоте. При этом относительный сдвиг по частоте составлял $3 \cdot 10^{-5}$ от полосы регистрируемых частот сигнала. Изображение на рис. 4а дает медленную зависимость корреляционной функции без сжатия строки. Результаты обработки второй ступени представлены на рис. 4б в виде графика спектра пространственных частот транспаранта, приведенного на рис. 4а. Экспериментальная проверка оптического метода измерений взаимной корреляции с использованием растровой записи при помощи устройств, базирующихся на стандартных фототелеграфных аппаратах (типа ФТАП-Нева), показали реальную возможность применения оптического

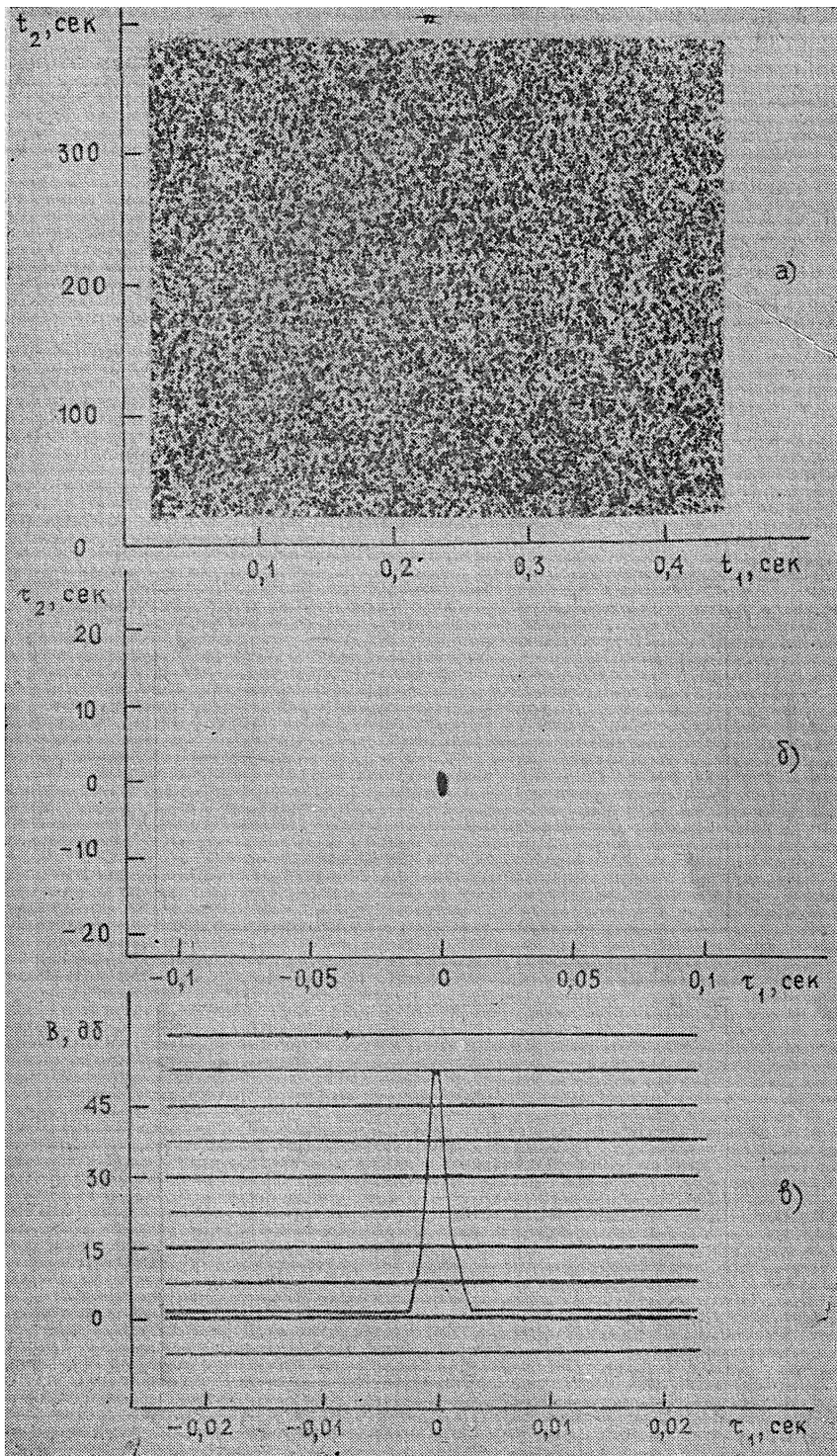


Рис. 3. а) — Образец записи шумового сигнала;
 б) — двумерная автокорреляционная функция шумового сигнала;
 в) — сечение автокорреляционной функции при $\tau_2 = 0$.

метода обработки больших массивов информации ($\sim 10^6$ точек в одном кадре). Рассматриваемая оптическая схема позволяла осуществлять сканирование по величине задержки и значениям частотного сдвига в достаточно широких пределах. Модельные эксперименты показали, что используемая растровая запись, получаемая механическими системами разверток пишущего луча, позволяет обеспечить необходимую идентичность двух систем растровой записи.

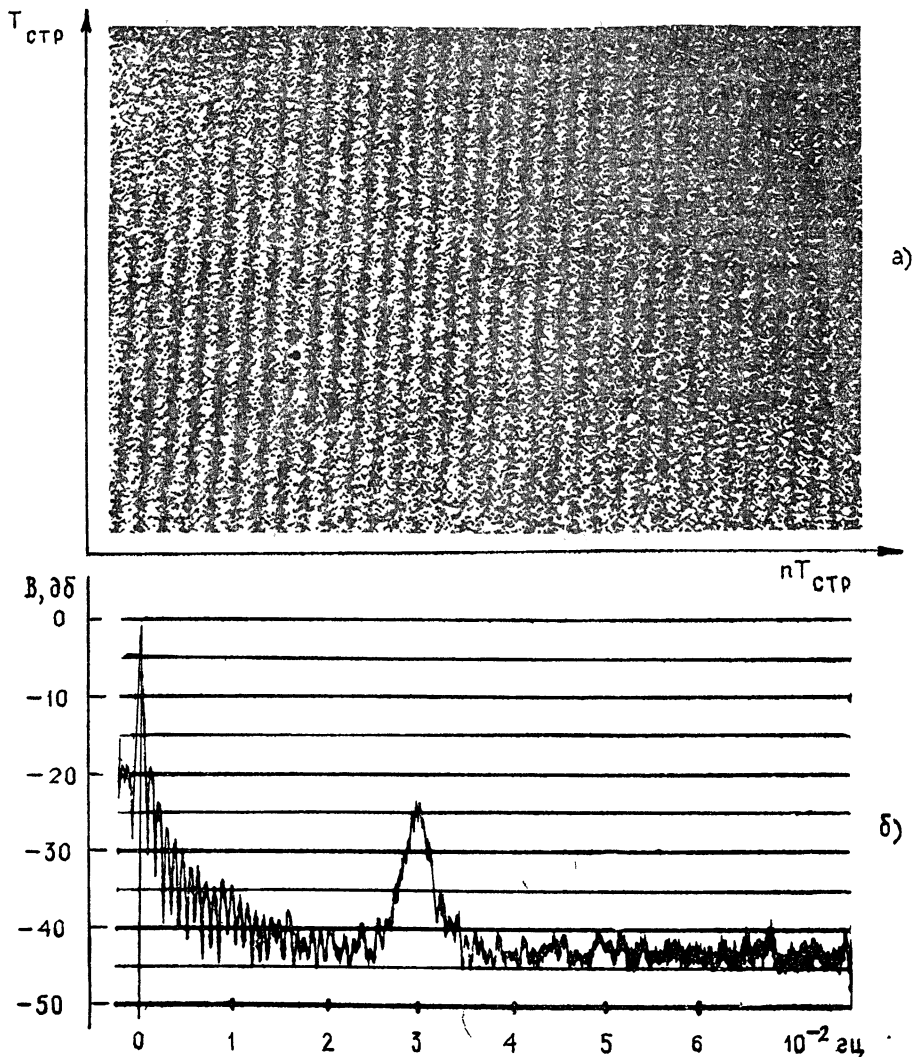


Рис. 4. а)—Результат перемножения записей шумовых сигналов со сдвигом по частоте $\Omega=3 \cdot 10^{-5} \Delta\omega$;
 б)—результат вторичной обработки записи транспаранта, представленного на рис. 4а.

Для обработки широкополосных сигналов в полосе до 3 Мгц была собрана достаточно простая система записи на движущуюся пленку с использованием электронной развертки по строкам. На рис. 5 а приведен отрезок изображения произведения двух транспарантов, полученных на системе с электронной разверткой по строкам и механическим перемещением пленки. На этом рисунке видна осциллирующая продольная полоса, связанная с наличием сдвига по частоте. На рис. 5 б показан ре-

зультат вторичной обработки. Получение двух идентичных растров, обеспечивающих накопление сигнала по всей поверхности растра, ограничивается в первую очередь нелинейностями развертывающих устройств. Получение высокой степени линейности ($\sim 10^{-3}$) при регистрации широкополосных сигналов представляет собой сложную техническую задачу. В ходе исследования возможностей оптических систем с растровой записью был разработан метод измерения малых нелинейных искажений при помощи муаровых картин, который, в частности, был опробован на проверке качества телевизионных изображений, что представляет собой самостоятельную проблему. Проверка влияния нелинейностей в рассматриваемой системе показала, что интервал корреляции регистрируемых сигналов (это видно из рис. 6), обусловленный нелинейностями строчной электронной развертки, существенно меньше интервала продольной корреляции, связанной с нелинейностями механической системы перемещения пленки. В результате сужения области корреляции сигналов ограничивается ширина полосы и, следовательно, общий объем выборки. В данном случае эта полоса составляла $\sim 1,5$ Мгц. Поскольку в данной схеме использовались стандартные развертывающие устройства с нелинейностью $\sim 5\%$, появляется возможность расширения полосы обрабатываемых сигналов за счет повышения качества развертывающих устройств.

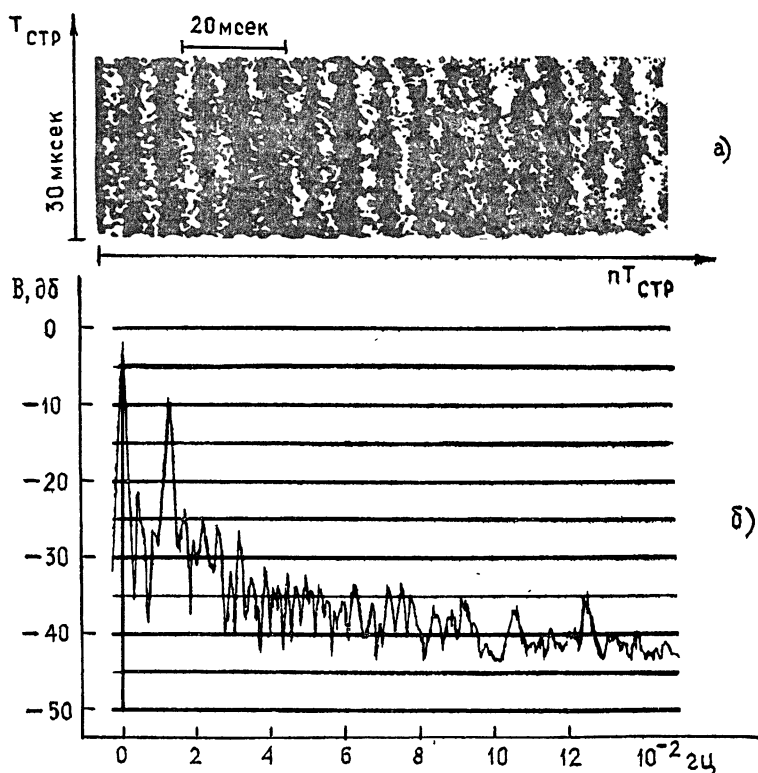


Рис. 5. а)—Результат перемножения транспаранта с записями шумовых сигналов со сдвигом по частоте 130 Гц в полосе до 1,5 Мгц;

б)—результат вторичной обработки транспаранта, представленного на рис. 5а.

Таким образом, проведенная экспериментальная проверка показала принципиальную возможность измерения корреляции двух широкопо-

лосных процессов ($\sim 1,5$ МГц) оптическими модуляционными (некогерентными) методами. В дальнейшей работе по улучшению качества rastpовых записей можно ожидать, что оптические методы превзойдут известные методы обработки при помощи ЭВМ как по объему обрабатываемой информации, так и по скорости ее обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Матвеевко, Н. С. Кардашев, Г. Б. Шоломицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 651 (1965).
2. C. C. Rabe, B. G. Clark, K. I. Kellermann, M. H. Cohen, D. L. Jauncey, Science, 157, № 14, 189 (1937).
3. Б. Кларк, Д. Д. Бродерик, В. А. Ефанов, К. И. Келлерман, М. Х. Коуэн, Л. Р. Коган, В. И. Костенко, Л. И. Матвеевко, И. Г. Моисеев, М. М. Мухина, В. Б. Штейншлейгер, Д. Л. Янси, Астрон., ж., 49, № 4, 700 (1972).
4. В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, В. Д. Кротиков, В. Н. Никонов, В. С. Троицкий, А. И. Чикин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 6 (1970).
5. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Оптические анализаторы, изд. Сов. радио, М., 1971.
6. В. А. Алексеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 4, 491 (1969).
7. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, ПТЭ, № 1, 50 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 ноября 1972 г.

CORRELATION PROCESSING OF WIDE-BAND PROCESSES (UP TO 1.5 Mc/s)
WITH TIME AND FREQUENCY RELATIVE SHIFT

G. K. Ivanova, E. F. Orlov, I. S. Rakov, G. A. Sharonov

The paper considers a method of optical signal processing in noncoherent light when measuring the signal correlation with the base of 10^8 in the band of frequencies up to 1.5 Mc/s having a priori unknown shifts in time and frequency.

УДК 621.371.22

ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ОПТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

В. П. Лукин, В. В. Покасов

С использованием двухмасштабной спектральной плотности флуктуаций показателя преломления получена корреляционная функция флуктуаций фазы электромагнитной волны. Проводится сравнение с экспериментом. Оцениваются величины масштабов турбулентности в приземном слое атмосферы.

Вследствие высокой чувствительности к возмущающему воздействию флуктуаций параметров среды оптическая волна является эффективным инструментом исследования различных параметров атмосферы, в том числе параметров, характеризующих ее турбулентное состояние.

Динамический диапазон спектра турбулентности определяется десятками октав, однако основная часть энергии турбулентности приходится на область крупных масштабов, где происходит передача энергии от внешних источников турбулентному движению.

Условия передачи энергии и зарождения крупных вихрей в значительной мере определяются местными особенностями, подстилающей поверхностью. Следовательно, ход спектра атмосферной турбулентности в области крупных масштабов не может иметь универсальной формы [4], однако он должен быть ограниченным и значение его граничного масштаба (так называемый внешний масштаб) является важной характеристикой турбулентности.

Рассмотрим влияние атмосферной турбулентности и ее спектра $\Phi_n(x)$ на параметры электромагнитной волны. Для корреляционных функций амплитуды и фазы плоской электромагнитной волны, прошедшей слой толщиной L однородной и изотропной турбулентной среды в [1], получены следующие выражения:

$$B_{\chi, s}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} F_{\chi, s}(x, L) J_0(x\rho) \Phi_n(x) x dx, \quad (1)$$

где

$$F_{\chi, s}(x, L) = \pi k^2 L \left(1 \mp \sin \frac{x^2 L}{k} \left/ \frac{x^2 L}{k} \right. \right) \quad (2)$$

— соответственно пространственные фильтрующие функции амплитуды и фазы, ρ — разность точек наблюдения, k — волновое число излучения, $\Phi_n(x)$ — спектральная плотность флуктуаций показателя преломления. Ход спектральных фильтрующих функций (2) таков, что основной вклад в флуктуации амплитуды $B_{\chi}(\rho)$ дают неоднородности, близкие к $\sqrt{\lambda L}$, а флуктуации фазы, в основном, определяются крупномасштабными неоднородностями спектра $\Phi_n(x)$ [2].

Для расчета статистических характеристик амплитуды в качестве удовлетворительной модели $\Phi_n(x)$ используется [1]

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3}, \quad (3)$$

являющаяся следствием закона «2/3» Колмогорова — Обухова, имеющего силу в инерционном интервале пространственных волновых чисел:

$$\frac{2\pi}{L_0} = x_0 \ll x \ll x_m = \frac{5,92}{l_0},$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности, L_0 — внешний масштаб турбулентности. Для флуктуаций амплитуды ход $\Phi_n(x)$ вне инерционного интервала несуществен, поэтому модель (3) применима во всем интервале x , сложнее обстоит дело с флуктуациями фазы. Для спектра (3) не существует корреляционной функции фазы, и для оценки $B_s(\rho)$ необходимы некоторые ограничивающие предположения относительно поведения $\Phi_n(x)$ в области энергопроизводящих масштабов неоднородностей. В этом смысле лучшим приближением является двухмасштабная модель спектра $\Phi_n(x)$, предложенная Карманом [3]:

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 (x^2 + x_0^2)^{-11/6} \exp(-x^2/x_m^2). \quad (4)$$

Модель (4) в области $x_0 \ll x \ll x_m$ совпадает с (3), что соответствует однородной и изотропной турбулентности в инерционном интервале. Для волновых чисел $x \lesssim x_0$ спектр (4) сглаживается, давая конечную величину $\int x \Phi_n(x) dx$.

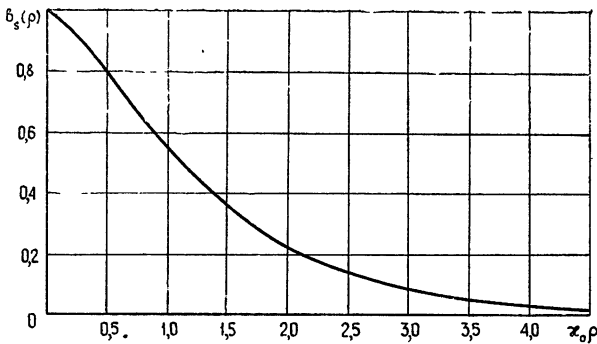


Рис. 1. Нормированная корреляционная функция фазы (расчет).

Для спектра (4) существует корреляционная функция фазы $B_s(\rho)$. На рис. 1 приведена нормированная корреляционная функция фазы:

$$b_s(\rho) = \frac{B_s(\rho)}{2\pi^2 k^2 L \int x \Phi_n(x) dx}. \quad (5)$$

Из рис. 1 видно, что фазовая корреляция спадает наполовину при разностях $\rho \approx x_0^{-1}$. Следовательно, радиус фазовой корреляции значительно превосходит радиус корреляции амплитуды, поскольку обычно $L_0 \gg \sqrt{\lambda L}$.

Следовательно, возникает необходимость измерения фазовых флуктуаций при достаточно больших значениях расстояния между точками наблюдения ρ .

Проведение подобных измерений в одном пучке технически трудноосуществимо из-за больших потерь мощности излучения и отсутствия оптики соответствующих размеров.

Исследование временных характеристик флуктуаций в одной точке с последующим восстановлением пространственной картины путем при-

вращения гипотезы «замороженной турбулентности», как это делалось в работе [5], по-видимому, физически не оправдано для энергетического интервала.

В связи с этим нами предлагается вместо исследования флуктуаций фазы в плоской волне измерять флуктуации разности фаз в центрах двух пространственно-разнесенных пучков. Схема эксперимента строится следующим образом: излучение ОКГ формируется в два гауссовых пучка, расстояние между центрами которых ρ , и в плоскости приема на расстоянии L от передатчика изучается корреляция между флуктуациями фаз в центрах пучков. Распределение поля в начальном сечении пучков

$$U_{0j}(\rho, 0) = \exp \left\{ -\frac{k\alpha_j}{2} (\rho - \rho_{0j})^2 \right\} \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

где ρ_{0j} — положение осей пучков,

$$\alpha_j = \frac{\lambda}{\pi a_{0j}^2} + i \frac{1}{r_{0j}},$$

a_{0j} — ширина j -го пучка, r_{0j} — радиус кривизны фазового фронта j -го пучка.

