

СОДЕРЖАНИЕ

Манухина О. В., Прудковский А. Г. О роли нарушения квазинейтральности плазмы при ее резонансном ускорении	1461
Беллюстин Н. С., Тамойкин В. В. О дифракции альфвеновских волн в магнитоактивной плазме	1467
Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. Частотная зависимость аномального поглощения радиоволн в периоды внезапных ионосферных возмущений	1475
Алимов В. А., Ерухимов Л. М., Рубцов Л. Н., Струк Е. В., Цыбко Я. Г. Исследование неоднородной структуры ионосферы по частотно-разнесенному приему КВ сигналов на трассе Душанбе—Горький	1482
Писарева В. В., Рыжов В. А. Об использовании метода частичных отражений для исследования <i>D</i> -области ионосферы, возмущаемой мощными радиоволнами	1490
Калмыков А. И., Курекин А. С., Левантовский В. Ю., Островский И. Е., Пустовойтенко В. В. Некоторые характеристики радиосигналов, рассеянных морской поверхностью в направлениях, близких к направлению зеркального отражения	1498
Шарапов Л. И., Брюховецкий А. С., Ваксер И. Х., Комяк В. А. О влиянии полосы поглощения молекулярного кислорода на амплитудные флуктуации радиоволн миллиметрового диапазона	1504
Ратнер А. М., Фишер А. М. О применимости феноменологических уравнений многомодового лазера	1510
Сущик М. М., Фортус В. М. Об эффективности параметрического преобразования в высокодобротных оптических резонаторах	1522
Троцюк Н. И. Фокусировка молекулярных пучков в бисpirальных системах	1530
Воробейчиков Э. С., Пойзнер Б. Н., Портнова Т. С. Установление колебаний в многочастотных автоколебательных системах при случайных начальных условиях в присутствии внешнего сигнала	1535
Алимов В. А., Ерухимов Л. М. О распределениях флуктуаций КВ сигналов	1540
Бездорный В. Г. Флуктуации поверхностного импеданса неоднородного поглощающего полупространства	1552
Фукс И. М. О флуктуациях точки поворота в слоисто-неоднородной среде	1558
Мананкова А. В. Отражение и преломление импульсных электромагнитных сигналов от границ движущихся проводника и фронта включения проводимости	1568
Прохода И. Г., Чумаченко В. П. Метод частичных пересекающихся областей для исследования волноводно-резонаторных систем сложной формы	1578
Ильинский А. С., Альховский Э. А., Данилова А. Г. Метод расчета постоянных распространения в гофрированных волноводах	1583
Лапта С. И., Сологуб В. Г. Рассеяние поля диполя коротким отрезком круглого волновода	1588
Ерёмика В. Д., Кириченко А. Я., Процай В. Ф. К вопросу об излучении электронных сгустков над периодической структурой	1599
Авдошин Е. Г., Гольденберг А. Л. Экспериментальное исследование адиабатических электронных пушек МЦР	1605
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Тинин М. В. Об одном виде скользящего распространения радиоволн	1613
Зуйкова Э. М., Пасманик Л. А., Турчин В. И. Оптическая обработка в некогерентном свете результатов радиоголографических измерений диаграммы направленности антенны	1615
Гречишкин В. С., Кирчанов В. С., Шишкин Е. М. Фазовый портрет многочастотного спинового эха	1618
Рапопорт Г. Н., Фиалковский А. Т. Коэффициент депрессии поля пространственного заряда в периодически разделенных электронных потоках	1620

УДК 533.9

О РОЛИ НАРУШЕНИЯ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОСТИ ПЛАЗМЫ ПРИ ЕЕ РЕЗОНАНСНОМ УСКОРЕНИИ

O. B. Манухина, A. Г. Прудковский

Рассмотрено ускорение плазмы в условиях циклотронного резонанса. Показано, что исключение поля пространственного заряда при введении «тензорной массы», как это принято в ряде работ [2, 3], соответствует частному случаю распределения пространственного заряда в резонансной области. Показано, что наблюдаемое экспериментально [1] появление группы быстрых моноэнергетических электронов можно объяснить в предположении другого, более общего характера распределения пространственного заряда.

Найдено, что в условиях эксперимента [1] вклад области с нарушением квазинейтральности в энергию ионов больше, чем вклад областей, где мы можем считать квазинейтральность не нарушенной.

Комбинация скрещенных высокочастотного и неоднородного магнитного полей находит в настоящее время широкое применение как для резонансного ускорения плазмы, так и при создании магнитных ловушек [1-3]. Теоретически эта задача решалась Карабио [2, 3], однако результаты работ [2, 3], полученные с использованием ЭВМ, не дали хорошего согласия с экспериментом [1]. Для выяснения физического смысла явления требуется его анализ на какой-либо аналитической модели.

Рассмотрим холодную плазму в неоднородном магнитном поле

$$\mathbf{B} [\delta B_0 x/2, \delta B_0 y/2, B_0 (1 - \delta z)] \quad \left(\delta = \left| \frac{dB}{dz} \right| B_0^{-1} \ll 1 \right),$$

где B_0 — поле в начале резонатора при $z = 0$, δ — коэффициент неоднородности магнитного поля, x, y, z — лабораторная система координат. В резонаторе возбуждается высокочастотное поле

$$\mathbf{E} [E \cos(\omega t - kz + \varphi), E \sin(\omega t - kz + \varphi), 0],$$

где ω — частота и k — волновое число электромагнитной волны, φ — фаза напряженности электрического поля в начальный момент времени t_0 .

Предполагаем электрическое поле поляризованным по кругу, так как это — единственная компонента поля, вызывающая резонансное ускорение электронов, участвующих в ларморовском вращении. Учтем также магнитное поле волны, которое, в соответствии с уравнениями Максвелла, имеет компоненты $B_x = -kE_y/\omega$, $B_y = kE_x/\omega$, $B_z = 0$.

В задаче об ускорении плазмы естественно выделить две части и рассмотреть 1) быстропеременное движение электронов в плоскости xy под действием высокочастотного поля (в рамках одночастичной теории) и 2) гидродинамическую часть, учитывающую установившийся процесс ускорения плазмы в неоднородном поле вдоль оси z .

Уравнения движения электрона в плоскости xy имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = & -\frac{e}{m} E \cos(\omega t - kz + \varphi) - \frac{ev_y}{mc} B_0 (1 - \delta z) + \\ & + \delta \frac{e}{2mc} y B_0 v_z + \frac{e}{m\omega c} v_z k E \cos(\omega t - kz + \varphi), \\ \frac{dv_y}{dt} = & -\frac{e}{m} E \sin(\omega t - kz + \varphi) - \frac{ev_x B_0 (1 - \delta z)}{mc} + \\ & + \delta \frac{e}{2mc} x B_0 v_z + \frac{e}{m\omega c} v_z k E \sin(\omega t - kz + \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где v_x , v_y и v_z — компоненты скорости электрона, c — скорость света, e и m — заряд и масса электрона.

Переходя к комплексной переменной $r = x + iy$ и затем к безразмерным величинам $\tau = \omega t$, $Z = kz$, $R = kr$, $\dot{Z} = \frac{\dot{z}}{c}$, $\dot{R} = \frac{\dot{r}}{c}$, $\Omega_0 = \frac{eB_0}{m\omega c}$, $\Delta = \frac{\delta c}{\omega}$, $g = \frac{eE}{m\omega c}$, $\Omega_c = \Omega_0(1 - \Delta Z)$, получим

$$\frac{d\dot{R}}{d\tau} - i\Omega_c \dot{R} + \frac{i\Delta \Omega_0 \dot{Z} R}{2} = -g(1 - \dot{Z}) \exp i(\tau - Z + \varphi), \quad (2)$$

где Ω_c имеет порядок единицы ($\Omega_c = 1$ в резонансе), а g и Δ — малые параметры. В связи с интенсивным ускорением электронов в высокочастотном поле необходимо учитывать, что их скорость \dot{R} возрастает гораздо быстрее, чем скорость \dot{Z} , связанная с другим временным масштабом.

Это уравнение было получено и решалось Каноббио как в классическом, так и в релятивистском случае (с учетом $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$), когда

$$\begin{aligned} \frac{d(\dot{R}/\sqrt{1 - \beta^2})}{d\tau} - i\Omega_c \sqrt{1 - \beta^2} (\dot{R}/\sqrt{1 - \beta^2}) + \\ + i\Delta \Omega_0 \dot{Z} R / 2 = -g(1 - \dot{Z}) \exp i(\tau - Z + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что уравнение (3) математически не сложнее (2), особенно если учесть, что $\beta \approx r/c$.

Переходя к рассмотрению движения электронов вдоль оси z , Каноббио предположил, что концентрации электронов n_e и ионов n_i , так же как и их потоки $n_e v_{ze}$ и $n_i v_{zi}$, равны, что подобно условию квазинейтральности, введенному Шоттки [4] для потоков электронов и ионов по радиусу цилиндрической трубы.

Это предположение дало Каноббио возможность исключить поле пространственного заряда E_p после введения так называемой «тензорной массы» $(m + M)$ для электронов, где m и M — массы электрона и иона соответственно.

Таким образом, система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dv_{ze}}{dt} = & -e [cE_p + B_0 \delta(y\dot{x} - x\dot{y})/2 + B_y \dot{x} - B_x \dot{y}], \\ \frac{dv_{zi}}{dt} = & eE_p/M, \quad n_i = n_e = n_0, \quad v_{ze} = v_{zi} = v_z \end{aligned} \quad (4)$$

приводится к системе

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{mc} \left[\frac{cM}{e} \frac{dv_z}{dt} + B_0 \delta (y\dot{x} - x\dot{y})/2 + B_y \dot{x} - B_x \dot{y} \right],$$

$$E_p = \frac{M}{e} \frac{dv_z}{dt},$$

или

$$(m + M) \frac{dv_z}{dt} = -\frac{e}{mc} [B_0 \delta (y\dot{x} - x\dot{y})/2 + + B_y \dot{x} - B_x \dot{y}], \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{eE_p}{M}, \quad (5)$$

которая в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau} = & -\varepsilon \Omega_0 \mathcal{D} (\dot{X}Y - \dot{Y}X)/2 - g [\cos(\tau - Z + \varphi) \dot{X} - \\ & - \sin(\tau - Z + \varphi) \dot{Y}], \quad \frac{d\dot{Z}}{d\tau} = \varepsilon G, \end{aligned} \quad (6)$$

причем

$$\varepsilon = \frac{m}{(m + M)}, \quad G = \frac{eE_p}{m\omega c},$$

$$\dot{X}Y - \dot{Y}X = \operatorname{Re}(-i\dot{R}R^*),$$

а отсутствие релятивистских членов связано с условием $1/\sqrt{1-\beta^2} \ll \frac{M}{m}$.

Система уравнений (6) дает два выражения для одной и той же величины $\frac{d\dot{Z}}{d\tau}$, что соответствует заданию определенной зависимости для поля пространственного заряда

$$G = \frac{d\dot{Z}}{\varepsilon d\tau},$$

$$G = \Omega_0 \mathcal{D} \operatorname{Re}(-i\dot{R}R^*)/2 + g \operatorname{Re}[\dot{R} \exp i(\tau - Z + \varphi)/\varepsilon], \quad (7)$$

и для распределения концентрации электронов и ионов, связанного с полем пространственного заряда уравнением $\nabla E_p = 4\pi e(n_i - n_e)$, которое в безразмерной форме сводится к уравнению

$$\frac{dG}{dZ} = A(C_i - C_e). \quad (8)$$

Здесь $A = \frac{1}{3} \left(\frac{V_T}{h\omega} \right)^2$, V_T — тепловая скорость электронов, h — радиус

Дебая для электронов, $C_i = n_i/n_0$ и $C_e = n_e/n_0$ — относительные концентрации ионов и электронов, n_0 — средняя концентрация зарядов в квазинейтральной плазме.

Можно предположить, что такое задание будет близко к реальному во всех частях резонатора, кроме узкой зоны резонанса от $Z_p - d$ до $Z_p + d$, где $2d$ — размер «зоны разрыва», как мы назовем область, где

ускорения электронов и ионов вдоль оси z могут и не совпадать в точности друг с другом. Такое предположение вполне естественно при достаточноной напряженности высокочастотного поля (а тем более в релятивистском случае), так как электроны, вращающиеся в магнитном поле с большой скоростью, ведут себя как сильные диамагнетики и могут втягиваться неоднородным магнитным полем достаточно интенсивно, чтобы испытывать отрыв от инертных ионов, что приведет к скачку потенциала, достаточному для объяснения появления группы быстрых ионов, ускоренных в узкой области, что наблюдается на опыте [1].

Подставляя в выражения (6) значения \dot{R} и R^* , полученные при решении (2) (или (3) для релятивистского случая),

$$\begin{aligned}\dot{R} &= ig \exp(i\varphi) [\exp(i\tau)/(1 - \Omega_c) - \exp(-i\int \Omega_c d\tau)/(1 - \Omega_c)], \\ R^* &= g \exp(-i\varphi) [\exp(-i\tau)/(1 - \Omega_c) - 1/(1 - \Omega_c) - \\ &\quad - \exp(-i\int \Omega_c d\tau)/\Omega_c (1 - \Omega_0) + 1/\Omega_0 (1 - \Omega_0)],\end{aligned}\quad (9)$$

и усредняя их, найдем выражения для скорости потока плазмы (в стационарном случае ускорения), для поля пространственного заряда и для распределения концентрации пространственного заряда в области, где справедливо условие Каноббио:

$$\begin{aligned}\dot{Z}^2 &= \frac{1}{2} \epsilon \Omega_0 \Delta g^2 \int_0^z \frac{dZ}{(\Omega_c - 1)^2}, \\ G &= \frac{1}{2} \Omega_0 \frac{\Delta g^2}{(\Omega_c - 1)^2}, \quad \Omega_c = \Omega_0 (1 - \Delta Z), \\ \frac{dG}{dZ} &= A (C_t - C_e) = \Omega_0^2 \Delta^2 g^2 / (\Omega_c - 1)^2.\end{aligned}\quad (10)$$

В зоне разрыва мы предполагаем различными ускорения для электронов и ионов и, следовательно, имеем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dV_{ze}}{d\tau} &= -G + \Omega_0 \Delta \operatorname{Re}(i\dot{R}R^*)/2 - \\ &\quad - g \operatorname{Re}[\dot{R} \exp i(\tau - Z + \varphi)], \\ \frac{dV_{zi}}{d\tau} &= \epsilon G, \quad \frac{dG}{dZ} = A (C_t - C_e).\end{aligned}\quad (11)$$

Не нарушая общности, аппроксимируем форму кривой распределения пространственного заряда в зоне разрыва экспонентой:

$$C_t - C_e = D \xi \exp(1 - \alpha \xi^2), \quad (12)$$

где D и α — коэффициенты, определяемые из опыта, а $\xi = \frac{Z_p - Z}{d}$, причем d определяет величину зоны разрыва, а Z_p — точку, где $\Omega_c = 1$.

Максимально возможная разность концентраций ионов n_i и электронов n_e равна n_0 — абсолютному значению концентрации зарядов в невозмущенной плазме, $(C_t - C_e)_{\max} = 1$. Этот максимум соответствует значению $\xi_{\max} = 1/V\sqrt{2\alpha}$, или $Z_{\max} = Z_p - d/V\sqrt{2\alpha}$, откуда следует связь $D = V\sqrt{2\alpha} \exp(-1/2)$;

$$\frac{dG}{dZ} = AD\xi \exp(1 - \alpha\xi^2)$$

и

$$G = \int AD\xi \exp(1 - \alpha\xi^2) dZ = ADd \left. \frac{\exp(1 - \alpha\xi^2)}{2\alpha} \right|_{Z=z_p-d} + c,$$

$c = 0$, так как при больших значениях ξ поле пространственного заряда стремится к нулю.

Краевые условия на границе области разрыва дают связь параметра d с физическими условиями опыта:

$$G \Big|_{\xi=1} = ADd \exp(1 - \alpha)/2\alpha = \Omega_0 D g^2 / 2(\Omega_c - 1)^2 \Big|_{Z=z_p-d}, \quad (13)$$

$$\frac{dG}{dZ} \Big|_{\xi=1} = AD \exp(1 - \alpha) = \Omega_0^2 D^2 g^2 / (\Omega_c - 1)^3 \Big|_{Z=z_p-d},$$

откуда

$$d = 2\alpha/\Omega_0 D, \quad \alpha^2 \sqrt{\alpha} \exp\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \Omega_0^2 D^2 g^2 / 8A \sqrt{2},$$

т. е. кривизна кривой распределения заряда зависит от коэффициента α , который определяется физическими параметрами Ω_0 , D , g и A .

Например, для условий эксперимента [1], где $\Omega_0 = 1,6$, $D = 0,05$, $A = 1/3$ и $g = 3 \cdot 10^{-4}$, получаем для определения α трансцендентное уравнение

$$\alpha^2 \sqrt{\alpha} / \exp\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{1,6^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{-8} \cdot 3}{8 \cdot 1,4} = 1,35 \cdot 10^{-10},$$

откуда $\alpha = 10^{-4}$, $d = 3 \cdot 10^{-3}$, что соответствует действительно очень узкой зоне разрыва $dc/\omega = 1,5 \cdot 10^{-2}$ см, способной обеспечить моноэнергетичность быстрой группы ионов.

Скачок потенциала $\Delta\psi = W_i/mc^2$, где W_i — энергия ионов, определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= - \int_{z_p-d}^{z_p+d} G dZ = \frac{ADd^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \exp(1 - t^2) dt = \\ &= A \sqrt{2} \exp(1/2) d^2 \Phi(\sqrt{\alpha})/\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

где Φ — интеграл ошибок. Подставляя численные значения, получим

$$\Delta\psi = \frac{2,3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-4}} = 6,9 \cdot 10^{-4},$$

$$W_i = \Delta\psi mc^2 300/e = \frac{6,9 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20} \cdot 3 \cdot 10^2}{4,8 \cdot 10^{-10}} = 350 \text{ эв.}$$

В то же время область, где справедливо предположение Каноббио относительно исключения поля пространственного заряда путем введения «тензорной массы» (10), дает в условиях эксперимента вклад в энергию ускорения ионов:

$$W_i = Mc^2(\dot{Z})^2/2 = Mc^2\epsilon\Omega_0\Delta g^2 [1/(\Omega_0\Delta d + 1) - \\ - 1/\Omega_0]/4 = \frac{9 \cdot 10^{20} \cdot 9 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 4 \text{ эв.}$$

Следует заметить, что параметры, взятые нами из опыта, не независимы. Например, величина Δ , связанная с градиентом неоднородности магнитного поля, влияет на изменение распределения пространственного заряда (α , d) и на величину напряженности высокочастотного поля в резонансной зоне (g). Поэтому, не претендуя на большую точность наших расчетов, мы хотим только обратить внимание на совпадение порядков величин энергии групп быстрых ионов, полученных из расчетов и в эксперименте [1], и на существенный вклад в эту энергию малой зоны разрыва с распределением пространственного заряда другого характера (см. (12)), по сравнению с предложенным Каноббио (ср. (7)).

В заключение авторы выражают благодарность В. Д. Дугар-Жабону за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Голованивский, В. Д. Дугар-Жабон, ЖТФ, **16**, № 1, 104 (1971).
2. E. Cappobbio, Rapport CEA-Saclay JGn/RT, 568 (1968).
3. E. Cappobbio, Phys. Lett., **24A**, 623 (1967).
4. W. Shottky, Phys. Zs., **25**, 342 (1924).

Университет Дружбы Народов
им. Патриса Лумумбы

Поступила в редакцию
5 октября 1971 г.,
после доработки
12 марта 1973 г.

THE ROLE OF VIOLATION OF PLASMA QUASI-NEUTRALITY AT ITS RESONANCE ACCELERATION

O. V. Manukhina, A. G. Prudkovskii

The plasma acceleration under cyclotron resonance conditions is considered. It is shown that the replacement of the field of a spatial charge by the "tensor mass" as was accepted in a number of papers [2, 3], corresponds to a particular case of the spatial charge distribution in the resonance region. It was obtained that the experimentally observed appearance of a group of fast monoenergetic electrons may be elucidated on the assumption of another more general spatial charge distribution.

It is shown that under the experimental conditions the contribution of the region with violation of plasma quasi-neutrality into the ion energy is larger than that of the regions where the quasi-neutrality is assumed nonviolated,

УДК 533.922

О ДИФРАКЦИИ АЛЬФЕНОВСКИХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

H. С. Беллюстин, В. В. Тамойкин

Рассмотрена задача о дифракционном расплывании пучка альфеновских волн в холодной двухкомпонентной плазме. Показано, что расплывание пучка определяется гиротропией плазмы в случае широких пучков и отличием от нуля отношения поперечной к продольной компонент тензора диэлектрической проницаемости плазмы для узких пучков.

Проблеме излучения и распространения низкочастотных волн в однородной магнитоактивной плазме как с учетом, так и без учета теплового движения посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1-9]). При этом, как правило, используется приближение магнитной гидродинамики [1, 10], которое в условиях холодной плазмы при $\omega \ll \Omega_H$ (Ω_H — гироочастота ионов) приводит к дисперсионному уравнению, описывающему распространение двух типов волн — альфеновской и магнитного звука. Магнитный звук является «изотропным», в то время как групповая скорость волн Альфена направлена вдоль внешнего магнитного поля. Из более общего дисперсионного уравнения, полученного на основе тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} плазмы, легко показать, что вышеупомянутое приближение при $\omega \ll \Omega_H$ соответствует условиям, при которых недиагональные члены тензора ϵ_{ij} , записанного в системе координат, в которой ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля, равны нулю, а компонента $\epsilon_{zz} = \eta = \infty$.

В ряде последующих работ [4-9] осуществлен выход за рамки этого приближения на примере решения задачи о поле точечного источника в одноосном кристалле. Это соответствует тому случаю, когда недиагональные члены по-прежнему равны нулю, а $\epsilon_{zz} \neq \infty$.

Ниже показано, что в области низких частот $\omega \ll \Omega_H$ «приближение одноосного кристалла» для магнитоактивной плазмы может быть использовано лишь для источников (пучков), линейные размеры которых достаточно малы. При этом исследуется дифракция лишь той нормальной волны (ее принято называть обыкновенной), которая в пределе $\eta \rightarrow \infty$ переходит в альфеновскую*. Эта задача может представлять интерес при исследовании распространения локализованных возмущений волн Альфена в таких средах, как магнитосфера, межпланетная плазма, солнечная корона и т. п.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, электрическое поле в холодной однородной магнитоактивной плазме может быть описано с помощью векторного волнового уравнения

* Для краткости ниже мы будем ее называть альфеновской и при $\epsilon_{zz} \neq \infty$, $\epsilon_{xy} = -ig \neq 0$.

$$\Delta E - \operatorname{grad} \operatorname{div} E + k_0^2 \hat{\varepsilon} E = 0 \quad (k_0 = \omega/c). \quad (1)$$

Здесь $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы, который в системе координат, где ось z направлена вдоль внешнего магнитного поля, имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon - ig & 0 & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В общем случае величины ε , η и g имеют довольно громоздкий вид [1], однако в области низких частот ($\omega \ll \Omega_H$) в пренебрежении столкновениями они существенно упрощаются и приближенно равны

$$\varepsilon \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_H \Omega_H} = \frac{c^2}{c_A^2}, \quad \eta \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad g \approx \frac{\omega}{\Omega_H} \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь ω_0 — ленгмюровская частота, а ω_H — гирочастота электронов плазмы, c_A — альфеновская скорость. Легко видеть, что при $\omega \ll \Omega_H$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\varepsilon}{\eta} \right| = \left(\frac{\omega}{\Omega_H} \right)^2 \frac{m}{M} \ll 1, \quad \frac{g}{\varepsilon} \ll 1, \quad (4)$$

где m и M — массы электронов и ионов соответственно. При $\eta = \infty$, $g = 0$, что соответствует приближению магнитной гидродинамики, групповая скорость волн Альфена параллельна внешнему магнитному полю H_0 . Очевидно, что при $\eta \neq \infty$, $g \neq 0$ направление групповой скорости этих волн составляет некоторый угол с H_0 , что вызывает расплывание пучка альфеновских волн.

Задача заключается в том, чтобы найти решение уравнения (1), если задано электрическое поле на некоторой плоскости (к такой постановке сводится также задача о дифракции альфеновской волны на щели в приближении Кирхгофа).

В принятом приближении (4) магнитозвуковые волны распространяются так же, как и волны в изотропной среде. В связи с этим далее будем считать заданной в плоскости $z = 0$ такую поляризацию поля, которая соответствует пучку альфеновских волн.

Тогда поле $E(r)$ определяется интегралом

$$E(r) = \iint F(k_{\perp}) \exp [ik_x x + ik_y y + ik_z(k_x, k_y) z] dk_x dk_y, \quad (5)$$

где

$$F(k_{\perp}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint E(x, y, 0) \exp (-ik_x x - ik_y y) dx dy. \quad (6)$$

Продольное волновое число $k_z(k_x, k_y)$, отвечающее обычной волне, находится из дисперсионного уравнения. При этом представляется разумным рассмотреть отдельно два случая: 1) поле задано на плоскости, перпендикулярной к H_0 , 2) поле задано на произвольной плоскости.

2. ДИФРАКЦИОННОЕ РАСПЛЫВАНИЕ ПУЧКА АЛЬФЕНОВСКИХ ВОЛН ($H_0 \parallel 0z$)

Используя (2), из решения дисперсионного уравнения для продольной составляющей волнового вектора альфеновской волны получаем

$$\begin{aligned} k_z^2 = k_0^2 \epsilon - \frac{1}{2} k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{|\eta|} \right) + \\ + \sqrt{\frac{1}{4} k_{\perp}^4 \left(1 + \frac{\epsilon}{|\eta|} \right)^2 + k_0^2 k_{\perp}^2 \frac{g^2}{|\eta|} + k_0^4 g^2}, \\ k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно показать, что отношение $\frac{k_{\perp}^2 k_0^2 \frac{g^2}{|\eta|}}{\frac{1}{4} k_{\perp}^4 \left(1 + \frac{\epsilon}{|\eta|} \right)^2 + k_0^4 g^2} < \frac{g}{|\eta|} \ll 1$.

Это позволяет пренебречь под корнем выражения (7) членом $k_{\perp}^2 k_0^2 \times g^2/|\eta|$.

Качественно зависимость $k_z(k_{\perp})$ изображена на рис. 1. В точке

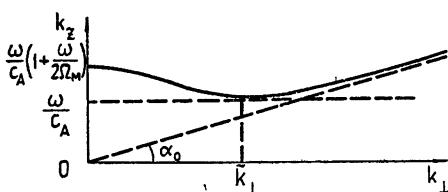


Рис. 1.

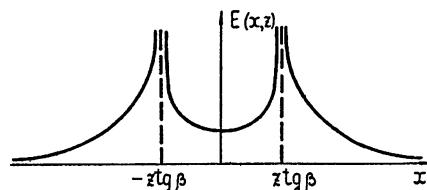


Рис. 2.

$k_{\perp} = 0$ имеется максимум, а при $\tilde{k}_{\perp} = \frac{\omega}{c_A} \left(\frac{M}{m} \right)^{1/4}$ — минимум. При $k_{\perp} \rightarrow \infty$ кривая $k_z(k_{\perp})$ переходит в прямую, угол наклона которой к оси абсцисс определяется равенством

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{|\eta|}} = \left(\frac{\omega}{\Omega_H} \right) \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \ll 1. \quad (8)$$

Заметим, что при $|\eta| = \infty, g = 0$ зависимость $k_z(k_{\perp})$ выражается в виде прямой $k_z = \omega/c_A$, параллельной оси абсцисс. Учет гиротропного члена $g \neq 0$, как легко видеть, существен при малых k_{\perp} , в то время как отличие $|\eta|$ от ∞ существенно в области больших k_{\perp} . Вклады от членов $\sim g$ и $\sim \frac{1}{|\eta|}$ становятся сравнимыми при $k_{\perp} = \tilde{k}_{\perp}$. В ряде случаев учет только одной из этих величин (g или $1/|\eta|$) значительно упрощает расчет задач об излучении и дифракции альфвеновских волн, поэтому представляет интерес выяснить возможности такого упрощения. Поскольку пространственный спектр поля в плоскости $z = 0$ $F(k_{\perp})$ имеет характерную полуширину $k_{\perp \text{max}} \approx 2\pi/d$, где d — поперечный размер пучка, можно выделить ряд случаев, при которых выражение для $k_z(k_{\perp})$ в (5) может быть представлено более простой формулой по сравнению с выражением (7).