Если пучки одинаковы, а $|\rho_{01} - \rho_{02}| = \rho$ — расстояние между осями пучков, тогда в первом приближении МПВ получаем для корреляционной функции флуктуаций фазы

$$B_s(\rho) = 2\pi^2 k^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty x \Phi_n(x) J_0(x\rho) \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[-\gamma_2 \frac{x^2(L-\eta)}{k} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-i\gamma \frac{x^2(L-\eta)}{k} \right] \right\} dx, \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{1 + i\alpha\eta}{1 + i\alpha L}, \quad \gamma_2 = -\operatorname{Im} \gamma.$$

Как показали численные расчеты, при $L_0 \gg \sqrt{\lambda L}$ в интервале разносов ρ , удовлетворяющих условию $l_0 \ll \rho \leq 3x_0^{-1}$, для корреляционной функции фазы справедливо

$$B_s(\rho) = 4\pi^2 k^2 L \int_0^\infty \Phi_n(x) x J_0(x\rho) dx, \quad (8)$$

откуда можно заключить, что в интересующей нас области разносов ρ эксперименты по измерению фазовой корреляции в центрах двух пространственно-разнесенных пучков полностью эквивалентны измерениям в неограниченной плоской волне.

Экспериментальные измерения корреляционной функции флуктуаций фазы проводились на горизонтальной трассе длиной 110 м. Использовался цифровой следящий фазометр оптического диапазона, устройство и основные характеристики которого даны в [6]. Результаты измерений нормированной корреляционной функции флуктуаций разности фаз в центрах двух пучков $b_s(\rho)$ приведены на рис. 2, где вертикальные черточки показывают разброс в данных для различных серий измерений.

Сравнение рис. 1 и рис. 2 позволяет оценить величину внешнего масштаба турбулентности ($L_0 \approx 2,2 \div 2,4$ м при высоте над землей 1,5 м). В то же время незнание истинного значения L_0 не позволяет нанести

обе функции на один график. Некоторое различие функционального вида кривых рис. 1 и рис. 2 позволяет высказать предположение относительно отклонения спектра турбулентных пульсаций от закона $\chi^{-11/3}$. Это можно объяснить тем, что в приземном слое атмосферы вклад в энергию турбулентности существен на всех масштабах, а не только на внешнем масштабе. На это, в частности, указывает отклонение хода структурной функции фазы от закона «5/3», имеющее место в работе [5].

Говоря об измеренном значении L_0 , следует иметь в виду, что турбулентность приземного слоя в области крупных масштабов не изотропна, и поэтому измерения дают лишь некое эффективное значение L_0 в одном из возможных направлений.

Авторы выражают благодарность В. Л. Миронову за помощь и внимание к работе, С. С. Хмелевцову за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. А. С. Гурвич, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 4, № 2, 160 (1968).
3. J. W. Strohbehn, J. Geophys. Res., 71, 24 (1966).
4. J. W. Strohbehn, J. Geophys. Res., 75, 6 (1970).
5. M. B. Bouricius, S. F. Clifford, JOSA, 60, № 11, 1484 (1970).
6. В. В. Покасов, Тезисы Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере, изд. ТГУ, Томск, 1971.

Институт оптики атмосферы

Поступила в редакцию
27 июня 1972 г.

PHASE FLUCTUATIONS OF AN OPTICAL WAVE PROPAGATING IN TURBULENT ATMOSPHERE

V. P. Lukin, V. V. Pokasov

Using the two-scale spectral density of fluctuations of the refractive index, the correlation function of phase fluctuations of an electromagnetic wave is obtained. A comparison is made with the experiment. The values of turbulence scales in the near-ground atmospheric layer are estimated.

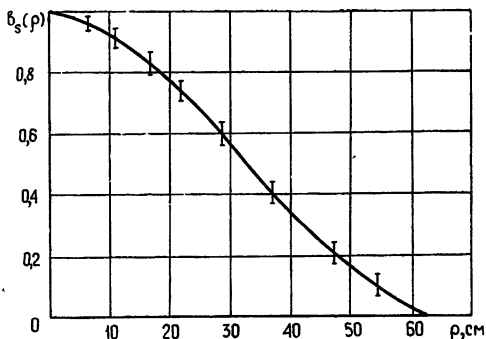


Рис. 2. Нормированная корреляционная функция фазы (эксперимент на горизонтальной трассе $L = 110$ м, $h = 1,5$ м);

УДК 621.372.8

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ, НАГРУЖЕННЫХ ДИАФРАГМАМИ

Ю. П. Шанкин

Задача отыскания решений уравнений Максвелла для волн типа E_0 , распространяющихся в диафрагмированных волноводах со сложной формой элемента периодичности, вариационными методами сведена к однородной алгебраической системе уравнений. Рассмотрены некоторые конкретные случаи волноводных систем.

Нерегулярные, главным образом периодические, волноводные структуры, используемые в качестве замедляющих систем, находят широкое применение в физике, в электронных приборах, в антенных устройствах и т. д. К настоящему времени предложено довольно много различных конструкций замедляющих систем и методов их расчета. Однако численному расчету, как правило, подвергаются волноводные структуры со специфической формой границы: диафрагмированный волновод, «гребенка», определенного вида гофры и т. д. (см., например, [1-3]). Это обусловлено в первую очередь тем, что используемые в большинстве работ методы практически трудно применимы или неприменимы вовсе для расчета периодических систем сложной формы. Так, например, при применении широко известного метода частичных областей предполагается возможность разбиения ячейки периодичности структуры на конечное число областей канонической формы с однородной средой, чтобы в каждой из таких частичных областей можно было осуществить разделение переменных в уравнениях Максвелла. В последнее время, в связи с постановкой задачи синтеза и поиска оптимальных форм замедляющих систем для различных применений, представляет интерес исследование периодических направляющих структур со сложной формой элемента периодичности (как в полосах пропускания, так и в полосах записи электромагнитных волн).

В работах [4, 5] предложен метод, позволяющий рассматривать периодические волноводные системы со сложной формой границы. В случае слабой нерегулярности возможно аналитическое решение задачи [6], позволяющее оптимальным образом подойти к построению последовательных приближений при численном решении задачи с помощью ЭВМ. Изложенный в [5] метод приводит к достаточно быстрой сходимости приближений при исследовании систем с гладкой границей.

1. Рассмотрим случай, когда функция $\rho = R(z) \equiv R(z + D)$, описывающая в цилиндрических координатах границу периодического вдоль оси z волновода, является кусочно гладкой, т. е. существуют отдельные точки $z = z_i^*$ ($i = 1, 2, \dots$), такие, что

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)_{z_i^* - 0} \neq \left(\frac{dR}{dz}\right)_{z_i^* + 0}$$

Решение уравнений Максвелла для волн типа E_0 , распространяющихся

в такой структуре, эквивалентно отысканию стационарных точек функционала

$$J(H, H_0) = \iiint_{\omega} (\operatorname{rot} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H - k^2 \mu H, H_0) dv - \oint_{\partial \omega} (\varepsilon^{-1} [n \operatorname{rot} H], H_0) d\sigma \quad (1)$$

при его варьировании на классе непрерывных H_0 , принимающих неизменные значения в сечениях $S(z_0)$ и $S(z_0 + D)$, ограничивающих область волновода ω ($z_0 < z^* < z_0 + D$). Здесь $k = \omega/c$, H — комплексная амплитуда магнитного поля, n — вектор единичной нормали к границе волновода. Подстановкой [4, 5] ($H = e_{\varphi} H_{\varphi}$)

$$H_{\varphi} = \sum_{n=1}^N e_n(\rho, z) f_n(z),$$

$$H_{0\varphi} = \sum_{n=1}^N e_n(\rho, z) g_n(z),$$

где $\{e_n(\rho, z)\}$ — заданная система базисных функций, $e_n = \frac{J'_0(\nu_n \rho/R)}{\sqrt{\pi} J_1(\nu_n)}$

(метод поперечных сечений [7]), $\{\nu_n\}$ — расположенные в порядке возрастания корни функции Бесселя $J_0(x)$, функционал (1) можно привести к виду

$$J(H, H_0) = \int_{z_0}^{z_0+D} U(z, \mathbf{g}, \mathbf{g}') dz, \quad (2)$$

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T.$$

В сечении $S(z_i^*)$ вектор \mathbf{g}' может терпеть разрыв, т. е. функционал (2) имеет ломаные экстремали, а потому в угловых точках ($z = z_i^*$) должны выполняться условия Вейерштрасса — Эрдмана:

$$U_{\mathbf{g}'}(z_i^* - 0) = U_{\mathbf{g}'}(z_i^* + 0); \quad (3)$$

$$U(z_i^* - 0) - \mathbf{g}'(z_i^* - 0) U_{\mathbf{g}'}(z_i^* - 0) = U(z_i^* + 0) - \mathbf{g}'(z_i^* + 0) U_{\mathbf{g}'}(z_i^* + 0). \quad (4)$$

Учитывая явный вид функции $U(z, \mathbf{g}(z), \mathbf{g}'(z))$ и принимая во внимание тот факт, что нас интересуют экстремали функционала (2), на которых выполняется уравнение Лагранжа

$$\frac{\delta U}{\delta \mathbf{g}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}'} = 0$$

$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}}\right)$ — символическое обозначение вектора с компонентами $\left\{\frac{\partial U}{\partial g_i}\right\}$, приходим к заключению, что условия Вейерштрасса — Эрдмана (3), (4) эквивалентны требованию непрерывности поперечных компонент электрического и магнитного полей в сечениях $S(z_i^*)$:

В соответствии с условием Флоке запишем

$$\mathbf{f} = \sum_{n=-S}^S C^n \exp(ih_n z),$$

$$h_n = h + \theta n, \quad \theta = 2\pi/D,$$

h — постоянная распространения. Относительно неизвестных $\{C_m^n\}$ получаем однородную алгебраическую систему уравнений [5]:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=-S}^S \Psi_{mnp} C_m^n = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N; l = 0, \pm 1, \dots, \pm S), \quad (5)$$

$$\Psi_{mnp} = \begin{cases} \theta(n-l) d_{n-l} \frac{h_l v_m^2 + h_n v_p^2}{v_p^2 - v_m^2} + \left[2 - \frac{8 v_m^2 v_p^2}{(v_m^2 - v_p^2)^2} \right] g_{n-l} & (p \neq m) \\ -h_n h_l d_{n-l} + \varepsilon \mu k^2 d_{n-l} - \frac{v_m^2 - 5}{3} g_{n-l} - v_m^2 \delta_{nl} & (p = m) \end{cases},$$

$$d_n = \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} e^{-in\theta z} R^2(z) dz, \quad g_n = \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} e^{-in\theta z} \left(\frac{dR}{dz} \right)^2 dz.$$

Условие равенства нулю определителя системы (5) дает нам дисперсионное уравнение.

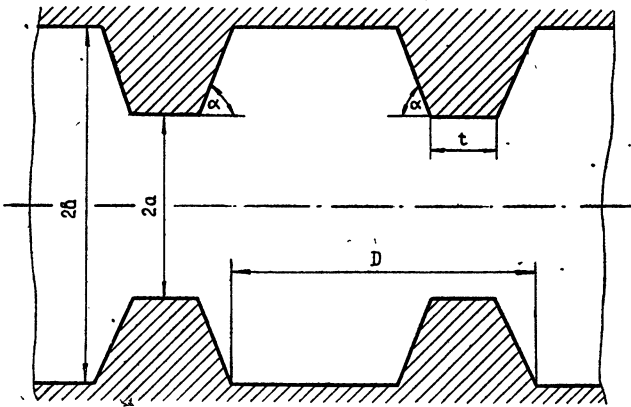


Рис. 1. Замедляющая система.

Рассмотрим сходимость изложенного метода по параметрам N и S для случая волноводной структуры с трапециевидными диафрагмами, изображенной на рис. 1 ($a = 5,0000$ см, $b = 6,0000$ см, $D = 4,0000$ см, $t = 1,0000$ см). В табл. 1 приведены результаты исследования сходимости расчетных значений величины kD ($k = \frac{\omega}{c}$) по индексу S при $hD = \frac{\pi}{2}$, $N = 3$ и различных углах α . (В нашем случае число N определяет количество «вспомогательных волн» в методе поперечных сечений, и сходимость по этому индексу, исследовавшаяся ранее [7, 8], имеет ясную физическую природу. В табл. 2 в качестве примера даны результаты расчета величины kD при $hD = \frac{\pi}{2}$, $S = 2$ и различных N для случая $\alpha = 45^\circ$.)

Как следует из табл. 1, сходимость изложенного метода замедляется при увеличении крутизны стенок диафрагмы (угла α). Предельный случай $\alpha = 90^\circ$ требует отдельного рассмотрения.

Таблица 1

	$S=0$	$S=1$	$S=2$	$S=3$	$S=4$	$S=5$	$S=6$	$S=7$	$S=8$
$\alpha=45^\circ$	2,3613	2,3152	2,3144	2,3128	2,3128	2,3121	2,3121	2,3121	2,3121
$\alpha=75^\circ$	2,3496	2,3121	2,2988	2,2972	2,2917	2,2817	2,2832	2,2808	2,2761
$\alpha=85^\circ$	2,4050	2,3714	2,3613	2,3574	2,3558	2,3519	2,3472	2,3456	2,3441

Таблица 2

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
kD	2,3408	2,3212	2,3144	2,3036	2,3072
	$N=6$	$N=7$	$N=8$	$N=9$	$N=10$
kD	2,3048	2,3032	2,3020	2,3012	2,3012

2. Пусть теперь $\rho = R(z) \equiv R(z+D)$ — непрерывная функция, описывающая границу волновода, в сечениях которого $S(z^* \pm nD)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) помещены тонкие диафрагмы с плоскими торцовыми поверхностями, перпендикулярными оси z . В этом случае функционал (1) необходимо варьировать на классе всевозможных H_n , принимающих неизменные значения в сечениях $S(z_0)$ и $S(z_1 = z_0 + D)$ и терпящих разрыв при переходе через стенки диафрагмы, расположенной в сечении $S(z^*)$ ($z_0 < z^* < z_1$).

Неизвестное поле H в области ω_1 , ограниченной сечениями $S(z^*)$ и $S(z_1)$, представим приближенно в виде ($H = e_\varphi H_\varphi$)

$$H_\varphi = e^{ihz} \sum_{p=1}^N e_p(\rho, z) \left[\sum_{k=-S}^S C_p^k e^{i0kz} + a_p \right], \quad (6)$$

а в области ω_2 , ограниченной сечениями $S(z^*)$ и $S(z_1)$,

$$H_\varphi = e^{ihz} \sum_{m=1}^N e_m(\rho, z) \sum_{n=-S}^S C_m^n e^{i0nz}. \quad (7)$$

В аналогичном (6), (7) виде могут быть записаны и пробные функции $H_{0\varphi}$ с коэффициентами разложения $\{\tilde{C}_m^n\}$ и $\{\tilde{a}_m\}$. Подобная запись поля в виде (6), (7) автоматически учитывает возможность разрыва тангенциальной составляющей магнитного поля при переходе через стенки металлической диафрагмы, расположенной в сечении $S(z^*)$.

Так как выбор периода произволен, то в дальнейшем совместим точки z_0 и z^* ($z^* = z_0 + 0$). Условие стационарности функционала (1) запишется в виде

$$\delta J = \delta I + \delta J_1 = 0, \quad (8)$$

$H_0 \quad H_0 \quad H_0$

где

$$I = \int \int_{S(z^*-0)^+ S(z^*+0)} (\varepsilon^{-1} [\text{rot } Hn], H_0) d\tau, \quad (9)$$

а V_1 объединяет объемный и поверхностный интегралы в (1) за вычетом интеграла по сечению $S(z_0=z^*)$, который нами учтен в I . Однако, полагая у J_1 при варьировании в (8) закрепленные концы, можем дополнить входящий в него поверхностный интеграл до интеграла по замкнутой поверхности и записать J_1 в виде единого объемного интеграла:

$$J_1 = \iiint_v [\epsilon^{-1}(\text{rot } H, \text{rot } H_0) - k^2 \mu(H, H_0)] dv. \quad (10)$$

Подставляя (6), (7) и аналогичные выражения для H_{0p} в (9), (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \tilde{a}_p} &= 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N), \\ \frac{\partial I}{\partial \tilde{C}_p^k} + \frac{\partial J_1}{\partial \tilde{C}_p^k} &= 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N; k = 0, \pm 1, \dots, \pm S), \end{aligned}$$

откуда приходим к однородной алгебраической системе уравнений, аналогичной системе (5):

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=-S}^S \varphi_{mnp} C_m^n = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N; l = 0, \pm 1, \dots, \pm S), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{mnp} &= \Psi_{mnp} + \frac{2\pi}{D} F_{mp} + i \frac{2\pi}{D} h_n \Phi_{mp}, \\ F_{mp} &= \int_r^{R(z_0)} e'_{mz} e_p \rho d\rho, \quad \Phi_{mp} = \int_r^{R(z_0)} e_m e_p \rho d\rho, \end{aligned}$$

r — радиус отверстия диафрагмы. Решение системы (11) в общем случае проводится также, как и решение системы (5), с помощью ЭВМ. Рассмотрим здесь некоторые предельные случаи. Пусть $R(z) = a = \text{const}$. Если диафрагма отсутствует ($r = a$), то из дисперсионного уравнения (равенства нулю определителя системы (11)) сразу же находим известные дисперсионные зависимости гладкого цилиндрического волновода:

$$h_l = \pm \sqrt{\epsilon \mu k^2 - \nu_l^2 / a^2}.$$

Пусть теперь диафрагма полностью перегородивает волновод ($r = 0$). В этом случае $F_{mp} = 0$, $\Phi_{mp} = a^2 \delta_{mp}$, $\Psi_{mnp} = (\epsilon \mu k^2 a^2 - a^2 h_n^2 - \nu_p^2) \delta_{mp} \delta_{nl}$. После некоторых преобразований матрицы системы (11) дисперсионное уравнение может быть записано в виде

$$\prod_{j=1}^N \left[\frac{ia^2}{D} \sum_{m=-S}^S h_m \prod_{\substack{n=-S \\ (n \neq m)}}^S (k^2 a^2 - h_n^2 a^2 - \nu_j^2) + \prod_{l=-S}^S (k^2 a^2 - h_l^2 a^2 - \nu_j^2) \right] = 0 \quad (12)$$

(здесь $\epsilon = \mu = 1$). В полученном уравнении каждый сомножитель в квадратных скобках имеет действительную и мнимую части. Из равенства нулю сомножителя в действительной части вытекает дисперсионное уравнение гладкого цилиндрического волновода; тогда все слагаемые мнимой части, за исключением одного, равны нулю, но это слагаемое в общем случае отлично от нуля. Поэтому решениями (12) являются

только те точки, в которых в нуль обращаются сразу два множителя в действительной части. Нетрудно видеть, что такими решениями будут

$$k_{ni} = \sqrt{\left(\frac{v_i}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{D} n\right)^2}.$$

Полученный результат совпадает с известным выражением для резонансных частот цилиндрического резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Е. Краснушкин, С. П. Ломнев, Радиотехника и электроника, 11, № 10, 1759 (1966)
2. Л. М. Бузык, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 12, 1878 (1971).
3. S. W. Lee, W. R. Jones, J. J. Campbell, IEEE Trans., MTT-19, № 6, 528 (1971).
4. В. И. Короза, Докл. АН СССР, 186, № 4, 795 (1969)
5. В. И. Короза, А. Г. Трагов, Ю. П. Шанкин, Радиотехника и электроника, 16, № 10, 1788 (1971)
6. Ю. П. Шанкин, Радиотехника и электроника, 17, № 3, 441 (1972).
7. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
8. А. С. Ильинский, А. Г. Свешников, Журнал вычислительной математики и математической физики, 8, № 2, 363 (1968).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
9 июня 1972 г.

ON THE THEORY OF PERIODIC WAVEGUIDES LOADED BY DIAPHRAGMS

Yu. P. Shankin

The problem of finding the solution of Maxwell equations for E_0 type waves propagating in diaphragm-type waveguides with a complex periodicity element is reduced by variational methods to a uniform algebraic set of equations. Some concrete cases of waveguide systems are considered.

УДК 538 574 4

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Г. И. Худяков

Решается задача рассеяния плоской электромагнитной волны плоской поверхностью, импеданс которой является случайным гауссовым скалярным полем. Методом Рэлея—Райса находятся нулевое и первое приближения для статистических характеристик поля над случайной импедансной плоскостью. Анализируются некоторые частные и предельные (крупномасштабные и мелкомасштабные неоднородности) случаи.

ВВЕДЕНИЕ

Задача рассеяния электромагнитных волн на статистически неоднородных поверхностях представляет большой практический интерес для околоразностной радиолокации, гидролокации, наклонного и вертикального зондирования ионосферы, для изучения распространения СДВ в волноводе «Земля—ионосфера» и т. п. Точное аналитическое решение этой задачи вызывает серьезные математические затруднения. Возможны два пути приближенного решения задачи рассеяния волн на статистически неоднородных поверхностях методами теории возмущений. Первый путь [1–4] связан с применением теоремы Грина и метода последовательных приближений для функции Грина уравнения Гельмгольца. Этим методом получено много конкретных результатов, а его разработка в основном завершена в недавно опубликованной монографии Басса и Фукса [4].