1) $d \gg \lambda_A \left(\frac{m}{M} \right)^{1/4}$, где $\lambda_A = 2\pi c_A / \omega$ — длина альфвеновской волны.

В этом случае в (7) можно пренебречь членами $\sim 1/|\eta|$ и записать

$$k_z^2 \approx k_0^2 \epsilon - \frac{1}{2} k_{\perp}^2 + \sqrt{\frac{1}{4} k_{\perp}^4 + k_0^4 g^2}. \quad (9)$$

2) Если на размер пучка наложить более жесткое условие $d \gg \lambda_A \sqrt{\Omega_H/\omega}$, выражение (9) еще более упрощается и принимает вид

$$k_z \approx k_0 \sqrt{\epsilon} - \frac{1}{4} \frac{k_\perp^2}{k_0 \sqrt{\epsilon}}. \quad (10)$$

Здесь члены $\sim g$ отброшены в силу неравенства $g \ll \epsilon$. Эта формула соответствует параболическому приближению, и задача о распространении пучка аналогична соответствующей задаче для случая изотропной среды [11], когда длина волны $\lambda_{\text{эфф}}^{(1)} = \lambda_A/2$. Аналогичный вывод сделан в [9] в задаче об излучении альфеновской волны бесконечно протяженной нитью с током.

3) При выполнении неравенства $d \ll \lambda_A \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$ гиротропия практически не играет роли во всей существенной области интегрирования в выражении (5). При этом

$$k_z \approx \sqrt{k_0^2 \epsilon + \frac{\epsilon}{|\eta|} k_\perp^2}. \quad (11)$$

Этот случай соответствует «приближению одноосного кристалла» для магнитоактивной плазмы. В частности, при задании на плоскости $z = 0$ бесконечно тонкого пучка в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 d \delta(x) \quad (12)$$

имеем

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{x}_0 \frac{d}{2} \sqrt{\frac{|\eta|}{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{\epsilon z^2 - |\eta| x^2}), \quad (13)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля.

График зависимости $E_x(x, z)$ от x при фиксированном z изображен на рис. 2, из которого видно, что при определенных углах наблюдения, определяемых равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{z} = \sqrt{\frac{\epsilon}{|\eta|}} = \left(\frac{\omega}{\Omega_H}\right) \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll 1, \quad (14)$$

поле $\mathbf{E}(x = z \operatorname{tg} \beta, z)$ стремится к бесконечности. Разумеется, учет конечных размеров пучка на плоскости $z = 0$ должен «снимать» эту особенность благодаря тому, что $F(k_\perp) \rightarrow 0$ при $k_\perp \rightarrow \infty$. Заметим, что подобная расходимость поля связана с наличием плазменного резонанса в одноосном кристалле и была ранее исследована на примере задачи об излучении точечных электрических и магнитных диполей [4-8].

4) Если размер пучка ограничен со стороны малых и больших размеров неравенствами

$$\lambda_A \frac{\omega}{\Omega_H} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll d \ll \lambda_A \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}, \quad (15)$$

выражение (11) может быть упрощено и сведено к следующему:

$$k_z \approx k_0 \sqrt{\epsilon} + \frac{1}{2k_0} \frac{\sqrt{\epsilon}}{|\eta|} k_\perp^2. \quad (16)$$

В таком параболическом приближении все задачи о распространении альфвеновского пучка аналогичны соответствующим известным задачам в изотропной среде, если сделать замену $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{эфф}}^{(2)} = \lambda_A \varepsilon / |\eta|$. В частности, выражение для поля $E(r)$ в задаче о дифракции альфеновской волны на круглом отверстии может быть записано в функциях Ломмеля [11].

3. УЧЕТ НАКЛОНА ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть H_0 составляет угол α с нормалью к плоскости $z = 0$ и лежит в плоскости xy (см. рис. 3). Задачу о дифракции нормально падающей

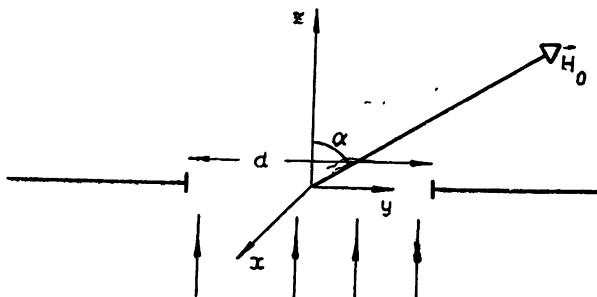


Рис. 3.

на щель альфеновской волны будем решать в параболическом приближении, когда $k_z(k_x, k_y)$ можно представить в виде*

$$k_z(k_x, k_y) \approx q_0(\alpha) + q_1(\alpha) k_y + q_2(\alpha) k_x^2 + q_3(\alpha) k_y^2. \quad (17)$$

В (17) величины q_0, q_1, q_2 и q_3 можно отыскать из приближенного дисперсионного уравнения, в котором отброшены члены порядка $k_y k_x^2, k_y^3, k_x^2 k_y^2, k_x^4, k_y^4$:

$$Ak_z^4 + 2Bk_y k_z^3 + (C + Dk_x^2 + E k_y^2) k_z^2 + \\ + 2Fk_y k_z + L + M k_x^2 + N k_y^2 = 0. \quad (18)$$

Здесь

$$A = \eta \cos^2 \alpha + \varepsilon \sin^2 \alpha, \quad B = (\eta - \varepsilon) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$C = -k_0^2 [\varepsilon \eta (1 + \cos^2 \alpha) + (\varepsilon^2 - g^2) \sin^2 \alpha], \quad D = \varepsilon (1 + \sin^2 \alpha) + \eta \cos^2 \alpha,$$

$$E = \varepsilon + \eta, \quad F = -k_0^2 (\varepsilon \eta + g^2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad L = k_0^4 \eta (\varepsilon^2 - g^2),$$

$$M = -k_0^2 (\varepsilon \eta + \varepsilon^2 - g^2), \quad N = -k_0^2 [\varepsilon \eta (1 + \sin^2 \alpha) + (\varepsilon^2 - g^2) \cos^2 \alpha].$$

Квадратичным приближением можно пользоваться в двух случаях.

1. Случай предельно широких ($d \gg \lambda_A$) пучков (малоугловое приближение). Соответствующие выражения для q_0, q_1, q_2, q_3 громоздки, но могут быть существенно упрощены, если сделать некоторые предположения относительно угла α .

* Учет следующих членов разложения в (17) порядка $k_x k_y^2, k_y^3$ и т. д. позволяет оценить пределы применимости параболического приближения, накладывающие ограничения на расстояние от щели до точки наблюдения со стороны больших z .

$$\text{а) } \alpha^4 \ll 4 \left(\frac{\omega}{\Omega_H} \right)^2 : \quad (19)$$

$$q_0 \approx k_0 \sqrt{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Omega_H} \right),$$

$$q_1 \approx -\frac{\alpha}{2}, \quad q_3 \approx q_2 \approx -\frac{1}{4k_0 \sqrt{\epsilon}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\Omega_H} \right);$$

$$\text{б) } 4 \left(\frac{\omega}{\Omega_H} \right)^2 \ll \operatorname{tg}^4 \alpha \ll \frac{M}{m} : \quad (20)$$

$$q_0 \approx \frac{k_0 \sqrt{\epsilon}}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \right), \quad q_1 \approx -\operatorname{tg} \alpha + \frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha},$$

$$q_2 \approx \frac{1}{2k_0 \sqrt{\epsilon}} \frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^4 \alpha}, \quad q_3 \approx \frac{3}{2k_0 \sqrt{\epsilon}} \frac{\omega^2}{\Omega_H^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \alpha}.$$

В этих двух случаях поправки, связанные с учетом гиротропии, особенно существенны, поскольку они ответственны за дифракционное расплывание пучка альфвеновских волн;

$$\text{в) } \frac{M}{m} \ll \operatorname{tg}^4 \alpha \ll \left(\frac{M}{m} \right)^2 \left(\frac{\Omega_H}{\omega} \right)^4.$$

При выполнении этого неравенства можно положить $g = 0$, но отличие $|\eta|$ от бесконечности существенно. Этот случай соответствует однородному приближению:

$$q_0 \approx k_0 \left(\frac{\epsilon \eta}{\epsilon_L} \right)^{1/2}, \quad q_1 \approx -\operatorname{tg} \alpha + \frac{\epsilon}{\epsilon_L} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$q_2 \approx -\frac{1}{2k_0 \sqrt{\epsilon}} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon_L \eta}}, \quad q_3 \approx -\frac{1}{2k_0 \sqrt{\epsilon}} \frac{\epsilon}{\epsilon_L} \sqrt{\frac{\eta}{\epsilon_L}}, \quad (21)$$

где $\epsilon_L = \eta \cos^2 \alpha + \epsilon \sin^2 \alpha$.

Имея выражения для всех q_i ($i = 0, 1, 2, 3$), можно отыскать на основе (5) поле альфвеновской волны в точке с координатами (r_\perp, z) , если известна функция $F(k_x, k_y)$. В качестве примера рассмотрим пучок вида

$$E_y(x, y, 0) = E_0 \exp \left[-\frac{4(x^2 + y^2)}{d^2} \right]. \quad (22)$$

Чтобы пучок представлял собой суперпозицию только альфвеновских плоских волн, остальные компоненты поля должны быть заданы следующим образом:

$$E_x = -iE_0 \exp \left[-\frac{4(x^2 + y^2)}{d^2} \right], \quad (23)$$

$$E_z = -aE_0 \exp \left[-\frac{4(x^2 + y^2)}{d^2} \right]$$

в первой области углов и

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \\ E_z &= -E_0 \operatorname{tg} \alpha \exp \left[-\frac{4(x^2 + y^2)}{d^2} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

во второй и третьей областях углов. При этом решение имеет вид

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{E_0 \exp(iq_0 z)}{\sqrt{\left(1 + i \frac{16q_2 z}{d^2}\right)\left(1 + i \frac{16q_3 z}{d^2}\right)}} \times \\ &\times \exp - \left\{ \frac{4x^2}{d^2 \left(1 + i \frac{16q_2 z}{d^2}\right)} + \frac{4(y + q_1 z)^2}{d^2 \left(1 + i \frac{16q_3 z}{d^2}\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $E_0 = -iE_0 \mathbf{x}_0 + E_0 \mathbf{y}_0 - aE_0 \mathbf{z}_0$ в первой области углов и $E_0 = E_0 \mathbf{y}_0 - \operatorname{tg} \alpha E_0 \mathbf{z}_0$ во второй и третьей областях, \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 , \mathbf{z}_0 — единичные векторы в x -, y - и z -направлениях.

Как видно из выражения (25), пучок, оставаясь гауссовым, становится несимметричным, поскольку расплывание пучка в плоскости yz , определяемое величиной q_2 , может существенно отличаться от расплывания в плоскости xz , определяемого q_3 . Центр пучка смещается под углом $\varphi = \arctg(-q_1)$ к оси z в плоскости yz . При этом направление смещения составляет малый угол с внешним магнитным полем.

2. Случай достаточно узких пучков ($d \ll \tilde{d}$).

При этом, как было показано в разд. 2, гиротропный член в тензоре ϵ_{ij} не играет существенной роли, и можно ограничиться одноосным приближением. В этом случае коэффициенты q_0 , q_1 , q_2 , q_3 имеют вид (2) при любых углах α . Интересно, что в этих условиях квадратичное приближение не является малоугловым, оно годится для описания пучков, ширина которых меньше альфеновской длины волны. Как и в предыдущем случае, расплывание пучка в xz - и yz -плоскостях различно и направление смещения центра пучка составляет малый угол с магнитным полем.

Пользуемся случаем выразить искреннюю признательность Н. Г. Денисову за постоянный интерес к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
3. Я. Л. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля—ионосфера, изд. Наука, М., 1967.
4. Е. Аргел, Л. В. Фельсен, Electromagnetic waves, 6, pt. 1, 421, Pergamon Press (1963).
5. C. Clementow, Electronics Quarterly, 110, 101 (1963).
6. Л. Л. Ваньян, В. А. Юдович, Геомагнетизм и аэрономия, 9, № 5, 917 (1968).
7. A. K. Sundaram, Can. J. Phys., 47, 1643 (1969).
8. S. W. Lee, R. Mitra, Radio Sci., 2, 813 (1967).
9. J. A. Fejer, K. F. Lee, J. Plasma Phys., 1, 387 (1967).
10. А. И. Акиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 35, 116 (1958).
11. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.

DIFFRACTION OF ALFVEN WAVES IN A MAGNETOACTIVE PLASMA

N. S. Bellyustin, V. V. Tamoykin

The diffraction dispersion of a beam of Alfvén waves in a cold two-component plasma is considered. It is shown that the beam dispersion is determined in the case of wide beams by the plasma gyrotropy and for narrow beams by the difference from zero of the ratio of the transverse to longitudinal components of the dielectric permittivity tensor.

УДК 621.371.252

ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ АНОМАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ПЕРИОДЫ ВНЕЗАПНЫХ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

B. V. Беликович, E. A. Бенедиктов

В течение 1959—1969 гг. в Горьком зарегистрировано радиоастрономическим методом несколько сот внезапных ионосферных возмущений (ВИВ). Для 92 умеренных и сильных ВИВ были измерены максимальные величины аномального поглощения одновременно на двух и более частотах в диапазоне $9 \div 25$ Мгц и найдено около 150 значений показателя частотной зависимости n из соотношений $\Gamma \sim f^{-n}$ для различных пар частот f_i, f_j . Индивидуальные значения n распределены в пределах от 1,5 до 2, а средние значения уменьшаются от $\bar{n} = 1,90 \div 1,95$ для рабочих частот $13 \div 25$ Мгц до $\bar{n} = 1,80 \div 1,82$ для частот порядка $9 \div 13$ Мгц. Получен профиль электронной концентрации в D -области во время ВИВ, соответствующий средней частотной зависимости $\bar{\Gamma}(f)$.

Во время внезапных ионосферных возмущений (ВИВ) возрастает ионизация D -области ионосферы и соответственно появляется дополнительное поглощение радиоволн, проходящих через ионосферу. Для измерений величины дополнительного (аномального) поглощения радиоволн довольно широко применяется радиоастрономический метод (метод А2). В частности, в ряде работ метод А2 был использован для исследований частотной зависимости $\Gamma(f)$ аномального поглощения в периоды ВИВ [1—7]. Внимание к этому вопросу повысилось в связи с разработкой метода определения профиля электронной концентрации $N(h)$ в D -области ионосферы по результатам измерений $\Gamma(f)$ [7—15].

Исследования показали, что в диапазоне $20 \div 40$ Мгц чаще всего наблюдается обратноквадратичная или близкая к ней зависимость $\Gamma(f)$. Однако в ряде случаев встречаются и значительные отклонения от нее в сторону уменьшения показателя частотной зависимости. Они свидетельствуют о том, что в этих случаях ионизирующее излучение солнечной вспышки проникает до тех высот D -области, где число соударений электронов с молекулами ψ становится соизмеримым с круговыми рабочими частотами $\omega = 2\pi f$. Можно ожидать, учитывая высотное распределение $\psi(h)$, что отличия зависимости $\Gamma(f)$ от обратноквадратичной будут чаще встречаться или будут ярче выражены на более низких частотах. В этой связи несомненный интерес представляют излагаемые далее результаты измерений $\Gamma(f)$ в диапазоне $9 \div 25$ Мгц.

Аппаратура и методика измерений. Исследование частотной зависимости аномального поглощения радиоастрономическим методом проводилось в Горьком с 1959 г. по 1969 г. В первые годы наблюдения велись отдельными периодами продолжительностью от одного-двух месяцев до полугода и более. В 1959 г. применялись частоты 18,6 и 25 Мгц. В 1960 г. вместо 18,6 Мгц была введена частота 13,2 Мгц. Основное внимание в 1961—1962 гг. было направлено на освоение еще более низких рабочих частот, что позволило в 1963 г. провести цикл

измерений поглощения одновременно на четырех-пяти частотах в диапазоне $6 \div 25 \text{ МГц}$. Начиная с 1964 г., наблюдения ВИВ велись непрерывно, сначала на трех частотах ($8,7; 13,2$ и 25 МГц), а в последние годы на двух частотах (13 и 25 МГц). Приеморегистрирующая аппаратура была идентичной на всех каналах и состояла из приемников типа Р-250, шумовых генераторов, используемых для калибровки аппаратуры, антенных переключателей, выходных блоков с ограничителями импульсных помех и самописцев типа ЭПП-09. Подробное описание аппаратуры опубликовано в [16]. Диаграммы направленности антенных систем были обращены в зенит и до 1963 г. имели размеры порядка $25 \times 35^\circ$ по уровням половинной мощности. С 1963 г. на частотах 25 и 13 МГц размеры диаграмм были уменьшены до $25 \times 18^\circ$, а на частоте $8,7 \text{ МГц}$ в 1967 г. — до $8 \times 5^\circ$.

На частотах, меньших 25 МГц , велик уровень радиопомех. Весьма существенной мерой его снижения явилось применение узконаправленных антенн. Кроме того, наблюдения велись с постоянным слуховым контролем регистрируемого сигнала. При появлении мешающих работе радиостанции в полосе пропускания приемников (полосы пропускания составляли около 10 кГц на частоте $f = 25 \text{ МГц}$ и около $2 \div 3 \text{ кГц}$ на остальных частотах) производилась отстройка в пределах нескольких десятков килогерц, определяемых частотными характеристиками каналов. Запись велась с постоянной времени порядка нескольких десятков секунд при увеличении и порядка секунды при уменьшении сигнала. Скорость записи, как правило, была равна 60 мм/час . Привязка времени осуществлялась подачей меток от часов КПЧ через каждые 15 минут. Калибровка усиления аппаратуры проводилась автоматически один раз в час. Регулярно контролировались амплитудные и частотные характеристики каналов.

Обработка заключалась в нахождении временной зависимости величины аномального поглощения, выражаемой в децибелах по соотношению

$$\Gamma(t) = 10 \lg \frac{I_0(t)}{I(t)}, \quad (1)$$

где $I_0(t)$ и $I(t)$ — интенсивности космического радиоизлучения соответственно в спокойных и возмущенных условиях ионосферы. Значения уровня $I(t)$ отсчитывались с усреднением за время порядка минуты. Если наблюдения велись одновременно на двух или более частотах, то для максимальных величин поглощения вычислялся показатель частотной зависимости

$$n_{i,j} = \frac{\lg (\Gamma_i / \Gamma_j)}{\lg (f_j / f_i)}. \quad (2)$$

Определялись также моменты времени начала, максимума и конца возмущения. Уровень $I_0(t)$ проводился линией, соединяющей невозмущенные участки записей. Для небольших и умеренных по продолжительности возмущений проведение уровня $I_0(t)$ не вызывало каких-либо затруднений. Если же аномальное поглощение регистрировалось в течение нескольких часов подряд, то приходилось учитывать вариации суточного хода $I_0(t)$, вызванные регулярными изменениями поглощения и неравномерным распределением космического радиоизлучения по небосводу.

На частотах, меньших 25 МГц , при нахождении показателя частотной зависимости следует, вообще говоря, учитывать влияние магнитного поля Земли. Для этого в квазипродольном приближении следовало бы в (2) заменить рабочие частоты на $f \pm f_L$, где f_L — продольная компо-

нента гирочастоты, а знаки \pm относятся к обычновенной и необыкновенной компонентам соответственно. Использовавшиеся в наблюдениях антенны имели линейную поляризацию и принимали в равной степени обе нормальные волны. В этих условиях, как показали расчеты, найденные по соотношению (2) значения показателя n мало отличаются от значений n , полученных с учетом магнитного поля при условии, что величина поглощения не превышает $6 \div 8$ дБ. Для больших величин поглощения были рассчитаны соответствующие поправочные графики, которые учитывались при обработке.

При больших величинах поглощения может иметь место эффект занизления показателя n , вызванный усреднением сигнала по диаграмме направленности антенны. Соответствующие погрешности Δn тем больше, чем шире размеры диаграммы. Для антенн, применявшихся в Горьком, этот эффект, как показали соответствующие вычисления на ЭВМ, оказался несуществен.

Точность определения показателя δn , как это видно из (2), определяется относительными ошибками измерений величины поглощения $\delta \Gamma / \Gamma$ и относительным разнесением рабочих частот f_j / f_i . Количественная оценка суммарного воздействия таких источников ошибок, как флуктуационный характер регистрируемого сигнала, колебания коэффициента усиления аппаратуры, погрешности записывающего прибора и погрешности обработки записей, показывает, что при небольших величинах поглощения (до $3 \div 4$ дБ) среднеквадратичные ошибки измерений Γ составляют около 0,1 дБ. При дальнейшем росте поглощения ошибки $\delta \Gamma$ увеличиваются. Относительные погрешности $\delta \Gamma / \Gamma$ минимальны в интервале величин поглощения $4 \div 10$ дБ.

На рис. 1 приведены расчетные ошибки определения n при разносе частот в 1,4 и в 2 раза (кривые 1 и 2). По оси абсцисс отложена величина поглощения на меньшей частоте. Зависимость $\delta \Gamma$ от Γ показана кривой 3. Как видно из рис. 1, погрешности n сильно зависят от интервала измерений величины поглощения. Если при $\Gamma \sim 6 \div 10$ дБ $\delta n \sim 0,1$, то при $\Gamma \leq 0,5$ дБ $\delta n \geq 1$.

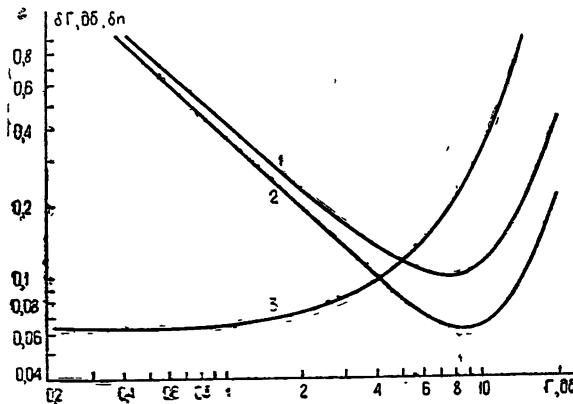


Рис. 1.

Кроме постоянно действующих источников ошибок могли появляться и дополнительные, например, из-за усиленной грозовой деятельности, из-за больших флуктуаций интенсивности сигнала при прохождении дискретного источника Кассиопея-А через диаграммы направленности антенн, при попадании спорадического радиоизлучения Солнца в боковые лепестки антенн, из-за влияния дождя и снега. Для максимально возможного уменьшения этих дополнительных ошибок прово-

дился тщательной отбор записей, и недостаточно надежные случаи не обрабатывались.

Результаты измерений. Всего за период наблюдений были измерены максимальные величины поглощения одновременно на двух и более частотах для полутора сотен ВИВ. Во многих случаях, однако, величины поглощения были малы, и определять для них значения показателя частотной зависимости было нецелесообразным из-за больших ошибок n . Для последующей обработки было отобрано 92 ВИВ, для которых величины поглощения превышали $1,5 \div 2$ дБ на низшей из рабочих частот, и было найдено 158 значений показателя n для различных пар частот. Наибольшее число измерений (61) было получено на частотах $13 \div 25$ МГц. В 15 из этих 61 случаев одновременно были измерены значения n для пар частот $13,2 \div 8,7$ и $25 \div 8,7$ МГц. Всего же на частотах $13,2 \div 8,7$ и $25 \div 8,7$ МГц было найдено 45 и 25 значений n соответственно.

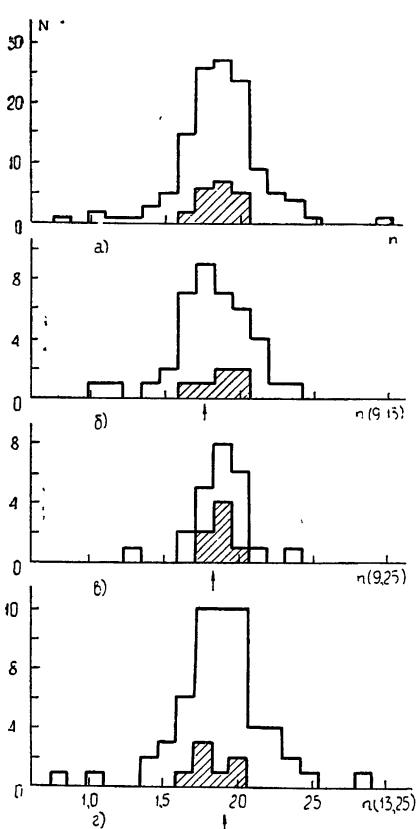


Рис. 2.

шести пар частот. Для каждой пары указаны средние геометрические частоты $\bar{f} = \sqrt{f_i f_j}$ и погрешности определения n в предположении, что ошибки отдельных измерений все одинаковы и равны 0,2. Ряд примеров одновременных измерений поглощения на нескольких частотах и соответствующие значения показателя n , отнесенные к среднегеометрическим частотам \bar{f} , приведены в табл. 2. Как видно из таблицы, наблюдаются различные случаи $\Gamma(f)$. Первые два примера соответствуют обратноквадратичной зависимости $\Gamma(f)$. Другие случаи иллюстрируют отклонение от этой зависимости. Следует еще раз подчеркнуть, что

Суммарное распределение всех значений n на частотах 25; 13,2 и 8,7 МГц показано на рис. 2 а. Заштрихованная часть гистограммы построена по результатам измерений, проведенных с минимальными погрешностями ($\delta n \sim 0,1$). Из рис. 2 а видно, что значения n находятся в основном в интервале 1,7—2. Значения, большие $n = 2$, и, вероятно, все значения, меньшие $n = 1,5$, появились в распределении из-за ошибок измерений. На рис. 2 б, в, г представлены гистограммы n отдельно для каждой из пар частот $8,7 \div 13,2$, $8,7 \div 25$ и $13,2 \div 25$ МГц. Можно заметить, что при переходе от частот $25 \div 13,2$ МГц к $25 \div 8,7$ МГц и затем к $13,2 \div 8,7$ МГц наблюдается некоторое смещение центра тяжести гистограмм в сторону более низких значений n . Этот эффект становится еще более заметным для средних значений, отмеченных на рис. 2 стрелками. Такого рода изменения n следует ожидать, если образовавшийся во время ВИВ слой аномальной ионизации своей нижней частью захватывает области высот, где $v(h) \sim \omega$.

В табл. 1 приведены средние значения и число измерений для всех

в процессе наблюдений не было зарегистрировано ни одного ВИВ, для которого, с учетом ошибок измерений, показатель n был бы уверенno меньше 1,5.

Таблица 1

Пары частот, Мгц	25÷18,6	25÷13,2	18,6÷13,2	25÷8,7	18,6÷8,7	13,2÷8,7
Среднегеометрические частоты \bar{f} , Мгц	21,5	18	15,5	15	13	10,8
Число измерений	8	61	8	25	11	45
Среднее значение показателя \bar{n}	1,95	1,895	1,84	1,83	1,825	1,795
Погрешности измерений \bar{n}	±0,075	±0,025	±0,075	±0,04	±0,055	±0,03

Таблица 2

Дата	Время, UT	Величина поглощения, δb				$n(\bar{f})$					
		25	18,6	13,2	8,7	21,5	18	15,5	15	13,2	10,8
1.6 1960	8—57	5,5	9,8	17,5	—	1,95	1,90	2,03	—	—	—
26.9 1963	7—24	1,5	2,7	5,4	11,7	1,94	2,01	2,00	2,00	2,01	2,02
11.4 1966	10—08	0,65	—	2,2	4,5	—	1,93	—	1,83	—	1,83
29.3 1966	11—00	1,0	—	3,15	6,6	—	1,88	—	1,78	—	1,78
30.2 1967	9—04	1,25	—	4,15	7,6	—	1,87	—	1,71	—	1,45
3.8 1967	9—33	0,65	—	2,4	4,9	—	2,05	—	1,90	—	1,72

Об определении профиля электронной концентрации в D-области ионосферы во время ВИВ по частотной зависимости поглощения. Из приведенных в табл. 2 примеров видно, что в ряде случаев, когда значения показателя n близки к двум, аномальная ионизация практически не затрагивает нижнюю часть D-области ионосферы, и информацию о величине электронной концентрации получить не удается. В других случаях, когда $n < 2$, в принципе можно искать $N(h)$ по $\Gamma(\phi)$. Следует, однако, обратить внимание на следующее [1]. Диапазон высот, в пределах которого имеется возможность нахождения $N(h)$, ограничен. Он определяется распределением числа соударений $v(h)$ и диапазоном рабочих частот. Частотам порядка $25 \div 9$ Мгц соответствует интервал высот определения $N(h)$ приблизительно в пределах от 45—50 до 60—65 км. Вне этого интервала профиль $N(h)$ остается неопределенным, если не задавать его форму из каких-то других соображений. На результаты вычислений $N(h)$, кроме того, очень сильно влияют погрешности измерений поглощения радиоволн. При типичных ошибках показателя частотной зависимости $\delta n \approx 0,2$ нахождение $N(h)$ для наиболее часто встречающихся значений n порядка 1,7—1,9 становится неразумным. Поэтому определение $N(h)$ по $\Gamma(f)$ целесообразно только в отдельных случаях, когда ошибки δn становятся меньше 0,1.

Примеры $N(h)$ -профилей, полученных из измерений $\Gamma(f)$ по методике, изложенной в [2], показаны на рис. 3 кривыми 1—4. Напомним, что

выше 65 км эти профили могут быть неточны. На рис. 3 кривой 5 представлено распределение $N(h)$, рассчитанное по зависимости $n(f)$ в диапазоне 9–25 Мгц, близкой к средней экспериментальной зависимости $n(f)$. При построении кривой 5 на рис. 3 величина поглощения была взята равной 10 дБ на частоте 8,7 Мгц. «Средний» профиль $N(h)$, как видно из рис. 3, расположен несколько выше индивидуальных профилей, что вполне понятно, учитывая отбор индивидуальных случаев.

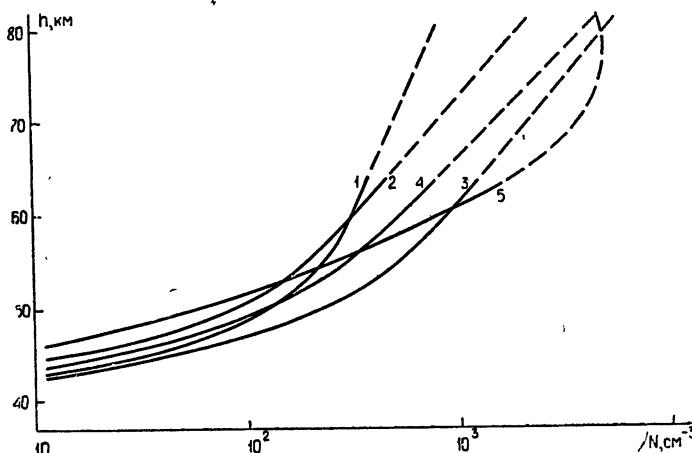


Рис. 3.

Для расширения интервала высот нахождения $N(h)$ по $\Gamma(f)$ необходимо увеличить диапазоны рабочих мест. Но дальнейшее уменьшение частот практически невозможно из-за экранирующего влияния F -слоя ионосферы. Можно повышать частоты, но на высоких частотах обычно мала величина поглощения и, кроме того, значения показателя n приближаются к двум. Поэтому наиболее заслуживает внимания расширение частот за счет применения импульсного метода измерений поглощения радиоволн. Для этой цели, однако, необходимо увеличивать мощность соответствующих установок. Заметим в этой связи, что очень мощные импульсные ионосферные станции позволяют наблюдать обратное рассеяние радиоволн неоднородностями электронной концентрации в D -области ионосферы. На этом явлении основан известный метод частичных отражений определения $N(h)$. Примеры профилей $N(h)$ во время внезапных ионосферных возмущений, найденные методом частичных отражений, приведены в [17].

В заключение авторы выражают благодарность Л. Н. Казаковой и Л. М. Елхиной за помощь при обработке материалов наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Ziauddin, P. A. Forsyth, J. Geophys. Res., 66, 2315 (1961).
2. Ю. И. Нешпор, Изв. КрАО, 26, 1956 (1961).
3. Ю. И. Нешпор, Изв. КрАО, 29, 152 (1963).
4. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагн. и аэрономия, 6, 940 (1966).
5. A. P. Mitra, C. V. Subrahmanyam, V. C. Jain, Radio Sci., 1D, 1188 (1966).
6. S. Horowitz, S. C. Goldman, Nature, 199, № 4899, 1147 (1963).
7. T. Ondoh, H. Kishida, Rept. Ionosph. and Space Res. Japan, 20, № 3, 542 (1966).
8. A. Wheelon, J. Res. Nat. Bur. Standards, D67, 699 (1963).
9. R. Pathasarathy, G. M. Lefeld, C. G. Little, J. Geophys. Res., 68, 3581 (1963).

10. К. Серафимов, Г. Несторов, Геомагн. и аэрономия, 3, 1059 (1963).
11. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Л. В. Родыгин, Геомагн. и аэрономия, 4, 788 (1964).
12. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагн. и аэрономия, 8, 476 (1968).
13. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 873 (1970).
14. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 10, 1471 (1971).
15. В. Hultqvist, Planet and Space Sci., 16, 529 (1968).
16. В. В. Беликович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 8, 1127 (1968).
17. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат, Геомагн. и аэрономия, 11, 1090 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 октября 1972 г.

THE FREQUENCY DEPENDENCE OF ABNORMAL RADIO WAVE ABSORPTION DURING SUDDEN IONOSPHERIC DISTURBANCES

V. V. Belikovich, E. A. Benediktov

Several hundreds of sudden ionospheric disturbances (SID) were registered by the radio astronomical method in Gorki in the period of 1959–1969. The maximum values of abnormal absorption were measured simultaneously at two and more frequencies in the range of 9–25 Mc/s. Nearly 150 values of the frequency dependence index n were found from the relation $\Gamma \sim f^{-n}$ for different pairs of frequencies f_i, f_j . Individual values of n are distributed from 1.5 to 2 and the mean values are decreased from $\bar{n} = -1.90 \pm 1.95$ for operating frequencies of 13–25 Mc/s to $\bar{n} = 1.80 \pm 1.82$ for the frequencies of 9–13 Mc/s. The electron density profile in D -region during SID is obtained which corresponds to the mean frequency dependence $\bar{\Gamma}(f)$.

УДК 551.510.535

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ ИОНОСФЕРЫ ПО ЧАСТОТНО-РАЗНЕСЕННОМУ ПРИЕМУ КВ СИГНАЛОВ НА ТРАССЕ ДУШАНБЕ — ГОРЬКИЙ

B. A. Алимов, Л. М. Ерухимов, Л. Н. Рубцов, Е. В. Струк, Я. Г. Цыбко

Рассмотрен вопрос о частотной корреляции флюктуаций коротких волн при наклонном зондировании ионосферы. Найдены выражения для коэффициентов флюктуаций интенсивности сигналов. Эти соотношения используются при анализе материала, полученного в эксперименте по частотно-разнесенному приему КВ сигналов на трассе Душанбе—Горький. Отмечается значительная роль мелкомасштабных неоднородностей ионосферы (с размерами $l \sim 0,3 \div 1 \text{ км}$ и даже $l \sim 30 \div 50 \text{ м}$) в процессе рассеяния коротких волн и существенная частотная пестционарность этого процесса.

Метод частотно-разнесенного приема сигналов дискретных источников и ИСЗ с целью исследования неоднородной структуры ионосферы успешно используется уже давно [1]. Однако эти исследования позволяют получить сведения о мелкомасштабных неоднородностях ионосферы в основном на уровне или выше высоты максимума F -слоя (z_{\max}). Информацию о неоднородностях ионосферы ниже z_{\max} может дать частотно-разнесенный прием импульсных сигналов станции вертикального зондирования [2]. Но сравнительно большая полоса частот зондирующего сигнала ($\Delta f_0 \geq 10 \text{ кгц}$) в экспериментах не позволяла разрешить тонкую структуру получаемых функций частотной корреляции импульсных сигналов [3]. В настоящей работе приводятся некоторые результаты исследований мелкомасштабной структуры ионосферы ($l \leq 1 \text{ км}$) методом измерений частотной корреляции квазимонохроматических сигналов при их наклонном падении на ионосферу.

1. О ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛЮКТУАЦИЙ КВ СИГНАЛОВ

В [4] анализировался вопрос о частотной корреляции флюктуаций полей КВ сигналов при наклонном зондировании ионосферы. Рассмотрим теперь более общую задачу. Проведем расчет коэффициента частотной корреляции флюктуаций квадрата огибающей сигналов для КВ трасс. Отдельно проанализируем случаи однолучевого и многолучевого распространения радиоволн.

Мы будем вычислять коэффициент $\rho_{A^2, \omega}$, равный

$$\rho_{A^2, \omega} = \frac{\langle A^2(\omega_{01}) A^2(\omega_{02}) \rangle - \langle A^2(\omega_{01}) \rangle \langle A^2(\omega_{02}) \rangle}{[\langle A^4(\omega_{01}) \rangle - \langle A^2(\omega_{01}) \rangle^2]^{1/2} [\langle A^4(\omega_{02}) \rangle - \langle A^2(\omega_{02}) \rangle^2]^{1/2}}. \quad (1)$$

В соответствии с условиями описываемого далее эксперимента, а также для простоты математических расчетов и большей наглядности результатов величину $\rho_{A^2, \omega}$ будем определять в зоне Фраунгофера ($\lambda_0 L / \cos \theta_0 \gg \gg l^2$), λ_0 — длина волны излучения, $f_0 = 3 \div 30 \text{ Мгц}$, L — расстояние от ионосферного слоя с неоднородностями до точки наблюдения $L \sim$

$\sim 150 \div 300$ км, θ_0 — угол падения сигнала на ионосферу, l — характерный масштаб неоднородностей ионосферы, $l \sim 10^{-1} \div 1$ км).

Используя известные соотношения для нормально распределенных величин [5], легко получить следующие выражения для коэффициента частотной корреляции флуктуаций сигналов:

а) слабые ионосферные возмущения ($\langle |E_{1,2}| \rangle \gg \langle |e_{1,2}| \rangle$) —

$$\rho_{A^2, \omega} \approx \frac{\langle E_1(t) \rangle \langle E_2^*(t) \rangle \langle e_1^*(t) e_2(t) \rangle + \text{к. с.}}{2 [\langle |E_1(t)|^2 \rangle \langle |e_1 e_1^*(t)| \rangle \langle |E_2(t)|^2 \rangle \langle |e_2 e_2^*(t)| \rangle]^{1/2}},$$

б) сильные ионосферные возмущения ($\langle |E_{1,2}| \rangle \ll \langle |e_{1,2}| \rangle$) —

$$\rho_{A^2, \omega} \approx \frac{|\langle e_1(t) e_2^*(t) \rangle|^2}{\langle |e_1(t)|^2 \rangle \langle |e_2(t)|^2 \rangle}. \quad (2)$$

Здесь $\omega_0 = (\omega_{01} + \omega_{02})/2$ — средняя величина несущих частот сигналов (ω_{01} и ω_{02}), $\langle E_{1,2} \rangle$ и $e_{1,2}$ — соответственно среднее и флюктуирующее поля отраженного сигнала на частотах ω_{01} и ω_{02} .

В конкретных расчетах, как и в [4], будем предполагать, что ионосферный слой вызывает только флуктуации фаз падающего на него излучения. Учтем также, что при наклонном зондировании ионосферы существенную роль в раскорреляции излучения на разных частотах играет рефракция радиоволн. Поэтому приближенно для дальнейших расчетов будем пользоваться выражениями функций частотной корреляции флюктуирующих полей излучения, отраженного от ионосферы, в виде [4]

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*} \approx \exp(-\rho_1^2) \quad (s_{\omega_0}^2 \ll 1); \quad (3a)$$

$$R_{f_{\omega_1} f_{\omega_2}^*} \approx \exp(-\rho_1^2 s_{\omega_0}^2) \quad (s_{\omega_0}^2 \gg 1), \quad (3b)$$

где $s_{\omega_0}^2 \equiv \langle (\Delta s)_{\omega_0}^2 \rangle$ — среднеквадратичный набег фазы волны в ионосферном слое. В случае регулярной вертикальной рефракции в ионосферном слое $\rho_1 = \frac{8 \delta L_0 \sin 2\theta_0}{l} \left(\delta = \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{\omega_{01} + \omega_{02}}, L_0 — \text{характерный масштаб (полутолщина) слоя} \right)^*$.

Особенностью наклонного зондирования ионосферы является многолучевое распространение радиоволн. Рассмотрим наиболее характерные случаи, которые имеют место в КВ диапазоне (одно- и двухлучевое распространение волн).

Выражения для полей принимаемых сигналов при двухлучевом распространении можно записать в следующем виде:

$$E(\omega_{01,02}) = [\langle E_1(\omega_{01,02}) \rangle + E_0 f_1(\omega_{01,02})] \exp(-i\omega_{01,02} t) + \\ + [\langle E_2(\omega_{01,02}) \rangle + E_0 f_2(\omega_{01,02})] \exp[-i(\omega_{01,02} t + \varphi_{01,02})], \quad (4)$$

где $\langle E_{1,2} \rangle$ и $E_0 f_{1,2}$ — соответственно среднее и флюктуирующее поле волны внутри луча, $\varphi_{01,02}$ — среднее относительное запаздывание фазы

* При наличии в ионосфере регулярных горизонтальных или нерегулярных градиентов ионизации в (3) аддитивно с ρ_1 входит соответствующая величина ρ_2 (см. дальше соотношение (6))

волны между лучами*. Можно показать, что относительный сдвиг фаз между соответствующими лучами на разных частотах несуществен, если рассматривать случай малого относительного разнесения частот зондирования ($\delta \ll 1$).

Используя (2)–(4), для величины коэффициента корреляции флуктуаций сигналов на различных частотах получим следующие выражения:

$$\rho_{A^2, \omega} = \exp[-\rho_1^2] \left[\frac{1 + \cos \bar{\varphi}_{01} + \cos \bar{\varphi}_{02} + \cos(\bar{\varphi}_{02} - \bar{\varphi}_{01})}{2[1 + \cos \bar{\varphi}_{01}]^{1/2} [1 + \cos \bar{\varphi}_{02}]^{1/2}} \right] \quad (s_{\omega_0}^2 \ll 1); \quad (5a)$$

$$\rho_{A^2, \omega} \approx \exp[-2\rho_1^2 s_{\omega_0}^2] \quad (s_{\omega_0}^2 \gg 1). \quad (5b)$$

Из соотношений (5а), (5б) следует, что при двухлучевом распространении в случае малых ионосферных возмущений коэффициент частотной корреляции монохроматического сигнала является квазиосциллирующей функцией разнесения частот $\Delta f = f_{02} - f_{01}$ с периодом «осцилляции» $\Delta f \sim T^{-1}$ ($\bar{\varphi}_{02} - \bar{\varphi}_{01} \approx \Delta f T$, T — время группового запаздывания между лучами). Параметр T можно легко определить по данным ионограмм наклонного зондирования для данной КВ трассы (на трассах средней протяженности $T \approx 1$ мсек ($\Delta f \sim 1$ кгц) [6]). Величина частотной корреляции флуктуаций сигналов, определяемая первым сомножителем в соотношениях (5а), (5б)**, может в зависимости от частоты сигналов, длины трассы и характеристик неоднородной структуры ионосферы (l, L_0, θ_0) изменяться в довольно широких пределах (от единиц до нескольких десятков килогерц). В случае сильных ионосферных возмущений величина частотной корреляции сигналов для двухлучевого распространения КВ совпадает с соответствующей величиной для однолучевого***; и в зависимости от этих возмущений, длины трассы и т. п. может составлять от нескольких единиц до долей килогерц ($s_{\omega_0}^2 \approx 10 \div 10^2$).

Расчет коэффициента частотной корреляции флуктуаций сигнала для случая слабых ионосферных возмущений и многолучевого распространения можно провести аналогично выводу формул (5а), (5б), с учетом различных относительных запаздываний между отдельными лучами. Но уже для трех лучей результат получается довольно громоздким и трудно поддается точному анализу. Общая закономерность в поведении функции частотной корреляции флуктуаций сигнала при двухлучевом распространении, однако, сохраняется, и при трехлучевом радиус частотной корреляции флуктуаций сигнала определяется соответствующей величиной для отдельного луча, а интерференция между лучами приводит к квазиосциллирующему поведению функции частотной корреляции результирующего сигнала с периодом, зависящим от конкретных фазовых соотношений между лучами. Но если лучей достаточно много ($n \geq 5$), то будет иметь место «замывание» регулярных осцилляций и функция частотной корреляции будет изменяться плавно сстройкой частоты, как и в случае однолучевого распространения волн, но с эффективным радиусом частотной корреляции, который уже может не нести информацию о мелкомасштабных неоднородностях.

Заметим, что проведенное выше рассмотрение вопроса о частотной корреляции флуктуаций монохроматических КВ сигналов при многолучевом

* Здесь и в дальнейшем будем полагать отдельные лучи статистически независимыми с одинаковой внутрилучевой неоднородной структурой, описываемой соотношениями (3).

** Эта же величина характеризует частотную корреляцию сигналов при однолучевом распространении коротких волн.

*** Следуя [7], можно показать, что частотная корреляция флуктуаций сигналов в случае сильных ионосферных возмущений для произвольного многолучевого распространения волн совпадает с соответствующей величиной для однолучевого распространения.

чевом распространении довольно легко обобщается на случай зондирования ионосферы импульсными сигналами с произвольными величинами амплитуд отдельных лучей. Ввиду громоздкости соответствующих выражений они здесь не приводятся. Важно лишь отметить, что в общем случае при этом имеет место нестационарность флуктуаций принимающего многолучевого сигнала по частоте (зависимость коэффициента частотной корреляции $\rho_{A^2, \omega}$ не только от разности частот, но и от начала отсчета на оси частот (см. (5 а), (5 б)).

2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ЧАСТОТНО-РАЗНЕСЕННОМУ ПРИЕМУ КВ СИГНАЛОВ НА ТРАССЕ ДУШАНБЕ—ГОРЬКИЙ

Прием и регистрация (в марте—апреле 1972 г.) импульсных КВ сигналов с целью изучения неоднородной структуры ионосферы по частотной корреляции флуктуаций их амплитуд на трассе Душанбе—Горький осуществлялись следующим образом.

Импульсный сигнал ($\Delta f \sim 10 \text{ кгц}$) с вертикальной ромбической антенны в Горьком поступал на входы четырех приемников Р-250 (выбирались четыре частоты из спектра $\Delta f = 10 \text{ кгц}$ исходного импульса). По промежуточной частоте (ПЧ) 215 кгц приемники имели полосу 1 кгц . Сигнал с ПЧ $= 215 \text{ кгц}$ в каждом приемнике через УНЧ, работающей в режиме тонального фильтра на частоте 1 кгц с полосой 300 гц , поступал на линейный выход приемника. С выходов приемников сигнал поступал на неинерционные амплитудные детекторы, собранные на диодах Д7Г по схеме мостикового выпрямителя. Нагрузкой каждого детектора служило сопротивление 100 ом и подключенный к нему через сопротивление 5 ком вибратор шлейфового осциллографа Н-102, на котором производилась регистрация амплитуд сигналов продетектированных импульсов с четырех каналов.

Выбор дискретных частот внутри полосы зондирующего сигнала ($\sim 10 \text{ кгц}$) лимитировался характером помех на трассе. За все время наблюдений было получено более 30 получасовых записей сигналов в четырех разнесенных по частоте каналах. Однако около 70% этих записей оказались непригодными для последующей обработки, в основном, из-за глубоких и длительных ($\sim 1 \text{ мин}$) изменений уровня принимаемого сигнала, существенно превышающих динамический диапазон приеморегистрирующей аппаратуры. Для сеансов (длительностью в 5 минут), свободных от указанных недостатков, была проведена корреляционная обработка записей. Она состояла в вычислении кросс-корреляционных функций (по времени и частоте) интенсивностей сигналов по записям сигналов разных частот в четырех каналах разнесения и построении соответствующих коэффициентов частотной корреляции при нулевом разнесении по времени $\rho_{A^2, \omega}$ (см. разд. 1) и аналогичных коэффициентов по максимумам функций кросс-корреляции*.

Кривые $\rho_{A^2, \omega}$ для дневных иочных сеансов наблюдения и различных частот зондирующего сигнала приведены на рис. 1. (а) сеанс $11^h 30^m$, $f_0 = 16767 \text{ кгц}$ (—·—·— неоднозначность, ——— по максимумам); б) $14^h 30^m$, $f_0 = 20322 \text{ кгц}$; в) $21^h 30^m$, $f_0 = 11341 \text{ кгц}$). Из этого рисунка видно, что практически все зависимости имеют квазиосциллирующий характер. (Второй способ обработки приводит к некоторому увеличению корреляции амплитуд сигналов по частоте.) Такое поведение

* Последний способ вычисления $\rho_{A^2, \omega}$ позволяет устранить (при однолучевом квазистационарном распространении сигнала полностью [8], а при многолучевом или нестационарном—частично) влияние регулярной рефракции на поведение коэффициентов частотной корреляции,

$\rho_{A^2, \omega}$ может быть связано с многолучевой структурой принимаемого сигнала (относительное запаздывание между лучами менее 500 мкsec)

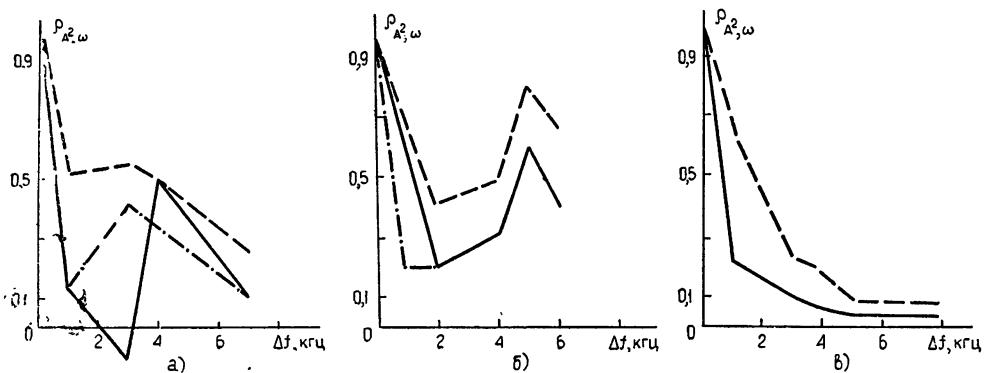


Рис. 1.

и соответствующей ей частотной нестационарностью (см. разд. 1). Вместе с тем этот эффект может быть вызван и просто заметной пространственной нестационарностью процесса рассеяния КВ радиоволны в ионосфере. Так или иначе*, существование частотной нестационарности флюктуаций КВ сигналов прямо подтверждается неоднозначным поведением частотной корреляции в ряде сеансов эксперимента (см. рис. 1), что наглядно иллюстрирует также рис. 2, на котором приведены функ-

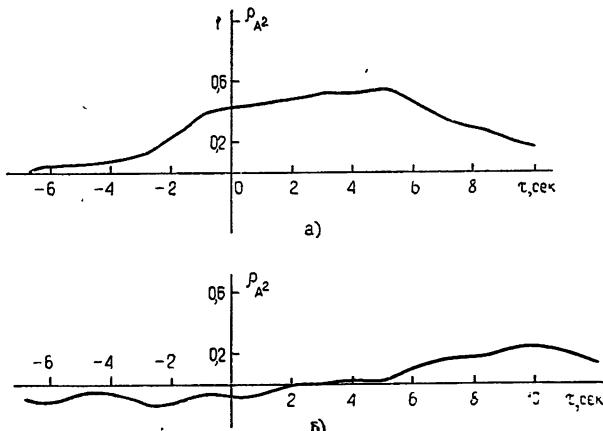


Рис. 2.

ции кросс-корреляции сигналов для одинакового относительного разнесения по частоте (~ 3 кгц), но для разных частот сигналов в каналах разнесения (максимальное отличие ~ 7 кгц) (а) $16769 \div 16766$ кгц; б) $16765 \div 16762$ кгц).

Как видно из приведенных на рис. 1 кривых, в ночные часы наблюдений (рис. 1 в) на данной трассе радиус частотной корреляции был сравнительно мал (≤ 1 кгц), что, возможно, связано с влиянием на флюктуации принимаемого сигнала интенсивных ($s_\omega \sim 10 \div 50$) неод-

* К сожалению, в подавляющем большинстве наших экспериментов из-за сложной помеховой обстановки на трассе Душанбе—Горький нельзя уверенно говорить о наличии или отсутствии мультиплетности сигнала с $T \leq 500$ мкsec.

нородностей с размерами $0,3 \div 1$ км или слабых ($s_{\omega}^2 \ll 1$) неоднородностей с $l \sim 30 \div 50$ м (см. (5 а), (5 б)). Отличие дневных наблюдений состояло в том, что осцилляции функции $\rho_{A^2, \omega}(\Delta\omega)$ были выражены в значительно большей степени (рис. 1 а, б), что может быть результатом влияния многолучевости и известным ослаблением в дневные часы роли рассеяния, вызванного неоднородностями с $l \geq 0,5 \div 1$ км [1].

На рис. 3 приведен один из примеров зависимости коэффициента частотной кросс-корреляции сигнала $\rho_{A^2, \omega}$ (разнесение 20322 $\div 20323$ кгц) от времени. Сдвиг максимума функции $\rho_{A^2, \omega}(\tau)$ относительно нулевого значения τ , который наблюдался также и в других сеансах, очевидно, связан с градиентами электронной концентрации в ионосферном слое из-за крупных неоднородностей [8]. По измерению временного сдвига τ_0 максимума корреляции $\rho_{A^2, \omega}(\tau)$ при известной скорости дрейфа V можно оценить величину градиента ионизации в ионосфере [8]:

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} \sim \frac{V\tau_0}{R} \frac{\pi m f_0^3}{e^2 \Delta f}. \quad (6)$$

В нашем случае (при $V \approx 100$ м/сек) $R \approx 500$ км, $\tau_0 \approx 5$ сек, $\Delta f \approx 1$ кгц, $f_0 \approx 20$ Мгц, откуда следует $\frac{\partial N_n}{\partial x} \sim 3 \cdot 10^6$ см⁻³.

Приведенные на рис. 1 кривые зависимостей $\rho_{A^2, \omega}$ были получены при непосредственной корреляционной обработке записей КВ сигналов в четырех разнесенных по частоте каналах. Корреляционная обработка записей сигналов с фильтрацией быстрых и медленных замераний [9] позволила получить соответствующие зависимости $\rho_{A^2, \omega}$ отдельно для

медленных и быстрых (по времени) флюктуаций принимаемых сигналов. Результаты этой обработки иллюстрируются на рис. 4 (сеанс 5^h 30^m; — медленные, - - - быстрые флюктуации). Быстрые (~ 1 сек) и сравнительно медленные (~ 10 сек) флюктуации сигнала хорошо выявляются по поведению автокорреляционных функций для результирующего и отдельных временных составляющих сигнала на данной частоте (рис. 5) (сеанс 5^h 30^m; рис. 5б—медленные; рис. 5 в—быстрые флюктуации, $f_0 = 11341$ кгц).

Приведенные на рис. 4 зависимости коэффициентов частотной корреляции отдельно для медленных и быстрых флюктуаций результирующего сигнала наглядно показывают, что быстрые (~ 1 сек) замерания принимаемых КВ сигналов, в основном, обусловлены теми же

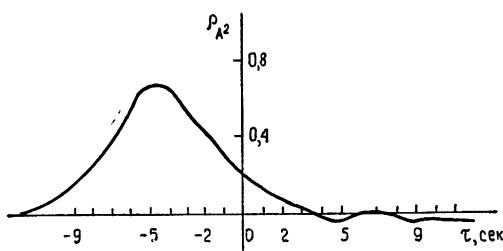


Рис. 3.

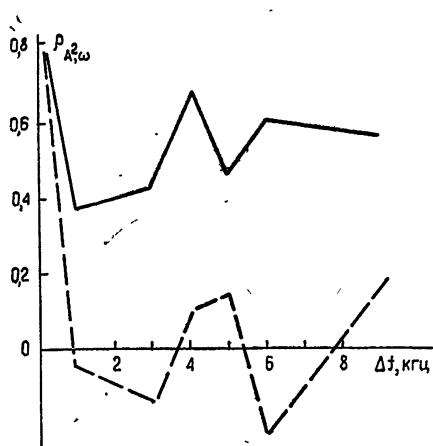


Рис. 4.

тирующего сигнала наглядно показывают, что быстрые (~ 1 сек) замерания принимаемых КВ сигналов, в основном, обусловлены теми же

причинами, что и сравнительно малые значения величины $\rho_{A^2, \omega}$ (см. выше и рис. 4).