Второй метод (Рэлея—Райса) развивался в работах Рэлея [5], Райса [6], Уэйта [7] и Баррика [8]. Хотя указанный метод, как показано в статье [1], в первом приближении теории возмущений эквивалентен предыдущему, его специфические особенности до конца еще не исследованы. Кроме того, в таких задачах, как рассеяние СДВ на нижней ионосфере, трудно описывать границу ионосферы некоторой «шероховатой» импедансной поверхностью раздела двух сред, а размеры неоднородностей ионосферы могут быть соизмеримыми с длиной падающей волны. Поэтому полезна дальнейшая разработка метода Рэлея—Райса для некоторых статистических задач электродинамики.

Настоящая статья посвящена применению метода Рэлея—Райса для нахождения статистических характеристик электромагнитного поля, рассеянного статистически неоднородной импедансной плоскостью. Предполагается, что на плоской границе раздела двух сред задан импеданс, являющийся случайным гауссовым скалярным полем. При такой постановке граничных условий методом Рэлея—Райса в первом приближении теории возмущений удастся получить достаточно простое решение задачи рассеяния на статистически неоднородной поверхности, справедливое при любом масштабе ее неоднородностей. В статье анализируются свойства полученного решения, рассматриваются предельные случаи мелко- и крупномасштабных неоднородностей и СДВ зондирования ионосферы.

1. ПОСТАНОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Пусть на плоскость $z = 0$ падает плоская вертикально поляризованная электромагнитная волна $H_n = H_0 \exp(-i\omega t)$ с компонентами магнитного вектора H_0 :

$$\begin{aligned} H_{0x} &= H_0 \sin \varphi_0 \exp [i(k_x x + k_y y - k_z z)], \\ H_{0y} &= -H_0 \cos \varphi_0 \exp [i(k_x x + k_y y - k_z z)], \\ H_{0z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $k_x = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $k_y = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$, $k_z = k \cos \theta_0$, k — волновое число электромагнитной волны в свободном пространстве, θ_0 — угол падения, φ_0 — угол между плоскостью падения и осью абсцисс.

Нас интересует поле в свободном полупространстве $z > 0$. На поверхности $z = 0$ электромагнитное поле удовлетворяет граничным условиям импедансного типа [9]:

$$\begin{aligned} E_x &= -Z_0 [\delta_0 + \delta(x, y)] H_y, \\ E_y &= Z_0 [\delta_0 + \delta(x, y)] H_x, \end{aligned} \quad (2)$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — импеданс свободного пространства, δ_0 — средний приведенный поверхностный импеданс плоскости $z = 0$, $\delta(x, y)$ — отклонение приведенного поверхностного импеданса от среднего значения δ_0 .

Из уравнений Максвелла имеем $E = \frac{i Z_0}{k} \operatorname{rot} H$. Подставляя компоненты вектора E в граничные условия (2), получаем граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= ik [\delta_0 + \delta(x, y)] H_y, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -ik [\delta_0 + \delta(x, y)] H_x, \end{aligned} \quad (3)$$

которые при $\delta(x, y) = 0$ сводятся к обычной форме записи импедансных граничных условий: $\frac{\partial H_y}{\partial z} = -ik \delta_0 H_y$, $\frac{\partial H_x}{\partial z} = -ik \delta_0 H_x$.

Наряду с соотношениями (3) мы будем использовать условие соленоидальности магнитного поля: $\operatorname{div} H = 0$ или

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Пусть поверхностный импеданс плоскости $z = 0$ — периодическая функция координат, т. е. пусть $\delta(x, y) = \delta(x + \Lambda_x, y + \Lambda_y)$, где Λ_x и Λ_y — периоды по осям абсцисс и ординат соответственно. Тогда полное магнитное поле H в полупространстве $z > 0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} H_x &= H_0 [\Sigma A_{mn} H(m, n, z) + \sin \varphi_0 H(0, 0, -z)], \\ H_y &= H_0 [\Sigma B_{mn} H(m, n, z) - \cos \varphi_0 H(0, 0, -z)], \\ H_z &= H_0 \Sigma C_{mn} H(m, n, z), \end{aligned} \quad (5)$$

где A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} — коэффициенты рассеянного плоскостью $z = 0$ поля;

$$H(m, n, z) = \exp \{ i[(k_x + m \alpha)x + (k_y + n \beta)y + k \cos \theta_{mn} z] \}$$

$$(\alpha = 2\pi/\Lambda_x, \beta = 2\pi/\Lambda_y),$$

θ_{mn} — комплексный угол рассеяния волны плоскостью $z = 0$;

$$k \cos \theta_{mn} = \begin{cases} [k^2 - (k_x + m \alpha)^2 - (k_y + n \beta)^2]^{1/2} & ((k_x + m \alpha)^2 + (k_y + n \beta)^2 \leq k^2) \\ i[(k_x + m \alpha)^2 + (k_y + n \beta)^2 - k^2]^{1/2} & ((k_x + m \alpha)^2 + (k_y + n \beta)^2 > k^2) \end{cases}$$

Суммирование по индексам m и n в системе (5) и далее производится от $-\infty$ до ∞ .

Подставляя компоненты вектора H из системы (5) в граничные условия (3) при $z = 0$ и используя условие соленоидальности поля (4), получаем систему уравнений для искомых коэффициентов рассеяния A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} :

$$\begin{aligned} & \Sigma [k A_{mn} \cos \theta_{mn} - C_{mn}(k_x + m \alpha)] H(m, n, 0) - \\ & - k \sin \varphi_0 \cos \theta_0 H(0, 0, 0) + k[\delta_0 + \delta(x, y)] [\Sigma A_{mn} H(m, n, 0) + \\ & + \sin \varphi_0 H(0, 0, 0)] = 0, \\ & \Sigma [C_{mn}(k_y + n \beta) - B_{mn} k \cos \theta_{mn}] H(m, n, 0) - \\ & - k \cos \varphi_0 \cos \theta_0 H(0, 0, 0) - k[\delta_0 + \delta(x, y)] [\Sigma B_{mn} H(m, n, 0) - \\ & - \cos \varphi_0 H(0, 0, 0)] = 0, \\ & A_{mn}(k_x + m \alpha) + B_{mn}(k_y + n \beta) + C_{mn} k \cos \theta_{mn} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы (6) относительно коэффициентов A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} дает точное решение задачи рассеяния плоской волны на одной из реализаций статистически неоднородной импедансной плоскости $z = 0$ с приведенным поверхностным импедансом $\delta_0 + \delta(x, y)$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Будем решать систему уравнений (6) методом возмущений. В нулевом приближении при $\delta(x, y) = 0$ из системы (6) получаем

$$\begin{aligned} & A_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + B_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + C_0 \cos \theta_0 = 0, \\ & A_0 (\cos \theta_0 + \delta_0) - C_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 (\cos \theta_0 - \delta_0) = 0, \\ & B_0 (\cos \theta_0 + \delta_0) - C_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 (\cos \theta_0 - \delta_0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) имеет решение

$$\begin{aligned} & A_0 = \sin \varphi_0 R, \\ & B_0 = -\cos \varphi_0 R, \\ & C_0 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $R = \frac{\cos \theta_0 - \delta_0}{\cos \theta_0 + \delta_0}$ — коэффициент Френеля для плоской волны, отраженной от плоскости $z = 0$ с приведенным поверхностным импедансом δ_0 .

Для получения первого приближения разложим функцию $\delta(x, y)$ в двумерный ряд Фурье

$$\delta(x, y) = \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} S_{rs} \exp [i(r \alpha x + s \beta y)]$$

и предположим, что отклонение импеданса $\delta(x, y)$ от среднего значения δ_0 мало, т. е. $|\delta(x, y)| \ll |\cos \theta_0 + \delta_0|$. Тогда из системы (6) в первом приближении [6, 7] получаем систему уравнений для коэффициентов A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} :

$$A_{mn}(k_x + m\alpha) + B_{mn}(k_y + n\beta) + C_{mn}k \cos \theta_{mn} = 0,$$

$$A_{mn}k(\cos \theta_{mn} + \delta_0) - C_{mn}(k_x + m\alpha) + (\sin \varphi_0 + A_0)k S_{mn} = 0, \quad (9)$$

$$B_{mn}k(\cos \theta_{mn} + \delta_0) - C_{mn}(k_y + n\beta) - (\cos \varphi_0 - B_0)k S_{mn} = 0.$$

Решением системы (9) являются выражения:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= -2S_{mn} \cos \theta_0 k^{-2} \{ \cos \varphi_0 (k_x + m\alpha)(k_y + n\beta) + \\ &\quad + \sin \varphi_0 [(k_y + n\beta)^2 + k^2 \cos \theta_{mn}(\cos \theta_{mn} + \delta_0)] \} \times \\ &\quad \times [(\cos \theta_0 + \delta_0)(\cos \theta_{mn} + \delta_0)(1 + \delta_0 \cos \theta_{mn})]^{-1}, \\ B_{mn} &= 2S_{mn} \cos \theta_0 k^{-2} \{ \sin \varphi_0 (k_x + m\alpha)(k_y + n\beta) + \\ &\quad + \cos \varphi_0 [(k_x + m\alpha)^2 + k^2 \cos \theta_{mn}(\cos \theta_{mn} + \delta_0)] \} \times \\ &\quad \times [(\cos \theta_0 + \delta_0)(\cos \theta_{mn} + \delta_0)(1 + \delta_0 \cos \theta_{mn})]^{-1}, \\ C_{mn} &= 2S_{mn} \cos \theta_0 \frac{\sin \varphi_0 (k_x + m\alpha) - \cos \varphi_0 (k_y + n\beta)}{k(\cos \theta_0 + \delta_0)(1 + \delta_0 \cos \theta_{mn})}. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только та составляющая электромагнитного поля, которая зависит от коэффициентов разложения случайной реализации $\delta(x, y)$. Из выражений (10), (5) и уравнений Максвелла можно получить все компоненты этой составляющей. Например, для составляющих \widetilde{E}_z и \widetilde{H}_y получим

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_z(x, y, z) &= \frac{iZ_0}{k} \left(\frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{H}_x}{\partial y} \right) = -\frac{2Z_0 H_0 \cos \theta_0}{k(\cos \theta_0 + \delta_0)} \times \\ &\times \sum \frac{\cos \varphi_0 (k_x + m\alpha) + \sin \varphi_0 (k_y + n\beta)}{\cos \theta_{mn} + \delta_0} S_{mn} H(m, n, z), \\ \widetilde{H}_y(x, y, z) &= \frac{2H_0 \cos \theta_0}{k^2(\cos \theta_0 + \delta_0)} \sum \{ \sin \varphi_0 (k_x + m\alpha) \times \\ &\times (k_y + n\beta) + \cos \varphi_0 [(k_x + m\alpha)^2 + k^2 \cos \theta_{mn}(\cos \theta_{mn} + \delta_0)] \} \times \\ &\times [(\cos \theta_{mn} + \delta_0)(1 + \delta_0 \cos \theta_{mn})]^{-1} S_{mn} H(m, n, z). \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (11) можно использовать для расчета отражения волны от слабых двумерных детерминированных неоднородностей границы раздела двух сред, причем эти формулы учитывают векторный характер электромагнитного поля (деполяризацию волны при отражении ее от неоднородностей рассеивающей поверхности).

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Решение (10) электродинамической части задачи рассеяния электромагнитной волны плоскостью $z = 0$ с поверхностным импедансом $\delta_0 + \delta(x, y)$ позволяет перейти к определению статистических характеристик рассеянного поля. Поскольку рассеянное поле в первом прибли-

жении линейно связано с поверхностным импедансом $\delta(x, y)$, то при гауссовом случайном поле импеданса $\delta(x, y)$ флуктуирующая часть электромагнитного поля также является гауссовой, и для ее математического описания достаточно определить второй момент поля, т. е. корреляционную функцию. Например, для корреляционной функции B_{Ez} вертикальной составляющей электрического поля \tilde{E}_z , $B_{Ez}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \equiv \tilde{E}_z(x_1, y_1, z_1) \tilde{E}_z^*(x_2, y_2, z_2)$, предельным переходом при $\Lambda_x, \Lambda_y \rightarrow \infty$ получаем

$$B_{Ez}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = \frac{Z_0^2 |H_0|^2}{4\pi^4} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} W(p_1, p_2, q_1, q_2) [\cos \varphi_0(k_x + p_1) + \sin \varphi_0(k_y + q_1)] \times \\ \times [\cos \varphi_0(k_x + p_2) + \sin \varphi_0(k_y + q_2)] \{ [(k^2 - (k_x + p_1)^2 - (k_y + q_1)^2)^{1/2} + k\delta_0] [(k^2 - (k_x + p_2)^2 - (k_y + q_2)^2)^{1/2} + k\delta_0]^* \}^{-1} \times \\ \times H(x_1, y_1, z_1) H^*(x_2, y_2, z_2) d p_2 d p_1 d q_1 d q_2. \quad (12)$$

В формуле (12) и выше черта сверху означает статистическое усреднение по ансамблю реализаций функции $\delta(x, y)$, знак * — комплексное сопряжение, $W(p_1, p_2, q_1, q_2) \equiv S(p_1, q_1) S^*(p_2, q_2)$ — спектральная плотность случайной функции $\delta(x, y)$, $H_0 \equiv \frac{H_0 \cos \theta_0}{\cos \theta_0 + \delta_0}$, $H(x, y, z) = \exp\{i[(k_x + p)x + (k_y + q)y + (k^2 - (k_x + p)^2 - (k_y + q)^2)^{1/2} z]\}$.

Интересно рассмотреть случай статистически однородного поля импеданса $\delta(x, y)$, для которого $W(p_1, p_2, q_1, q_2) = 4\pi^2 W(p_1, q_1) \delta(p_1 - p_2) \delta(q_1 - q_2)$. Из выражения (12) в таком случае получаем

$$B_{Ez}(x, y, z) = \frac{Z_0^2 |H_0|^2}{\pi^2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} W(p, q) \left[\frac{\cos \varphi_0(k_x + p) + \sin \varphi_0(k_y + q)}{[(k^2 - (k_x + p)^2 - (k_y + q)^2)^{1/2} + k\delta_0]} \right]^2 \times \\ \times H(x, y, z) d p d q, \quad (13)$$

где

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad z = z_1 - z_2.$$

Как видно из формулы (13), случайное электромагнитное поле, рассеянное при отражении плоской волны от случайной однородной импедансной плоскости — однородное, но не изотропное, даже если функция $\delta(x, y)$ — однородная изотропная. Практически интересно сечение случайного поля \tilde{E}_z плоскостью $z = \text{const}$. Пусть $z_1 = z_2$ или $z = 0$, тогда

$$B_{Ez}(x, y) = \frac{Z_0^2 |H_0|^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(p, q) \left[\frac{\cos \varphi_0(k_x + p) + \sin \varphi_0(k_y + q)}{[(k^2 - (k_x + p)^2 - (k_y + q)^2)^{1/2} + k\delta_0]} \right]^2 \times \\ \times \exp\{i[(k_x + p)x + (k_y + q)y]\} dp dq.$$

Заменой переменных $k_x + p = \mu$, $k_y + q = \nu$ получаем следующие выражения для спектральных плотностей флуктуаций электромагнитно-

го поля, рассеянного случайной однородной импедансной плоскостью ($G(\mu, \nu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} B(x, y) e^{-i(\mu x + \nu y)} dx dy$):

$$G_{Ez}(\mu, \nu) = 4Z_0^2 |H_0|^2 \left[\frac{\mu \cos \varphi_0 + \nu \sin \varphi_0}{|\sqrt{k^2 - \mu^2 - \nu^2} + k \delta_0|} \right]^2 W(\mu - k_x, \nu - k_y),$$

$$G_{Hy}(\mu, \nu) = 4 |H_0|^2 |\mu \nu \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 [\mu^2 + \sqrt{k^2 - \mu^2 - \nu^2} \times$$

$$\times (\sqrt{k^2 - \mu^2 - \nu^2} + k \delta_0)]|^2 |(\sqrt{k^2 - \mu^2 - \nu^2} + k \delta_0) \times$$

$$\times (k + \delta_0 \sqrt{k^2 - \mu^2 - \nu^2})|^{-2} W(\mu - k_x, \nu - k_y). \quad (14)$$

Для качественного анализа полученного решения (14) рассмотрим двумерный случай рассеяния, т. е. положим $W(p, q) = W(p)$. Тогда $G_{Ey} = G_{Hx} = G_{Hz} = 0$,

$$G_{Ex}(\mu, \nu) = G_{Ex}(\mu) = 4Z_0^2 |H_0|^2 \frac{|k^2 - \mu^2| W(\mu - k \sin \theta_0)}{|\sqrt{k^2 - \mu^2} + k \delta_0|^2},$$

$$G_{Ez}(\mu, \nu) = G_{Ez}(\mu) = 4Z_0^2 |H_0|^2 \frac{\mu^2 W(\mu - k \sin \theta_0)}{|\sqrt{k^2 - \mu^2} + k \delta_0|^2}, \quad (15)$$

$$G_{Hy}(\mu) = 4 |H_0|^2 \frac{k^2 W(\mu - k \sin \theta_0)}{|\sqrt{k^2 - \mu^2} + k \delta_0|^2},$$

причем $Z_0^2 G_{Hy} = G_{Ez} \pm G_{Ex}$.

Рассмотрим предельные случаи мелко- и крупномасштабных неоднородностей при вертикальном падении волны на плоскость $z = 0$. Для мелкомасштабных неоднородностей (длинноволновая асимптотика) $W(\mu) \neq 0$ при $|\mu| \gg k$; поэтому из соотношений (15) получаем

$$G_{Ex}(\mu) \approx G_{Ez}(\mu) \approx 4Z_0^2 |H_0|^2 \frac{\mu^2 W(\mu)}{|k \delta_0 + i \mu|^2},$$

$$G_{Hy}(\mu) \approx \frac{G_{Ez}(\mu) - G_{Ex}(\mu)}{Z_0^2} \approx 4 |H_0|^2 \frac{W(\mu) k^2}{|k \delta_0 + i \mu|^2}, \quad (16)$$

причем $G_{Hy}(\mu) \rightarrow 4 |H_0|^2 \left(\frac{k}{\mu}\right)^2 W(\mu)$ при $|\mu| \rightarrow \infty$.

Для крупномасштабных неоднородностей (коротковолновая асимптотика) $W(\mu) \neq 0$ при $0 \leq |\mu| \ll k$; поэтому

$$G_{Ex}(\mu) \approx 4 Z_0^2 |H_0|^2 \frac{W(\mu)}{|1 + \delta_0|^2},$$

$$G_{Ez}(\mu) \approx 4 Z_0^2 |H_0|^2 \frac{\mu^2 W(\mu)}{k^2 |1 + \delta_0|^2}, \quad (17)$$

$$G_{Hy}(\mu) \approx 4 |H_0|^2 \frac{W(\mu)}{|1 + \delta_0|^2} \approx \frac{G_{Ez}(\mu) + G_{Ex}(\mu)}{Z_0^2}.$$

Формулы (16) и (17) дают асимптотические выражения для спектральных плотностей компонент рассеянного поля. Рассмотрим конкрет-

ный пример — наклонное СДВ зондирование нижней ионосферы. Положим $\theta_0 = 1 \approx 57^\circ,3$ и из работы [10] найдем значение δ_0 по формуле $\delta_0 = \cos \theta_0 \frac{1-R}{1+R}$. Тогда

$$G_{Hy}(\mu) \approx 4 |H_0|^2 \frac{k^2 W(\mu - k \sin \theta_0)}{|\sqrt{k^2 - \mu^2} + k \delta_0|^2} \equiv 4 |H_0|^2 W(\mu - k \sin \theta_0) F(\mu).$$

Вид функции $F(\mu) = \left| \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{k}\right)^2} + \delta_0 \right|^{-2}$ для различных частот

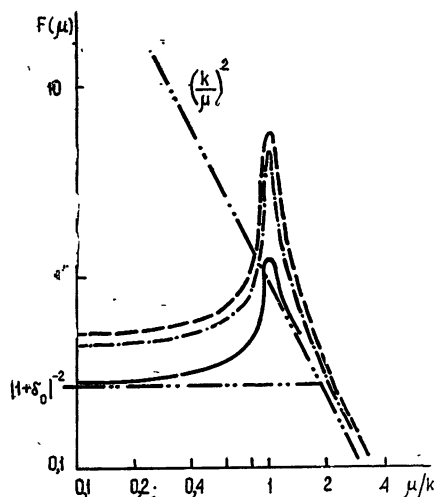


Рис. 1.

СДВ диапазона приведен на рис. 1 ($\theta_0 = 1$; сплошная линия — $f = 10$ кГц, пунктирная — $f = 20$ кГц, штрихпунктирная — $f = 30$ кГц).