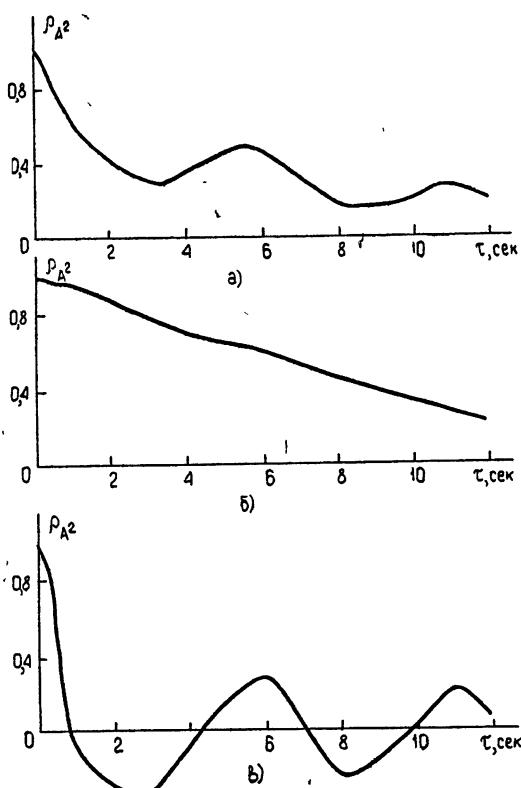


Рис. 5.

Таким образом, проведенный здесь анализ поведения функций временной и частотной корреляции флуктуаций КВ сигналов указывает на значительную роль мелкомасштабных неоднородностей электронной концентрации ионосферы (с размерами $l \sim 0,3 \div 1 \text{ км}$ и возможно даже с $l \sim 30 \div 50 \text{ м}$) в процессе рассеяния коротких волн и на существенную частотную нестационарность этого процесса.

Авторы глубоко признательны Н. А. Митякову, В. О. Рапопорту за полезные дискуссии, благодарны В. С. Караванову, В. П. Урядову за помощь в проведении эксперимента, а также Г. М. Артемьевой, И. А. Зарнициной, Т. С. Ушаковой за обработку на ЭВМ экспериментального материала.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Ерухимов; Диссертация, Горьковский университет, 1965.
- В. И. Дробежев, Геомагн. и аэрономия, 6, № 4, 792 (1966).
- В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 269 (1968).
- В. А. Алимов, Геомагн. и аэрономия, 12, № 3, 693 (1972).
- В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 620 (1967).
- J. Aches, J. Geophys. Res., 68, № 3, 759 (1963).
- M. Nakagami, Statistical Methods in Radio Wave Propagation, Pergamon Press, 1960, p. 3.

8. Л. М. Ерухимов, Геомагн. и аэрономия, 6, № 2, 400 (1966).
9. J. Taubenheim, Statist. Ans. Geophys. and Meteor. Daten, Leipzig, 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
2 октября 1972 г.

INVESTIGATION OF INHOMOGENEOUS IONOSPHERIC STRUCTURE
ACCORDING TO FREQUENCY-SPACED RECEPTION OF SW-SIGNALS
ON THE WAY OF DUSHANBE—GORKI

*V. A. Alimov, L. M. Erushimov, L. N. Rubtsov, E. V. Strouk,
Ya. G. Tsybko*

The frequency correlation of short wave fluctuations at oblique ionosphere sounding is considered. Expressions are found for the coefficients of signal intensity fluctuations. These relations are used in examination of data obtained in the experiment of frequency-spaced SW-signal reception at Dushanbe—Gorki trace. A significant role of small-scale ionospheric irregularities (with dimensions $l \sim 0.3 \div 1$ km and even $l \sim 30 \div 50$ m) during short wave scattering and an essential frequency nonstationarity of this process are pointed out.

УДК 551.510 535

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ЧАСТИЧНЫХ ОТРАЖЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ D-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ, ВОЗМУЩАЕМОЙ МОЩНЫМИ РАДИОВОЛНАМИ

B. B. Писарева, B. A. Рыжов

Рассматривается возможность применения метода частичных отражений для диагностики параметров D-области ионосферы, возмущаемой мощными радиоволнами. Приведены оценки тепловых эффектов. Показано, что экспериментальные данные о частичных отражениях, в принципе, позволяют уточнить как природу рекомбинационных процессов на различных высотах в D-области, так и температурные зависимости некоторых параметров, используемых в теории нелинейных диссипативных явлений.

Прохождение радиоволн большой мощности через ионосферу сопровождается изменением средних параметров среды и, следовательно, изменением условий распространения волн других частот в возмущенной области. Именно это обстоятельство лежит в основе метода определения электронной концентрации и эффективного числа соударений в D-области, предложенного в работе [1]. Профили концентрации и числа соударений находятся из сопоставления характеристик частичных отражений, наблюдавшихся последовательно в сеансах, соответствующих возмущенной и невозмущенной ионосфере. При этом необходимо знать температурные зависимости различных параметров, характеризующих тепловые эффекты. Очевидно, представляет интерес и решение обратной задачи: определение зависимостей этих параметров от температуры электронов по данным частичных отражений. В настоящей статье рассматривается возможность использования метода частичных отражений для определения указанных зависимостей и получения дополнительных сведений о параметрах D-области.

1. Наблюдения частичных отражений позволяют находить, кроме средних интенсивностей рассеянных обыкновенной и необыкновенной волн, коэффициент их взаимной корреляции. Используя результаты, полученные в работе [2], можно показать, что коэффициент корреляции интенсивностей рассеянных обыкновенной (I_0) и необыкновенной (I_x) волн определяется выражением

$$\rho_{I_0 I_x} = \frac{4 \mu_0 \mu_x (1 + e^{-4kaL} - 2e^{-2kaL} \cos 2bkL)}{(a^2 + b^2)(1 - e^{-4k_x L})(1 - e^{-4k_0 L})}, \quad (1)$$

где $k = \omega_1/c$, ω_1 — круговая частота, $L = c\tau_1/2$, τ_1 — длительность зондирующего импульса передатчика, который создает частичные отражения, $a = \mu_x + \mu_0$, $b = n_x - n_0$, n_x , n_0 и μ_x , μ_0 — соответственно показатели преломления и поглощения для необыкновенной и обыкновенной волн. Формула (1) справедлива при наличии слабой дисперсии интенсивности рассеянного от отдельных неоднородностей излучения и слабого поглощения поля на размере $\sim l$ (l — масштаб неоднородностей)

электронной плотности). Кроме того, необходимо выполнение условий $L \gg l$, $\sqrt{\lambda_1 h} \gg l$, где $\lambda_1 = 2\pi/k$ и h — расстояние до слоя с неоднородностями.

Используя экспериментальную зависимость от высоты коэффициента корреляции и средних интенсивностей рассеянных волн, можно рассчитать профили электронной концентрации $N_0(h)$ и эффективного числа соударений $\nu_0(h)$ в невозмущенной ионосфере [3]. Допустим, что на слой ионизации падает интенсивная монохроматическая волна с частотой $f_2 = \omega_2/2\pi$, вызывающая значительное увеличение температуры электронов. При этом растет число соударений электронов с молекулами, а вследствие нарушения рекомбинационного баланса изменяется плотность электронов. Вариации параметров D -области должны приводить, естественно, к соответствующим изменениям средних интенсивностей рассеянных нормальных волн, а также коэффициента их взаимной корреляции. В рамках предположений, которые используются при выводе выражения для коэффициента корреляции, общий вид формулы (1) рассматриваемого нами случая «нагретой» ионосферы не изменится. Однако аналитические выражения для комплексного показателя пре-

ломления $n = n - i\varphi$, соответствующие двум сеансам наблюдений частичных отражений (т. е. в возмущенной и невозмущенной ионосфере), в общем случае будут различными. Если симметричная часть функции распределения электронов является максвелловской, то для тензора диэлектрической проницаемости можно использовать выражение Сена и Уиллера [4] или приближенные формулы элементарной теории [5]. Причем они справедливы как для возмущающей (частота f_2), так и для возмущаемой волны (частота $f_1 = \omega_1/2\pi$).

Для значений $\omega_2 \geq \nu_0$ и $\theta = T_e/T_{e0} \sim 2 \div 3$ отличие функции распределения «нагретых» электронов в D -области от максвелловской, по-видимому, невелико [6]. (Здесь T_e — эффективная температура электронов в поле интенсивной волны, T_{e0} — температура электронов в невозмущенной среде, совпадающая с температурой нейтралов $T \sim 200 \div 300^{\circ}\text{K}$). Таким образом, формула (1) применима для «нагретой» ионосферы, но в выражении для показателя преломления $n_{0,x}$ параметр ν (эффективное число соударений) следует считать зависящим от эффективной температуры электронов.

Последовательные измерения коэффициента корреляции $\rho_{I_0 I_x}$ и средних интенсивностей I_0 , I_x частичных отражений в возмущенной и невозмущенной ионосфере позволяют найти соответственно профили $\nu(h)$, $N(h)$ и $\nu_0(h)$, $N_0(h)$. Из уравнений баланса ионизации в D -области (см., например, [7]) легко найти связь невозмущенного (N_0) и возмущенного (N) профилей электронной концентрации:

$$\Delta(h) \equiv \frac{N(h)}{N_0(h)} = \left[\frac{1 + \lambda(T, h)}{1 + \lambda(T_e, h)} \frac{\alpha_e(T, h) + \lambda(T, h)\alpha_i(T, h)}{\alpha_e(T_e, h) + \lambda(T_e, h)\alpha_i(T, h)} \right]^{1/2} \equiv F(T_e, h), \quad (2)$$

где

$$\lambda \approx \frac{\beta n_1}{\rho + \gamma n_2}, \quad (3)$$

α_e — коэффициент электронно-ионной рекомбинации, α_i — коэффициент ионно-ионной рекомбинации, $\lambda = N^-/N$, N^- — концентрация отрицательных ионов, β — коэффициент прилипания электронов, γ — коэффициент отлипания электронов от отрицательных ионов при столкновениях, ρ — коэффициент фотоотлипания, n_1 — концентрация молекулярного кислорода, n_2 — концентрация нейтральных компонент. Соотношение

(2) получено в предположении, что за время наблюдений частичных отражений (т. е. в течение двух следующих друг за другом сеансов наблюдений, соответствующих «нагретой» и «ненагретой» ионосфере) изменения скорости ионообразования пренебрежимо малы.

Считая известными те или иные параметры, входящие в (2), или используя косвенные ионосферные данные, можно получить из этого соотношения определенные сведения о других параметрах.

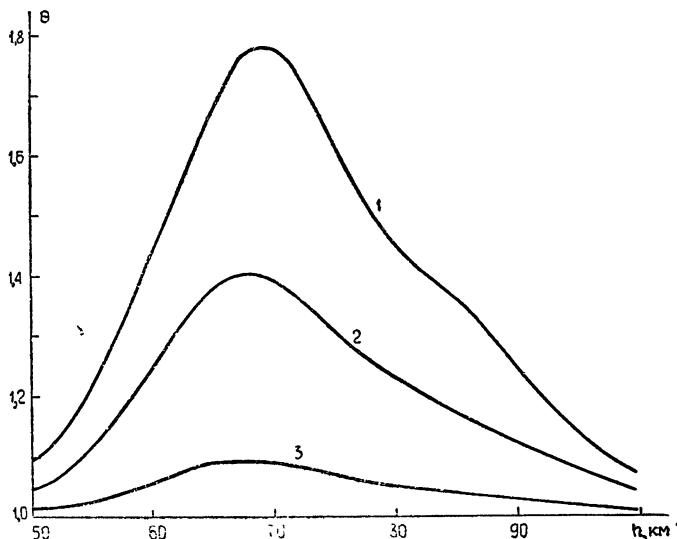


Рис. 1.

Для количественных оценок возмущений электронной концентрации $\delta N = |N - N_0|/N_0$, вызываемых мощными радиоволнами, был выполнен расчет температуры электронов в интервале высот 50–100 км с учетом эффекта самовоздействия возмущающей волны. На рис. 1 показаны зависимости относительной температуры электронов $\theta(h)$, соответствующие трем значениям эквивалентной мощности излучения передатчика — 1 — $P_{\text{эфф}} = PG = 10^5$ квт, 2 — $5 \cdot 10^4$ квт, 3 — 10^4 квт (P — мощность, подводимая к антенне, G — коэффициент усиления антенны в направлении главного луча). Решение дифференциального уравнения для температуры электронов, которое мы не приводим в тексте, было выполнено численными методами при следующих значениях параметров: $T = 200^{\circ}\text{K}$, $f_2 = 5,75$ Мгц, $\delta_{\text{эфф}} = 5 \cdot 10^{-3}$, где $\delta_{\text{эфф}} = \delta_{\text{эфф}}(T_e)$ — средняя относительная доля энергии, теряемая электроном при соударении с молекулой. Кроме того, предполагалось, что нагрев электронов производится необыкновенной волной, падающей нормально к слою ионизации, и эффективное число соударений линейно зависит от температуры электронов. Расчетные зависимости $\theta(h)$ получены для экспоненциального профиля числа соударений

$$\nu_0(h) = \nu_{00} e^{-c(h-40)}, \quad \nu_{00} = 6 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}, \quad c = 0,146 \text{ км}^{-1}.$$

Профиль электронной концентрации, использованный нами при интегрировании уравнения для относительной температуры, приведен в таблице. Он соответствует типичным дневным условиям D -области в периоды наибольшей солнечной активности [8]. Как видно из рис. 1, вариации температуры электронов значительны даже на частотах

~ 6 Мгц*. С уменьшением рабочей частоты вариации температуры возрастают. Оценки показывают, что в интервале частот $f_2 \sim 2 \div 6$ Мгц при потенциалах передатчика $PG \sim 50 \div 100$ мвт вполне достижима температура электронов $\theta \sim 1,5 \div 4$ **. Обратимся к формуле (2). Характер функциональной зависимости $F(T_e, h)$ определяет, очевидно, величину вариаций δN электронной плотности. В согласии с фотохимической теорией D-области величина λ резко изменяется с высотой, поэтому температурная зависимость комбинированного параметра $F(T_e, h)$ может быть существенно различной на разных высотах. На высотах $h \geq 70$ км $\lambda \leq 1$, и с ростом высоты λ уменьшается. В частности, для высоты $h = 80$ км полагают значение $\lambda \approx 0,1$. Как известно, наиболее эффективными процессами нейтрализации электронов и ионов в ионосфере являются диссоциативная рекомбинация молекулярных ионов и процесс взаимной нейтрализации положительных и отрицательных ионов. Согласно [10] процесс диссоциативной рекомбинации является преобладающим выше 100 км. Однако возможно, что он доминирует, начиная с высоты $h \geq 80$ км. Для значений $\lambda \sim 0,1$, $\alpha_i \sim \alpha_e \sim \alpha_d \sim 10^{-7}$ см³/сек (α_d — коэффициент диссоциативной рекомбинации) параметр $\alpha_e \gg \lambda \alpha_i$. В этом случае имеем приближенно:

$$\Delta(h) = \left[\frac{\alpha_d(T)}{\alpha_d(T_e)} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Таблица

$h, \text{ км}$	50	52	54	56	58	60	62
$N, \text{ см}^{-3}$	0	5	20	70	90	120	130
$h, \text{ км}$	64	66	68	70	72	74	76
$N, \text{ см}^{-3}$	150	170	190	$3 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$	$6,7 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^2$
$h, \text{ км}$	78	80	82	84	86	88	90
$N, \text{ см}^{-3}$	$7 \cdot 10^2$	$7 \cdot 10^2$	$9 \cdot 10^2$	$1,4 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	10^4
$h, \text{ км}$	92	94	96	98	100		
$N, \text{ см}^{-3}$	$1,5 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$		

Если за исчезновение электронов ответственным является процесс диссоциативной рекомбинации ионов N^- , то изменения электронной концентрации $\delta N(h) = (\theta^{3/4} - 1)$ при нагреве электронов могут быть значительными ($\delta N \sim 0,4$). Из рис. 1 видно, что наибольшие изменения температуры электронов возникают в области высот ~ 70 км. Здесь значение $\lambda \geq 1$ и для оценки δN необходимо учитывать зависимость

* В практике исследований D-слоя обычно используются более низкие частоты.

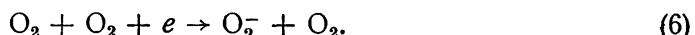
** Мощности современных передатчиков достигают указанных величин (см., например, [9]).

$\lambda(T_e)$. Ниже 70 км преобладает процесс взаимной нейтрализации ионов, т. е. выполняется условие $\lambda \alpha_i \gg \alpha_e$. При этом параметр Δ зависит только от λ :

$$\Delta(h) = \left[\frac{1 + \lambda(T)}{1 + \lambda(T_e)} \frac{\lambda(T)}{\lambda(T_e)} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где λ определяется выражением (3).

Из (3) следует, что зависимость λ от температуры определяется коэффициентом прилипания $\beta(T_e)$. Основными отрицательными ионаами, которые образуются днем в области D , являются ионы O_2^- . Они образуются в результате прилипания электронов к молекулам O_2 при тройных соударениях:



Для реакции (6) коэффициент прилипания можно записать, следовательно, в виде $\beta(T_e) = \beta_1(T_e) n_1$. Лабораторные исследования показывают, что коэффициент β_1 растет с увеличением температуры электронов примерно от значения $\beta_1 = 10^{-30} \text{ см}^6/\text{сек}$ до величины $\sim 5 \cdot 10^{-30} \text{ см}^6/\text{сек}$ в области $200^\circ \leq T_e < 1100^\circ$ [11]. В отличие от рассмотренного выше случая ($h \sim 80 \div 90$ км) на высотах ниже 70 км концентрация электронов уменьшается с увеличением T_e . Для значений $\lambda(T) = 1$, $\alpha_i = 10^{-6} \text{ см}^3/\text{сек}$, $\alpha_e(T) = 10^{-7} \text{ см}^3/\text{сек}$ и $\theta = 1,5 \div 2$ получаем величину $\delta N \approx 0,25 \div 0,4$.

Минимальные относительные изменения электронной концентрации следует ожидать, по-видимому, в области 70 \div 80 км, где значение $\lambda(T) \alpha_i \sim \alpha_e$. Здесь с увеличением температуры величина λ растет, а коэффициенты диссоциативной рекомбинации для ионов N_2^+ , O_2^+ , NO_2^+ уменьшаются. Проведенные оценки δN показывают, что при достаточно точном определении профилей $N_0(h)$, $N(h)$, $v_0(h)$ и $v(h)$ можно найти зависимость $F(T_e, h)$. При этом следует иметь в виду, что относительная температура электронов находится непосредственно из эксперимента как отношение v/v_0 , и ее изменения контролируются мощностью передатчика. Знание функции $F(T_e, h)$ может оказаться полезным при анализе различных ионных и молекулярных реакций в D -слое. В частности, наличие экспериментальной зависимости $F(T_e, h)$ способствовало бы определению преимущественного ионного состава, который соответствует рекомбинационным процессам на высотах 80 \div 90 км (см. (4)). Далее, предполагая известным коэффициент $\beta_1(T_e)$, из выражения (5) получаем оценку для параметра $\lambda(h)$ ниже 70 км:

$$\lambda(h) = \frac{Y(h) \Delta^2 - 1}{1 - Y^2(h) \Delta^2},$$

где

$$Y(h) = \frac{\lambda(T_e)}{\lambda(T)} = \frac{\beta_1(T_e(h))}{\beta_1(T(h))}.$$

В промежуточной области высот, 70 \div 80 км, используя выражение (2), для заданных параметров $\alpha_e(T_e)$ и $\lambda(T_e)$ можно получить параметр α_i , величина которого, согласно ионосферным измерениям, является весьма неопределенной: $\alpha_i \approx 10^{-7} \div 10^{-6} \text{ см}^3/\text{сек}$ [10].

2. Рассмотрим теперь случай импульсного нагрева электронов. Пусть запуск импульсов передатчика и ионосферной станции, которая служит для наблюдений частичных отражений, производится синхронно.

Временная последовательность излучаемых импульсов показана на рис. 2. Здесь, как и ранее, индекс «2» относится к параметрам мощного передатчика. Нагрев электронов радиоимпульсами не вызывает заметных изменений электронной плотности, если выполняются условия $\tau_p \gg \tau_2$, $T_0 = F_0^{-1} \gg \tau_2$ (τ_p — характерное время эффективной рекомбинации электронов; в D -слое $\tau_p \sim \sim 10^2$ сек; F_0 — частота повторения импульсов). Тогда отличие коэффициентов корреляции частичных отражений, наблюдаемых в результате рассеяния волн в «нагретой» и «ненагретой» ионосфере, будет связано только с изменением эффективного числа соударений. Легко видеть, что при условиях $\tau_2 \geq \tau_0 + \tau_1 > \tau \sim (\delta_{\text{эфф}} v_{\text{эфф}})^{-1}$ процессы установления электронной температуры несущественны и, следовательно, температура $\theta(h)$ рассчитывается точно так же, как в случае нагрева электронов монохроматической волной. Время установления температуры τ на высотах $50 \div 90$ км изменяется в пределах $(5 \div 80) \cdot 10^{-5}$ сек.

При указанных выше условиях, которые реализуются, например, для значений $\tau_2 \sim 10^{-3}$ сек, $\tau_1 \sim 5 \cdot 10^{-5}$ сек и $F_0 \sim 50$ сек⁻¹, данные о частичных отражениях позволяют получить параметр $\delta_{\text{эфф}}$. Действительно, из эксперимента можно найти $v_0(h)$, $v(h)$, $N_0(h)$ и $\theta(h) = v/v_0$. Затем из уравнения для интенсивности возмущающей волны

$$E_0^2(h) = \frac{E_0^2(h_0) h_0^2}{h^2} \exp \left[-\frac{2 \omega_2}{c} \int_{h_0}^h K(h, \theta(h)) dh \right] \quad (7)$$

и уравнения баланса средней энергии электронов

$$\frac{d\theta}{dt} + \delta_{\text{эфф}}(\theta, h) v_0 \theta (\theta - 1) = \frac{E_0^2}{E_p^2} \frac{\delta_{\text{эфф}}(T, h) v_0 \theta}{p + s^2 \theta^2} \quad (8)$$

определяется в стационарном случае $\delta_{\text{эфф}}(T_e(h), h) \equiv \bar{\delta}(h)$. Здесь K — показатель поглощения мощной волны, $s = v_0/\omega_2$, $p = (1 - \omega_H/\omega_2)^2$, ω_H — гирочастота электронов, $E_p = \left[\frac{3 m \times T \delta_{\text{эфф}}(T, h) \omega_2^2}{e^2} \right]^{1/2}$ — плазменное поле.

Уравнение (8) описывает медленные изменения температуры электронов по сравнению с периодом поля $2\pi/\omega_2$. Если параметр $\delta_{\text{эфф}}$ не зависит от молекулярного состава области D (т. е. $\delta_{\text{эфф}} = \delta_{\text{эфф}}(\theta)$), то из сопоставления $\bar{\delta}(h)$ и $\theta(h)$ находим зависимость $\delta_{\text{эфф}}(\theta)$. Однако более естественным является предположение о том, что $\delta_{\text{эфф}}$ зависит от молекулярного состава. Тогда для определения зависимости $\delta_{\text{эфф}}(\theta, h)$ необходимо варьировать мощность передатчика и для каждой высоты h проводить сопоставление значений $\bar{\delta}_n(h) \equiv \delta_{\text{эфф}}(\theta_n(h), h)$ и $\theta_n(h)$, где зависимости $\bar{\delta}_n(h)$ и $\theta_n(h)$ соответствуют сеансу наблюдений частичных отражений при заданной мощности передатчика P_n ($n = 1, 2, \dots$).

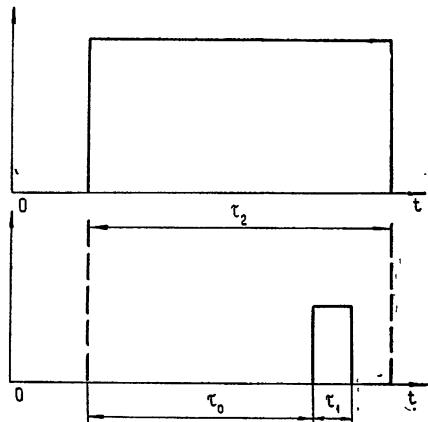


Рис. 2.

Совокупность величин $(\bar{\delta}_n, \theta_n)$ определяет зависимость $\delta_{\text{эфф}}(\theta, h)$. Контрольная проверка полученной зависимости осуществляется с помощью следующего эксперимента. Пусть время задержки импульсов τ_0 выбрано в соответствии с условием $\tau_0 \geq \tau_2 > \tau$, которое означает, что рассеяние зондирующего импульса ионосферной станции всегда происходит в моменты «остывания» ионосферы: электронная температура релаксирует во всем объеме рассеивающего слоя неоднородностей. Изменяя время задержки τ_0 , получаем из наблюдений эффективное число соударений ν как функцию τ_0 , а следовательно, временную зависимость $\theta(t)$ для заданной высоты и фиксированной мощности передатчика. Обозначим полученную зависимость $\theta(t)$ через $\theta_1(h, t)$.

Процесс релаксации температуры описывается уравнением (8), в котором правая часть тождественно равна нулю и $\delta_{\text{эфф}}(\theta, h)$ определяется из эксперимента (как указывалось ранее). Пусть это уравнение имеет решение $\theta_2(h, t)$ при начальном условии $\theta_2(h, 0) \equiv \theta_1(h, 0)^*$. Очевидно, существенное различие функций $\theta_1(h, t)$ и $\theta_2(h, t)$ будет свидетельствовать о том, что эффективное число соударений зависит от температуры электронов не линейно, а более сложным образом. В этом случае основной ($\tau_2 > \tau_0 + \tau_1 > \tau$) и контрольный эксперименты следует рассматривать совместно для определения зависимостей $\nu_{\text{эфф}}(T_e)$ и $\delta_{\text{эфф}}(T_e)$.

Как известно, кросс-модуляционные измерения дают величину $\delta_{\text{эфф}} = (2 \div 8) \cdot 10^{-3}$, причем эта величина характеризует среднее значение параметра $\delta_{\text{эфф}}$ в области высот $60 \div 80 \text{ км}$. Специфика эксперимента по кросс-модуляции такова, что использование очень мощных передатчиков для нагрева электронов часто бывает нежелательным из-за необходимости учитывать эффект самовоздействия волн, что значительно усложняет методику определения параметров D -области. Поэтому возмущения температуры электронов в кросс-модуляционных измерениях обычно невелики ($\Delta\theta = \theta - 1 \ll 1$), что, естественно, не позволяет исследовать температурные изменения параметра $\delta_{\text{эфф}}$. В указанном отношении рассматриваемый нами метод частичных отражений обладает преимуществами. Во-первых, из наблюдений частичных отражений для любой высоты $h = \bar{h}$ можно получить среднее значение $\delta_{\text{эфф}}$ в объеме рассеивающего слоя ионизации $\Delta h = L = c \tau_1 / 2$, т. е. находится среднее значение параметра в области высот $\bar{h} - \Delta h / 2 \leq h \leq \bar{h} + \Delta h / 2$ (в различных исследованиях величина L изменяется в пределах $1,5 \div 7,5 \text{ км}$). Во-вторых, метод частичных отражений позволяет исследовать зависимость параметра $\delta_{\text{эфф}}$ от эффективной температуры электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Рыжов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 2, 196 (1972).
2. H. A. von Biel, W. A. Flood, H. G. Campitz, J. Geophys. Res., 75, № 25, 4863 (1970).
3. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1452 (1971).
4. H. K. Sep, A. A. Wyller, J. Geophys. Res., 65, 3931 (1960).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, № 2, 201 (1960).
7. Р. К. Уиттен, И. Дж. Поппов, Физика нижней ионосферы, изд. Мир, М., 1968.
8. K. Maeda, J. Geomagn. Geoelectr., 21, № 2, 557 (1969).
9. W. F. Utlaaut, J. Geophys. Res., 75, № 31, 6402 (1970).

* Выбор начального значения $\theta_2(h, 0) \equiv \theta_1(h, 0)$ имеет смысл при условии $\Delta t_2 \ll \tau$, где Δt_2 — длительность заднего фронта возмущающего радиоимпульса.

10. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
11. L. M. Chanin, A. V. Phelps, M. A. Biondi, Phys. Rev. Lett., 2, № 8, 344 (1954).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
11 сентября 1972 г.