В заключение заметим, что полученное в статье решение задачи рассеяния справедливо при малом отклонении от среднего значения и любых масштабах неоднородностей импеданса плоскости $z = 0$; причем ограничение малости вариаций импеданса при статистическом рассмотрении можно понимать в среднеквадратическом смысле, т. е. $\sigma_0(x, y) \ll |\cos \theta_0 + \delta_0|$.

Автор благодарит В. В. Новикова за полезное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских, ЖЭТФ, 23, № 3 (9), 275, 289 (1952).
2. М. А. Исакович, ЖЭТФ, 23, № 3 (9), 305 (1952).
3. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 3, 54 (1958).
4. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
5. Дж. В. Стретт (Рэлей), Теория звука, 2, Гостехиздат, М., 1955.
6. S. O. Rice, Commun. Pure Appl. Math., 4, № 6, 351 (1951).
7. J. R. Wait, Radio Sci., 6, № 3, 387 (1971).
8. D. E. Varrick, Radio Sci., 6, № 5, 517 (1971).
9. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, А. Б. Орлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 321 (1970).
10. Н. С. Гаврилова, В. В. Кириллов, Проблемы дифракции и распространения волн, 5, 31 (1966).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
12 июня 1972 г.

SCATTERING OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY STATISTICALLY INHOMOGENEOUS IMPEDANCE PLANE

G. I. Khudyakov

The problem of scattering of a plane electromagnetic wave by a plane surface the impedance of which is a random Gaussian scalar field is solved. The zero and first approximations are found for statistic characteristics of the field above random impedance plane by Rayleigh—Ryce method. Some particular and limit (large-scale and small-scale inhomogeneities) cases are analysed.

УДК 621.378 . 621.372.8

РЕЗОНАТОРЫ И ВОЛНОВОДЫ С МОДАМИ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ ДЛЯ МАЗЕРОВ НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ*

С. Н. Власов, Л. И. Загрядская, М. И. Петелин

Излагаются результаты теоретического и экспериментального исследования мод шепчущей галереи в высокоселективных бочкообразных резонаторах и желобковых волноводах с неквадратичным профилем. Для расчетов используется метод интегрального уравнения. Исследуются различные способы сопряжения желобковых волноводов с волноводами других типов.

В мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) [2] в последнее время находят применение резонаторы, образованные расширениями слабо-нерегулярных волноводов [3]. При благоприятном подборе профиля такого резонатора в нем может быть достигнута эффективная селекция мод, отличающихся друг от друга продольным индексом q (числом максимумов амплитуды поля в продольном направлении) — быстрое падение дифракционной добротности с ростом q . Однако разница добротностей мод, отличающихся друг от друга только поперечной структурой поля, но обладающих близкими поперечными волновыми числами κ_s и одинаковыми q , относительно невелика. Вследствие этого спектр собственных частот ω_s высокодобротных мод близок к спектру критических частот $\omega_s^{*p} = \kappa_s c$ (c — скорость света) расширенной части волновода, образующей резонатор. При увеличении относительных поперечных размеров резонаторов спектр их собственных частот сгущается (расстояние $\Delta\omega_s$ между частотами H -мод, являющихся рабочими модами МЦР, имеет величину порядка $\frac{\omega \lambda^2}{2\pi s}$, где s — площадь сечения резонатора, λ — длина волны).

Сказанное остается справедливым, однако, лишь до тех пор, пока резонатор можно считать достаточно узким. При увеличении поперечных размеров резонатора возникает дополнительная возможность электродинамической селекции мод, физический смысл которой может быть пояснен на примере резонатора с эллиптическим профилем боковой стенки [4, 5]. Поля собственных типов колебаний такого резонатора представляются в виде набора волновых потоков, претерпевающих коррекцию фазового фронта при отражениях от стенок и дифракционное (френелевское) расплывание в промежутках между отражениями, причем каждой моде может быть поставлен в соответствие двухзеркальный резонатор с квадратичным профилем зеркал [4]. Взаимная компенсация расплывания потока и коррекции его фазового фронта имеют место при вполне определенной протяженности поля

$$L \approx (r_0 a_0 \lambda^2)^{1/4} \left[1 - \frac{a_0}{r_0} \left(1 - \frac{m^2}{\nu_{mp}^2} \right) \right]^{-1/4} \quad (1)$$

* Основные результаты работы изложены в докладе [1].

(измеренной вблизи поверхности резонатора); в (1) a_0 — радиус резонатора, r_0 — радиус кривизны боковой стенки в плоскости, проходящей через ось резонатора, m и p — азимутальный и радиальный индексы моды, ν_{mp} — корень уравнения $J'_m(\nu_{mp}) = 0$, $J_m(x)$ — функция Бесселя.

Как следует из (1), в относительно узких и длинных резонаторах ($a_0 \ll r_0$), где волновые потоки отражаются от стенок сравнительно часто, протяженности полей мод с близкими собственными частотами (близкими ν'_{mp}) и одинаковыми продольными индексами q в согласии с [3] близки друг к другу: $L \approx (r_0 a_0 \lambda^2)^{1/4}$. В относительно широких и коротких резонаторах

$$a_0 \gg r_0, \quad (2)$$

где волновые потоки, проходящие на различных расстояниях от оси, оказываются в существенно разных условиях; моды с близкими частотами, но различными поперечными структурами, согласно (1), отличаются друг от друга протяженностью поля и дифракционными потерями; некоторые моды, для которых

$$1 - \left(\frac{m}{\nu_{mp}} \right)^2 > r_0/a_0, \quad (3)$$

попадают в зону неустойчивости [3]. Среди мод с близкими частотами (близкими ν'_{mp}) наименьшую длину

$$L_{ш} \approx (r_0 a_0 \lambda^2)^{1/4}$$

и наибольшую дифракционную добротность имеют моды с большими азимутальными ($m \sim \nu'_{mp}$) и малыми радиальными ($p \sim 1$) индексами — с полями, локализованными вблизи поверхности резонатора. Для таких мод — мод шепчущей галереи — при $a_0 \sim r_0$ условие (2) может быть записано в виде

$$\frac{L_{ш}^2}{\lambda a_0} \ll 1.$$

Аналогичное условие должно выполняться в любом резонаторе, представляющем собой нерегулярный волновод, для того чтобы в нем была возможна селекция мод по поперечным индексам. В каждом отдельном случае, однако, селективные свойства резонатора зависят от его профиля.

Более высокой степени селекции мод, чем в резонаторах с эллиптическим профилем, ориентируясь на результаты работы [6], следует ожидать в резонаторах с профилем, изображенным на рис. 1. С точки зрения использования в МЦР такие резонаторы привлекательны еще и тем, что их конфигурация благоприятна для ввода электронного потока, а при отсутствии симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси, в них можно обеспечить односторонний дифракционный вывод или ввод мощности.

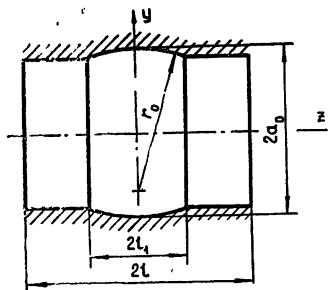


Рис. 1. Резонатор с профилем, обеспечивающим селекцию мод по поперечному (радиальному) индексу.

Важным обстоятельством, которое необходимо иметь в виду при расчете электродинамических систем МЦР, является то, что их длина

определяется из условия достижения высокого КПД и в практически интересных случаях — в зависимости от частотного диапазона и напряжения электронного потока — должна составлять от 2λ до 10λ . Задача, таким образом, сводится к подбору профиля резонатора, который обеспечивал бы наибольшую селективность при заданной протяженности поля рабочей моды.

В некоторых мазерах на циклотронном резонансе, в частности в МЦР-усилителе бегущей волны с поперечным электронным потоком (МЦР—ЛПТ), представляется перспективным применять волноводы в виде винтового желоба, способные канализировать моды шепчущей галереи [7], в таких усилителях может быть достигнута невзаимность усиления. Расчет волноводов с модами шепчущей галереи может осуществляться теми же методами, которые применимы к соответствующим резонаторам, однако сопряжение таких волноводов с волноводами других типов представляет собой самостоятельную проблему.

Теоретический анализ резонаторов с модами шепчущей галереи может быть проведен на основе интегрального уравнения [3] для функции $f(z)$, характеризующей распределение поля вдоль резонатора:

$$\sqrt{P_q} f(z) = \sqrt{\frac{ik}{4\pi b_m}} \int_{-l}^l \exp \left[-\frac{ik}{4b_m} (z - z')^2 + 2i\Phi(z') \right] \times f(z') dz' \quad (4)$$

В (4) $\Phi(z) = \frac{kb_m}{a_r} \varphi(z)$ — функция, описывающая профиль боковой стенки $\varphi(z) = a_0 - a(z)$, $a(z)$ — радиус резонатора в сечении z , причем $|\varphi(z)| \ll a_0$, $b_m = a_0 \sqrt{1 - \frac{m^2}{v_{mp}^2}}$; $2l$ — длина резонатора, P_q — комплексное собственное число уравнения, определяющее собственные частоты $\omega' = k'c$ и добротности Q -мод:

$$k'a_0 = v'_{mp} - \frac{\arg P_q}{4 \sqrt{1 - \frac{m^2}{v_{mp}^2}}}, \quad (5)$$

$$Q = - \frac{2v'_{mp} \sqrt{1 - \frac{m^2}{v_{mp}^2}}}{\ln |P_q|}.$$

С физической точки зрения модуль $|P_q|$ представляет собой относительную часть энергии, которая остается в волне после прохождения ею угла $\alpha' = 2 \arccos \frac{m}{v_{mp}}$ в резонаторе.

С помощью замены переменных $u = \sqrt{\frac{k}{4b_m}} z$, $f(z) e^{i\Phi(z)} = \Psi(u)$ и введения обозначения $C = \frac{kl^2}{2b_m}$ уравнение (1) может быть записано в таком же виде, что и для двухзеркальных резонаторов [6, 8]:

$$\sqrt{P}_q \Psi(u) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \exp \left[-i \frac{(u-u')^2}{2} + i\Phi(u') + i\Phi(u) \right] \times \Psi(u') du'. \quad (6)$$

Уравнение (5) относится к целому семейству резонаторов, профили которых могут быть преобразованы друг в друга с помощью эквивалентных преобразований. В отличие от двухзеркальных систем эквивалентность распространяется не на весь спектр резонатора, а только на моду с определенными индексами m , p и q .

Конкретные расчеты и эксперимент проводились для резонатора с рабочей модой $H_{40,1,1}$, по отношению к которой ближайшей конкурирующей модой является $H_{34,2,1}$, отличающаяся по частоте от $H_{40,1,1}$ менее чем на 0,3%. В резонаторе с профилем, изображенным на рис. 1, были определены зависимости дифракционных потерь этих мод от двух параметров: отношения радиуса резонатора к радиусу боковой стенки a_0/r_0 (рис. 2) и величины цилиндрического участка боковой стенки l/λ (рис. 3). Как следует из расчетов для резонатора с размерами $l/\lambda = 3,1$;

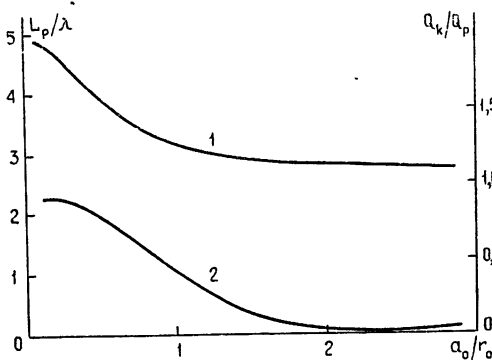


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость протяженности поля моды $H_{40,1,1}$ (1) и отношения добротностей конкурирующих мод $H_{40,1,1}$ и $H_{34,2,1}$ (2) от параметра a_0/r_0 .

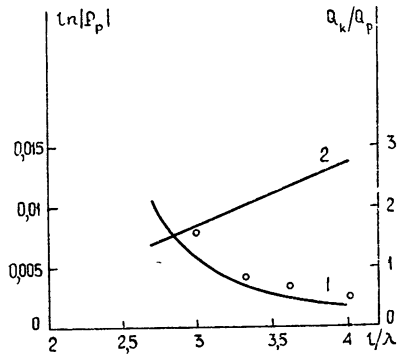


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость дифракционных потерь мод $H_{40,1,1}$ (1) и отношения добротностей конкурирующих мод $H_{40,1,1}$ и $H_{34,2,1}$ (2) от параметра l/λ (теоретические кривые). Точки относятся к экспериментально измеренным значениям потерь.

$l_1/\lambda = 1,4$; $a_0/\lambda = 6,8$ при протяженности поля, превышающей 4λ , отношение добротностей мод практически равно единице (рис. 2), т. е. селекция отсутствует. При увеличении a_0/r_0 отношение $\frac{Q_{40,1,1}}{Q_{34,2,1}}$ растет, но протяженность поля уменьшается до $2,8\lambda$. При удлинении цилиндрической части l/λ в резонаторе с размерами $l_1/\lambda = 1,4$; $a_0/\lambda = 6,8$; $r_0/\lambda = 7,1$ дифракционные потери мод $H_{40,1,1}$ и $H_{34,2,1}$ падают, а селекция улучшается (рис. 3).

В согласии с [6] в резонаторе с цилиндрической частью боковой поверхности добротность моды с двумя вариациями вдоль оси $H_{40,1,2}$ была в несколько раз ниже, чем у резонатора с эллиптическим профилем боковой поверхности при равных добротностях основной моды $H_{40,1,1}$.

Экспериментальное исследование резонаторов с модами шепчущей галереи. В резонаторе с размерами $a_0/\lambda = 6,8$; $r_0/\lambda = 7,1$; $l_1/\lambda = 1,4$ для моды $H_{40,1,1}$ с $\lambda = 8,6$ мм были измерены в зависимости от l/λ три вида потерь — омические, дифракционные и потери на связь с трактом возбуждения. Определение последних связано с трудностями, обусловленными возможностью переизлучения энергии на элементе связи в свободное пространство. Для определения потерь на связь мы применили следующую методику измерений. Резонатор возбуждался через помещаемую внутри него полиэтиленовую пленку, облучаемую рупором с линзой (рис. 4). Если пренебречь эффектами дифракции на краях пленки, то добротность связи можно найти по формуле

$$Q_{св} = \frac{k'}{2k''} = - \frac{2\pi k a_0}{2 \ln |R|},$$

где R — коэффициент отражения от пленки по амплитуде. Независимо, измеряя нагруженную добротность резонатора и коэффициент отражения R , мы нашли как собственные потери резонатора (омические плюс дифракционные), так и потери на связь с трактом возбуждения. Определение омических и дифракционных потерь по отдельности осуществлялось при другом способе возбуждения резонатора — через отверстие в боковой стенке с ферритовой вставкой. При таком способе возбуждения потери на связь в зависимости от положения ферритовой вставки составляли от 10 до 40% всех потерь соответствующей моды резонатора. Зная потери на возбуждение и измеряя добротность резонатора,

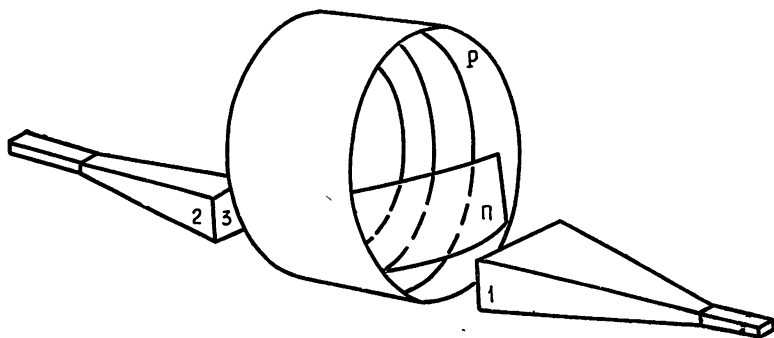


Рис. 4. Возбуждение резонатора диэлектрической пленкой, облучаемой рупором.

P — резонатор, Π — пленка из полиэтилена, 1, 2 — передающий и приемный рупоры, 3 — линза.

закрытого для основной моды с торцовых сторон плоскими кольцами, мы нашли величину омических потерь. Для резонатора, изготовленного из меди, эта величина оказалась близкой к теоретическому значению, определяемому по соответствующей формуле для цилиндрических резонаторов (ср. с [5]):

$$Q_{ом} = \frac{a_0}{d} \left(1 - \frac{m^2}{\nu_{mp}^2} \right),$$

где d — толщина скин-слоя. Вычитая из суммарных потерь омические и потери на связь, мы определили дифракционные потери мод $H_{40,1,1}$ и $H_{34,2,1}$ для различных l/λ . Найденные значения дифракционных

потерь показаны на рис. 3. Как видно из рис. 3, экспериментальные и теоретические значения совпадают с точностью порядка 30%.

Моды с индексом $q = 2$ экспериментально не наблюдались. Их добротность, согласно расчетам, должна быть более чем на порядок ниже добротности мод с $q = 1$.

Измеренная протяженность поля моды $H_{40,1,1}$ оказалась близкой к величине, определяемой формулой (3).

Волноводы с модами шепчущей галереи. Результаты теоретических и экспериментальных исследований бочкообразных резонаторов могут быть непосредственно перенесены на волноводы в виде винтового желоба, по крайней мере, в случае, когда шаг волновода мал по сравнению с его радиусом (рис. 5).

Если ширина желоба L существенно больше длины волны, но значительно меньше радиусов кривизны R_0 и кручения направляющей волновода, то структура поля описывается формулой

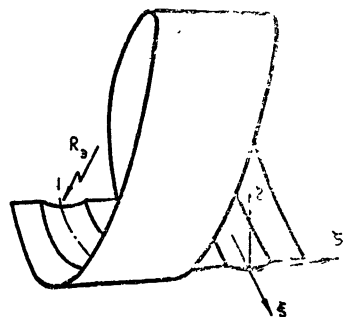


Рис. 5. Волновод с модами шепчущей галереи.

$$H_{\zeta} = \exp\left(-i \frac{m}{R_0} \xi\right) v \left[\frac{k \left(\frac{m}{\nu_{mp}} a_0 - a_0 + \eta \right)}{\left(\frac{m}{2} \right)^{1/3}} \right] f(\zeta), \quad (7)$$

где η , ζ и ξ — координаты соответственно по нормали, бинормали и вдоль направляющей желоба, $\frac{m}{R_0}$ имеет смысл постоянной распространения волны в ξ -направлении, m — число, соответствующее азимутальному индексу собственной моды, v — функция Эйри, спадающая при стремлении своего аргумента к бесконечности. Постоянную распространения $\frac{m}{R_0}$ можно найти, используя связь между m и корнем производной функции Бесселя:

$$\nu'_{mp} \approx k R_0 \approx m + \sqrt[3]{\frac{m}{2}} t'_p,$$

где t'_p — корни производной функции Эйри.

Поток энергии волны в желобковом волноводе убывает по экспоненциальному закону $\sim e^{-2\alpha\xi}$. Постоянную затухания $\alpha = \alpha_{ом} + \alpha_{д}$, связанную с омическими ($\alpha_{ом}$) и дифракционными ($\alpha_{д}$) потерями, можно найти, зная величины добротностей соответствующего резонатора:

$$\alpha_{ом} = \frac{k d}{2R_0 \left(1 - \frac{m^2}{\nu_{mp}^2} \right)},$$

$$\alpha_{д} = \frac{\ln |P_q|}{4R_0 \arccos \frac{m}{\nu_{mp}}}.$$

Эффективность возбуждения волн шепчущей галереи в желобковом волноводе собственными волнами других линий передачи определяется степенью совпадения структур этих волн. Рассмотрено сопряжение желобкового волновода со следующими типами волноводов: с квазиоптической линией с гауссовым пучком $\exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2}\right)$, гребенчатой замедляющей системой и рупором (рис. 6). Считаем, что структура поля

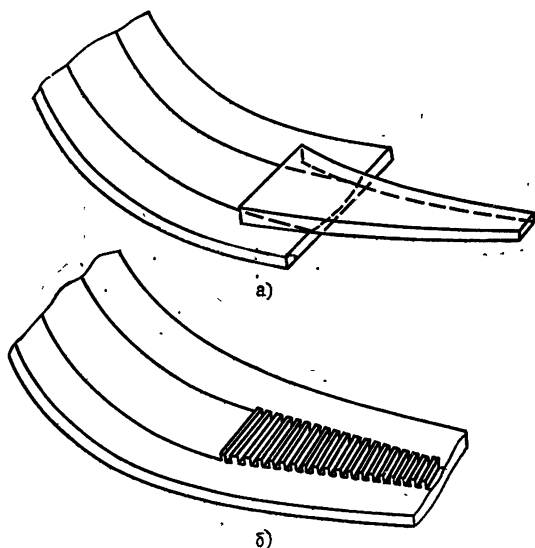


Рис. 6. Возбуждение волновода с модами шепчущей галереи а) рупором, б) гребенчатой замедляющей системой.

в волноводе с модами шепчущей галереи описывается формулой (7) с зависимостью поля $f(\zeta)$ от координаты ζ в виде $\exp\{-\zeta^2/\zeta_0^2\}$ [5], где ζ_0 — ширина поля в волноводе шепчущей галереи. Согласование желобкового волновода с линзовой линией по координате ζ может быть осуществлено с помощью пары линз. При использовании только квадратных фазовых корректоров потери на возбуждение по другой координате η могут быть уменьшены, как показывают расчеты, до величины 0,5 дб. Для этого должны быть выполнены следующие условия: фазовые фронты волн в линии и желобковом волноводе совпадают, отношение ширины пучка ω в линзовой линии к ширине поля в волноводе шепчущей галереи $\left(\frac{m}{2}\right)^{1/3} / k$ равно $(m/2)^{1/3} / k\omega \approx 0,7$; ось линзовой линии смещена на расстояние $\Delta = \frac{(m/2)^{1/3}}{k} - 0,3$ по нормали к образующей волновода шепчущей галереи параллельно касательной, проходящей через срез волновода. Экспериментально измеренные потери на возбуждение линзовой линии волноводом шепчущей галереи на $\lambda = 4,5$ мм оказались менее 1 дб. Потери мощности при сопряжении желобкового волновода с рупором и гребенчатой замедляющей системой можно определить, зная коэффициенты возбуждения [9] гауссова пучка основной волной волновода и учитывая, что коэффициент возбуждения поля моды шепчущей галереи вида

$$f_1(\zeta) = \begin{cases} \nu(1,02 + \zeta) & (\zeta > 0) \\ 0 & (\zeta < 0) \end{cases}$$

пучком $f_2(\zeta) = \begin{cases} \exp(-\zeta^2/1,6) & (\zeta > 0) \\ 0 & (\zeta < 0) \end{cases}$ равняется единице с точностью до 0,005. Они имеют величину порядка 1 дБ. Измеренные потери на возбуждение в обеих системах составляли $1,5 \div 2$ дБ при входном КВВ $\approx 0,8 \div 0,9$.

Проведенные расчеты и эксперименты подтверждают возможность применения резонаторов и волноводов с модами шепчущей галереи в мазерах на циклотронном резонансе. Следует, однако, иметь в виду, что удовлетворительной степени электродинамической селекции мод можно достигнуть лишь в достаточно коротких резонаторах. Обеспечить высокую степень селекции мод при большой протяженности поля рабочей моды с помощью ряда связанных коротких резонаторов с малым, удовлетворяющим условию (2), радиусом кривизны. Другим способом достижения редкого спектра мод шепчущей галереи является применение коаксиальных резонаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Власов, Л. И. Загрядская, М. И. Петелин, Тезисы докладов на Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио, Дню связиста и 50-летию Нижегородской лаборатории имени В. И. Ленина, М., 1968.
2. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
3. С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, Г. Г. Рогачева, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 8, 1236 (1969).
4. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
5. В. М. Черненко, Электроника больших мощностей, сб. 5, М., 1965, стр. 81.
6. В. С. Авербах, С. Н. Власов, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1333 (1967).
7. Ю. В. Быков, А. В. Гапонов, М. И. Петелин, Тезисы докладов на Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио, Дню связиста и 50-летию Нижегородской лаборатории имени В. И. Ленина, М., 1968.
8. H. Kogelnik, T. Li, Proc. IEEE, 54, № 10, 1312 (1966).
9. Р. А. Валитов, С. Ф. Дюбко, В. В. Камышан, В. М. Кузьмичев, Б. И. Макаренко, А. В. Соколов, В. П. Шайко, Техника субмиллиметровых волн, изд. Сов. радио, М., 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
14 декабря 1972 г.

RESONATORS AND WAVEGUIDE WITH WHISPERING GALLERY MODES FOR MASERS AT CYCLOTRON RESONANCE

S. N. Vlasov, L. I. Zagryadskaya, M. I. Petelin

The results of theoretical and experimental study of whispering gallery modes in high-selective barrel-like resonators and groove nonquadratic-profile waveguides are presented. The integral equation method is used for calculations. Different ways of conjunction of groove waveguides with other waveguides are investigated.

УДК 621 375

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В УСИЛИТЕЛЕ ЦИКЛОТРОННО-СИНХРОННЫХ ВОЛН

В. А. Ванке, Ю. М. Тимофеев

Проанализировано движение электронного луча конечного диаметра в зоне усиления усилителя циклотронно-синхронных волн. Определена область значений параметров, при которых КПД прибора может достигать 60 ÷ 70%.

В литературе неоднократно высказывалась мысль о возможности получения высоких значений КПД в приборах СВЧ, использующих поперечную модуляцию электронного потока [1]. В последние годы интерес к этой проблеме заметно усилился [2-4].

Анализ обычно базировался на нитевидной модели пучка, в рамках которой поток остается моноэнергетичным на выходе прибора, что позволяло ожидать значения КПД, близкие к 100% при депрессии потенциала коллектора.

Для ЛБВ с синхронной волной известна попытка оценить в линейном приближении роль пространственного заряда и конечного диаметра пучка [4]. Показано, в частности, что возникающий при этом разброс продольных скоростей для реальных условий не позволяет ожидать значений КПД, превышающих 50%.

Для усилителя циклотронно-синхронных волн [5, 6] ситуация может оказаться более оптимистичной, так как для достаточно плотных пучков резонансные условия взаимодействия с полем усилительной структуры должны быть различными для внутренних орбит и для движения центра масс сечения пучка [7], т. е. существует механизм, способный ограничить величину возбуждаемого разброса продольных скоростей.

Ниже предпринята попытка путем моделирования на ЭВМ оценить значение КПД и коэффициента усиления для приборов этого типа. Учтен ряд нелинейных механизмов, включая выход из синхронизма отдельных электронов, насыщение усилителя, а также расширение пучка и связанное с этим уменьшение и перераспределение плотности пространственного заряда в потоке.

1. МОДЕЛЬ ПУЧКА. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Представим пучок конечного диаметра в виде последовательности равномернозаряженных по сечению дисков, «плотно» следующих друг за другом с постоянной продольной скоростью v_{z0} .

Можно считать, что под действием однородного поперечного высокочастотного поля входного элемента связи (рис. 1) все электроны внутри диска приобретают некий общий циклотронный радиус β_s , фаза которого линейно меняется от диска к диску.

В силу аксиальной симметрии внешнего поля усилительной зоны и аксиальной симметрии сечения пучка относительно его центра масс на входе в систему, процесс нарастания амплитуды циклотронного дви-

жения центра масс $|\beta_s|$ (т. е. сигнала) одинаков для всех дисков вне зависимости от фазы влета диска в систему*.

Тем не менее, условия взаимодействия отдельных электронов диска с внешним электростатическим полем зоны усиления могут быть существенно различными, т. е. процесс усиления в общем случае сопровождается искажением формы диска, включая его расплывание вдоль оси системы.

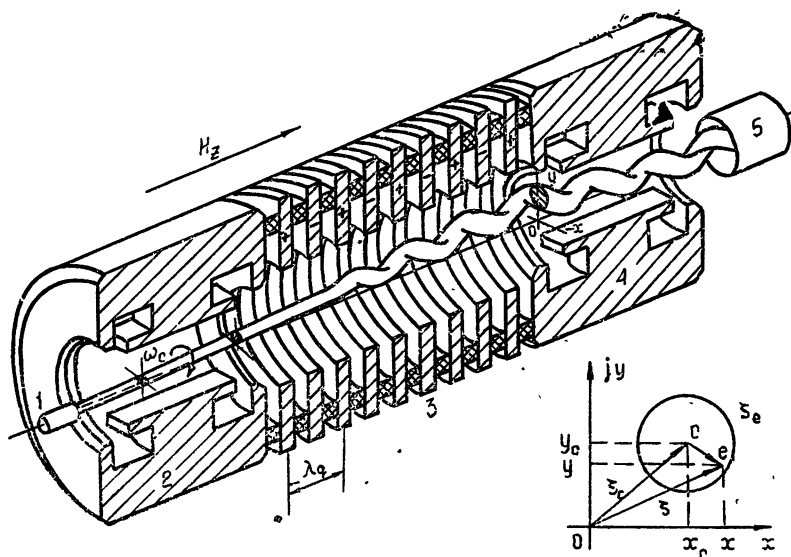


Рис. 1. Схема усилителя циклотронно-синхронных волн:

1—электронная пушка; 2—входной резонатор; 3—зона усиления (кольцевая электростатическая структура с периодическим полем); 4—выходной резонатор, 5—коллектор.

Спиралевидная форма потока, показанная на рисунке, условно изображает возбуждение синхронной волны в зоне усиления [1, 5]. Основное (рабочее) циклотронное движение соответствует вращению пучка вокруг оси системы (при $\omega_s = \omega_c$, где ω_s , ω_c — соответственно сигнальная и циклотронная частоты).

Для случая, когда расплывание диска, связанное с возбуждением разброса продольных скоростей отдельных электронов, невелико по сравнению с длиной пластин выходного элемента связи, можно существенно упростить задачу и ограничиться анализом движения отдельного диска, аппроксимируя внешнее поле усилительной структуры и внутреннее поле кулоновских сил потенциалами вида [6, 4]

$$\Phi_{\text{стр}}(x, y, z) \approx V_p \left[1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 (x^2 + y^2) \right] \cos \beta_q z; \quad (1)$$

$$\Phi_{\text{кул}}(x, y, z) \approx \frac{\omega_p^2}{4 e'} \{ [x - x_c(z)]^2 + [y - y_c(z)]^2 \}, \quad (2)$$

где V_p — амплитуда потенциала, создаваемого электростатической системой на оси, $\beta_q = 2\pi/\Lambda_q$, Λ_q — шаг электростатической структуры, ω_p — плазменная частота, $e' = e/m$, x_c , y_c — координаты центра масс диска (рис. 1).

Тогда уравнения движения электрона с номером i в нерелятивистском случае могут быть записаны в виде

* Считая, что ось невозмущенного потока совпадает с осью усилительной зоны.

$$\frac{d^2 \zeta_i}{d\theta^2} - j \frac{d\zeta_i}{d\theta} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{v_{z0}^2}{v_{zi}^2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \zeta_i - \left[\frac{1}{\varepsilon_0} v_{zi}^{-1} \frac{dv_{zi}}{d\theta} + 2j \Delta_i \right] \frac{d\zeta_i}{d\theta} + \mu_i \zeta_{ei} \right\}; \quad (3)$$

$$v_{zi} \frac{dv_{zi}}{d\theta} = j \frac{e' V_p}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 \zeta_i \zeta_i^* \right\} (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) - \frac{\omega_{pi}^2}{2} \operatorname{Re} \left[(\zeta_i - \zeta_c) \frac{d\zeta_c^*}{d\theta} \right], \quad (4)$$

здесь $i = 1, 2, \dots, N$; N — число электронов в диске, $\zeta_i = x_i + jy_i$, $\zeta_c = x_c + jy_c$ — комплексные координаты соответственно отдельного электрона и центра масс диска относительно начала координат, $\zeta_{ei} = \zeta_i - \zeta_c$ — комплексная координата отдельного электрона относительно центра масс диска (рис. 1), $\theta = \beta_q z$ — нормированная продольная координата, $\omega_{e0} = \beta_q v_{z0}$, $\omega_{ei} = \beta_q v_{zi}$; v_{z0} , v_{zi} — соответственно начальное и текущее значение продольной скорости, $\varepsilon_0 = e' V_p / 4 v_{z0}^2$ — малый параметр, характеризующий относительную интенсивность электрических сил, действующих на электрон со стороны поля электростатической структуры, $\Delta_i = (1 - \omega_c / \omega_{ei}) / 2 \varepsilon_0$ — нормированная расстройка, $\mu_i = \frac{1}{2 \varepsilon_0} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ei}^2}$, ω_{pi} — плазменная частота, характеризующая усредненное

поле кулоновских сил, интенсивность которого меняется при расширении пучка в усилительной зоне, ω_c — циклотронная частота.

Для основного случая резонансного адиабатического воздействия поля на поток из (3) и (4) получаем следующую систему укороченных уравнений:

$$\frac{d\alpha_i}{d\tau} = j \frac{v_{z0}^2}{v_{zi}^2} \beta_i + j \mu_i \alpha_{ei}; \quad (5)$$

$$\frac{d\beta_i}{d\tau} = -j \frac{v_{z0}^2}{v_{zi}^2} \alpha_i - 2j \left\{ \Delta_0 + (1 - 2\varepsilon_0 \Delta_0) \left(1 - \frac{v_{z0}}{v_{zi}} \right) / 2\varepsilon_0 \right\} \beta_i - j \mu_i \beta_{ei}; \quad (6)$$

$$v_{zi} \frac{dv_{zi}}{d\tau} = -\omega_{e0}^2 \{ \operatorname{Im} (\alpha_i \beta_i^*) - \mu_i \operatorname{Im} (\beta_i^* \beta_c) \}, \quad (7)$$

где

$$\tau = \varepsilon_0 \theta, \quad \zeta_i = \alpha_i + \beta_i e^{j\theta}, \quad \zeta_c = \alpha_c + \beta_c e^{j\theta},$$

$$\zeta_{ei} = \alpha_{ei} + \beta_{ei} e^{j\theta}, \quad \alpha_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad \beta_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i,$$

$$\Delta_0 = (1 - \omega_c / \omega_{e0}) / 2 \varepsilon_0, \quad \alpha_{ei} = \alpha_i - \alpha_c, \quad \beta_{ei} = \beta_i - \beta_c.$$

При численном интегрировании этой системы уравнений использовалась модель с $N = 48$ электронов и содержащая 6 коаксиальных колец по 8 электронов, расположенных равномерно по азимуту*. Радиусы колец были выбраны таким образом, чтобы имитировать равномерную плотность заряда в диске при его влете в зону усиления.

На каждом шаге интегрирования корректировалось значение ω_{pi}

* Это соответствовало надежному насыщению решения по числу частиц.

для каждого слоя электронов, путем пересчета среднего радиуса и средней продольной скорости в каждом кольце.

Для вычисления коэффициента усиления по мощности использовалась информация о циклотронном движении центра масс диска

$$G(\partial\delta) = 10 \lg \{ |\beta_c(\tau)|^2 / |\beta_c(0)|^2 \}, \quad (8)$$

а КПД рассчитывался для идеально сконструированного, но однокаскадного коллектора, способного «принять» наиболее медленный электрон с нулевой скоростью

$$\eta = (1 - 2\varepsilon_0 \Delta_0)^2 \beta_q^2 \frac{|\beta_c(\tau)|^2 - |\beta_c(0)|^2}{1 - (v_{zi}^2/v_{z0}^2)_{\min}}. \quad (9)$$

В качестве исходных данных для анализа использованы следующие нормированные величины: $\varepsilon_0 = \frac{1}{8} V_p/V_0$ — параметр, характеризующий

интенсивность электростатического поля структуры (V_0 — потенциал пучка на входе в зону усиления), ω_p^2/ω_c^2 — отношение квадратов плазменной частоты и циклотронной на входе в зону усиления, $\frac{\omega_p^2}{\omega_{e0}^2} = (1 -$

$- 2\varepsilon_0 \Delta_0)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}$, $\Delta_0 = (1 - \omega_c/\omega_{e0})/2\varepsilon_0$ — нормированная входная расст-

ройка, $R_0 = \beta_q r_0$ — нормированный радиус невозмущенного пучка (r_0 — радиус потока), $P_{\text{вх}} = P_s/I_0 V_0 (1 - 2\varepsilon_0 \Delta_0)^2$ — нормированная мощность сигнала в потоке на входе в зону усиления (P_s — мощность сигнала, I_0 — ток пучка).

На каждом шаге интегрирования дополнительно контролировалась возможность отражения электронов внутри зоны усиления за счет довольно большой ($\geq 8\varepsilon_0 V_0$) амплитуды колебаний потенциала, создаваемого электрической системой, вдоль оси. Из (1) условие прохождения пучка без отражений эквивалентно требованию

$$(v_{zi}/v_{z0})^2 > 1 - 8\varepsilon_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 (|\alpha_i| + |\beta_i|)^2 \right\} \quad (10)$$

$(i = 1, 2, \dots, N).$

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

На рис. 2 представлено типичное изменение коэффициента усиления и КПД вдоль оси системы для ряда конкретных параметров. Здесь же показана деформация формы сечения потока (положение внешнего кольца электронов) для различных значений нормированной координаты τ .

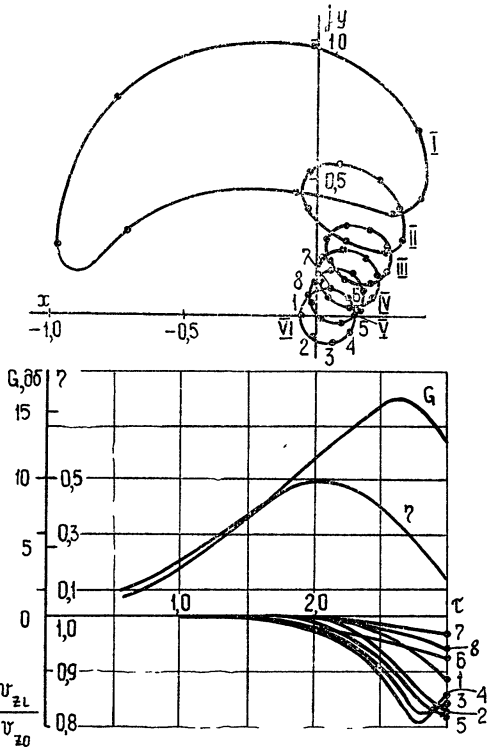
Характерно, что оптимум по КПД достигается существенно раньше, чем по коэффициенту усиления, примерно для $\tau \approx 2,0 \div 2,1$ и, хотя при больших τ электронный КПД продолжает возрастать, общий КПД (η) заметно падает за счет увеличения продольного разброса скоростей. При дальнейшем увеличении τ углубляется различие в эффективности взаимодействия отдельных электронов с внешним полем, форма пучка искажается и коэффициент усиления начинает падать.

Максимальные значения η весьма резко падают и при увеличении радиуса невозмущенного пучка R_0 (рис. 3). При $R_0 > 0,15 - 0,2$ ($r_0 > (0,15 - 0,2) / \beta_q$) η_{max} оказываются низкими даже для довольно плот-

ных пучков. Невелики получаются и значения коэффициента усиления для этих же случаев (рис. 3).

Таким образом, исходные допущения анализа, включая аппроксимацию поля пространственного заряда выражением (2), сравнительно хорошо выполняются в наиболее интересной области — форма сечения пучка сохраняется близкой к кругу вплоть до значений τ , соответствующих максимуму по КПД (рис. 2), а пространственные искривления пучка малы по сравнению с его размерами ($R_0 = \beta_q r_0 = 2\pi \frac{r_0}{\Delta_q} \ll 1$)

Рис. 2. Деформация формы сечения пучка вдоль оси электростатической системы. Изменение КПД, коэффициента усиления и скоростей отдельных электронов при этом; $\Delta_0 = 0$, $R_0 = 0,1$, $\epsilon_0 = 0,03$, $P_{вх} = 2 \cdot 10^{-3}$; I — $\tau \approx 2,8$ ($\theta = 30\pi$); II — $\tau \approx 2,45$ ($\theta = 26\pi$); III — $\tau \approx 2,1$ ($\theta = 22\pi$); IV — $\tau \approx 1,7$ ($\theta = 18\pi$); V — $\tau \approx 1,1$ ($\theta = 12\pi$); VI — $\tau = 0$.

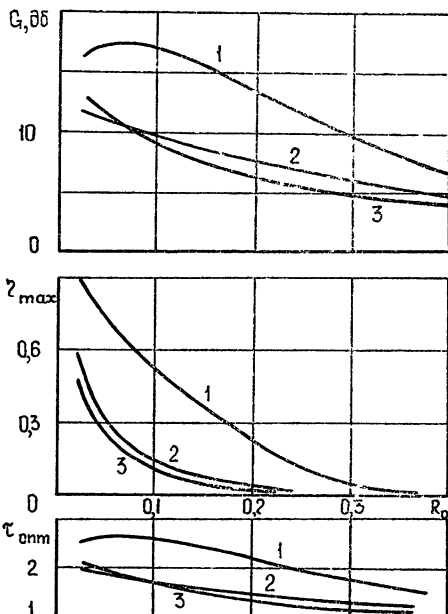


для основных режимов со сравнительно высокими значениями КПД (рис. 3).