THE USE OF PARTIAL REFLECTION METHOD FOR INVESTIGATING IONOSPHERIC D-REGION MODIFIED BY POWERFUL RADIO WAVES

V. V. Pisareva, V. A. Ryzhov

The possibility of applying the partial reflection method for diagnostics of the parameters of the ionospheric *D*-region modified by powerful radio waves is considered. Estimations of thermal effects are presented. It is shown that the experimental data on partial reflections permits, in principle, to specify both the nature of recombinational processes at different heights in *D*-region and the temperature dependence of some parameters used in the theory of nonlinear dissipative phenomena.

УДК 621.371.222.4

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИОСИГНАЛОВ, РАССЕЯННЫХ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В НАПРАВЛЕНИЯХ, БЛИЗКИХ К НАПРАВЛЕНИЮ ЗЕРКАЛЬНОГО ОТРАЖЕНИЯ

*А. И. Калмыков, А. С. Курекин, В. Ю. Левантовский,
И. Е. Островский, В. В. Пустовойтенко*

Приводятся результаты измерений поляризационных, энергетических и спектральных характеристик сигналов, рассеянных морской поверхностью в направлениях, близких к направлению зеркального отражения. Эксперименты проведены на волнах 3,2 и 10 см при линейной поляризации излучения и приема с использованием узконаправленных антенн.

Характеристики сигналов зеркального отражения и рассеянных в направлениях, отличных от направления зеркального отражения, не одинаковы.

При расположении корреспондирующих пунктов (см. рис. 1) над морской поверхностью в точку приема B могут приходить не только прямой луч l и зеркально отраженный— 2 , для которого углы ψ_1 и ψ_2 , отсчитываемые от сглаженной поверхности моря, равны ($\psi_1 = \psi_2 = \phi_0$), но и рассеянный— 3 , для которого $\psi_1 \neq \psi_2$. Особенности зеркального отражения изучены весьма подробно (см., например, [1–3]). Некоторые, далеко не полные, данные об энергетических характеристиках рассеянного излучения получены в [4, 5].

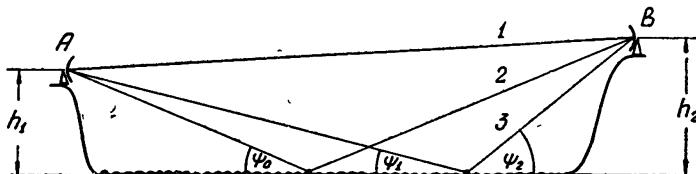


Рис. 1.

Используя узконаправленные антенны и геометрию трассы для разделения лучей l , 2 , 3 , нами измерены энергетические, поляризационные и частотные характеристики рассеянного излучения.

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения проводились на радиоволнах 3,2 и 10 см и частично на волне 8 мм на двух трассах. В таблице приведены данные о геометрии трасс и диаграммах антенн, использованных на передачу и прием в каждом из случаев.

Обозначения в таблице следующие: h_1 и h_2 — высоты корреспондентов, антенна одного из которых для наблюдения рассеянного излучения отклоняется вверх ($\psi_1 < \phi_0$), а другого — вниз ($\psi_2 > \phi_0$), R — длина трассы, $\varphi_{A/B}$ — ширина диаграмм направленности по уровню 3 дБ корреспондентов A и B соответственно.

Таблица

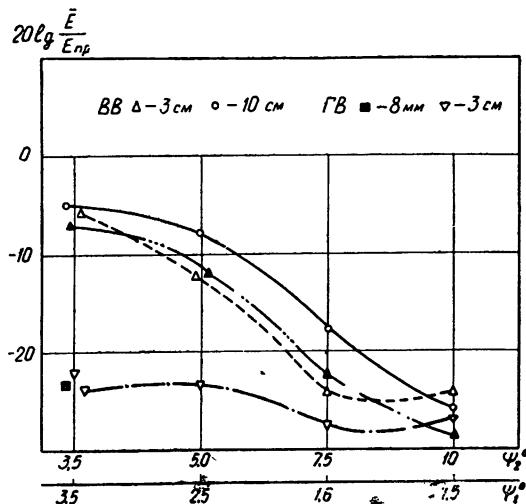
Трасса	h_1 , м	h_2 , м	R , км	ψ_0 , град	$\psi_1 \text{ min}$, град	$\psi_2 \text{ max}$, град	$\varphi_{A/B} (\lambda = 3,2 \text{ см})$, град	$\varphi_{A/B} (\lambda = 10 \text{ см})$, град
I	8	18	0,4	3,5	1,5	10	2 1	6 3
II	560	120	16,5	2,5	2,0	20,8	2 2	3 3

При измерениях на трассе I излучался вертикально поляризованный сигнал и последовательно во времени анализировались вертикальная и горизонтальная компоненты рассеянного сигнала. При проведении измерений на трассе II одновременно на волнах 3,2 и 10 см излучались либо вертикально поляризованные, либо горизонтально поляризованные сигналы. При этом неточность юстировки антенн приводила к расхождению средних значений сигналов на обеих волнах, не превышающему 1,5 дБ. Анализ ортогональных компонент рассеянного сигнала на волне 3,2 см производился одновременно. Разделение по ортогональным поляризациям было лучше 20–25 дБ. Диаграммы антенн были симметричными в обеих плоскостях, максимумы боковых лепестков каждой из антенн были на 17–20 дБ ниже уровня основного максимума. Во всех измерениях гребни морских волн были параллельны трассе.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

На рис. 2 приведены значения \bar{E} — средних уровней рассеянного сигнала, нормированные на уровень прямого сигнала основной поляризации $E_{\text{пр}}$, полученные при измерениях на трассе I при различных условиях наблюдения. Светлые знаки соответствуют спокойному морю (ветровая рябь), темные — волнениям 1–2 балла.

Рис. 2. Зависимость относительного уровня зеркально отраженных и рассеянных сигналов от углов скольжения ψ_1 и ψ_2 при вертикальной поляризации излучения и приема ($\triangle\triangle\triangle$, $\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle$ — $\lambda = 3,2 \text{ см}$, $\circ\circ\circ$ — $\lambda = 10 \text{ см}$). То же — при горизонтальной поляризации излучения и приема вертикальной поляризации ($\blacksquare\blacksquare\blacksquare$ — $\lambda = 8 \text{ мм}$; $\nabla\nabla\nabla$, $\blacktriangledown\blacktriangledown\blacktriangledown$ — $\lambda = 3 \text{ см}$). Трасса I.



Величина доверительного интервала $20 \lg \left(1 \pm \frac{\Delta \bar{E}}{\bar{E}} \right)$ 95%-ной обеспеченности составляла 1,5–4 дБ для разных измерений. Для зеркально отраженного луча при спокойном море для согласованной поляризации (ВВ) величина доверительного интервала составляла 0,5 дБ.

Уровень зеркального отражения, согласованного по поляризации с излучаемым сигналом, на $5 \div 7 \text{ дБ}$ ниже уровня прямого сигнала. Уровень деполяризованной компоненты зеркально отраженного сигнала при этом более чем на 20 дБ ниже уровня прямого сигнала. Степень деполяризации зеркального отражения

$$\delta = 20 \lg \frac{E_{ij}}{E_u},$$

i, j — поляризации излучения и приема соответственно, составляет $-15 \div -17 \text{ дБ}$.

С ростом угла рассеяния ψ_2 уровень рассеянного сигнала согласованной поляризации резко падает. Результаты измерений, проведенных на второй трассе большей протяженности и, следовательно, при больших размерах пятна, освещаемого на море, показаны на рис. 3. Для зеркально отраженного луча уровень сигнала на обеих поляризациях, согласованных с излучаемой, составляет около -15 дБ на волне $3,2 \text{ см}$ и -7 дБ на волне 10 см .

Изменения уровня рассеянного сигнала в зависимости от угла рассеяния ψ_2 при вертикальной поляризации имеют одинаковый характер на волне $3,2$ и 10 см ; однако уровень сигнала на волне 10 см на $5 \div 7 \text{ дБ}$ выше, чем на волне $3,2 \text{ см}$ при тех же условиях.

На горизонтальной поляризации изменения рассеянного сигнала с ростом угла ψ_2 подобны на обеих волнах и имеют иной характер, чем при вертикальной поляризации.

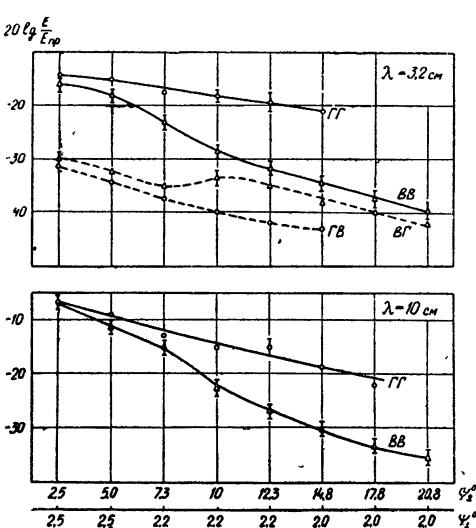


Рис. 3. То же, что на рис. 2, при вертикальной поляризации излучения и приема вертикальной (ВВ) или горизонтальной (ВГ) поляризаций, при горизонтальной поляризации излучения и приема горизонтальной (ГГ) или вертикальной (ГВ) поляризаций. Трасса II.

Степень деполяризации δ зеркально отраженного и рассеянного сигналов приведена на рис. 4. Степень деполяризации зеркально отраженного сигнала как при вертикальной поляризации излучения (кривая В), так и при горизонтальной его поляризации (кривая Г) примерно одинакова и составляет $-15 \div -17 \text{ дБ}$. Деполяризация рассеянного сигнала по-разному изменяется с углом ψ_2 для вертикальной и горизонтальной поляризации облучающего поля. Рассеянный сигнал при горизонтальной поляризации излучения слабо деполяризован, и степень его деполяризации даже несколько падает с ростом угла рассеяния. При вертикальной поляризации излучения деполяризация рассеянного сигнала существенно растет с увеличением угла рассеяния.

Наблюдается различие в спектрах амплитудных флуктуаций зеркально отраженного и рассеянного сигналов (рис. 5). Значения спектральной плотности, приведенные на рис. 5, нормированы на величину

$S_0 = \sigma^2$ (σ — среднеквадратичное отклонение), которая составляет $2,6 \cdot 10^{-2}$ для зеркально отраженного и $3,2 \cdot 10^{-3}$ для рассеянного сигналов. Спектр рассеянного сигнала более широкий; в спектре зеркального отражения наблюдается подъем низкочастотных составляющих спектра при $F < 2$ гц. При изменении угла рассеяния спектр сигнала уширяется, однако каких-либо количественных закономерностей установить не удалось.

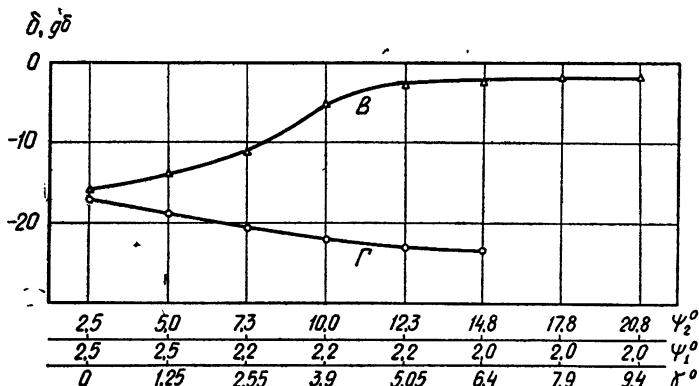


Рис. 4. Зависимость степени деполяризации δ рассеянных сигналов при вертикальной (В) и горизонтальной (Г) поляризациях излучения от углов скольжения ψ_1 и ψ_2 .

Подобный характер имеют спектры рассеяния и при вертикальной поляризации излучения, хотя на разных поляризациях наблюдаются различия в деталях. Ширина спектров на волне 10 см как для зеркально отраженных, так и рассеянных сигналов для одинаковых условий наблюдения более узкая, чем на волне 3,2 см:

$$\frac{\Delta F_\lambda = 3,2 \text{ см}}{\Delta F_\lambda = 10 \text{ см}} \approx 3.$$

Спектры сигналов деполяризованной составляющей по форме и ширине подобны спектрам сигналов согласованной поляризации. Коэффициент корреляции сигналов $E_{\text{ВВ}}$ и $E_{\text{ВГ}}$, так же как и $E_{\text{ГГ}}$ и $E_{\text{ГВ}}$, оказался малым ($\rho < 0,1$).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В [1, 3] получены данные о зеркальном отражении морской поверхностью при относительно малых параметрах Рэлея; величина $h\phi/\lambda$ не превышала 0,2 рад. Показано, что при этих значениях $h\phi/\lambda$ рассеяние даже в направлениях зеркального отражения перестает быть когерентным. Предполагается, что в этом случае некогерентное рассеяние становится не зависящим от параметра Рэлея.

В наших опытах измерения проводились одновременно (на двух волнах) при двух параметрах Рэлея, составляющих около 0,4 рад. ($\lambda = 10$ см) и 1,3 рад ($\lambda = 3,2$ см) для направления зеркального отражения. Согласно представлениям [1] наблюдение отражений при таких значениях параметра Рэлея должно было бы обеспечить условия, не зависящие от длины радиоволны. Несоответствие этому результатов, полученных на I трассе (рис. 2), можно было бы объяснить существенным различием ширины диаграмм антенн на разных волнах. Однако и на второй трассе, когда диаграммы различались лишь в 1,5 раза,

наблюдалось существенное отличие уровней отраженных сигналов на $\lambda = 3,2 \text{ см}$ и $\lambda = 10 \text{ см}$, составляющее $6 \div 8 \text{ дБ}$ для разных поляризаций. Подобного различия в приближении геометрической оптики при больших параметрах Рэлея объяснить нельзя. В работе [6] также обнаружено падение уровня отраженных сигналов; при параметрах Рэлея $h \psi / \lambda > 0,1$ (рис. 4 [6]) и при изменении $h \psi / \lambda$ в три раза это падение составляет $7,2 \text{ дБ}$. Возможным качественным объяснением увеличения уровня отражений с ростом длины радиоволны может быть меньшая относительная шероховатость рассеивающих участков морской волны на более длинной волне λ^* .

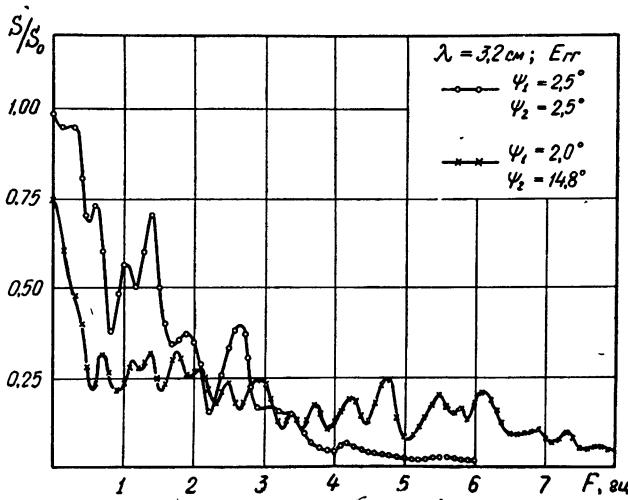


Рис. 5. Спектры амплитудных флуктуаций зеркально отраженного (○○○) и рассеянного (×××) сигналов, измеренные на волне $\lambda = 3,2 \text{ см}$ при горизонтальной поляризации излучения и приема. Трасса II.

Дополнительный учет вторичной структуры волнения (не ряби, длина которой сравнима с длиной радиоволны, а волны, высота которых порядка $\lambda!$) также может быть использован для объяснения деполяризации рассеянных сигналов, которая оказывается малой в рамках геометрической оптики.

Наконец, расширение спектра сигналов при переходе от зеркального отражения к рассеянию также можно объяснить учетом большого влияния в направлениях рассеяния мелкомасштабных волн. Действительно, с уходом от направления зеркального отражения, когда преимущественное отражение создают участки морских волн с наклонами $\gamma = 0^\circ$, в направлениях рассеяния преимущественный вклад также должны создавать участки, обеспечивающие локально-зеркальное отражение. На рис. 4 приведены значения углов наклонов γ , обеспечивающие локально-зеркальное отражение при соответствующих углах Ψ_1 и Ψ_2 . Учитывая, что большие углы наклона могут создаваться короткими (высокочастотными) морскими волнами, можно качественно объяснить уширение спектра сигналов, рассеянных в направлениях, близких к направлению зеркального отражения.

* Подобную шероховатость локально отражающих участков морских волн учтывал в своих работах Schooley.

Таким образом, радиосигналы, рассеянные поверхностью моря в направлениях, близких к зеркальному отражению, могут существенно различаться уровнями средних значений на разных поляризациях, степенью деполяризации и своими спектрами. Область зеркального отражения характеризуется примерно одинаковым отражением вертикально и горизонтально поляризованного излучений, малой деполяризацией отраженного сигнала и узким спектром, в котором подчеркнуты низкочастотные составляющие. Для рассеянных сигналов характерно: 1) превышение уровней рассеяния горизонтально поляризованного излучения над вертикально поляризованным, 2) наличие значительной деполяризации рассеяния вертикально поляризованного излучения, 3) уширение спектров со снижением вклада низкочастотных составляющих.

Отмеченные особенности проявляются тем сильнее, чем больше направление наблюдения рассеяния отличается от направления зеркального отражения.

Авторы признательны И. М. Фуксу и Е. В. Чаевскому за полезные советы при обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. I. Beard, I. Kats, L. M. Spetner, IRE Trans., AP-4, 162 (1956).
2. С. Я. Брауде, Н. Н. Комаров, И. Е. Островский, Радиотехника и электроника, 3, 172 (1958).
3. R. H. Clarke, Proc. IEE, 110, 1921 (1963).
4. L. Boethias, A. Spizzichino, C. Taieb, Electromagnetic Theory and Antennas, part II, Pergamon Press, 1963, p. 763.
5. I. M. Hunter, T. B. A. Senior, Proc. IEE, 113, 1731 (1966).
6. C. I. Beard, IEEE Trans., AP-9, 470 (1961).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
21 февраля 1973 г.

SOME CHARACTERISTICS OF RADIO SIGNALS SCATTERED BY THE SEA SURFACE IN THE DIRECTIONS CLOSE TO THE DIRECTION OF MIRROR REFLECTION

*A. I. Kalmykov, A. S. Kurekin, V. Yu. Levantovskii, I. E. Ostrovskii,
V. V. Pustovoytenko*

The results of measuring the polarization, energetic and spectral characteristics of the signals scattered by the sea surface in the directions close to the direction of mirror reflection are given. Experiments are made at the wavelengths of 32 and 10 cm at the linear polarization of radiation and reception using high directional antennas.

The characteristics of the signals of mirror reflection and those of scattered in other direction are different.

УДК 621.371.246

О ВЛИЯНИИ ПОЛОСЫ ПОГЛОЩЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО КИСЛОРОДА НА АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ РАДИОВОЛН МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА*

Л. И. Шарапов, А. С. Брюховецкий, И. Х. Ваксер, В. А. Комяк

Приводятся результаты одновременных измерений амплитудных флуктуаций радиоволн в полосе поглощения атмосферного кислорода ($\nu \approx 60$ Гц) и за ее пределами ($\nu \approx 74$ Гц). Экспериментальные значения дисперсий флуктуаций уровней сигналов удовлетворительно совпадают с расчетными, полученными на основе метода плавных возмущений. Для получения теоретических значений дисперсий в линии поглощения проведен расчет производной коэффициента поглощения по температуре в зависимости от частоты.

Влияние поглощения волн субмиллиметрового диапазона в водяном паре атмосферы на амплитудные флуктуации сигнала при его распространении в турбулентной атмосфере рассматривалось в работах [1–3]. В настоящей работе приведены результаты исследований амплитудных флуктуаций радиоволн в полосе поглощения молекулярного кислорода приземного слоя атмосферы ($\nu = 60,3; 64$ Гц) и за ее пределами ($\nu = 74$ Гц). На указанных частотах флуктуации поглощения зависят от вариаций температуры и давления газов атмосферы. В связи с тем, что пульсации давления очень малы, можно ограничиться рассмотрением влияния пульсаций температуры на флуктуации коэффициента поглощения. Используя выражение для коэффициента поглощения [4], можно показать, что

$$\frac{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_{\nu=\nu_K}}{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_{|\nu-\nu_K|} \gg 1} \sim \frac{(\gamma)_{\nu=\nu_K}}{(\gamma)_{|\nu-\nu_K|} \gg 1} \gg 1,$$

где ν — частота сигнала, а ν_K — центральная частота линии поглощения.

Для получения численных данных по флуктуациям поглощения в кислороде был произведен расчет производной коэффициента поглощения по температуре $\frac{\partial \gamma}{\partial T}$, где γ определялось по формуле, полученной в работе [4]. Результаты счета приведены на рис. 1. Как видно из рисунка, производные коэффициента поглощения по температуре в центре линии поглощения и за ее пределами отличаются почти на два порядка.

Расчет дисперсии флуктуаций уровня σ_x^2 производился по формуле,

* Основные результаты работы доложены на Всесоюзной конференции по радиометеорологии (г. Фрунзе, 19–21 июня 1972 г.).

полученной Гурвичем на основе метода плавных возмущений [2]. Если комплексный показатель преломления записать в виде $1+n+im$, то

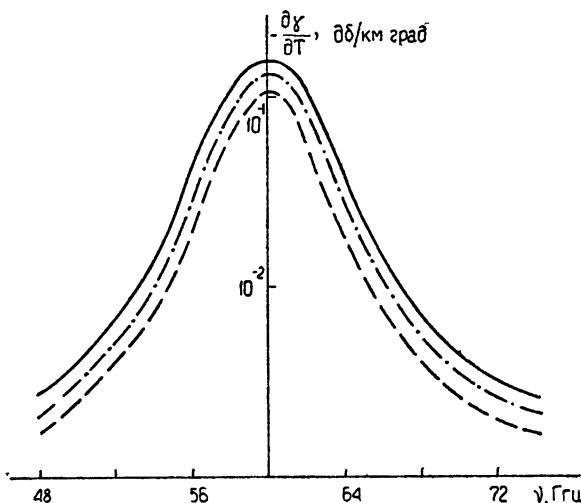


Рис. 1. Зависимость производной коэффициента поглощения по температуре от частоты в полосе поглощения атмосферного кислорода; — $T = 270\text{K}$, - - - $T = 290\text{K}$, - - - $T = 310\text{K}$.

$$\begin{aligned} \sigma_{\chi}^2 = & 0,033\pi^2 k_0^{7/6} L^{11/6} \left\{ B_1(\beta_0) \left[\left(\frac{\partial n}{\partial T} \right)^2 C_T^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial q} \right)^2 C_q^2 \right] - \right. \\ & - 2B_2(\beta_0) \left[\frac{\partial n}{\partial T} \frac{\partial m}{\partial T} C_T^2 + \frac{\partial n}{\partial q} \frac{\partial m}{\partial q} C_q^2 \right] + \\ & \left. + B_3(\beta_0) \left[\left(\frac{\partial m}{\partial T} \right)^2 C_T^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial q} \right)^2 C_q^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$B_1(\beta_0) = \beta_0^{11/6} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin \xi}{\xi} \right) \frac{d\xi}{(1 + \beta_0 \xi)^{11/6}},$$

$$B_2(\beta_0) = \beta_0^{11/6} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \xi}{\xi (1 + \beta_0 \xi)^{11/6}} d\xi,$$

$$B_3(\beta_0) = \beta_0^{11/6} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\sin \xi}{\xi} \right) \frac{d\xi}{(1 + \beta_0 \xi)^{11/6}}$$

— интегралы, протабулированные в работе [2], $k_0 = \frac{2\pi v}{c}$ — волновое число, $\beta_0 = k_0 L_0^2 L^{-1}$, L_0 — внешний масштаб турбулентности в приземном слое, L — длина трассы, q — влажность. Значения производных при расчетах были взяты следующие:

$$\frac{\partial n}{\partial T} = -1,2 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{\partial n}{\partial q} = 0,7 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{\partial m}{\partial q} = 2,1 \cdot 10^{-6}.$$

Характерные величины структурных постоянных выбирались такие же, как в работе [2]:

$$C_T = 0,1^\circ\text{K } \text{см}^{-1/3}, \quad C_q = 10^{-5} \text{ см}^{-1/3}.$$

Так как в миллиметровом диапазоне волн величины $\frac{\partial n}{\partial T}$ и $\frac{\partial n}{\partial q}$ практически постоянны [5], то влияние линии поглощения на амплитудные флуктуации радиосигнала описывается вторым и третьим слагаемыми выражения (1). Слагаемое, содержащее действительную и мнимую части показателя преломления, приводит к уменьшению дисперсии уровня. Пульсации коэффициента поглощения вызывают увеличение амплитудных флуктуаций сигнала. Преобладающее влияние того или иного фактора зависит от параметра β_0 . Если $\beta_0 \ll 10^2$, преобладающее значение имеет перекрестный (второй) член формулы (1) и, следовательно, в линии поглощения может наблюдаться незначительное уменьшение флуктуаций амплитуды сигнала. Величина минимума в центре линии поглощения при кармановском спектре флуктуаций температуры составляет примерно 0,95. При $\beta_0 \approx 10^2$ поглощение практически не сказывается на флуктуационных характеристиках сигнала.

С увеличением β_0 вклад флуктуаций поглощения увеличивается и при $\beta_0 \approx 10^3$ становится сравнимым с флуктуациями, обусловленными действительной частью показателя преломления. Таким образом, при наличии на трассе крупномасштабных неоднородностей в центре линии поглощения дисперсия уровня сигнала, в основном, определяется флуктуациями коэффициента поглощения.

Экспериментальные исследования амплитудных характеристик радиосигналов производились с помощью двухканальной измерительной установки. На рис. 2 представлена функциональная схема одного из

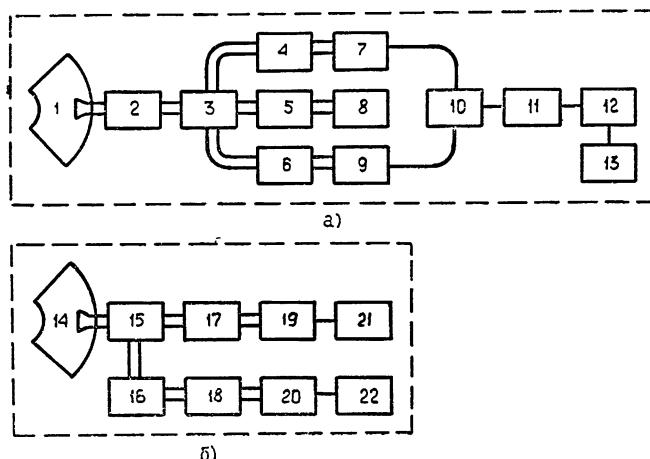


Рис. 2. Функциональная схема одного из каналов измерительной установки:

a) приемное устройство:

1—антенна, 2—аттенюатор, 3—двойной волноводный тройник, 4, 6—согласователи, 5—развязывающий аттенюатор, 7, 9—кристаллические смесители, 8—клистронный гетеродин, 10, 11—балансный УПЧ, 12—УНЧ, 13—самописец;

b) передающее устройство:

14—антенна, 15—направленный ответвитель 16—коэффициент 17—аттенюатор, 18—согласователь, 19—клистронный генератор, 20—детектор, 21—блок питания клистрона, 22—индикатор уровня мощности.

каналов, состоящего из передающего (а) и приемного (б) устройств. В передающих устройствах использовались отражательные кlyстроны, модулированные «меандром» с частотой повторения 4 кгц. Во время измерений производился контроль уровня излучаемой мощности.

Приемные устройства были собраны по супергетеродинной схеме с кlyстронными гетеродинами, стабильность частоты которых за время записи составляла 10^{-5} . В передающей и приемной системах измерительной установки использовались двухзеркальные антенные системы Кассегрена с диаметром основного зеркала 1100 мм.

Потенциал измерительной аппаратуры позволял производить запись сигналов при отсутствии собственных шумов аппаратуры на выходе регистрирующего устройства. С помощью многоканального самописца типа Н-700 производилась запись амплитуд сигналов на двух волнах одновременно. Длительность записи составляла 2—3 минуты. Частотные характеристики приемных систем позволяли производить запись флюктуаций с частотой до 50 гц. Измерения проводились над достаточно гладкой степной поверхностью на различной высоте при расстояниях между приемниками и передатчиками 550, 820 и 1700 м.

Высота трассы $L = 820$ м примерно в 2,5 раза превышала высоту остальных, т. е. параметр β_0 для нее отличался не столько за счет протяженности трассы L , сколько за счет внешних масштабов неоднородностей в приземном слое L_0 .