Условие максимального взаимодействия вращательного движения электрона с внешним периодическим полем (синхронизм частоты собственного вращения частицы ω'_{ci} и частоты внешнего поля, «ощущаемого» частицей в движущейся системе координат).

$$\omega'_{ci} = \omega_{ei} = \beta_q v_{zi} \quad (11)$$

Рис. 3 Влияние радиуса пучка на максимальные значения КПД. (Значения коэффициента усиления и приведенной длины системы, показанные здесь и на последующих рисунках, соответствуют максимальным значениям КПД) $\Delta_0 = 0$, $\epsilon_0 = 0,07$, $P_{вх} = 2 \cdot 10^{-3}$; 1 — $\omega_p^2 / \omega_c^2 = 0,5$, 2 — $\omega_p^2 / \omega_c^2 = 0,25$; 3 — $\omega_p^2 / \omega_c^2 = 0,15$.



зависит от плотности пространственного заряда в потоке, так как известно [7], что

$$\omega'_{ci} = \omega_c \{ 1 + [1 - 2 \omega_{pi}^2 / \omega_c^2]^{1/2} \} / 2. \quad (12)$$

Следовательно, для плотных пучков условие синхронизма (11) оказывается существенно различным для внутренних электронов и для движения центра масс, который ведет себя, в случае круглого равномерно заряженного по сечению потока, подобно отдельному электрону, не испытывающему кулоновского взаимодействия.

Этим эффектом обусловлено как увеличение максимальных значений КПД при возрастании $\omega_{pi}^2 / \omega_c^2$ (рис. 3), так и более быстрое расширение и искажение формы пучка (рис. 2) при больших τ , когда $\omega_{pi}^2 / \omega_c^2$ начинает падать.

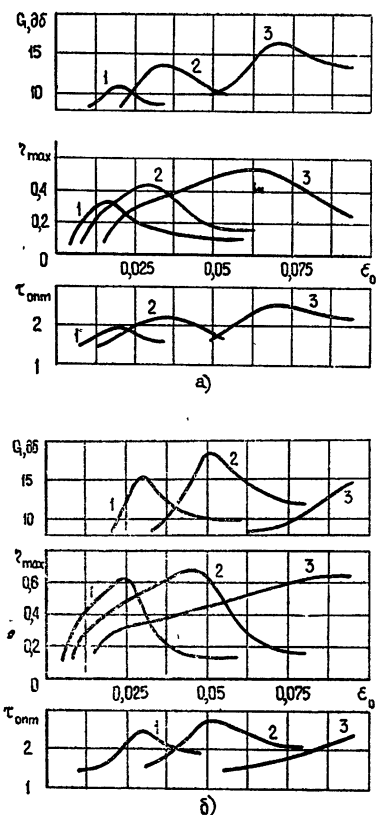


Рис. 4. Влияние интенсивности электростатического поля структуры на КПД.

1 — $\omega_{pi}^2 / \omega_c^2 = 0,15$; 2 — $\omega_{pi}^2 / \omega_c^2 = 0,25$;
3 — $\omega_{pi}^2 / \omega_c^2 = 0,5$.

а) $\Delta_0 = 0$, $R_0 = 0,1$, $P_{вх} = 2 \cdot 10^{-3}$;
б) $\Delta_0 = 0,3$, $R_0 = 0,1$, $P_{вх} = 2 \cdot 10^{-3}$.

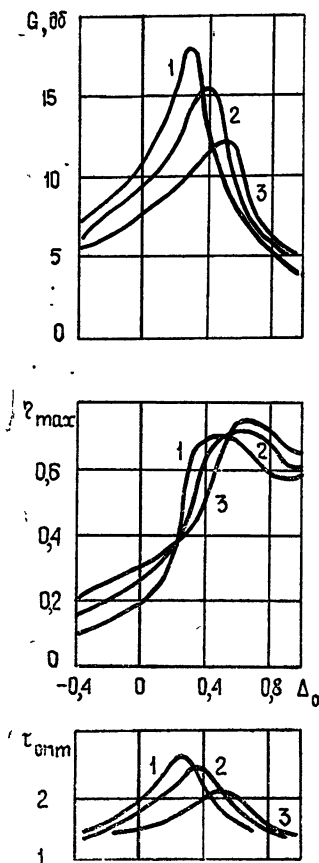


Рис. 5. Влияние входной структуры на максимальное значение КПД.

$\epsilon_0 = 0,05$, $R_0 = 0,1$, $\omega_{pi}^2 / \omega_{0e}^2 = 0,25$;
1 — $P_{вх} = 2 \cdot 10^{-3}$; 2 — $P_{вх} = 5 \cdot 10^{-3}$; 3 — $P_{вх} = 10^{-2}$.

Эффективность действия этого механизма во многом определяется шириной зоны синхронизма пучка с полем системы, т. е. величиной параметра ϵ_0 . При малых ϵ_0 эта зона узка, и хотя рассывание пучка

затруднено, он быстро выходит из синхронизма, и по этой причине КПД низок. При больших ϵ_0 пучок может гораздо дольше взаимодействовать с полем системы, обеспечивая, тем самым, высокий электронный КПД, но в синхронизме оказываются теперь и внутренние орбиты, а это вызывает увеличение продольного разброса скоростей, расширение пучка и, следовательно, ограничивает общий КПД прибора. Конкуренция этих двух процессов приводит к существованию оптимума по ϵ_0 с точки зрения КПД и коэффициента усиления для каждого конкретного значения ω_p^2/ω_c^2 (рис. 4 а).

При положительной входной расстройке ($\Delta_0 > 0$, т. е. когда скорость пучка на входе в систему несколько превышает значение, необходимое для точного синхронизма) возможно более длительное взаимодействие пучка с полем структуры и более высокие значения η и G (рис. 4 б).

Существуют оптимальные значения расстройки, зависящие, в частности, и от уровня входного сигнала (рис. 5). С ростом величины последнего увеличивается удельный вес полезной (сигнальной) модуляции в потоке по отношению к «паразитной», связанной с конечным диаметром пучка, и предельное значение КПД растет. Это сопровождается, однако, уменьшением величины коэффициента усиления, поскольку максимальная мощность, отбираемая от пучка, ограничена и определяется шириной зоны синхронизма, т. е. значением ϵ_0 .

Для иллюстрации возможностей прибора рассмотрим вариант параметров усилителя средней мощности, используя данные рис. 5 ($\epsilon_0 = 0,05$; $\Delta_0 = 0,3$; $R_0 = 0,1$; $P_{вх} = 2 \cdot 10^{-3}$; $\omega_p^2/\omega_{e0}^2 = 0,25$).

Рабочая частота	3 Гцз
Потенциал пучка в области усиления (V_0)	10 кв
Ток пучка (I_0)	70 ма
Потенциал коллектора	1,8 кв
Шаг электростатической структуры (Δ_q)	19,25 мм
Диаметр пучка ($2r_0$)	0,6 мм
Длина зоны усиления	165 мм
Электронный КПД	11,5%
Общий КПД прибора (η)	65%
Коэффициент усиления (G)	18 дб
Выходная мощность	81 вт.

Можно увеличить значения КПД и коэффициента усиления прибора ценой дальнейшего снижения R_0 и P_s , проигрывая при этом в уровне выходной мощности при заданном потенциале в области усиления.

Характерной особенностью приборов этого класса являются, по-видимому, сравнительно низкие значения электронного КПД даже при весьма высоких КПД прибора в целом. В этих условиях качество работы коллектора играет первостепенную роль. Применение многокаскадного коллектора, в частности, может заметно улучшить параметры усилителя, хотя требования к поперечным размерам пучка и плотности пространственного заряда в нем останутся при этом сравнительно жесткими.

Анализ сохраняет силу и для усилителя с магнитостатической структурой в зоне усиления (система ферромагнитных колец с шагом Δ_q , размещенная в однородном магнитном поле H_z). Укороченные уравнения для этого случая совпадают с системой (5) — (7) при условии, что $\epsilon_0 = H_1/4 H_z$, H_1 — амплитуда пульсаций продольной составляющей напряженности магнитного поля на оси системы.

Наконец, нигде в анализе мы не учитывали появление дополнитель-

ных потерь в выходном резонаторе, связанных с многоскоростным характером пучка. Однако для области значений КПД $\geq 50 \div 60\%$ относительная величина разброса продольных скоростей, возбуждаемого в пучке, невелика и, по нашим оценкам, потери мощности в выходном элементе связи могут быть сделаны пренебрежимо малыми [8].

Авторы признательны В. И. Канавцу и В. М. Лопухину за внимание к работе и ее полезное обсуждение, А. Н. Сандалову за помощь при отладке программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лопухин, А. С. Рошаль, Электронно-лучевые параметрические усилители, изд. Сов. радио, М., 1968.
2. D. C. Watson, R. W. Grow, C. C. Johnson, J. of Microwave Power, 5, № 2, 72 (1970).
3. R. J. Briggs, J. Appl. Phys., 42, № 7, 2662 (1971).
4. R. J. Briggs, S. F. Paik, A. H. Gottfried, IEEE Trans., ED-18, № 8, 511 (1971).
5. J. S. Bass, Proc. IRE, 49, № 9, 421 (1961).
6. В. А. Ванке, Ю. М. Тимофеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 615 (1972).
7. R. Adler, A. Ashkin, E. I. Gordon, J. Appl. Phys., 32, № 4, 672 (1961).
8. В. А. Ванке, С. П. Крюков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1271 (1973).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
24 ноября 1972 г.

NONLINEAR PHENOMENA IN CYCLOTRON-SYNCHRONOUS WAVE AMPLIFIER

V. A. Vanke, Yu. M. Timofeev

The motion of an electron beam with the finite diameter in the amplification region of the cyclotron-synchronous wave amplifier is analysed. The region of the parameter values at which the device efficiency may reach $60 \div 70\%$ is determined.

УДК 537.525

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ПОЛЫМ КАТОДОМ В ГЕЛИИ

В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник

В работе исследованы напряжение горения и температура газа в разряде с цилиндрическим полым катодом при давлениях гелия от 0,1 до 10 тор. Предложен полуэмпирический метод расчета вольт-амперной характеристики разряда и показано хорошее соответствие расчета и эксперимента при низких давлениях газа.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из привлекательных свойств разряда с полым катодом является то, что в определенной области давлений при большой плотности тока напряжение горения разряда значительно меньше, чем при тлеющем разряде с плоским катодом. Конфигурация электрического поля в полости катода такова, что образуется ловушка для электронов, эмиттируемых катодом, а потери электронов, происходящие в результате диффузии к анодам и рекомбинации в объеме, незначительны. Это приводит к образованию в полости катода плазмы с высокой концентрацией (при плотности тока $40 \div 50$ ма/см² и напряжении горения $200 \div 250$ в в стационарном режиме нами зарегистрирована концентрация плазмы $5 \cdot 10^{13}$ см⁻³).

Метод получения плотной плазмы в тлеющем разряде с полым катодом обладает следующими преимуществами. Плазма внутри полости катода хорошо ограничена и относительно однородна. Конфигурация электродной системы такова, что разряд с полым катодом удобно вписывается в высокочастотные структуры (волноводы, резонаторы), что важно для хорошего согласования в приборах СВЧ техники [1-4].

В данной работе исследованы некоторые характеристики разряда с цилиндрическим полым катодом в гелии. Ранее при исследовании плазменных волноводных СВЧ приборов с полым катодом было показано, что наибольшая концентрация плазмы достигается при разряде в инертных газах с полым катодом цилиндрической формы [2, 4]. Для получения высокого быстродействия таких приборов целесообразно, по-видимому, применять наиболее легкий из этих газов—гелий.

1. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследования проведены в разрядной трубке, конструкция которой аналогична описанной в [5] и схематически изображена на рис. 1. Цилиндрический коваровый полый катод диаметром 30 мм и длиной 180 мм с помощью стекла спаян с анодом того же диаметра. На катод навита трубка водяного охлаждения и спираль нагревателя, так что температуру катода можно регулировать и поддерживать неизменной в процессе измерения. Все измерения проведены в режиме непрерывного протекания через трубку особо чистого гелия.

На рис. 1 приведена зависимость напряжения горения разряда U

от давления гелия p для фиксированных разрядных токов I от 50 ма (кривая 1) до 300 ма (4). При давлении 10 тор отношение средней плотности тока с катода j к квадрату давления p^2 в интервале токов 50 ÷ 300 ма составляет $2,9 \cdot 10^{-6} \div 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ а/см}^2 \times \times \text{тор}^2$, что приблизительно соответствует j/p^2 при нормальном тлеющем разряде с плоским катодом в гелии ($2 \div \div 5 \cdot 10^{-6} \text{ а/см}^2 \cdot \text{тор}^2$ [6]). С уменьшением давления до 0,1 тор величина j/p^2 увеличивается на 4 порядка, в то время как напряжение горения изменяется не более чем на 100 в.

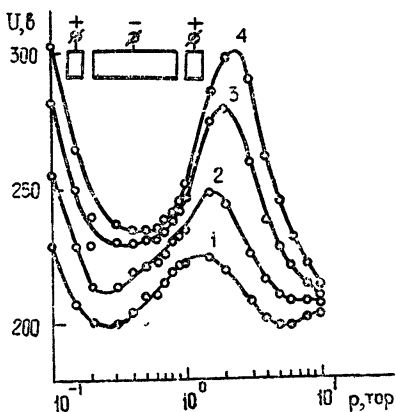


Рис. 1. Зависимость напряжения горения от давления гелия при фиксированных токах разряда:

1— $I=50$ ма, 2—100 ма, 3—200 ма, 4—300 ма.

да. Свечение, имеющее при более высоких давлениях форму кольца, с уменьшением давления заполняет осевую область катодной полости. Это подтверждает тот факт, что проявление эффекта полого катода заключается во взаимодействии катодных областей противоположных участков катода. По-видимому, при давлениях ниже 1 ÷ 2 тор электроны, вышедшие из катода и ускоренные катодным падением потенциала, проникают в противоположащее темное катодное пространство и, частично нейтрализуя пространственный заряд положительных ионов, уменьшают величину катодного падения потенциала.

Температура газа в области свечения T_g является важной характеристикой разряда с полым катодом для применений его в спектроскопии. Кроме того, поскольку причиной нагрева газа в полости катода

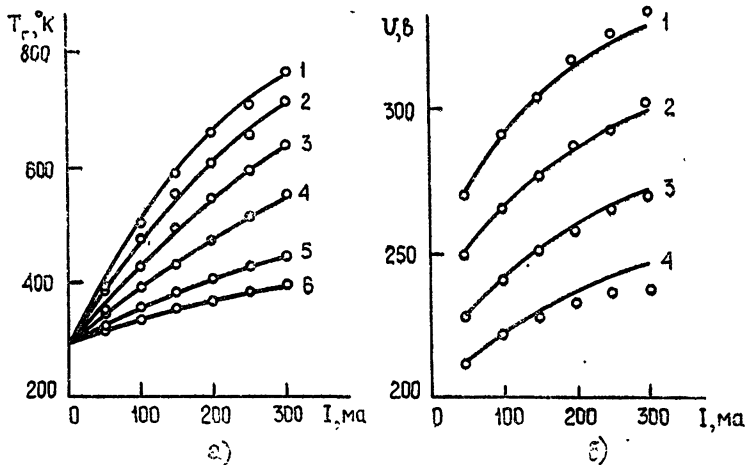


Рис. 2. а) Зависимость температуры газа на оси катодной полости от тока разряда в гелии:

1— $p=0,07$ тор; 2—0,08 тор; 3—0,12 тор; 4—0,2 тор; 5—0,3 тор; 6—0,5 тор.

б) Вольт-амперные характеристики разряда в гелии:

1— $p=0,07$ тор; 2—0,08 тор; 3—0,12 тор; 4—0,5 тор. Сплошные линии—расчет, точки—эксперимент.

является перезарядка быстрых ионов в области катодного падения потенциала [7, 8], величина T_r дает информацию об энергии ионов в этой области разряда.

Температура газа в полости катода измерялась с помощью термодпары. Известно, что измерение T_r в газовом разряде термодпарой может быть ошибочным [9]. Однако поправки на охлаждение за счет излучения и на нагрев за счет бомбардировки термодпары заряженными частицами имеют противоположные знаки и, как показывает расчет, в наших условиях близки по величине.

Зависимость температуры газа на оси катодной полости от тока разряда при различных давлениях гелия приведена на рис. 2 а. Видно, что температура газа растет медленнее, чем мощность, вводимая в разряд.

Замечено, что нагрев катода, т. е. изменение граничных условий теплообмена с окружающей средой, приводит при фиксированном токе разряда к возрастанию на такую же величину температуры газа на оси полости, увеличению падения напряжения на разряде и уменьшению концентрации плазмы в полости катода.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате многочисленных исследований разряда с полым катодом [1] можно считать установленным, что отличие этой формы разряда от тлеющего разряда с плоским катодом определяется в основном двумя факторами: колебательным движением быстрых электронов в катодной полости и более эффективным использованием ионов, фотонов и метастабильных атомов в γ -процессах на катоде. Трудности учета специфических особенностей элементарных процессов в полости катода приводят к тому, что теории этой формы разряда, которая бы выдержала всестороннюю проверку, не существует.

Литтлом и Энгелем [10] предложена теория, в которой особенности характеристик разряда с полым катодом объясняются преобладающей ролью в γ -процессах фотоэмиссии под действием коротковолнового излучения катодных областей разряда. Этот расчет включает ряд параметров, трудно поддающихся экспериментальному или теоретическому определению; кроме того, в более поздних работах [11—13] показано, что вклад фотоэмиссии в γ -процессы не является столь существенным.

Совершенно иной подход к расчету вольтамперной характеристики разряда с полым катодом предложен Хирнквистом [14], который использовал в качестве основного соотношения уравнение баланса энергии в полости катода. Однако проведенная нами экспериментальная проверка полученных в этой работе формул показала, что в ряде случаев они дают не только количественные расхождения с экспериментом, но и качественные. Основное положение расчета Хирнквиста (плотность ионного тока на поверхности катода равна плотности тока теплового движения ионов на границе темного катодного пространства и отрицательного свечения), по-видимому, справедливо только при больших плотностях тока и достаточно высоких давлениях газа, когда ширина темного катодного пространства очень мала и столкновения электронов в этой области практически отсутствуют.

На наш взгляд, подход Хирнквиста является рациональным, но при малой плотности тока и низком давлении газа правильнее считать в темном катодном пространстве постоянной не плотность ионного тока, а плотность пространственного заряда ионов. Постоянство плотности пространственного заряда ионов следует из предположения о линейной зависимости напряженности электрического поля от расстояния

вблизи поверхности катода. Это предположение подтверждается как прямыми измерениями распределения поля в темном катодном пространстве [10, 15], так и вычислениями, основанными на эмпирических выражениях скорости дрейфа ионов [6].

Рассчитаем характеристики тлеющего разряда с цилиндрическим полым катодом в предположении постоянства в темном катодном пространстве плотности пространственного заряда положительных ионов (пространственным зарядом электронов в этой области разряда будем пренебрегать). После зажигания разряда большая часть полости катода заполнена практически эквипотенциальной областью—отрицательным свечением [10]. Катодное падение потенциала U_k —разность потенциалов между границей отрицательного свечения r_s и поверхностью катода r_k —определяется плотностью пространственного заряда положительных ионов в темном катодном пространстве ρ и шириной этой области $d_k = r_k - r_s$.

Запишем уравнение Пуассона для темного катодного пространства:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

С учетом сделанных выше допущений интегрирование этого уравнения при условиях, что на границе отрицательного свечения, т. е. при $r = r_s$, $E = 0$ и $U = U_k$, дает следующие выражения для распределения поля и потенциала:

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{r_s^2}{r} \right); \quad (2)$$

$$U = U_k - \frac{\rho}{4\epsilon_0} (r^2 - r_s^2) + \frac{\rho r_s^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_s}. \quad (3)$$

Из условия, что потенциал катода в выбранной системе координат принимается равным нулю, можно определить координату границы темного катодного пространства r_s и, тем самым, ширину этой области через плотность пространственного заряда ρ . Подставив в уравнение (3) $r = r_k$, получим

$$U_k = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (r_k^2 - r_s^2) + \frac{\rho r_s^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_s}{r_k}. \quad (4)$$

Разложим $\ln \frac{r_s}{r_k}$ в ряд, учитывая, что $r_s = r_k - d_k$,

$$\ln \frac{r_s}{r_k} = \ln \left(1 - \frac{d_k}{r_k} \right) = -\frac{d_k}{r_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{d_k}{r_k} \right)^2 - \dots \quad (5)$$

Ограничение только двумя членами ряда оправдано тем, что $d_k < r_k$. Даже если $d_k = \frac{1}{2} r_k$, ошибка в результате такого разложения составит величину меньше 10%. Тогда из уравнения (4) получаем

$$d_k = r_k \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon_0 U_k}{\rho r_k^2}}}. \quad (6)$$

Полученное соотношение показывает, что тлеющий разряд с полым катодом возможен лишь при некоторой критической плотности пространственного заряда, определяемой неравенством

$$\frac{4\varepsilon_0 U_k}{\rho r_k^2} < 1. \quad (7)$$

Если это условие не выполняется, то разряд может существовать, по-видимому, только в высоковольтной (электронно-лучевой) форме. Действительно, при низких давлениях газа с уменьшением тока разряда можно наблюдать скачкообразный переход от тлеющего разряда к электронно-лучевому [1].

Плотность разрядного тока j на катоде равна

$$j = j_e + j_i = (1 + \gamma) j_i, \quad (8)$$

где j_e и j_i — плотность электронного и ионного токов, γ — общий коэффициент вторичных процессов, вызывающих эмиссию электронов из катода. Считая, что скорость дрейфа ионов в темном пространстве $\bar{u}_i = b_i E$ и плотность тока по поверхности катода постоянна, получаем

$$I = (1 + \gamma) \rho b_i E_k S, \quad (9)$$

где I — ток разряда, S — площадь поверхности катода, b_i — подвижность ионов, E_k — напряженность поля на поверхности катода, которую можно найти из выражения (2), подставив $r = r_k$ и $r_s = r_k - d_k$:

$$E_k = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(2d_k - \frac{d_k^2}{r_k} \right). \quad (10)$$

Известно, что в полой катоде поле в темном пространстве имеет значительную величину, поэтому использование приведенного выражения для \bar{u}_i справедливо, если считать b_i некоторой функцией E [16]. Учет этой зависимости будет произведен ниже.

Подставив E_k в выражение (9) и заменяя d_k согласно (6), получаем

$$I = (1 + \gamma) \frac{\rho^2 b_i r_k S}{2\varepsilon_0} \left[2 \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 U_k}{\rho r_k^2}}} + \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_0 U_k}{\rho r_k^2}} - 1 \right]. \quad (11)$$

Считая столб плазмы в полости катода однородным по сечению и длине, плотность пространственного заряда ρ определим из уравнения баланса энергии [14]:

$$I_e U_k = \alpha n^2 e U_i A + I_i U_i + \frac{2kT_e}{e} I + k_1 I_e U_k. \quad (12)$$

В этом уравнении слева — энергия, вносимая в плазму за 1 сек электронами, покидающими катод и ускоренными в области темного пространства, справа — потери энергии. Первый член в правой части учитывает потери на рекомбинацию. Здесь α — коэффициент рекомбинации, n — концентрация плазмы, eU_i — энергия ионизации, A — объем катодной полости. Второй член учитывает энергию, уносимую ионами, нейтрализующимися на катоде. Третий член — энергию, уносимую электронами на анод. Четвертый член описывает потери энергии на возбуждение. Здесь k_1 — коэффициент пропорциональности, который нельзя рассчитать теоретически, однако, как показано в работе [14], $k_1 \ll 1$.

Учитывая, что $I_e = \frac{\gamma}{1 + \gamma} I$, $I_i = \frac{I}{1 + \gamma}$ и $n = \frac{\rho}{e}$, получаем

$$U_k = \frac{\rho^2 \alpha U_i (1 + \gamma) A}{e \gamma (1 - k_1) I} + \frac{e U_i + 2k T_e (1 + \gamma)}{e \gamma (1 - k_1)}. \quad (13)$$

Таким образом, вольт-амперная характеристика разряда будет получена совместным решением уравнений (11) и (13). В общем случае исключить ρ из этих уравнений трудно, поэтому рассмотрим случай низких давлений и малых токов, когда ρ мало. Тогда, разлагая первый корень в квадратных скобках уравнения (11) в ряд и ограничившись двумя членами, находим

$$I = (1 + \gamma) \frac{\rho^2 b_i r_k S}{2 \epsilon_0}. \quad (14)$$

Подставляя ρ из уравнения (14) в (13), получаем

$$U_k = \frac{2 \epsilon_0 \alpha U_i A}{e \gamma (1 - k_1) b_i r_k S} + \frac{e U_i + 2k T_e (1 + \gamma)}{e \gamma (1 - k_1)}. \quad (15)$$

В таком приближении разрядный ток в уравнение (15) в явном виде не входит. Зависимость от тока разряда, по-видимому, в первую очередь скрыта в зависимости подвижности ионов b_i от напряженности поля в темном пространстве. С ростом тока разряда возрастают концентрация заряженных частиц и поле в темном катодном пространстве, в результате чего подвижность ионов уменьшается.

Поскольку в области отрицательного свечения электрическое поле отсутствует, можно считать, что ионы находятся в тепловом равновесии с газом, нагрев которого, как отмечалось ранее, определяется процессом перезарядки ионов в темном катодном пространстве и условиями теплоотвода. Тогда температуру ионов можно определить так:

$$T_i = T_0 + T(I), \quad (16)$$

где T_0 — температура газа при $I = 0$, $T(I)$ — функция, описывающая зависимость температуры от тока разряда.

Используя для подвижности ионов выражение Ланжевена

$$b_i = \frac{2}{\pi} \frac{e \lambda_i}{m_i \bar{v}_i}, \quad (17)$$

где m_i и λ_i — масса и средняя длина свободного пробега ионов, \bar{v}_i — их среднеарифметическая скорость теплового движения, с учетом (16) получаем

$$b_i = \frac{e \lambda_i}{(2 \pi k m_i)^{1/2}} [T_0 + T(I)]^{-1/2}. \quad (18)$$

В этом уравнении в неявном виде заключена зависимость подвижности ионов от напряженности электрического поля, которая, если считать $E \sim \rho \sim I$, совпадает с наблюдающейся экспериментально [16].

Подставляя в выражение (15) b_i согласно (18), получаем для вольт-амперной характеристики разряда с полым катодом следующее выражение:

$$U_k = \frac{\epsilon_0 (8 \pi k m_i)^{1/2} \alpha U_i A}{e^2 \gamma (1 - k_1) \lambda_i r_k S} [T_0 + T(I)]^{1/2} + \frac{e U_i + 2k T_e (1 + \gamma)}{e \gamma (1 - k_1)}. \quad (19)$$

Рассчитать в удобном для вычислений виде зависимость $T(I)$ нам не удалось, поэтому проверка соответствия хода рассчитанной вольт-

амперной характеристики с наблюдаемым экспериментально выполнена следующим образом. Перепишем выражение (19) в виде

$$U_k = \kappa [T_0 + T(I)]^{1/2} + U_0 \quad (20)$$

и будем считать, что величины κ и U_0 при фиксированном давлении не зависят от тока разряда. По двум начальным точкам экспериментальной характеристики вычисляем величины κ и U_0 , а затем характеристику рассчитываем для больших токов разряда с учетом экспериментально измеренной зависимости $T(I)$ (рис. 2 а).

На рис. 2 б приведены кривые, полученные таким образом согласно выражениям (19) и (20), и проставлены экспериментальные точки. Как видно из рисунка, при низких давлениях ход зависимости совпадает с экспериментальной. С ростом давления в области больших токов наблюдаются заметные отклонения. Это вызвано, по-видимому, тем, что ширина темного катодного пространства становится малой и разложение в ряд, использованное для получения уравнения (14), становится несправедливым. Кроме того с уменьшением d_k увеличивается поле в этой области и характер движения ионов изменяется.

Аналогичный результат получен и для разряда в неоне (рис. 3).

Для неона зависимость температуры газа от разрядного тока оказалась линейной для всех давлений газа. Тогда уравнение вольт-амперной характеристики (19) может быть представлено в виде

$$U_k = \kappa (T_0 + cI)^{1/2} + U_0, \quad (21)$$

где измеренный с помощью термомпары эмпирический коэффициент c оказался равным 1,52; 1,25; 0,87 и 0,5 град/ма для

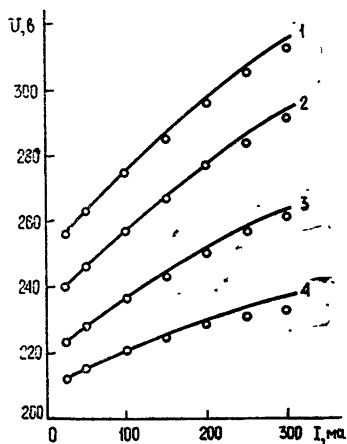


Рис. 3. Вольт-амперные характеристики разряда в неоне:

1 — $p = 0,04$ тор; 2 — $0,05$ тор; 3 — $0,07$ тор; 4 — $0,12$ тор.
Сплошные линии — расчет, точки — эксперимент.

приведенных на рисунке давлений неона 0,04; 0,05; 0,07 и 0,12 тор соответственно.

Таким образом, при низких давлениях экспериментальные характеристики довольно хорошо описываются выражениями типа (19) — (21), что говорит о правильности подхода к расчету вольт-амперной характеристики разряда с полым катодом. При более высоких давлениях, по-видимому, потребуются учет «эстафетного» характера движения ионов [17] в темном катодном пространстве и неоднородности параметров плазмы в полости катода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Москалев, Разряд с полым катодом, изд Энергия, М, 1969.
2. В. Б. Тютюнник, В. М. Ткаченко, Радиотехника и электроника, 17, 1101 (1972).
3. Н. Н. Горобец, А. Ф. Ляховский, В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, Радиотехника, вып. 18, изд. ХГУ, Харьков, 1971
4. В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, Тр. конференций по электронной технике, вып. 2 (18), 91 (1970)
5. В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник, ЖТФ, 42, 67 (1972).
6. A. L. Ward, J. Appl. Phys., 33, 2789 (1962).
7. А. Г. Жиглинский, Т. Н. Хлопина, ЖПС, 8, 562 (1968)

8. W. Setz, J. Majerhofer, Z. Phys., **28**, 168 (1969).
9. И. К. Бабаев, П. А. Быков, А. С. Шипалов, Радиотехника и электроника, **14**, 928 (1969).
10. P. F. Little, A. Engel, Proc. Roy. Soc., **A-224**, 209 (1954).
11. В. С. Бородин, В. П. Гофмейстер, Ю. М. Каган, Г. Коволлик, ЖТФ, **38**, 1814 (1968).
12. E. Badareu, F. Wächter, Ann. Phys., **7**, 418 (1961).
13. Y. N. Nastich, L. J. Abramovich, The 9-th Intern. Conf. Phenomena Ioniz. Gases, Bucharest, 1969, p. 165.
14. K. G. Hernqvist, RCA Rev., **19**, 35 (1958).
15. R. Warren, Rev. Sci. Instr., **26**, 765 (1955).
16. И. Мак-Даниель, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд. Мир, М., 1967.
17. Л. А. Сена, ЖЭТФ, **16**, 734 (1946).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
7 декабря 1972 г.

SOME CHARACTERISTICS OF GLOW DISCHARGE WITH CYLINDRICAL HOLLOW CATHODE IN HELIUM

V. M. Tkachenko, V. B. Tyutyunnik

The voltage of burning and gas temperature in the discharge with a cylindrical hollow cathode under the helium pressure from 0.1 to 10 torr is investigated. The semi-empirical method of calculating the volt-ampere characteristic of the discharge is suggested and a good agreement between calculation and experiment at the low gas pressure is shown.

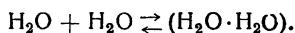
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.371.246

О ВЛИЯНИИ ПОЛИМЕРОВ НА КОНЦЕНТРАЦИЮ ДИМЕРОВ ВОДЯНОГО ПАРА В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ ВБЛИЗИ ТОЧКИ НАСЫЩЕНИЯ

В. С. Станкевич

В поглощении микрорадиоволн земной атмосферой немаловажную роль играют димеры водяного пара [1, 2], концентрация которых оценивалась в работе [3] на основе вычисления константы равновесия химической реакции



Реакции же, приводящие к образованию соединений более сложных, чем димеры, в этом расчете не учитывались, т. е. пар рассматривался как совокупность только мономеров и димеров. Однако известно, что такие явления как насыщение и конденсация пара связаны с процессом образования полимеров (ассоциацией) [4]. Поэтому, поскольку водяной пар в атмосфере Земли часто близок к насыщению, представляется интересным оценить концентрацию димеров с учетом существующих в паре полимеров. Такой расчет проведен в данной работе на основе теории ассоциации Френкеля — Банда [4].

Пусть в тепловой резервуар объемом V при температуре T помещено N тождественных молекул, совокупность которых представляет водяной пар. В соответствии с [4] предположим, что пар — это смесь различных устойчивых групп (соединений), состоящих из одной, двух и т. д. молекул, т. е.

$$N = \sum_{j=1} j N_j, \quad (1)$$

где под N_j понимается наиболее вероятное значение числа групп, содержащих j молекул (группы типа j). Для данной системы обобщенный закон действующих масс [5] в обозначениях Майера $\mu_j = N_j/N$ и $\lambda = (N - N_1)/N = \sum_{j=2} j \mu_j$ приводится к виду

$$\frac{\mu_j}{(1 - \lambda)^j} = N^{j-1} \frac{Z(j)}{[Z(1)]^j}. \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), получим

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{N - N_1}{N_1} = \sum_{j=2} \frac{j \mu_j}{1 - \lambda} = \sum_{j=2} j N^{j-1} (1 - \lambda)^{j-1} \frac{Z(j)}{[Z(1)]^j}. \quad (3)$$

Статистическая сумма $Z(j)$ группы типа j легко вычисляется для однородных по плотности сферических групп радиуса r_j , причем модель группы берется по Вергеланду, т. е. считается, что молекулы группы двигаются независимо в объеме группы v_j и взаимодействуют друг с другом только попарно с потенциалом в виде прямоугольной ямы* [6]:

* Строго говоря, для описания взаимодействия полярных молекул нельзя использовать парный потенциал. Однако учет неаддитивности энергии взаимодействия молекул несуществен для этого расчета. В самом деле, если для комплексов из трех и более молекул принять в расчетах с парным потенциалом заведомо завышенное значение энергии связи, то это приведет лишь к увеличению количества j -меров ($j \geq 3$) по сравнению с реальным случаем. Это, однако, ввиду крайней малости числа j -меров (см. ниже) не может повлиять на основной результат работы, т. е. на вывод о том, что концентрацию димеров водяного пара в атмосфере можно вычислять без учета полимеров.

$$Z(j) = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{j!} V_B(j) A_0^{j-1}, \quad (4)$$

где

$$A_0 = v_0 \exp \left[\frac{\varepsilon}{2kT} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 + 1 \right],$$

$$B(j) = \frac{j^{j-1}}{j! e^{j-1}} \exp \left[- \frac{9\varepsilon}{32kT} \left(\frac{a}{r_0} \right)^4 \frac{j-1}{j^{1/3}} \right] \exp \left[\frac{\varepsilon}{64kT} \left(\frac{a}{r_0} \right)^6 \frac{j-1}{j} \right].$$

Символ v_0 , входящий в выражения для A_0 и $B(j)$, обозначает объем, приходящийся на молекулу в группе ($v_0 = v_j/j = 4/3 \pi r_0^3$), который предполагается постоянным для всех групп при данной температуре; h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы, ε и a — соответственно глубина и ширина потенциальной ямы

Выражения (2) и (3) с учетом (4) можно переписать в виде

$$\nu_j = \frac{v}{A_0} B(j) \left[\frac{(1-\lambda) A_0}{v} \right]^j = \frac{v}{A_0} B(j) \xi^j = \frac{B(j) \xi^j}{\sum_{n=1} n B(n) \xi^n}; \quad (5)$$

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \sum_{j=2} j B(j) \left[\frac{(1-\lambda) A_0}{v} \right]^{j-1} = \sum_{j=2} j B(j) \xi^{j-1}, \quad (6)$$

где $v = V/N$ и $\xi = (1-\lambda) A_0/v$.

Используя представление водяного пара в виде групп различной сложности и большое каноническое распределение [5], можно показать, что уравнение состояния пара имеет вид

$$\begin{aligned} P v &= kT \sum_{j=1} N_j j / N = kT \left(1 - \lambda + \sum_{j=2} \nu_j \right) = \\ &= kT \frac{v}{A_0} \sum_{j=1} B(j) \xi^j = kT \frac{\sum_{j=1} B(j) \xi^j}{\sum_{j=1} j B(j) \xi^j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ выражений (5), (6) и (7) (см., например, [7]) при $T = \text{const}$ показывает, что случай $0 < \xi < 1$ соответствует ненасыщенному, $\xi = 1$ — насыщенному и $\xi > 1$ — пересыщенному пару

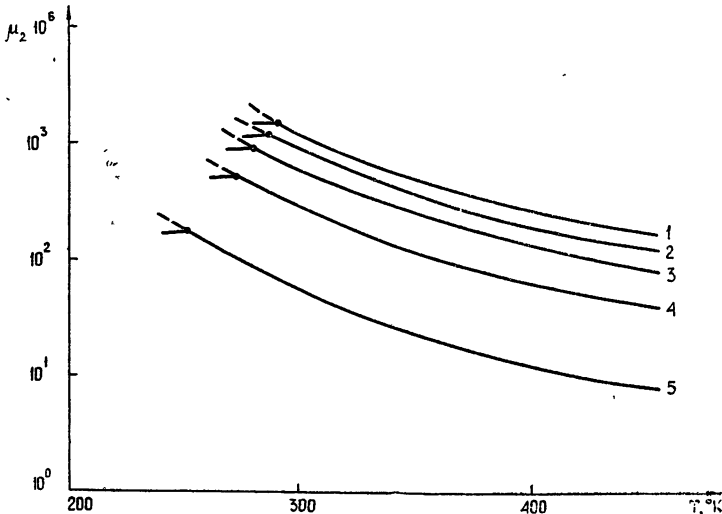


Рис. 1. Зависимость концентрации димеров от температуры.
1 — $P = 20$ мб, 2 — $P = 15$ мб, 3 — $P = 10$ мб, 4 — $P = 5$ мб, 5 — $P = 1$ мб.

Расчет концентрации j -меров в зависимости от давления и температуры производился по формулам (5) и (7). Параметры потенциальной ямы брались из работы [9] ($\varepsilon/k = 2364,8^\circ\text{K}$, $a = 3 \text{ \AA}$), а неизвестный параметр v_0 , входящий в выражения для A_0 и $B(j)$, находился путем подгонки уравнения насыщенного пара (выражение (7) при $\xi = 1$) к экспериментальным данным [9]. На рис. 1 и в табл. 1 приведены результаты расчета концентрации димеров водяного пара. В табл. 1, кроме того, приведены данные о концентрации тримеров. Сплошные кривые обозначают зависимости концентрации димеров от температуры, вычисленные для ряда давлений водяного пара с учетом групп, содержащих три и более молекул. Пунктирные кривые обозначают температурные зависимости, вычисленные с учетом только мономеров и димеров. Большими точками на графиках обозначаются состояния насыщенного пара, причем они очень хорошо согласуются с экспериментальной зависимостью [9]. Незаполненные места в табл. 1 соответствуют состояниям насыщенного и пересыщенного пара, которые маловероятны в атмосфере.

Таблица 1

T, °K	P = 1 мб		P = 5 мб		P = 10 мб		P = 15 мб	
	$\mu_2 \cdot 10^4$	$\mu_3 \cdot 10^7$	$\mu_2 \cdot 10^3$	$\mu_3 \cdot 10^6$	$\mu_2 \cdot 10^3$	$\mu_3 \cdot 10^6$	$\mu_2 \cdot 10^3$	$\mu_3 \cdot 10^6$
303,1	0,54	0,2	0,275	0,44	0,550	0,175	0,832	0,293
293,4	0,66	0,3	0,331	0,70	0,663	0,281	1,010	0,633
283,0	0,81	0,5	0,407	1,17	0,820	0,328		
273,3	1,01	0,8	0,490	1,75				
262,9	1,28	1,5						
253,2	1,61	2,6						

Из графиков видно, что заметное различие между сплошными и пунктирными кривыми наступает только в области пересыщенного пара. Учет полимеров в ненасыщенном и насыщенном парах дает поправку к концентрации димеров лишь в третьем знаке (см. табл. 2).

Таким образом, при расчете концентрации димеров в атмосфере Земли можно не учитывать группы, содержащие по три и более молекул (полимеры), т. е. пользоваться методикой работы [3]. Отметим еще, что тримеров водяного пара в атмосфере Земли примерно на два порядка меньше, чем димеров и, следовательно, их вклад в поглощение микрокардиоволн должен быть мал.