Значения амплитуд сигналов вводились в ЭВМ с интервалом 0,1 сек. С помощью ЭВМ вычислялись коэффициент вариации, функция автокорреляции, энергетический спектр сигнала. Расчетные и экспериментальные значения дисперсий амплитуд сигналов приведены в таблице.

Таблица 1

Длина трассы, м	Частота I канала, Ггц	Частота II канала, Ггц	Расчетные данные		Результаты эксперимента — σ_I^2/σ_{II}^2
			σ_I^2/σ_{II}^2 ($L_0 = 2h$)	σ_I^2/σ_{II}^2 ($L_0 = 4h$)	
550	60,3	73,7	1,19	1,65	$1,6 \pm 3,6$
1700	60,3	69,0	1,04	1,42	$1,4 \pm 3,5$
820	60,3	73,7	1,3	3,5	$2,6 \pm 6,2$
820	64,0	73,7	0,98	1,3	$0,96 \pm 1,2$

Как видно из таблицы, наблюдается качественное согласие расчетных и экспериментальных значений отношений дисперсий флюктуаций амплитуд в линии поглощения (I канал) и за ее пределами (II канал). Флюктуации уровня сигнала в значительной степени зависят от внешнего масштаба неоднородностей L_0 , величина которого изменяется в широких пределах в зависимости от метеоусловий. Согласие расчетных и экспериментальных данных в нашем случае становится вполне удовлетворительным, если значение L_0 брать равным 4 h (h — высота трассы над уровнем подстилающей поверхности).

Таким образом, в линии поглощения атмосферного кислорода при наличии крупномасштабных неоднородностей на трассе возможно возрастание амплитудных флюктуаций радиоволн, так как в этом случае дисперсия вариаций уровня сигнала обусловлена, в основном, пульсациями коэффициента поглощения. Поглощение волн субмиллиметрового диапазона в водяном паре атмосферы также может приводить к значительному возрастанию амплитудных флюктуаций сигнала [9]. В выводах работ [1, 3, 6] говорится лишь о двух других возможностях — отсутствии влияния поглощения на флюктуации сигнала или их сглаживании.

Как уже отмечалось, с целью выяснения влияния линии поглощения на временные характеристики радиосигнала с помощью ЭВМ определялись функция автокорреляции и энергетический спектр сигнала.

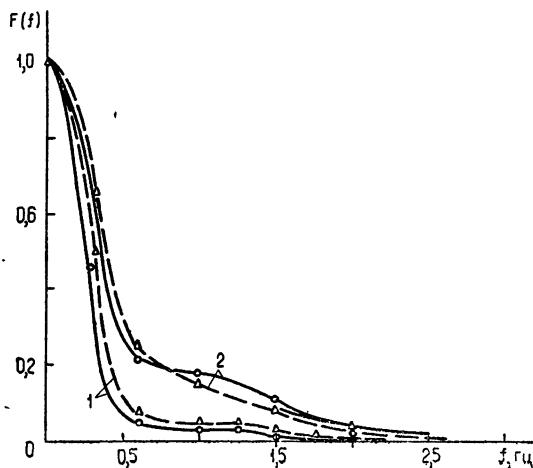


Рис. 3. Нормированные спектры флюктуаций амплитуд сигналов на волнах 4 и 5 мм;
 $1 - v_{\perp} = 1 \div 2$ м/сек, $2 - v_{\perp} = 2 \div 3$ м/сек, — $\lambda = 5$ мм,
 $\cdots \cdots \lambda = 4$ мм.

На рис. 3 в качестве примера приведены нормированные спектры флюктуаций амплитуд сигналов на частотах $v_1 = 74$ Гц (пунктирная кривая) и $v_2 = 60,3$ Гц (сплошная кривая). Здесь $F(f) = \bar{W}(f)/\bar{W}(0)$, где $\bar{W}(f)$ — фурье-преобразование временной корреляционной функции флюктуации уровня. Кривые 1 соответствуют значениям составляющей скорости ветра, перпендикулярной направлению распространения радиоволн, v_{\perp} , до 1 м/сек; кривые 2 соответствуют $v_{\perp} = 2 \div 3$ м/сек. Как видно из рис. 3, спектры f_1 и f_2 отличаются по ширине незначительно и удовлетворительно совпадают с зависимостью ширины спектра от частоты в отсутствие поглощения [7]. Это, очевидно, связано с малой скоростью переноса неоднородностей. Как следует из работы [8], перераспределение энергии в сторону высокочастотных составляющих при наличии поглощения существенно увеличивается при возрастании попечерной составляющей скорости ветра (до $5 \div 10$ м/сек).

В заключение авторы считают приятным долгом выразить благодарность А. С. Гурвичу за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Изюмов, Радиотехника и электроника, 13, 1155 (1968).
2. А. С. Гурвич, Радиотехника и электроника, 13, № 11, 1923 (1968).
3. Н. А. Арманд, А. О. Изюмов, А. В. Соколов, Радиотехника и электроника, 16, № 8, 1333 (1971).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 987 (1965).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 12, № 6, 955 (1967).
6. Н. А. Арманд, А. О. Изюмов, Б. Н. Полевой и др., Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, 4, 98 (1972).
7. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изв. АН СССР, М., 1959
8. А. О. Изюмов, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1865 (1969).
9. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 12, 1939 (1972).

THE INFLUENCE OF MOLECULAR OXYGEN ABSORPTION BAND ON
AMPLITUDE FLUCTUATIONS OF MILLIMETER RADIO WAVES

L. I. Sharapov, A. S. Bryukhovetskiy, I. Kh. Vakser, V. A. Komyak

The results of simultaneous measurements of radio wave amplitude fluctuations within molecular oxygen band ($\nu \approx 60$ Gc/s) and outside it ($\nu \approx 74$ Gc/s) are presented. Experimental values of the dispersions of signal level fluctuations agree satisfactorily with the calculated ones obtained on the basis of the smooth perturbation method. A calculation is made of the derivative of the absorption coefficient with respect to the temperature as dependent on the frequency to obtain theoretical values of the dispersion in the absorption line band.

УДК 621.373.826

О ПРИМЕНИМОСТИ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МНОГОМОДОВОГО ЛАЗЕРА

A. M. Ратнер, A. M. Фишер

Устанавливаются границы применимости балансных уравнений в форме, используемой в теории твердотельного лазера, генерирующего поле с многомодовой продольной и поперечной структурой. От рассмотренных в литературе случаев одной моды или чисто аксиального спектра данное рассмотрение отличается не только по методике и по виду полученных критериев применимости, но и в том отношении, что только для поля с развитой поперечной структурой могут быть реально выполнены условия, позволяющие опустить в уравнениях баланса все фазовые соотношения и привести их тем самым к наиболее распространенному виду.

Последовательное описание лазерной системы активное вещество—электромагнитное поле осуществляется с помощью уравнений Максвелла, которые можно свести к виду

$$c^2(\Delta - \text{grad} \text{ div}) E = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{1}{2\tau} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1)$$

(ω — добротность резонатора, $1/c\tau$ — световые потери на единицу длины), и уравнения для матрицы плотности вещества ρ , связывающего поляризацию среды P с электрическим полем E . Так как решение этой системы уравнений, вообще говоря, связано с серьезными математическими трудностями, то электромагнитное поле лазера чаще всего исследуют с помощью балансных уравнений, в той или иной степени игнорирующих фазовые соотношения лазерной системы и обладающих ограниченной применимостью [1, 2].

Уравнения баланса ранее были получены из микроскопических уравнений лишь в одномодовом случае* [9–14], а также в случае чисто аксиального спектра с разностными частотами, превышающими обратное время жизни фотона [11]. Однако обычный твердотельный лазер генерирует большое число как продольных, так и поперечных мод. Для такого существенно многомодового лазера применимость балансных уравнений ранее не исследовалась.

В настоящей работе получена область применимости уравнений баланса для существенно многомодового лазера. Как показано ниже, только в существенно многомодовом случае могут быть реально выполнены условия, позволяющие опустить в балансных уравнениях все фазовые соотношения и тем самым привести их к наиболее распространенному виду, широко используемому в теории твердотельного лазера.

Сначала (разд. 1) введем адиабатическую концепцию, в рамках которой вещество описывается уравнением баланса, а поле—уравне-

* Мы не останавливаемся здесь на ряде работ, например, [3, 4], в которых не учитываются координатные фазовые соотношения, принципиально важные в случае твердотельных ОКГ [5–8] (в пренебрежении координатными фазовыми соотношениями временные также фактически выпадают из уравнений).

ниями Максвелла в приближении диэлектрической проницаемости, причем в обоих случаях уравнения сохраняют все фазовые соотношения (временные и координатные). В разд. 2 получены условия, позволяющие исключить из уравнений временные фазовые соотношения и преобразовать уравнения Максвелла к виду балансного уравнения для мод. Наконец, в разд. 3 рассмотрен случай, когда из уравнений выпадают все фазовые соотношения.

1. АДИАБАТИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ, ИЛИ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Балансные уравнения в любой форме игнорируют соотношение неопределенности для энергии. Поэтому всякое уравнение баланса применимо лишь в адиабатическом случае, когда размытие рабочих уровней, обусловленное нестационарностью их заполнения, мало по сравнению с шириной усиления Г. Поскольку заселенности уровней изменяются как в силу кинетических процессов с характерным временем τ_k , так и вследствие изменения интенсивности поля с частотой межмодовых биений (при фиксированных амплитудах), то условие адиабатичности сводится к одновременному выполнению неравенств

$$\tau_k \ll \Gamma^{-1}; \quad (2)$$

$$\delta\omega \ll \Gamma, \quad (3)$$

где $\delta\omega$ — ширина спектра генерации.

Покажем, что при выполнении условий адиабатичности система активное вещество — поле описывается следующим образом.

1) Электрическое поле

$$\mathbf{E} = \sum_k E_k(\mathbf{r}) \cos \Phi_k, \quad \Phi_k = \int \omega_k dt + \varphi_k \quad (4)$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в приближении диэлектрической проницаемости сводятся к уравнению вида*

$$\epsilon^2 (\Delta - \operatorname{grad} \operatorname{div}) \mathbf{E} = \hat{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad (5)$$

$$\hat{\epsilon} \mathbf{E} = \sum_k [\epsilon'(\omega_k) E_k \cos \Phi_k + \epsilon''(\omega_k) E_k \sin \Phi_k], \quad (6)$$

где $\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость.

2) $\epsilon'(\omega)$ и $\epsilon''(\omega)$ связаны тем же дисперсионным соотношением, что и в линейном по полю случае:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\epsilon''(\omega')}{\omega - \omega'}; \quad (7)$$

$$\epsilon''(\omega) = \frac{1}{2\omega_{21}\tau} - \frac{\chi(\omega)}{k_0}, \quad \chi(\omega) = \frac{4\pi d_{12}^2 \omega \Gamma N}{\hbar c [\Gamma^2 + (\omega - \omega_{21})^2]}. \quad (8)$$

3) Инверсная заселенность N удовлетворяет уравнению баланса

$$\dot{N} = -2\gamma N - \frac{c \chi_0 E^2}{4\pi \hbar \omega_{21}} + \Lambda. \quad (9)$$

* Для упрощения записи здесь и далее мы не учитываем нерезонансную часть ϵ , т. е. полагаем $\epsilon = 1$ вдали от ω_{21} .

Здесь $\kappa(\omega)$ — коэффициент усиления, ω_{21} — частота рабочего перехода, d_{12} — матричный элемент дипольного момента между рабочими уровнями, $x_0 = \kappa(\omega_{21})$, $k_0 = \omega_{21}/c$, Λ — скорость накачки, $(2\gamma)^{-1}$ — время жизни верхнего и нижнего рабочих уровней*.

Будем исходить из уравнения для матрицы плотности атомов ρ , учитывающего релаксационные процессы и накачку [15]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{aa} &= -2\gamma\rho_{aa} - iF(\rho_{ab} - \rho_{ba}) + \lambda_a, \\ \dot{\rho}_{ab} &= (i\omega_{ba} - \Gamma)\rho_{ab} + iF(\rho_{bb} - \rho_{aa}), \\ F &= \frac{Ed_{ab}}{\hbar} \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta)\end{aligned}\quad (10)$$

(λ_a — скорость накачки соответствующего уровня; как обычно, предполагается, что $d_{ab} = d_{ba}$ и $d_{aa} = 0$).

Уравнения (10) нетрудно преобразовать в систему уравнений** для поляризации P и инверсной заселенности N :

$$\dot{P} + 2\Gamma P + \omega_{21}^2 P = -2\omega_{21}d_{12}FN; \quad (11)$$

$$\dot{N} = -2\gamma N + \frac{2FP}{\omega_{21}d_{12}} + \Lambda; \quad (12)$$

$$P = d_{12}(\rho_{12} + \rho_{21}), \quad N = (\rho_{22} - \rho_{11}), \quad \Lambda = \sum(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (13)$$

(суммирование по единице объема; здесь и далее удержаны лишь члены наименьшего порядка малости по параметру Γ/ω_{21}).

Выведем соотношения (4) — (9) из уравнений (11), (12) в адиабатическом случае. Будем искать решение уравнения (11) в виде

$$P = \sum_k [P'_k \cos \Phi_k + P''_k \sin \Phi_k], \quad \Phi_k = \int \omega_k dt + \varphi_k. \quad (14)$$

Подставляя (14) и (4) в уравнение (11) и удерживая лишь первые производные от медленно изменяющихся величин P'_k , P''_k , имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \right) P'_k + (\omega_k - \omega_{21}) P''_k &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \right) P''_k - (\omega_k - \omega_{21}) P'_k &= -\omega_{21} d_{12} F_k N, \quad F_k = \frac{E_k d_{12}}{\hbar}.\end{aligned}\quad (15)$$

Предположим для простоты зависимость $N(t)$ экспоненциальной: $N = N_0 \exp(-t/\tau_N)$. Тогда решение уравнений (15) имеет вид

$$\begin{aligned}4\pi P'_k &= [\epsilon'(\omega_k + \Gamma/\omega_k \tau_N) - 1] E_k, \\ 4\pi k_0 P''_k &= -\kappa(\omega_k + \Gamma/\omega_k \tau_N) E_k,\end{aligned}\quad (16)$$

где зависимости $\epsilon'(\omega)$ и $\kappa(\omega)$ даются выражениями (7), (8). Пренебрежем в аргументе ϵ вторым слагаемым, малым по сравнению с $\Gamma^2/\omega_{21} \ll$

* Для упрощения изложения мы полагаем $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ (индексы 1 и 2 относятся к нижнему и верхнему рабочим уровням). При $\gamma_2 < \gamma_1$ полученные далее результаты сохраняют силу, если положить $\gamma = \gamma_2$ (при $\gamma_2 > \gamma_1$ инверсная заселенность не может быть создана).

** Уравнения, аналогичные (11), (12), были также получены (с непринципиальными отличиями) в [1, 16, 17].

« Г. Подставляя (4), (14), (16) в уравнение (1) и пренебрегая членами, квадратичными по малым параметрам χ/k_0 , $\delta\omega/\omega_{21}$, получаем волновое уравнение в ϵ -приближении (5) — (8).

Чтобы вывести балансное уравнение для инверсной заселенности, подставим (4), (14), (16) в (12), пренебрегая на основании (3) дисперсией ϵ . После усреднения по периоду поля высокочастотные члены уравнения (12) выпадут, и мы получим уравнение баланса (9).

2. СЛУЧАЙ ИЗЛУЧЕНИЯ С МАЛОЙ ВРЕМЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТЬЮ

1. Уравнения баланса, содержащие координатные фазовые соотношения. Постановка задачи. Уравнения ϵ -приближения (4) — (9) математически сложны в силу того, что они учитывают все (временные и координатные) фазовые соотношения, т. е. содержат осциллирующие члены.

Если при подстановке (4) и (16) в (12) пренебречь в правой части осциллирующими слагаемыми (но по причине, указанной далее, учесть дисперсию ϵ), то вместо (9) получим уравнение

$$\dot{N} = -2\gamma N - \frac{c}{4\pi\hbar\omega_{21}} \sum_n \chi(\omega_n) |E_n|^2 + \Delta. \quad (17)$$

Волновое уравнение (5) в случае малой временной когерентности также может быть преобразовано к виду уравнения баланса для интегральной интенсивности I_n каждой из генерируемых мод:

$$\dot{I}_n = I_n \left\{ \frac{c \int \bar{\chi}(r, t, \omega_n) |E_n(r)|^2 dr}{\int |E_n(r)|^2 dr} - \frac{1}{\tau} \right\}. \quad (18)$$

Здесь в правой части фигурирует неосциллирующая часть $\bar{\chi}$ коэффициента усиления, усредненная по объему резонатора с весом пространственного распределения интенсивности.

Уравнения (17), (18), учитывающие только координатные фазовые соотношения, применимы при условии, что осциллирующая с разностными частотами часть \tilde{N} инверсной заселенности не влияет на описываемое уравнением (5) поле. Отсюда мы сначала получим соответствующее ограничение на $|\tilde{N}|$ (п. 2), а затем, вычисляя \tilde{N} с помощью уравнения (12), раскроем это ограничение в терминах параметров задачи (п. 3). При этом будем предполагать выполненным условие адиабатичности (2). Неравенство (3) может не выполняться, поскольку ввиду пренебрежимой малости $|\tilde{N}|$ требование медленности осцилляций является излишним*.

2. Ограничение на осциллирующие члены. Получим ограничение на осциллирующий член N , при котором он не влияет на решение волнового уравнения (5). Рассмотрение проведем в адиабатическом базисе, образованном собственными колебаниями уравнения

$$c^2 (\Delta - \text{grad div}) E_n = - \left\{ 1 - \frac{i}{k_0} \left[\chi(r, t, \omega_n) - \frac{1}{c\tau} \right] \right\} \omega_n^2 E_n. \quad (19)$$

В первом приближении теории возмущений по коэффициенту усиления χ собственные функции и собственные значения уравнения (19) есть

* Если (3) не выполняется, то необходимо учитывать дисперсию ϵ , а балансное уравнение для вещества записывать в виде (17).

$$E_n = E_n^0 + \frac{ic}{2} \sum_p \frac{\chi_{pn} E_p^0}{\omega_p^0 - \omega_n^0}; \quad (20)$$

$$\omega_n = \omega_n^0 + \frac{ic}{2} \left(\chi_{nn} - \frac{1}{c\tau} \right), \quad \chi_{pn} = \int (E_p^0)^* E_n^0 \times d\mathbf{r}. \quad (21)$$

Здесь ω_n^0 — частоты ортонормированных собственных колебаний E_n^0 пассивного резонатора.

Разложение (20) применимо при условии $|c \chi_{mn}/\delta\omega_{\min}| \ll 1$, где $\delta\omega_{\min}$ — минимальный спектральный интервал между модами, χ_{mn} — соответствующий матричный элемент. Разделяя в этом неравенстве осциллирующую ($\chi \propto \tilde{N}$) и неосциллирующую ($\bar{\chi} \propto \bar{N}$) части χ , запишем его так:

$$\frac{c |\bar{\chi}_{mn}|}{\delta\omega_{\min}} \ll 1; \quad (22)$$

$$\frac{c |\tilde{\chi}_{mn}|}{\delta\omega_{\min}} \ll 1. \quad (23)$$

Условия (22), (23) обеспечивают близость фактических мод к модам пассивного резонатора, или, короче, практическое отсутствие деформации мод.

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$E = \sum_m a_m(t) E_m(\mathbf{r}, t) \exp(-i \int \omega_m dt). \quad (24)$$

Подставляя это в (5) и удерживая члены, линейные по малым параметрам x/k_0 , $1/\omega\vartheta$ (ϑ — характерное время кинетического процесса), получим уравнение для коэффициентов a_n :

$$\dot{a}_n = \frac{ic}{2} \sum_p' a_p \dot{\chi}_{pn} (\omega_p^0 - \omega_n^0)^{-1} \exp[i \int (\omega_n - \omega_p) dt].$$

Отсюда следует оценка для относительного изменения величины $|a_n|$ на протяжении генерации:

$$\left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right| \leq c \sum_p' \left| \frac{\Delta \chi_{pn}}{\omega_p^0 - \omega_n^0} \right| \leq \frac{c |\bar{\chi}_{mn}|}{\delta\omega_{\min}} + \frac{c |\tilde{\chi}_{mn}|}{\delta\omega_{\min}}. \quad (25)$$

Из разложения (24) с учетом (20), (21) вытекает, что интегральная интенсивность n -й моды есть

$$I_n = |a_n|^2 \int |E_n|^2 \exp[2 \operatorname{Im} \int \omega_n dt] d\mathbf{r} = |a_n|^2 \exp \left[c \left(\chi_{nn} - \frac{1}{c\tau} \right) \right].$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим уравнение

$$\frac{\dot{I}_n}{c I_n} = \bar{\chi}_{nn} - \frac{1}{c\tau} - \frac{\bar{\chi}_{nn} (\omega_n - \omega_{21})^2}{\Gamma^2 + (\omega_n - \omega_{21})^2} + \tilde{\chi}_{nn} + \frac{2}{|a_n|} \frac{\partial}{\partial t} |\bar{a}_n + \tilde{a}_n|. \quad (26)$$

Правая часть (26) представлена в виде суммы осциллирующих и неосциллирующих слагаемых (одновременно выделена зависящая от частоты часть χ).

Сформулируем теперь ограничения на осциллирующие слагаемые правой части (26), при которых последние не влияют на поле. Относительно слагаемого $|\tilde{a}_n/a_n|$ достаточно потребовать, чтобы вызванное им относительное изменение интенсивности моды $\Delta I_n/I_n$ было мало по сравнению с единицей, т. е. $|\Delta a_n/a_n| \ll 1$. С учетом (25) это условие сводится к неравенству (23).

Для того, чтобы уравнения, не содержащие осциллирующих членов, были применимы к исследованию кинетических процессов, достаточно потребовать малости $|\tilde{x}_{nn}|$ по сравнению с левой частью уравнения (26), $\dot{I}_n/cI_n \sim (c\vartheta)^{-1}$:

$$|\tilde{x}_{nn}| \ll (c\vartheta)^{-1}. \quad (27)$$

Если же исследуется спектр генерации, то должно выполняться условие малости $|\tilde{x}_{nn}|$ по сравнению с зависящим от частоты слагаемым в правой части (26):

$$|\tilde{x}_{nn}| \ll \frac{\delta\omega^2}{\Gamma^2}. \quad (28)$$

3. Критерий применимости балансного уравнения для вещества. Для конкретизации неравенств (23), (27), (28) необходимо вычислить инверсную заселенность N . Решая уравнение (12) после подстановки в него выражений (4), (14), (16) и пренебрежения дисперсией ε (несущественной для дальнейших оценок), получим

$$N = \Lambda \int_{-\infty}^t dt' \exp \left[\int_t^{t'} dt'' \left(2\gamma + \frac{1}{\Gamma} \sum_k F_k^2 + \frac{1}{\Gamma} \sum_{k \neq p} F_k F_p \cos \Phi_{kp} \right) \right] \quad (29)$$

($\Phi_{kp} = \int \omega_{kp} dt + \varphi_k - \varphi_p$, $\omega_{kp} = \omega_k - \omega_p$; высокочастотные слагаемые выпали после усреднения по периоду поля).

Разобьем N на осциллирующую часть \tilde{N} , содержащую произведения амплитуд разных мод, и неосциллирующую ($\bar{N} \gg \tilde{N}$):

$$\bar{N} = \Lambda \int_{-\infty}^t dt' \exp \left[\int_t^{t'} dt'' \left(2\gamma + \frac{1}{\Gamma} \sum_k F_k^2 \right) \right]; \quad (30)$$

$$\tilde{N} = \frac{1}{\Gamma} \sum_{k \neq p} \int_{-\infty}^t dt' \exp \left[\int_t^{t'} dt'' \left(2\gamma + \frac{1}{\Gamma} \sum_k F_k^2 \right) \right] \int_{t'}^t dt''' F_k F_p \cos \Phi_{kp}. \quad (31)$$

Амплитуды мод совершают, вообще говоря, релаксационные колебания. Считая их для простоты периодическими, положим $F_k = F_k^0 + F'_k \sin \Omega t + \dots$. При вычислении внутреннего интеграла в (30), (31) можно считать $F_k^2 = \bar{F}_k^2$ (черта — усреднение по времени). В самом деле, основной вклад во внешний интеграл вносит область $t - 2\gamma \leq t' \leq t$, но в этой области вклад колеблющегося слагаемого во внутренний интеграл мал по сравнению со вкладом постоянного слагаемого в отношении $\gamma/\Omega \ll 1$. С учетом этого интегралы в (30), (31) легко вычисляются; сравнивая значения \bar{N} в случаях конечного и бесконечно малого превышения порога генерации и учитывая, что \bar{N} практически не зависит от накачки, получаем оценку для интенсивностей мод

$$\bar{F}_k^2 \sim 2\gamma\Gamma\zeta/Z, \quad (32)$$

где $\zeta = (\Lambda - \Lambda_{\text{пор}})/\Lambda_{\text{пор}}$ — относительное превышение накачкой своего порогового значения, Z — число генерируемых мод.

Выражение (31) с учетом (32) приобретает вид

$$\frac{\tilde{N}}{N} = \frac{1}{\Gamma} \sum_{k \neq p} F_k^0 F_p^0 \exp[-i(\varphi_k - \varphi_p)] \left\{ \frac{\exp(-i \int \omega_{kp} dt)}{i \omega_{kp} + 2\gamma(1 + \zeta)} + \frac{b_{kp} \exp(-i \int \omega'_{kp} dt)}{i \omega'_{kp} + 2\gamma(1 + \zeta)} + \right. \\ \left. + \dots \right\}, \quad |b_{kp}| \leq 1 \quad (33)$$

($\omega'_{kp} = \omega_{kp} - \Omega$). Второе слагаемое в фигурных скобках отличается от первого лишь началом отсчета разностных частот. Поскольку для твердотельного лазера $\Omega \ll \delta\omega$, то эти слагаемые однотипны: они совпадают по порядку величины и осциллируют с частотой* порядка $\gamma(1 + \zeta) \ll \delta\omega$ (существенный вклад в сумму (33) вносят лишь слагаемые с $\omega_{kp} \sim \gamma(1 + \zeta)$). Поэтому при дальнейших оценках будем рассматривать лишь первый член в фигурных скобках выражения (33).

С помощью (33) раскроем неравенства (23), (27), (28). Для оценки матричного элемента $\tilde{x}_{mn} \propto \tilde{N}_{mn}$ будем считать моды плоскими волнами (что не может повлиять на результат оценки при $Z \gg 1$), т. е. положим

$$F_{mpq}^0 = A_{mpq} \sin \frac{\pi mz}{l} \sin \frac{\pi px}{a} \sin \frac{\pi qy}{b} \quad (34)$$

(m — продольный индекс) и используем в качестве базиса нормированные функции вида (34). Подставляя (34) в выражение (33) и вычисляя матричный элемент последнего, с учетом (32), получим

$$\tilde{N}_{nrs, n'r's'} = -\frac{2\gamma\zeta}{Z} \bar{N} \sum'_{\substack{mpq \\ m'p'q'}} \frac{\exp(-i\Phi_{mpq, m'p'q'}) \Delta_{nm} \Delta_{n'm'} \Delta_{rp} \Delta_{r'p'} \Delta_{sq} \Delta_{s'q'}}{i\omega_{mpq, m'p'q'} + 2\gamma(1 + \zeta)}, \quad (35)$$

$$\Delta_{rp} \Delta_{r'p'} = \int_0^\pi du \sin ru \sin pu \sin r'u \sin p'u = \frac{\pi}{8} \sum_{+, -} (\pm \delta_{r \pm p \pm r' \pm p'}).$$

Матричный элемент (35) существенно зависит от структуры спектра генерации.

Ограничимся следующими наиболее важными случаями: 1) чисто продольный спектр, 2) спектр со слабо развитой поперечной структурой, когда $\delta\omega_\perp \ll \Delta$ ($\delta\omega_\perp$ — спектральный интервал, охватываемый поперечными модами с фиксированным продольным индексом, Δ — расстояние между продольными модами), 3) спектр с сильно развитой поперечной структурой [7], когда $\delta\omega_\perp \gg \delta\omega_\parallel$ ($\delta\omega_\parallel$ — ширина продольного спектра, генерируемого при тех же условиях в плоском резонаторе) [6].

Проведем подробное рассмотрение лишь в наиболее сложном случае 2), когда наименьшей разностной частоте соответствует переход

* Заметим, что в силу соотношения $\gamma \ll \Omega$, справедливого для обычного твердотельного лазера, эти частоты далеки от частоты релаксационных колебаний Ω . Отсутствие резонанса между величиной (33) и релаксационными колебаниями фактически использовалось нами при выводе условия (27), обеспечивающего малость возмущения,

вносимого членом \tilde{N} в решение волнового уравнения на протяжении периода релаксационных колебаний. При наличии же резонанса, когда возмущение накапливается от периода к периоду, правую часть неравенства (27) пришлось бы умножить на отношение периода к полной длительности генерации.

с сохранением продольного индекса. Соответственно, в левой части (23), (35) фигурирует матричный элемент, диагональный по продольному индексу. Учитывая, что основной вклад в сумму (35) вносят диагональные по продольному индексу m слагаемые, а величина $\Phi_{mpq, mp'q'}$ от m не зависит, приведем (35) к виду

$$\tilde{N}_{nrs, nr's'} = -\frac{2\gamma\zeta Z_{\parallel}}{Z} \bar{N} \sum_{p \neq p', q \neq q'} \frac{\exp(-i\Phi_{pq, p'q'}) \Delta_{rpr'p'} \Delta_{sq s'q'}}{i\omega_{pq, p'q'} + 2\gamma(1 + \zeta)} \quad (36)$$

(Z_{\parallel} — число генерируемых продольных мод). Если бы под знаком суммы не было множителей вида $\Delta_{rpr'p'}$, то эффективное число слагаемых в ней было бы равно* $\sim Z_{\perp}^2 \gamma(1 + \zeta)/\delta\omega_{\perp}$ (Z_{\perp} — число поперечных мод). Наличие же этих множителей уменьшает фактическое число слагаемых в Z_{\perp} раз. Учитывая это и предполагая фазы слагаемых случайными (что соблюдается в обычных условиях эксперимента [19]), получаем из (36) оценку

$$\frac{|\tilde{N}_{nrs, nr's'}|}{\bar{N}} \sim \frac{\zeta}{\sqrt{Z_{\perp}(1 + \zeta)}} \sqrt{\frac{\gamma}{\delta\omega_{\perp}}}. \quad (37)$$

Соотношение (37) применимо также к матричным элементам, диагональным по всем трем индексам. Условие

$$|\tilde{N}| \ll \bar{N}, \quad (38)$$

использованное при выводе энергетического соотношения (32) и уравнений (30), (31), может быть раскрыто с помощью оценки (36), если опустить в ней множители $\Delta_{rpr'p'}$, $\Delta_{sq s'q'}$:

$$\frac{|\tilde{N}|}{\bar{N}} \sim \left[\frac{\zeta^2}{1 + \zeta} \frac{\gamma}{\delta\omega_{\perp}} \right]^{1/2}. \quad (39)$$

Используя (37), (39) и известное соотношение [9, 20] $\delta \sim \sqrt{\tau/\zeta\gamma}$, приведем неравенства (38), (23), (27), (28) соответственно к виду критериев (а), (б), (в), (г) (см. табл. 1). Эти критерии указывают область применимости уравнения баланса для вещества (17) и волнового уравнения в ϵ -приближении (5).

Для вычисления энергетических характеристик генерации эти уравнения применимы при условии $|\tilde{N}| \ll N$, т. е. при условии (а). К исследованию кинетики уравнения (17), (5) применимы при дополнительных условиях (б) и (в), а к исследованию общей ширины спектра, связанной с продольными модами, при дополнительных условиях (б) и (г). Если же исследуется спектр поперечных мод, то в уравнении (26) член \tilde{x}_{nn} должен сравниваться не с зависящим от частоты слагаемым (пренебрежимо малым ввиду соотношения $\delta\omega_{\perp} \ll \delta\omega$), а с характерным значением разности $|\tilde{x}_{mpq, mpq} - \tilde{x}_{mpq', mpq'}|$. Для оценки этой разности воспользуемся формулой (41); с учетом (32) имеем

$$|\tilde{x}_{mpq, mpq} - \tilde{x}_{mpq', mpq'}| \sim \frac{x_0 \zeta}{(1 + \zeta) \sqrt{Z_{\perp}}}.$$

* Эта оценка справедлива при условии $\delta\omega_{\perp} \geq 2\gamma(1 + \zeta)$, которое обычно выполняется для твердотельных лазеров; здесь не учитывается также вырождение поперечных мод, которое на практике всегда снимается в силу отсутствия строгой осевой симметрии резонатора, содержащего диэлектрический стержень.

Таблица 1

Для применимости балансных уравнений должен выполняться набор неравенств, отмеченных крестиками в соответствующих колонках

		Группы характеристик							Условия применимости балансных уравнений
Энергетические	кинетиче- ческие	спектральные							Условия применимости балансных уравнений
		спектр продоль- ных мод		спектр попереч- ных мод		пара уравнений			
	(17)	(17)	(17)	(17)	(17)	(17)	(17)		
	(5)	(18)	(5)	(18)	(5)	(18)			
Спектр со слабо развитой поперечной структурой	+	+	+	+	+	+	+	$\left[\frac{\zeta^2 \gamma}{(1 + \zeta) \delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(а)
	+	+	+	+	+	+	+	$\frac{1}{\tau \delta \omega} \left[\frac{\zeta^2 Z_{\perp} \gamma}{(1 + \zeta) \delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(б)
	+	+						$\left[\frac{\zeta}{(1 + \zeta) Z_{\perp} \tau \delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(в)
Спектр с сильно развитой поперечной структурой			+	+				$\frac{\Gamma^2}{\delta \omega^2} \left[\frac{\zeta^2 \gamma}{(1 + \zeta) Z_{\perp} \delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(г)
					+	+		$\left[\frac{(1 + \zeta)^2 \gamma}{\delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(д)
		+		+		+		$\frac{\zeta}{(1 + \zeta) \tau \delta \omega_{\perp}} \ll 1$	(е)
Единый спектр									
Спектр с сильно развитой поперечной структурой	+	+	+	+		+		$\left[\frac{\zeta^2 \gamma}{(1 + \zeta) \delta \omega} \right]^{1/2} \ll 1$	(ж)
	+	+	+	+		+		$\frac{1}{\tau \delta \omega} \left[\frac{Z \zeta^2 \gamma}{(1 + \zeta) \delta \omega} \right]^{1/2} \ll 1$	(з)
	+	+						$\left[\frac{\zeta}{(1 + \zeta) Z \tau \delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(и)
			+			+		$\frac{\Gamma^2}{\delta \omega^2} \left[\frac{\zeta^2 \gamma}{(1 + \zeta) Z \delta \omega_{\perp}} \right]^{1/2} \ll 1$	(к)
		+				+		$\frac{\zeta}{(1 + \zeta) \tau \delta \omega_{\perp}} \ll 1$	(л)

Требуя малости $\left| \tilde{x}_{mpq, mpq} \right|$ по сравнению с этой величиной и используя (37), получаем критерий (д).

4. Критерий применимости балансного уравнения (18) для интенсивностей мод. Уравнение (26) отличается от (18) как осциллирующими членами, малость которых оговорена в п. 3, так и слагаемым $|a_n/a_n|$. Последним можно пренебречь, если вызванное им относительное изменение

нение интенсивности мод $\Delta I_n/I_n \ll 1$, т. е. $|\Delta a_n/a_n| \ll 1$, где ΔI_n , Δa_n — изменение величин I_n , a_n на протяжении генерации. Согласно (25), это условие эквивалентно неравенству (22).

Раскроем условие (22), предполагая для простоты генерацию стационарной. Из уравнения (30) находим неосциллирующую часть N :

$$\bar{N} = \Lambda \left(2\gamma + \frac{1}{\Gamma} \sum_k F_k^2 \right)^{-1}. \quad (40)$$

В многомодовом случае пространственное распределение интегральной интенсивности почти однородно. Обозначим однородную часть интегральной интенсивности через F_0^2 , а соответствующее значение \bar{N} (или \bar{x}) — через N_0 (или x_0). Используя неравенство $\left| \sum_k F_k^2 - F_0^2 \right| \ll F_0^2$, вы-

делим в (40) зависящую от координат часть \bar{N} :

$$\bar{N} = \text{const} - \frac{N_0}{2\gamma\Gamma(1+\zeta)} \sum_k F_k^2.$$

Запишем матричный элемент величины $\bar{x} = x_0 \bar{N}/N_0$, используя собственные колебания (34):

$$x_{nrs, nr's'} = \frac{x_0}{4\gamma\Gamma(1+\zeta)} \sum_{mpq} (F_{mpq}^0)^2 D_{mn} D_{pr} D_{qs'}, \quad (41)$$

$$D_{pr} = 2 \int_0^\pi du \sin^2 pu \sin ru \sin r' u.$$

Аналогично п. 3, получаем оценку для выражения (41):

$$\bar{x}_{nrs, nr's'} \sim \frac{x_0 \zeta}{(1 + \zeta) Z_\perp}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (22) и полагая $\delta\omega_{\min} \sim \delta\omega_\perp/Z_\perp$, $x_0 \sim 1/c\tau$, получаем критерий (е).

Критерии (а) — (е) определяют область применимости пары балансных уравнений (17), (18), либо (5), (17), игнорирующих временные фазовые соотношения лазерной системы. Эти критерии относятся к случаю слабо развитой поперечной структуры спектра.

В случае сильно развитой поперечной структуры соответствующие критерии могут быть получены аналогично; они имеют вид неравенств (ж) — (л) табл. 1.

Неравенства (ж) — (л) относятся и к случаю чисто продольного спектра, если в них произведена замена $\delta\omega_\perp \rightarrow \delta\omega$.

5. О применимости балансных уравнений в некоторых конкретных случаях. Условия применимости уравнений (17), (18) хуже всего выполняются в случае плоского резонатора и слабо развитой поперечной структуры спектра. Рассмотрим этот наименее благоприятный случай на примере лазера на рубине. Ширина линии усиления рубинового ОКГ составляет $\Gamma \sim 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, время жизни верхнего рабочего уровня $(2\gamma_2)^{-1} \sim 10^{-3} \text{ сек}$. В случае плоского резонатора $\delta\omega_\perp \tau \sim \zeta/(1 + \zeta) \sim 1$, $Z_\perp \sim \delta\omega_\perp k_0 a^2/c \sim 10^2$ ($2a$ — диаметр активного образца) [8, 20]. При этих соотношениях левые части неравенств (а) — (в), (д) не превышают 10^{-1} . В критерии (г) стоит величина $b \Gamma^2/\delta\omega^2$, $b \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$, так что балансные уравнения могут быть использованы лишь для ис-

следования достаточно широкого спектра ($\delta\omega \geq 0,1 \Gamma$). Спектральная ширина излучения плоского резонатора обычно удовлетворяет этому условию. Таким образом, критерии (а)–(д) выполняются достаточно хорошо. Критерий же (е) для плоского резонатора не выполняется (левая часть порядка единицы), так что балансное уравнение для интенсивностей мод оказывается неприменимым и должно быть заменено волновым уравнением (5) [8, 20].

В случае резонатора со сферическими зеркалами критерии (а)–(е) для рубинового ОКГ выполняются гораздо лучше. Для такого резонатора $\delta\omega_{\perp} \sim \omega a^2/Rl$ (R — радиус кривизны зеркала, l — длина резонатора) [8, 20]. Даже при наибольших реальных значениях $R \sim 500 \text{ см}$, $l \sim 100 \text{ см}$ левые части неравенств (а)–(е) на 1–2 порядка меньше, чем в случае плоского резонатора. В частности, левая часть неравенства (е) не превышает 10^{-2} , так что оказывается применимой пара уравнений (17), (18).

В случаях чисто продольного спектра и спектра с сильно развитой поперечной структурой неравенства (ж)–(л) для рубинового ОКГ всегда хорошо выполняются.

3. СЛУЧАЙ МАЛОЙ ВРЕМЕННОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ ФАЗОВЫХ СООТНОШЕНИЙ

В силу координатных фазовых соотношений, входящих в балансные уравнения для мод (17), (18), фактическое усиление моды зависит не только от положения ее частоты ω_n по отношению к центру линии усиления ω_{21} , но и от того, в какой степени перекрываются максимумы интенсивности моды с максимумами инверсной заселенности. Связанная с этим конкуренция мод приводит, как известно, к беспорядочной кинетике генерации и к уширению спектра интегральной интенсивности. Конкуренция между модами наиболее сильна в случае чисто аксиального спектра, уширение которого, равное [6, 8]

$$\delta\omega_{\parallel} = \left(\frac{3\zeta}{1+\zeta} \Gamma^2 \Delta \right)^{1/3} \quad \left(\Delta = \frac{\pi c}{l} \right), \quad (43)$$

для твердотельных лазеров относительно велико.

Существенно менее чувствительна к координатным фазовым соотношениям динамика спектра с достаточно развитой поперечной структурой. Введем интервал $\delta\omega_{\perp}$, охватываемый всеми представленными в генерации поперечными модами при фиксированном продольном индексе. Рассмотрим случай сильно развитой поперечной структуры спектра, когда

$$\delta\omega_{\perp} \gg \delta\omega_{\parallel} \gg \Delta \equiv \pi c/l. \quad (44)$$

В этом случае любая фиксированная частота в окрестности ω_{21} может быть с точностью до $\pm \delta\omega_{\perp}/Z_{\perp}$ получена комбинацией любого из $\delta\omega_{\perp}/\Delta$ продольных индексов с соответствующей парой поперечных. Иными словами, имеет место приближенное вырождение кратности $\delta\omega_{\perp}/\Delta$. Если эта кратность существенно превышает число продольных мод $\delta\omega_{\parallel}/\Delta$, вызванных к жизни их конкуренцией, т. е. если выполняется (44), то конкуренция становится несущественной.

Анализ уравнений (17), (18) подтверждает приведенные качественные соображения и показывает, что при условии (44) из этих уравнений выпадают координатные фазовые соотношения. В результате приходим к наглядным и широко используемым уравнениям для спектральной плотности интенсивности [8].

Авторы глубоко признательны А. Н. Ораевскому, Я. И. Ханину, В. И. Таланову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая физика, изд. Сов. радио, М., 1965.
2. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 49, 895 (1965).
3. А. И. Алексеев, В. М. Галицкий, ЖЭТФ, 49, 1109 (1965).
4. В. С. Машкевич, Основы кинетики излучения лазеров, изд. Наукова думка, Киев, 1966.
5. C. L. Tang et al., J. Appl. Phys., 34, 2289 (1963).
6. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ЖЭТФ, 49, 1843 (1965).
7. А. М. Ратнер, ЖЭТФ, 52, 1745 (1967).
8. А. М. Ратнер, Квантовые генераторы света с большим угловым расхождением, изд. Наукова думка, Киев, 1970.
9. В. Н. Генкин, Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, № 3, 423 (1962).
10. Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 697 (1966).
11. Я. И. Ханин, ЖЭТФ, 60, 1282 (1971).
12. П. А. Апанасевич, Оптика и спектроскопия, 14, 612 (1963).
13. А. Л. Микаэлян, М. Л. Тер-Микаелян, Ю. Г. Турков, Оптические генераторы на твердом теле, изд. Сов. радио, М., 1967.
14. C. L. Tang, J. Appl. Phys., 34, 2935 (1963).
15. Ф. Бертен, Основы квантовой электроники, изд. Мир, М., 1971.
16. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).
17. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, 718 (1959).
18. А. М. Ратнер, Спектральные, пространственные и временные характеристики лазера, изд. Наукова думка, Киев, 1968.
19. В. А. Бабенко, Б. Я. Зельдович, В. И. Малышев, А. А. Сычев, ЖЭТФ, 61, 2270 (1971).
20. А. М. Ратнер, Радиотехника и электроника, 15, 394 (1970).

Физико-технический институт низких температур
АН УССР

Поступила в редакцию
11 мая 1972 г.,
после переработки
28 марта 1973 г.

ON APPLICABILITY OF PHENOMENOLOGICAL EQUATIONS OF A MULTI-MODE LASER

A. M. Ratner, A. M. Fisher

The applicability limits are stated of the forms of balance equations used in the theory of a solid-state laser generating a field with multi-mode longitudinal and transverse structure. This consideration differs from the cases of a single mode or fairly axial spectrum considered in the literature not only in the methods and the form of the applicability criteria obtained but also in the fact that the conditions permitting to omit all phase relations in the balance equations and to lead them to a more generally-accepted form may be really satisfied only for the field with developed transverse structure.

УДК 621.378 001

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВЫСОКОДОБРОТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРАХ

М. М. Сущик, В. М. Фортус

С учетом фокусировки пучка накачки в приближении заданной структуры генерируемого в генераторе поля найдено стационарное состояние двухрезонаторного параметрического генератора света. Исследована зависимость коэффициента полезного действия (КПД) генератора в этом состоянии от параметров резонатора и поля накачки. В частности, показано, что в некоторых случаях амплитудная и фазовая модуляция пучка накачки, связанная с его фокусировкой, не приводит к уменьшению КПД.

В теории параметрических генераторов света (ПГС) одной из основных является задача о нахождении и исследовании стационарных состояний. Ее решение позволяет, в частности, исследовать вопрос об эффективности параметрического преобразования и найти зависимость коэффициента полезного действия ПГС как от параметров самого генератора, так и от параметров излучения накачки. Различным аспектам указанной проблемы посвящен ряд работ [1–8], часть из которых [3, 4, 6, 7] содержит исследование стационарных режимов в приближении заданной структуры генерируемого в резонаторе поля. Это приближение, которое в теории ПГС впервые было использовано Сигманом [3], в случае высокодобротных резонаторов можно считать оправданным. Его основой служит то обстоятельство, что в стационарном состоянии поля резонансной волны генератора с высокодобротным резонатором при прохождении через нелинейное вещество получает относительно малое приращение. Это позволяет в нулевом приближении считать структуру поля заданной и совпадающей со структурой моды холодного резонатора, что существенно упрощает решение задачи. Следует, однако, отметить, что даже в этом приближении рассмотрение стационарных состояний ПГС проводилось лишь для модели плоских волн. Обобщение имеющихся результатов на генераторы с гауссовым распределением амплитуды несфокусированного пучка накачки проведено к настоящему времени только для резонатора с плоскими зеркалами [9–11], когда в многомодовом режиме распределение интенсивности генерируемого поля в поперечном сечении полностью определяется пучком накачки*.

В настоящей работе рассмотрен также часто реализуемый экспериментально (см., например, [12]) другой предельный случай, когда ПГС работает в одномодовом режиме. Рассмотрение стационарного режима проведено в приближении заданной структуры поля, которая предполагается совпадающей со структурой нулевой моды холодного резонатора. При этом, в отличие от упомянутых выше работ [3, 4, 6, 7], учтена пространственная структура амплитуды и фазы моды как в продольном направлении, так и в поперечном сечении пучка, что позволило

* При этом выражение для КПД генератора получается усреднением выражения для выходной мощности, полученного в приближении плоских волн, по поперечному сечению пучка накачки.

проводить рассмотрение, справедливое также в случае взаимодействия сильносфокусированных полей.

1. УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ ОДНОМОДОВОГО ПГС

Рассмотрим одномодовый параметрический генератор с резонатором, зеркала которого прозрачны для волны накачки. Ограничимся случаем, когда моды резонатора невырождены, и будем считать, что условия самовозбуждения выполнены лишь для основных типов колебаний как на сигнальной ω_1 , так и на холостой ω_2 частотах, совпадающих с собственными частотами резонатора. Кроме того, предположим, что потери энергии возбуждающихся мод происходят лишь на зеркалах и достаточно малы, так что относительное изменение энергии $\delta P_i = \Delta P_i / P_i \ll 1$.

Преобразование стационарных полей $E_i = e_i E_i(r_\perp, z) \exp[-i(\omega_i t - k_i z)]$ в нелинейном веществе генератора описывается уравнениями для медленных комплексных амплитуд E_i^* :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{1,2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_{1,2}} \Delta_\perp \right) E_{1,2}(r_\perp, z) = i\gamma_0 E_3(r_\perp, z) \times \\ \times E_{2,1}^*(r_\perp, z) e^{i\Delta z}; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_3} \Delta_\perp \right) E_3(r_\perp, z) = i\gamma_0 E_1(r_\perp, z) \times \\ \times E_2(r_\perp, z) e^{-i\Delta z}. \quad (2)$$

Считая, в силу условия $\delta P_i \ll 1$, структуру полей E_1, E_2 мало отличающейся от структуры основных мод холодного резонатора и пренебрегая малыми изменениями ее в правых частях уравнений (1), (2), получим, что комплексные амплитуды $E_{1,2}(r_\perp, z)$ на входной ($z = -d/2$) и выходной ($z = d/2$) гранях нелинейного кристалла на прямом проходе связаны соотношениями

$$E_1\left(r_\perp, \frac{d}{2}\right) = \hat{G}_1(d) E_1\left(r_\perp, -\frac{d}{2}\right) + \\ + i\gamma_0 d E_{20}^* E_{30} I_{11} - \gamma_0^2 d^2 E_{10} |E_{20}|^2 I_{12}, \\ E_2\left(r_\perp, \frac{d}{2}\right) = \hat{G}_2(d) E_2\left(r_\perp, -\frac{d}{2}\right) + \\ + i\gamma_0 d E_{10}^* E_{30} I_{21} - \gamma_0^2 d^2 E_{20} |E_{10}|^2 I_{22}. \quad (3)$$

Здесь интегралы I_{ij} зависят от функций $f_i(r_\perp, z)$, характеризующих пространственную структуру взаимодействующих мод с амплитудами $E_{10} = E_i(0, 0)$, от расстройки Δ и длины кристалла d :

* Уравнения (1), (2) записаны для амплитуд $E_i(r)$, квадраты модулей которых пропорциональны плотности потока числа квантов [?]. Эти амплитуды связаны с истинными $E'_i(r)$ соотношениями

$$E_i(r) = \sqrt{\sigma_i^{-1}} E'_i(r),$$

где $\sigma_i = K\omega_i/n_i$, $K = (2\pi/c)(e_3 \chi : e_1 e_2)$, $\chi(\omega_1, \omega_2)$ — тензор нелинейной восприимчивости третьего ранга, n_i — показатель преломления i -й волны. Кроме того, в (1), (2) введены обозначения: β_i — угол двуплечепреломления, $\Delta = k_3 - k_1 - k_2$ — отстройка от пространственного синхронизма, $\gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$.

$$\begin{aligned} \{I_{11}; I_{21}\} &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \hat{G}_{1;2} \left(\frac{d}{2} - z \right) [f_{2;1}^*(\mathbf{r}_\perp, z) f_3(\mathbf{r}_\perp, z)] e^{i\Delta z} dz, \\ \{I_{12}; I_{22}\} &= \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^z \hat{G}_{1;2} \left(\frac{d}{2} - z \right) \{f_{2;1}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \hat{G}_3(z-z') \times \\ &\quad \times [f_1(\mathbf{r}_\perp, z'; f_2(\mathbf{r}_\perp, z')] \exp [i\Delta(z-z')] dz' dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор $G_i(L)$ описывает преобразование комплексной амплитуды волны на частоте ω_i при ее распространении на расстояние L без учета взаимодействия:

$$\begin{aligned} \hat{G}_i(L) E_i(\mathbf{r}_\perp, 0) &= \frac{-ik_i}{2\pi L} \int E_i(\mathbf{r}_\perp, 0) \exp \left\{ \frac{ik_i(x-x'-\beta_i L)^2}{2L} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{ik_i(y-y')^2}{2L} \right\} d\mathbf{r}'_\perp. \end{aligned} \quad (5)$$

На обратном проходе в кристалле генерируемые поля возбуждают волну с частотой накачки, и изменение их амплитуд $E_{1,2}^{(-)}$ описывается выражениями, которые аналогичны соотношениям (3) и следуют из них при $E_{30} = 0$:

$$\begin{aligned} E_1^{(-)} \left(\mathbf{r}_\perp, -\frac{d}{2} \right) &= \hat{G}_1(d) E_1^{(-)} \left(\mathbf{r}_\perp, \frac{d}{2} \right) - \gamma_0^2 d^2 |E_{10}|^2 |E_{20}|^2 I_{12}, \\ E_2^{(-)} \left(\mathbf{r}_\perp, -\frac{d}{2} \right) &= \hat{G}_2(d) E_2^{(-)} \left(\mathbf{r}_\perp, \frac{d}{2} \right) - \gamma_0^2 d^2 |E_{20}|^2 |E_{10}|^2 I_{21}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая формулы преобразования амплитуд волн в кристалле (3), (6), в цепях обратной связи (5) и граничные условия на зеркалах резонатора, можно получить с точностью до членов $\sim \gamma_0^3 d^3$ уравнения для амплитуд мод в стационарном состоянии*:

$$\begin{aligned} |E_{10}| N_1 &= R_1 \{ |E_{10}| N_1 + \gamma_0 d |E_{20} E_{30}| e^{i\theta} I_1 - 2\gamma_0^2 d^2 |E_{10} E_{20}| I_2 \}, \\ |E_{20}| N_2 &= R_2 \{ |E_{20}| N_2 + \gamma_0 d |E_{10} E_{30}| e^{i\theta} I_1 - 2\gamma_0^2 d^2 |E_{20} E_{10}| I_2 \}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\theta = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$, φ_i — фаза соответствующего поля при $r = 0$, $N_i = \int |f_i(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 d\mathbf{r}_\perp$ — норма нулевой моды,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int f_1^* I_{11} d\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \langle f_1^* f_2^* f_3 \rangle e^{i\Delta z} dz, \\ I_2 &= \int f_2^* I_{12} d\mathbf{r}_\perp = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^z \langle f_1^* f_2^* \hat{G}_3(z-z') f_1 f_2 \rangle \times \\ &\quad \times \exp [i\Delta(z-z')] dz' dz, \end{aligned} \quad (8)$$

$\langle \rangle$ означает интегрирование по поперечной координате.

* В ПГС бегущей волны, где на обратном проходе в кристалле не происходит генерации волны с суммарной частотой, последние члены в формулах (7) уменьшаются вдвое. Это обстоятельство приводит к увеличению КПД в 2 раза.

Отметим, что при выводе уравнений (7) не учитывалось взаимодействие между основными и высшими типами колебаний. Поэтому полученные уравнения применимы лишь в случае, когда моды резонатора невырождены. Легко показать, что из требования малости амплитуд высших мод, по сравнению с нулевой, следует условие применимости рассмотрения

$$\delta\omega_i \ll \Delta\omega_i.$$

Здесь $\Delta\omega_i$ — разность частот основной и i -й поперечной мод резонатора, $\delta\omega_i$ — ширина линии i -й моды резонатора.

Уравнения (7) однозначно определяют величины $|E_{10}|$, $|E_{20}|$, θ и пороговую мощность накачки $P_{3\text{ пор}}$, которая находится из соотношений

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-R_1)(1-R_2)N_1N_2} &= \gamma_0 |E_{30}| \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] I_1 \right\}, \\ \operatorname{Im} \left\{ \exp \left[i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] I_1 \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При мощности накачки P_3 больше пороговой уравнения (7) имеют нетривиальные решения, и, например, для $|E_{10}|$ имеем

$$\begin{aligned} |E_{10}|^2 &= \frac{N_3}{N_1(1-R_1)} \left\{ \frac{2P_{3\text{ пор}}}{P_3} \frac{|I_1|^2}{|I_2|^2 N_3} \left[-\operatorname{Re} I_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{(\operatorname{Re} I_2)^2 - |I_2|^2 \left(1 - \frac{P_3}{P_{3\text{ пор}}} \right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Величина, стоящая в фигурной скобке, есть не что иное как коэффициент полезного действия (КПД) ПГС по числу квантов $\eta = m_1/m_3$.

2. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ПГС ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОКУСИРОВКЕ (В ОТСУТСТВИЕ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЯ)

Исследование зависимости КПД от параметров генератора проводим на примере, который является наиболее простым и в то же время реализуется на практике. Мы имеем в виду случай, когда в ПГС взаимодействуют гауссовые пучки с одинаковыми конфокальными параметрами $x_i = a_i^2 k_i = a_3^2 k_3 = b^{-1}$. Такая ситуация, например, имеет место при оптимальной (в смысле минимума пороговой мощности) фокусировке накачки [13].