В заключение выражаю благодарность С. А. Жевакину за предложенную задачу и внимание к работе, а также М. Б. Зиничевой за проведение счета на ЭВМ.

Таблица 2

T°, K	P = 10 мб	
	$\mu_2 \cdot 10^3$	$\mu_2' \cdot 10^3$
303,1	0,5499	0,5505
293,4	0,6627	0,6636
283,0	0,8200	0,8214

μ_2 — концентрация димеров водяного пара, вычисленная с учетом полимеров,

μ_2' — концентрация димеров, вычисленная без учета полимеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, 194, № 2, 291 (1970).
2. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, 194, № 3, 540 (1970).
3. А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 424 (1964).
4. Т. Хилл, Статистическая механика, ИЛ, М., 1960.
5. F. F. Abraham, G. M. Pound, J. Chem. Phys., 48, № 2, 732 (1968).
6. F. F. Abraham, J. Appl. Phys., 39, № 10, 4791 (1968).
7. М. П. Вукалович, Н. И. Новиков, Уравнения состояния реальных газов, ГЭИ, М.—Л., 1948.
8. D. Hanks, J. W. Moskowitz, P. H. Stillinger, J. Chem. Phys., 53, № 12, 4544 (1970).
9. J. L. Katz, B. J. Ostermier, J. Chem. Phys., 47, № 2, 478 (1967).

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППАРАТУРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

И. И. Волков, В. В. Мотов, С. А. Прохоров

В последнее время получили развитие методы аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида с неизвестными параметрами [1, 2]. Критерии, положенные в основу указанных методов, не обеспечивают минимума квадратичной погрешности аппроксимации.

В данной работе рассматривается метод аппаратурной аппроксимации нормированных корреляционных функций $\rho_x(\tau)$ стационарных случайных процессов функциями заданного вида $\rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)$ с неизвестными параметрами $\alpha_1 \dots \alpha_n$ по минимуму квадратичной погрешности

$$\Delta = \int_0^{\infty} [\rho_x(\tau) - \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)]^2 d\tau = \min. \quad (1)$$

Условием минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau - \int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau = 0 \quad (2)$$

$(i = 1 \dots n).$

Введя обозначение

$$h_i(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n) = \frac{\frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial \alpha_i}}{\int_0^{\infty} \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n) \frac{\partial \rho_a(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{\partial \alpha_i} d\tau} \quad (3)$$

$(i = 1 \dots n)$

и учитывая, что $\rho_x(\tau) = \frac{M[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t-\tau)]}{M[\overset{0}{X^2}(t)]}$, уравнение (2) представим в виде

$$M\left[\overset{0}{X}(t) \int_0^{\infty} h_i(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n) \overset{0}{X}(t-\tau) d\tau - \overset{0}{X^2}(t)\right] = 0 \quad (4)$$

$(i = 1 \dots n).$

Таким образом, задача аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида с неизвестными параметрами сводится к решению системы уравнений (4). Аппаратура для решения этой системы уравнений будет состоять из n эквивалентных по структуре каналов. Блок-схема каждого из каналов имеет вид, представленный на рис. 1, где введены следующие обозначения: 1 — центрирующее устройство, 2 — фильтр с регулируемыми параметрами с импульсной характеристикой $h_i(\tau, \alpha_1 \dots \alpha_n)$, 3 — множительное устройство, 4 — квадрататор, 5 — вычитающее устройство, 6 — фильтр нижних частот, 7 — нуль-индикатор, 8 — регистрирующее устройство

Часть схемы 1 в установленном режиме реализует выражение, стоящее в квадратных скобках в (4), а для получения оценки математического ожидания применяется фильтр нижних частот 6.

Из рис. 1 видно, что задача создания аппаратуры для аппроксимации корреляционных функций сводится к синтезу фильтров с регулируемыми параметрами, импульсные характеристики которых полностью определяются аппроксимирующим выражением (3).

Для примера в таблице представлены передаточные функции фильтров для различных аппроксимирующих выражений с одним неизвестным параметром.

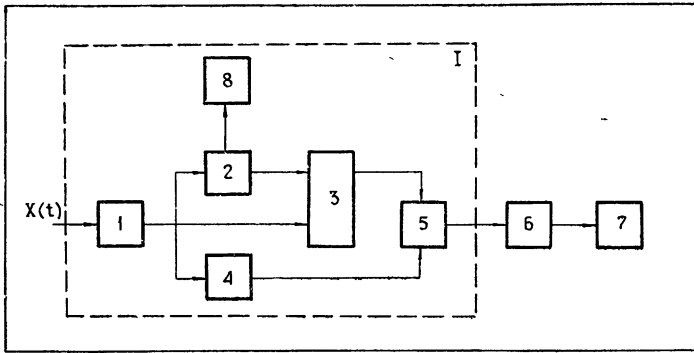


Рис. 1. Блок-схема устройства для аппроксимации корреляционных функций стационарных случайных процессов.

Таблица 1

Вид аппроксимирующей функции	$e^{-\alpha \tau }$	$e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau)$	$e^{-\alpha \tau } (1 - \alpha \tau)$
Передающая функция фильтра	$\frac{4a^2}{(a+p)^2}$	$\frac{3,2a^3}{(a+p)^3}$	$\frac{16a^2p}{(a+p)^3}$

При увеличении числа параметров α_i , подлежащих определению, сложность устройства возрастает. Исследования показали, что с точки зрения простоты аппаратной реализации целесообразно применять аппроксимирующие функции с числом неизвестных не более двух.

Предложенный метод позволяет получать оценки неизвестных параметров по нулевому методу путем регулировки соответствующих параметров фильтров. В результате этого могут быть уменьшены аппаратные погрешности аппроксимации и возникает возможность автоматизировать процесс нахождения параметров α_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Д. Горбачевич, Э. П. Пышкина, Приборы и системы управления, 2, 8 (1969).
2. Е. Д. Горбачевич, Коррелометры с аппроксимацией, изд. Энергия, М., 1971.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию
27 ноября 1972 г.

УДК 621.372.828

ОТКРЫТАЯ НА КОНЦЕ НЕСИММЕТРИЧНАЯ ПОЛОСКОВАЯ ЛИНИЯ

А. Т. Фиалковский

1. Открытые на конце несимметричные полосковые линии применяются в интегральных и гибридных схемах в качестве разомкнутых шлейфов в фильтрах и согласующих устройствах. В этом сообщении исследуется отражение основной (квазиТЕМ) волны от открытого конца полосковой линии, а также возбуждение открытым концом поверхностных волн. Геометрия задачи представлена на рис. 1. На расстоянии D друг от друга с боков от полоски

$$D = b \frac{K(x)}{K'(x)}, \quad b = a \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}, \quad (1)$$

(K и K' — полные эллиптические интегралы, κ — модуль) в соответствии с идеями Олинера [1] проводим магнитные стенки и полосу продолжаем до пересечения с магнитными стенками, а диэлектрическую проницаемость подложки ϵ заменяем на $\epsilon_{эфф}$, которая соответствует скорости ТЕМ-волны в линии

$$v = (\epsilon_{эфф} \epsilon_0 \mu_0)^{1/2}. \quad (2)$$

Графики $\epsilon_{эфф}$ имеются, например, в [2]. Подход Олинера основан на физическом моделировании, когда данной полосковой линии с квазиТЕМ-волной ставится в соответствие прямоугольный волновод той же высоты a , с тем же волновым сопротивлением и скоростью волны в линии и примерно таким же распределением силовых линий. Предполагается, что матрицы рассеяния модели и прототипа для некоторого класса неоднородностей будут близки. Преобразование Олинера справедливо лишь в одноволновом приближении, т. е. по крайней мере при ω , $a < \lambda/2$. Можно думать также, что обязательным является неравенство $a < \omega$ (более подробно см [1]).

Таким образом, приходим к задаче дифракции волноводной ТЕМ-волны на двумерной открытой структуре (рис 2). Последняя задача в общем виде была решена

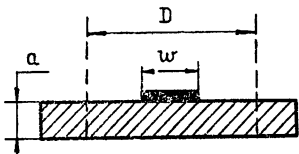


Рис. 1.

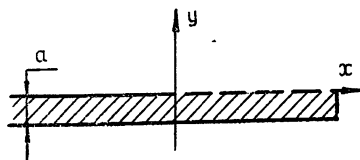


Рис. 2.

Талановым [3]. Нашей целью является получение асимптотических оценок для коэффициента отражения и коэффициента трансформации в поверхностную волну. Мы не воспользовались выражениями работы [3] непосредственно, так как эти оценки легче получить из интегрального уравнения (см. ниже)

2. Представим напряженность магнитного поля $\varphi^t(x, y) \equiv H_z$ в виде

$$\begin{aligned} \varphi^t(x, y) &= \varphi^i(x, y) + \varphi(x, y) & (-a < y < 0), \\ \varphi^t(x, y) &= \varphi(x, y) & (y > 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi^i = \exp(ik_1 x)$ — падающая волна, φ — рассеянное поле, $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_{эфф} \epsilon_0 \mu_0}$. Вводя преобразование Фурье от функции $\varphi(x, y)$

$$\Phi_-(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi_+(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (4)$$

и требуя выполнения граничных условий, приходим к функциональному уравнению, которое можно решить методом факторизации [3]:

$$\begin{aligned} & [k^2 \Phi_-(\alpha, +0) - k_1^2 \Phi_-(\alpha, -0)] + \\ & + \frac{\epsilon_{эфф} N(\alpha)}{\alpha \gamma_1^2 L(\alpha)} k^2 \Phi_+(\alpha) = -i \frac{k_1^2}{\sqrt{2\pi} (\alpha + k_1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $N(\alpha)$ и $L(\alpha)$ — функции, подлежащие факторизации при решении задачи методом Винера — Хопфа — Фока:

$$N(\alpha) = 1 + \frac{\gamma_1}{\epsilon_{эфф} \gamma} \operatorname{th} \gamma_1 a, \quad L(\alpha) = \frac{\operatorname{th} \gamma_1 a}{\gamma_1 a}, \quad (6)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha^2 - k_1^2}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_{эфф} \epsilon_0 \mu_0}, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}.$$

3. Задача решается в длинноволновом приближении $k_1 a \rightarrow 0$ (применительно к плосковым линиям). При этом методом факторизации получаем (ср. с [3]) оценку для коэффициента трансформации (ТЕМ-волны в поверхностную)

$$T \sim -\frac{2}{\sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\text{эфф}}}\right) (ka)^2 \quad (ka \rightarrow 0). \quad (7)$$

Для того, чтобы иметь нетривиальную оценку для коэффициента отражения R , требуется удержание двух членов разложения функций факторизации $N_+(k)$ и $L_+(k)$ по степеням ka . Так как это представляет весьма трудоемкую задачу, то мы поступим здесь иначе. Возвращаясь к функциональному уравнению (5) и переразлагая входящие в него функции, приходим к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \Phi'_+(a) = & i \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_1 a L_+(k_1) L_+(a) - \\ & - \frac{(\alpha + k_1) a}{\epsilon_{\text{эфф}}} L_+(a) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\zeta - k_1) L_-(\zeta)}{\sqrt{\zeta^2 - k^2}} \Phi'_+(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - a}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя сюда нулевое приближение

$$i \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_1 a L_+(k_1) L_+(a) \quad (9)$$

и выражая коэффициент отражения R через функцию $\Phi'_+(a)$, можно прийти при $ka \rightarrow 0$ к выражению

$$\begin{aligned} R = & - \exp \left[- (1 - i\beta_1) \frac{ka}{\sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}} \right], \\ \beta_1 = & \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{1}{ka} + (1 + \epsilon_{\text{эфф}}) \ln 4 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

4. Амплитуда отраженной волны имеет порядок $(1 - ka)$, амплитуда возбуждаемой шлейфом поверхностной волны — порядок $(ka)^2$; из открытого конца шлейфа излучается мощность порядка ka . Большую неприятность для эксперимента представляет поверхностная волна, которая может приводить к нежелательным объемным резонансам. Коэффициенты отражения и трансформации зависят от ширины полоска w через $\epsilon_{\text{эфф}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Олинер, Эквивалентные схемы неоднородностей в уравновешенной полосковой передающей линии, сб. Печатные схемы сантиметрового диапазона, ИЛ, М., 1956.
2. Е. В. Авдеев, В. И. Потапова, Радиотехника, 8, 56 (1971).
3. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 6, 902 (1959).

Поступила в редакцию
10 ноября 1972 г

УДК 621.385.6

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НИЗКОВОЛЬТНЫХ ЭЛЕКТРОННО-ВАКУУМНЫХ ПРИБОРОВ СВЧ

С. Г. Афанасов, И. Я. Ашбель, Б. М. Жулковский, В. И. Кочетков,
С. Г. Петров, В. И. Чередник

Быстрое развитие полупроводниковой СВЧ электроники, наблюдающееся в последние 10—15 лет, привело к появлению целого ряда новых типов генераторных полупроводниковых приборов СВЧ (диоды Ганна, ЛПД, диоды Шоттки и др.), отличающихся сравнительно высоким КПД и низкими питающими напряжениями.

Однако в определенных областях радиоэлектроники более предпочтительным оказывается использование электронно-вакуумных приборов (ЭВП) СВЧ, что стимулирует разработку генераторных ЭВП СВЧ малой мощности, параметры которых должны соответствовать требованиям современной радиоэлектроники. Важнейшими из этих требований являются миниатюрность, низковольтность, экономичность, удовлетворительные спектральные характеристики, надежность [1].

Одна из возможностей создания электронно-вакуумного прибора СВЧ, удовлетворяющего этим требованиям, заключается в использовании механизма взаимодействия электронного потока с СВЧ полем в режиме тормозящего поля [2, 3].

В данной работе приводятся некоторые результаты экспериментального исследования систем с тормозящим полем, сконструированных на различные диапазоны частот и отличающихся друг от друга, в основном, геометрическими размерами.

На рис. 1 представлена зависимость величины генерируемой мощности (P)

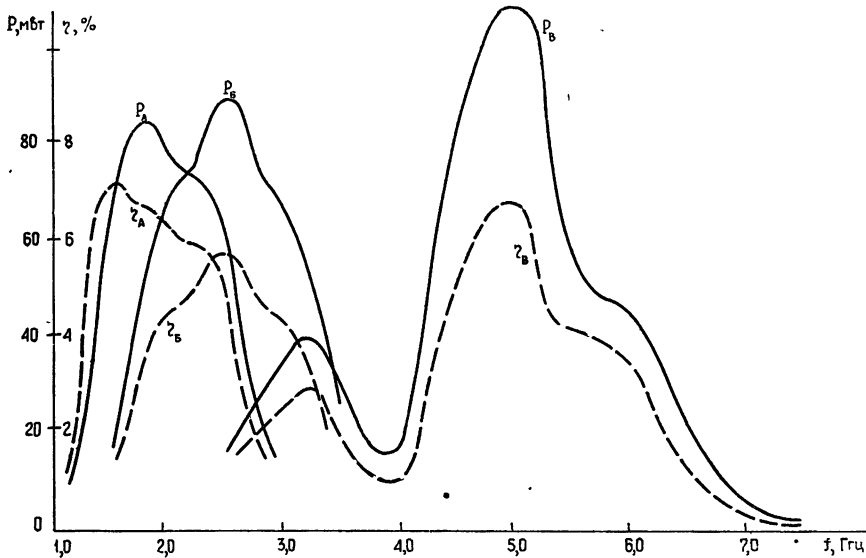


Рис. 1. Зависимость мощности в нагрузке (P) и КПД (η) от частоты (f) для экспериментальных образцов трех различных типов (А, Б, В) при рабочем напряжении $U_0 = 40$ в. Рабочий ток $I_A = 30$ ма, $I_B = 40$ ма, $I_B = 40$ ма.

и КПД (η) от частоты f для экспериментальных образцов трех различных типов (назовем их условно макетами А, Б, В). Как следует из приведенного рисунка, мощность в нагрузке для всех макетов достигает $85 \div 110$ мВт при рабочем напряжении $U_0 = 40$ в и токе $30 \div 40$ ма. Соответствующее значение КПД составляет $5,5 \div 7\%$.

Локальный минимум мощности, наблюдающийся при экспериментах с макетами типа В в интервале частот $3,4 \div 4,4$ ГГц, связан с конструктивными недостатками колебательного контура.

Для каждого из макетов на уровне мощности 10 мВт наблюдается перекрытие по частоте примерно в 2,5–3 раза.

На рис. 2 приведена зависимость мощности в нагрузке (P), КПД (η) и электронной перестройки частоты ($\Delta f/f$) (на уровне мощности, равной половине максимальной) от рабочего напряжения для макета типа Б при средней частоте генерируемых колебаний $f = 2,3$ ГГц. Приведенные на этом рисунке данные показывают, что исследуемые системы являются принципиально низковольтными. Прибор устойчиво генерирует колебания при снижении напряжения до 2,5 в (некоторые образцы до 1,5 в), причем мощность в нагрузке $P = 1$ мВт наблюдается при напряжении U_0 около 3 в (КПД $\sim 3\%$) и достигает 10 мВт при $U_0 = 14$ в (КПД $\sim 5\%$).

Следует отметить, что при конструировании опытных образцов их оптимизация в смысле повышения экономичности (повышения КПД) была проведена недостаточно полно. Поэтому полученные значения КПД— $5,5 \div 7\%$ (для некоторых образцов 10%) не являются предельными. Полученные значения КПД значительно облегчают тепловой режим анодного электрода прибора: при мощности в нагрузке около 100 мВт потребляемая мощность не превышает 1,6 вт, а при мощности в нагрузке $P = 10$ мВт — потребляемая мощность менее 0,2 вт.

Зависимость электронной перестройки частоты от рабочего напряжения U_0 показывает, что при увеличении последнего электронная перестройка возрастает и при напряжении $30 \div 40$ в достигает приблизительно двух процентов.

Результаты, представленные на рис. 1 и 2, были получены при использовании широкодиапазонных резонаторов, что ограничивало величину электронной перестройки из-за большого значения распределенной емкости. Эксперименты, проведенные на резонаторах специальной конструкции, показали возможность получения электронной перестройки до 10%.

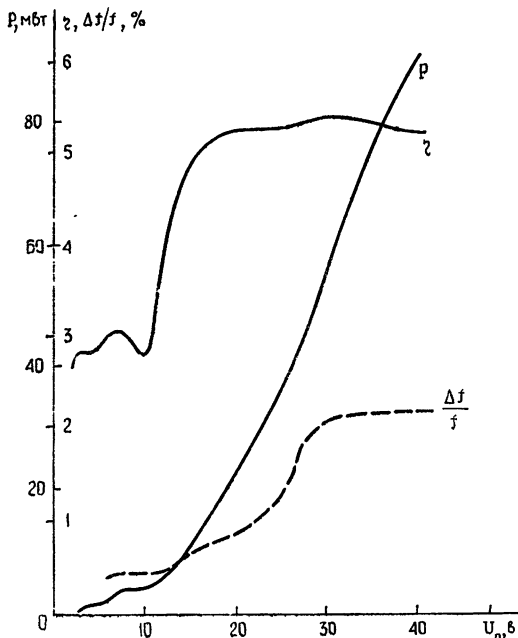


Рис. 2. Зависимость мощности в нагрузке (P), КПД (η) и электронной перестройки частоты ($\Delta f/f$) от рабочего напряжения U_0 при $f = 2,3$ Гц (макет Б).

Экспериментальные оценки величины отрицательной проводимости электронного потока показывают, что для возбуждения СВЧ колебаний в генераторах на исследуемых макетах могут использоваться резонаторы с эквивалентным параллельным сопротивлением потерь R_{0e} порядка сотен ом.

Такие большие значения отрицательной проводимости исследуемых макетов позволяют генерировать СВЧ колебания при использовании второй зоны возбуждения, что при заданных режимах и геометрии системы соответствует более высоким частотам колебаний, чем в первой зоне. При экспериментах с макетами типа В использование второй зоны на частоте $f = 7,5$ Гц позволило получить в несколько раз большую мощность в нагрузке, чем в первой зоне. При этом верхняя граничная частота прибора увеличилась с 7,5 до 8,5 Гц. Максимальная мощность в нагрузке во второй зоне составляла 20 мвт при напряжении $U_0 = 40$ в.

Экспериментальные оценки спектральных свойств макетов показывают, что по этим характеристикам исследуемые приборы не уступают отражательным клистронам с внешним резонатором.

Таким образом, экспериментальные исследования систем с тормозящим полем позволяют сделать вывод, что на их основе могут быть созданы низковольтные малогабаритные экономичные ЭВП СВЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Голант, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 4 (1970).
2. В. И. Калинин, Генерирование дециметровых и сантиметровых волн, изд. Связь, М., 1948.
3. O. Heil, J. J. Ebers, Proc. IRE, **38**, № 6, 645 (1950).