Рассмотрим случай симметричного распределения амплитуды взаимодействующих пучков относительно центра кристалла:

$$f_i(r_\perp, z) = \frac{1}{1 + izb} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1 + izb)a_i^2} \right\}. \quad (11)$$

При этом условии

$$f_1 f_2 = \frac{1}{1 + izb} f_3, \quad (12)$$

так что даже в нелинейном режиме (см. (2)) пучок накачки остается гауссовым. Это позволяет упростить выражения для I_i , которые после интегрирования по поперечным координатам принимают вид

$$I_1 = N_3 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{i\xi \Delta d}}{1 - i\xi bd} d\xi = N_3 J_1, \quad (13)$$

$$I_2 = N_3 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{\xi} \frac{\exp[i(\xi - \xi') \Delta d]}{(1 - i\xi bd)(1 + i\xi' bd)} d\xi d\xi' = N_3 J_2.$$

Если учесть, что $\operatorname{Re} J_2 = \frac{1}{2} |J_1|^2$, то для КПД генератора по числу квантов $\eta = m_1/m_3$ из (9) получим

$$\eta = 2 \frac{P_{\text{пор}}}{P} \frac{1}{1 + 4 \left| \frac{\operatorname{Im} J_2}{\operatorname{Re} J_2} \right|^2} \left[-1 + \sqrt{1 - \left[1 + \left| \frac{\operatorname{Im} J_2}{\operatorname{Re} J_2} \right|^2 \right] \left[1 - \frac{P_{\text{пор}}}{P} \right]} \right]. \quad (14)$$

Из выражений (14), (13) видно, что при слабой фокусировке взаимодействующих пучков $\left(bd = \frac{d}{a_i^2 k_i} \ll 1 \right)$ и отсутствии расстройки от синхронизма выражение для η совпадает с тем, что получается в приближении плоских волн [3]:

$$\eta = 2 \sqrt{\frac{P_{\text{пор}}}{P}} \left(1 - \sqrt{\frac{P_{\text{пор}}}{P}} \right). \quad (15)$$

Следует отметить, что это свойство предельного $\left(\frac{d}{a_i^2 k_i} \ll 1 \right)$ значения η не является очевидным и связано с определенной зависимостью между радиусами мод и радиусом пучка накачки

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{a_3^2}, \quad (16)$$

которая выполняется в рассматриваемом случае равенства конфокальных параметров $\frac{1}{a_i^2 k_i} = b$.

На рис. 1, 2 приведены полученные в результате численного счета зависимости для $\left| \frac{\operatorname{Im} J_2}{\operatorname{Re} J_2} \right|$ и $\operatorname{Re} J_2$ от b и Δ , которые позволяют вычислить величину пороговой мощности*

$$P_{\text{пор}} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\chi} \frac{\pi a_3^2 k_3}{2k_1 k_2 \operatorname{Re} J_2} \quad (17)$$

и КПД для сфокусированных пучков. Интересно отметить (см. рис. 1, 2), что для любого b существуют значения Δ , при которых $\operatorname{Im} J_2 = 0$ и η определяется таким же выражением, как в приближении плоских волн (14). Наименьшие из этих значений Δ практически совпадают со значениями, при которых $\operatorname{Re} J_2 = \max \{ \operatorname{Re} J_2 \}$, т. е. при которых пороговая мощность накачки минимальна, при заданном радиусе пучка накачки.

* См. также работу [13], в которой получено и исследовано выражение для $P_{\text{пор}}$ и приведены графики этой величины. Здесь χ — коэффициент пропорциональности между коэффициентом усиления волн E_1 и E_2 в линейном режиме и плотностью мощности накачки S_0 [2].

Из сказанного выше можно сделать вывод об оптимальной (в смысле КПД) конструкции ПГС в зависимости от мощности имеющегося

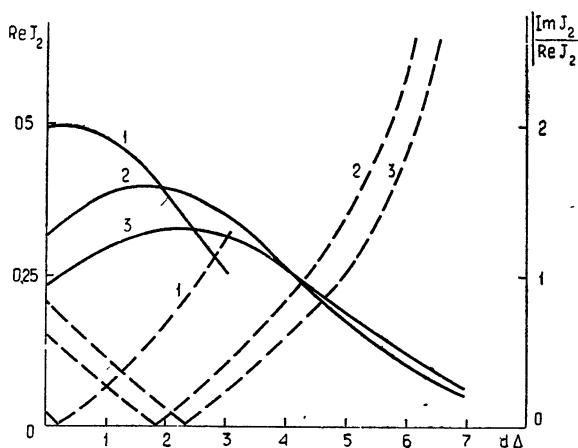


Рис. 1. — — — $\operatorname{Re} J_2$, — — — $\left| \frac{\operatorname{Im} J_2}{\operatorname{Re} J_2} \right|$,
1 — $bd = 0,25$, 2 — $bd = 2$, 3 — $bd = 2,84$.

в наличии источника накачки. Здесь следует различать два случая. Первый, когда мощность источника не позволяет получить четырехкратного превышения минимального значения пороговой мощности накачки, которое достижимо при оптимальной фокусировке [13]. В этом случае конструкция резонатора должна обеспечивать значение конфокального параметра, определяемого условиями оптимальной фокусировки [13], $bd = 5,68$. Если при этом тем или иным способом произвести отстройку от синхронизма на величину Δ , обеспечивающую равенство нулю $\operatorname{Im} J_2^*$, то η будет иметь максимально возможное (15) значение при данной мощности накачки.

В другом случае, когда мощность источника позволяет при опти-

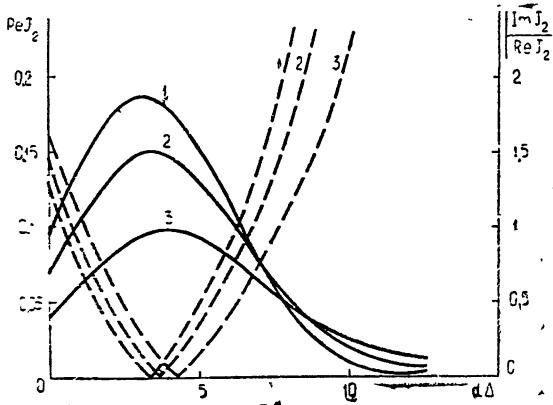


Рис. 2. — — — $\operatorname{Re} J_2$, — — — $\left| \frac{\operatorname{Im} J_2}{\operatorname{Re} J_2} \right|$,
1 — $bd = 5,68$, 2 — $bd = 7$, 3 — $bd = 10$.

*. Практически нет необходимости проводить вычисление величины Δ , так как она легко определяется экспериментально по максимуму η .

мальной фокусировке получить более чем четырехкратное превышение над порогом, нет необходимости работать с сильнофокусированными пучками, т. е. можно выбрать значение конфокального параметра из условия

$$P_3 = 4P_{3 \text{ пор}}(b), \quad (18)$$

где $P_{3 \text{ пор}}(b)$ — известная функция (17), исследованная в работе [13]. При этом КПД (при соответствующей отстройке от синхронизма) будет иметь значение $\eta = 1/2$, максимально возможное для рассматриваемого типа генератора.

3. ВЛИЯНИЕ ДВУЛУЧПРЕЛОМЛЕНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ПГС

Влияние двулучпреломления на КПД параметрического генератора рассмотрим на примере, когда в нелинейном кристалле взаимодействуют две обыкновенные волны с необыкновенной волной накачки (взаимодействие $oo-e$). Опять ограничимся случаем, когда конфокальные параметры взаимодействующих пучков равны. В этом случае

$$J_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\exp(i\xi d\Delta - \xi^2 \beta_3^2 d^2)}{1 - i\xi bd} d\xi; \quad (19)$$

$$J_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{\xi} \frac{\exp\{i(\xi - \xi') \Delta d - (\xi - \xi')^2 \beta_3^2 d^2\}}{(1 - i\xi bd)(1 + i\xi' bd)} d\xi' d\xi. \quad (20)$$

Заметим, что такие же интегралы входят в выражение для пороговой мощности накачки (J_1) при возбуждении ПГС и в выражение для второй гармоники (J_2), полученные в работе [13]. В этой же работе приведены графики величин J_1 и J_2 и некоторые асимптотические выражения, которые позволяют совместно с (14) вычислить КПД генератора для конкретных значений β_3 и b . Мы проведем рассмотрение на примере, когда фазовая расстройка, возникающая из-за конечной ширины пучка, скомпенсирована отстройкой от синхронизма, так что

$$\operatorname{Im} J_2 = 0.$$

В этом случае

$$\eta = 2 \sqrt{\frac{P_{3 \text{ пор}}}{P_3}} \left(1 - \sqrt{\frac{P_{3 \text{ пор}}}{P_3}} \right) \frac{|J_1|^2}{2|J_2|^2}, \quad (21)$$

где зависимость $|J_1|^2/2|J_2|$, взятая из работы [13], приведена на рис. 3.

Из графиков на этом рисунке видно, что при взаимодействии $oo-e$ двулучпреломление приводит к уменьшению максимального значения КПД. Это уменьшение существенно при $\beta_3 > \max\left\{\frac{a_3}{d}; \frac{1}{a_3 k_3}\right\}$ и объясняется тем, что при взаимодействии $oo-e$ эффективная длина, на которой происходит параметрическое усиление мод, $d_{\text{эфф}} \sim \frac{a_3}{\beta_3} < d$. При

этом обратный процесс сложения частот ω_1 и ω_2 идет на всей длине d , а из-за двулучпреломления образовавшееся при этом излучение на частоте ω_3 выходит из области, в которой локализованы моды, и не участвует в их усилинии. При уменьшении радиусов взаимодействующих пучков до значений, при которых угловая расходимость полей больше

угла двулучепреломления $\beta_3 < \frac{1}{a_3 k}$, эффективная длина взаимодействия $d_{\text{эфф}} \sim a_3^2 k$ определяется дифракционными эффектами, так что двулучепреломление играет второстепенную роль и $|J_1|^2/2|J_2| \rightarrow 1$.

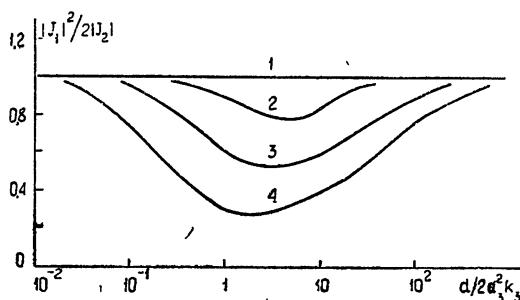


Рис. 3. $B = \beta_3 \sqrt{\frac{dk_3}{8}}$.
1 — $B = 0$, 2 — $B = 1$, 3 — $B = 2$, 4 — $B = 4$.

Таким образом, максимально возможное значение КПД в генераторах рассмотренного типа, при наличии двулучепреломления, можно получить, работая либо с широкими пучками, либо при сильной фокусировке (если, конечно, это возможно, так как при этом возрастает $P_{3\text{ пор}}$).

Авторы благодарны Г. И. Фрейдману за полезное обсуждение и критические замечания, а также И. П. Рязанцевой за проведение численного счета на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. E. Nagris, Proc. IEEE, 57, 2096 (1969).
2. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 631 (1970).
3. A. Siegman, Appl. Opt., 1, 739 (1962).
4. Ю. В. Григорьев, В. К. Руденко, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 932 (1966).
5. В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 850 (1969).
6. J. E. Bjorkholm, IEEE, QE-5, 293 (1969).
7. L. Kgeuzer, Pros. Conf. Lasers and Opto-Electronics, England, 1969.
8. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 263 (1971).
9. J. E. Bjorkholm, IEEE, QE-7, № 3, 109 (1971).
10. R. Fisher, Experim. Tehn. der Phys., 19, 193 (1971).
11. П. Никлес, Диссертация, МГУ, М., 1970.
12. R. G. Smith, J. V. Parker, J. Appl. Phys., № 8, 3401 (1970).
13. G. D. Boyd, D. A. Kleinman, J. Appl. Phys., 39, 3597 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 октября 1972 г.

EFFICIENCY OF PARAMETRIC TRANSFORMATION IN A HIGH-QUALITY OPTICAL RESONATORS

M. M. Sushchik, V. M. Fortus

The stationary state of two-cavity parametric light generator is found with taking into account focusing of the pump beam in the approximation of the given structure of the field generated in the oscillator. The dependence of the oscillator efficiency on the parameters and pump field is investigated. It is shown in particular that in some cases the amplitude and phase modulation of the pump beam associated with its focusing does not lead to decreasing the efficiency.

УДК 539.198

ФОКУСИРОВКА МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ В БИСПИРАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

H. I. Троцюк

Исследуется фокусировка пучков молекул в электростатических и пучков атомов в магнитных биспиральных системах. Показано, что в биспиральных системах возможна гармоническая фокусировка частиц с постоянным эффективным дипольным моментом и с эффективным дипольным моментом, представляющим линейную функцию напряженности поля. Найдены условия, при выполнении которых будет осуществляться гармоническая фокусировка.

Вопрос о фокусировке молекулярных пучков в спиральных системах имеет значение для практики, так как такие системы в последнее время находят применение для фокусировки и сортировки молекул в пучковых молекулярных усилителях и генераторах. В [1, 2] показано, что спиральные системы в качестве сортирующих систем обладают определенными преимуществами по сравнению с сортирующими системами других типов, применявшимися ранее в молекулярных усилителях и генераторах, например, по сравнению с квадрупольными неспиральными системами. Однако фокусировка молекулярных пучков в различных спиральных системах исследована мало.

Как известно [3], пучки молекул можно фокусировать в электростатических полях, а пучки атомов — в магнитных полях. В [4] показано, что в электростатических биспиральных системах при определенном соотношении между коэффициентами разложения в ряд потенциала возможна гармоническая фокусировка пучков молекул с постоянным отрицательным электрическим моментом и с отрицательным электрическим моментом, пропорциональным напряженности электрического поля*. Гармонической фокусировкой будем называть такую фокусировку, когда в системе координат x, y, z , ось z которой совпадает с осью биспиральной системы, координаты x, y выражаются через тригонометрические синусы и косинусы величин, пропорциональных координате z .

В магнитных биспиральных системах при выполнении аналогичного условия возможна гармоническая фокусировка пучков атомов с постоянным отрицательным магнитным моментом и с отрицательным магнитным моментом, пропорциональным напряженности магнитного поля. Кроме того, в магнитных биспиральных системах возможна гармоническая фокусировка пучков атомов, магнитный момент которых отрицателен и представляет произвольную линейную функцию напряженности магнитного поля.

Можно показать, что гармоническая фокусировка молекулярных пучков в биспиральных системах может быть осуществлена и при менее жестких условиях.

Найдем с точностью до членов первого порядка относительно x, y

* Здесь и в дальнейшем имеется в виду эффективный дипольный момент.

и их производных по z дифференциальные уравнения траекторий молекул в электростатических биспиральных системах. Для этого воспользуемся уравнениями, приведенными в [4]:

$$\begin{aligned} mv_z^2 x'' - \frac{\partial U}{\partial z} x' + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ mv_z^2 y'' - \frac{\partial U}{\partial z} y' + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса частицы, U — ее потенциальная энергия во внешнем электрическом поле, v_z — проекция скорости частицы на ось z . Штрихи обозначают дифференцирование по координате z .

Потенциальная энергия молекулы с постоянным электрическим моментом ($d_{\text{эфф}} = d_0$) равна $U = -d_0 E$, а для молекулы с электрическим моментом, пропорциональным напряженности электрического поля ($d_{\text{эфф}} = \gamma E$) $U = -\frac{1}{2} \gamma E^2$.

Выражения для E и E^2 получены в [4] и имеют вид

$$\begin{aligned} E = |\Phi_1| + \frac{1}{2} \frac{F_1}{|\Phi_1|} x^2 + \frac{1}{2} \frac{F_2}{|\Phi_1|} y^2 + \frac{1}{2} \frac{F_3}{|\Phi_1|} xy, \\ E^2 = \Phi_1^2 + F_1 x^2 + F_2 y^2 + F_3 xy, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{4} \Phi_1^2 \alpha^2 + 6\Phi_1 \Phi_3 \cos 2\alpha z + \frac{1}{2} \Phi_1^2 \alpha^2 \sin^2 \alpha z, \\ F_2 &= \frac{3}{4} \Phi_1^2 \alpha^2 - 6\Phi_1 \Phi_3 \cos 2\alpha z + \frac{1}{2} \Phi_1^2 \alpha^2 \cos^2 \alpha z, \\ F_3 &= \Phi_1 \sin 2\alpha z \left(12\Phi_3 - \frac{1}{2} \Phi_1 \alpha^2 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

Φ_1, Φ_3 — коэффициенты разложения в ряд потенциала биспиральной системы, α — постоянная величина, связанная с шагом спирали h соотношением $\alpha = 2\pi/h$.

Подставляя (2) в (1) и оставляя только члены первого порядка относительно x, y и их производных по z , получим дифференциальные уравнения траекторий в виде

$$\begin{aligned} x'' - \omega \left(F_1 x - \frac{1}{2} F_3 y \right) &= 0, \\ y'' - \omega \left(F_2 y + \frac{1}{2} F_3 x \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (4)

$$\omega = \frac{d_0}{mv_z^2 |\Phi_1|} \quad (5)$$

для молекул с постоянным электрическим моментом и

$$\omega = \frac{\gamma}{mv_z^2} \quad (6)$$

для молекул с электрическим моментом, пропорциональным напряженности поля.

Аналогичные уравнения могут быть записаны для случая, когда атомы с постоянным магнитным моментом или с магнитным моментом, пропорциональным напряженности магнитного поля, движутся в магнитной биспиральной системе. Но тогда вместо коэффициентов разложения в ряд потенциала электрического поля Φ_1 и Φ_3 во все выражения будут входить коэффициенты разложения магнитного скалярного потенциала Ω_1 и Ω_3 .

При фокусировке атомных пучков в магнитных полях может встретиться случай, когда магнитный момент представляет линейно-неоднородную функцию напряженности магнитного поля H ($\mu_{\text{эфф}} = \mu_0 + \gamma H$). Тогда $U = -\mu_0 H - \frac{1}{2} \gamma H^2$ и уравнения траекторий снова могут быть записаны в виде (4). Для этого случая

$$\omega = \frac{\mu_0}{mv_z^2 |\Omega_1|} + \frac{\gamma}{mv_z^2}. \quad (7)$$

Поскольку дифференциальные уравнения траекторий частиц для всех рассмотренных случаев имеют вид (4), будем заниматься анализом системы (4) предполагая, что фокусировка происходит в электростатической биспиральной системе.

Используя преобразование координат

$$x = \zeta \cos \alpha z - \eta \sin \alpha z, \quad y = \zeta \sin \alpha z + \eta \cos \alpha z, \quad (8)$$

преобразуем уравнения (4) к системе координат ζ , η , z , оси ζ , η которой при движении заряженной частицы поворачиваются на угол αz . Получается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение которой находится обычным способом. С помощью преобразования, обратного (8), можно найти x , y , т. е. решение системы дифференциальных уравнений (4).

Исследование решений показывает, что в биспиральной системе возможна гармоническая фокусировка частиц. При $\omega > 0$ (момент частицы положительный) условия гармонической фокусировки имеют вид

$$\frac{1 + \beta^2}{6\beta^2} > \left| \frac{\Phi_3}{\Phi_1 \alpha^2} - \frac{1}{24} \right| > \frac{1}{33}, \quad \beta < 1, \quad (9)$$

где

$$\beta = \Phi_1 V \omega. \quad (10)$$

Из рис. 1 видно, что кривые

$$f_1 = \frac{1 + \beta^2}{6\beta^2}, \quad f_2 = \frac{1}{3\beta}$$

имеют общую точку при $\beta = 1$, а при $\beta < 1$ кривая f_1 проходит выше кривой f_2 . Поэтому подбором параметров системы (Φ_1, Φ_3, α) можно удовлетворить неравенствам (9). Отсюда следует, что гармоническая фокусировка частиц с положительным моментом возможна. Однако, как видно из неравенств (9) и рис. 1, пределы изменения параметров системы, при которых будет наблюдаться гармоническая фокусировка частиц с положительным моментом, малы (особенно при значениях β , близких к 1).

Рассмотрим, при каком соотношении между параметрами биспиральной системы и величинами, характеризующими частицу, возможна

гармоническая фокусировка частиц с отрицательным моментом. Фокусировка таких частиц наиболее интересна с точки зрения практики, так как она применяется в молекулярных усилителях и генераторах. Условие гармонической фокусировки частиц с отрицательным моментом выражается в виде неравенства

$$\left| \frac{1 - \beta^2}{6\beta^2} \right| > \left| \frac{\Phi_3}{\Phi_1 \alpha^2} - \frac{1}{24} \right|. \quad (11)$$

Здесь $\beta = \Phi_1 \sqrt{|\omega|}$.

На рис. 2 изображена зависимость

$$f_3 = \left| \frac{1 - \beta^2}{6\beta^2} \right|.$$

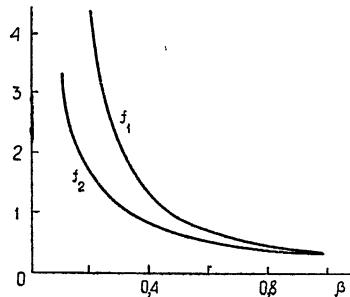


Рис. 1.

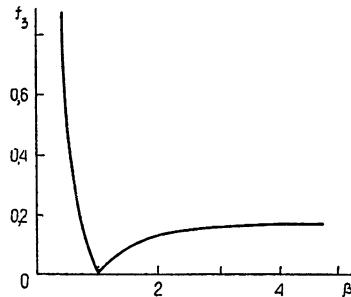


Рис. 2.

Из этого рисунка и из (11) следует, что гармоническая фокусировка частиц с отрицательным моментом осуществляется в более широком диапазоне соотношений между параметрами системы и величинами, характеризующими частицу.

При выполнении условия

$$\Phi_3 - \frac{1}{24} \Phi_1 \alpha^2 = 0 \quad (12)$$

(11) запишется в виде

$$\left| \frac{1 - \beta^2}{6\beta^2} \right| > 0. \quad (13)$$

Неравенство (13) справедливо при любом β , кроме $\beta=1$. При $\beta=1$ решения системы (4) должны выражаться не только через тригонометрические синусы и косинусы величин, пропорциональных z , а и через линейную функцию φ . Однако оказывается, что коэффициенты этой линейной функции в данном случае равны нулю, так что решения системы (4) будут выражаться только через тригонометрические синусы и косинусы величин, пропорциональных z . Поэтому условие гармонической фокусировки частиц с отрицательным моментом (11) не противоречит выводам работы [4], где показано, что при выполнении равенства (12) осуществляется гармоническая фокусировка частиц с любым отрицательным моментом.

Для случаев, когда осуществляется гармоническая фокусировка частиц, можно так подобрать параметры системы, положения плоскостей источника и изображения, что точечному источнику будет соответствовать точечное изображение. Кроме того, можно получить неискаженное изображение плоского источника, плоскость которого перпенди-

кулярна оси системы. Изображение имеет такую же форму и размеры, как и источник, но повернуто относительно источника.

Такая фокусировка возможна при выполнении равенств

$$\lambda_1 z_1 = \pi n_1, \quad \lambda_2 z_1 = \pi n_2, \quad (14)$$

где n_1 и n_2 — целые числа одинаковой четности, $z = z_1$ — координата плоскости изображения (координата плоскости источника $z = 0$). Величины λ_1 и λ_2 для частиц с положительным моментом имеют значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2\alpha^2(1-\beta^2) - \left[\beta^4 \left(12 \frac{\Phi_3}{\Phi_1} - \frac{1}{2} \alpha^2 \right)^2 - 16\alpha^4\beta^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2\alpha^2(1-\beta^2) + \left[\beta^4 \left(12 \frac{\Phi_3}{\Phi_1} - \frac{1}{2} \alpha^2 \right)^2 - 16\alpha^4\beta^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для того, чтобы получить λ_1 и λ_2 для частиц с отрицательным моментом, необходимо во всех членах выражений (15), которые содержат β^2 (ω в первой степени), поменять знаки на обратные.

Угол поворота изображения относительно плоского источника равен αz_1 при четных n_1, n_2 и равен $\pi + \alpha z_1$ при нечетных n_1, n_2 .

Фокусировка, когда точечному источнику соответствует точечное изображение и плоскому источнику — неискаженное изображение, возможна только в том случае, когда все частицы имеют одинаковую скорость. Поскольку реальный пучок имеет значительный разброс скоростей, то будет наблюдаться хроматический эффект. Расчет хроматического эффекта даже при малом разбросе скоростей представляет довольно трудную задачу, так как решения системы (4), т. е. координаты x, y представляют сложные функции скорости частицы.

Из изложенного следует, что биспиральные системы для молекулярных пучков имеют весьма широкий диапазон фокусирующих свойств. Гармонической фокусировкой может быть для частиц как с положительным, так и с отрицательным моментом, при постоянном моменте и при моменте, величина которого представляет линейную функцию напряженности поля. Этим биспиральные системы отличаются от уже исследованных фокусирующих систем других видов. Так, например, в системах с двумерными полями, имеющими три или две плоскости симметрии и антисимметрии [3], возможна гармоническая фокусировка частиц с отрицательным моментом соответственно постоянным и пропорциональным напряженности поля. Гармоническая фокусировка частиц с положительным моментом в таких системах невозможна.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 658 (1959).
2. G. Becker, Zs. angew. Phys., 15, № 4, 281 (1963).
3. H. G. Beppewitz, W. Paul, Ch. Schlier, Zs. Phys., 141, 6 (1955).
4. Н. И. Троцюк, ЖТФ, 38, № 7, 1140 (1968).

Украинский институт инженеров водного хозяйства

Поступила в редакцию
27 июня 1972 г.

MOLECULAR BEAM FOCUSING IN BI-SPIRAL SYSTEMS

N. I. Trotsuk

The focusing of molecular beams in electrostatic systems and atom beams in magnetic bi-spiral systems is investigated. It is shown that in bi-spiral systems there may be a harmonic focusing of particles with the constant effective dipole moment and effective dipole moment representing a linear function of the field intensity. Conditions of harmonic focusing are found.

УДК 621.391 : 62 — 505.7

УСТАНОВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОЧАСТОТНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ В ПРИСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИГНАЛА

Э. С. Воробейчиков, Б. Н. Пойзнер, Т. С. Портнова

Интегрирование укороченных уравнений, полученных методом КБМ, показывает, что результат процессов установления в автономной многочастотной автоколебательной системе (МАС) при случайных начальных условиях носит вероятностный характер и зависит от того, как изменяются с частотой коэффициенты в полиноме нелинейности, а также от дисперсии амплитуды белого шума. При воздействии малым гармоническим сигналом, близким по частоте к одному из видов колебаний, существует «порог переключения». МАС в одночастотном состоянии с одного вида колебаний на другой, возмущаемый сигналом, причем его высота зависит от момента включения сигнала, а также «порог гашения». МАС в многочастотном состоянии, когда гаснут все виды колебаний, кроме возмущаемого.

В отличие от одночастотных автогенераторов с «мягким» возбуждением для авторегулируемых и многочастотных автоколебательных систем (МАС) в квантовой электронике [1], биологии [2] и электронике СВЧ [3] характерна зависимость их стационарного состояния от начальных условий. Поэтому необходимо выяснить: 1) какие характеристики МАС более всего влияют на степень проявления указанной зависимости; 2) в какой мере на реализации того или иного стационарного состояния МАС сказываются статистические параметры нелинейности; 3) как влияет на результат процесса установления в МАС воздействие малого гармонического сигнала E_s с частотой ν_s , близкой к одной из частот вида колебаний МАС.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Пусть колебания МАС описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2\delta \frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon F(U, \nu, v, \nu_s) \quad (1)$$

с однородными краевыми условиями, где U — неизвестная функция, V — фазовая скорость, δ — затухание, ϵ — малый параметр; коэффициенты в степенном полиноме

$$F(U, \nu, v, \nu_s) = \sum_{r=1}^R \Gamma_{2r-1} U^{2r-1} + E_s \exp i(\nu_s t + \Phi_s - kz) + \text{к. с.}$$

зависят от частоты вида колебаний ν_m

$$U = \sum_{m=1}^N a_m(\nu) A_m \exp i[\nu_m t + \Phi_m - v_m(\nu) - kz]$$

и имеют при себе множитель, учитывающий фазовый сдвиг ϑ_m между колебательным процессом в нелинейности и в резонаторе на частоте ν_m .

Решение (1) методом КБМ [4] для случая трех видов колебаний ($N = 3$) при ограничении кубическим полиномом ($R = 2$, $\Gamma_3 = \Gamma$) приводит к системе укороченных уравнений относительно безразмерных амплитуд $E_m = A_m/E_0$ и фаз Φ_m видов колебаний, как в [5], но с тем отличием, что при β_m и ρ_m появляются множители $(3/4)^n$, а при θ_m и τ_m — $(1/2)^n$. Показатель n , согласно [6, 7], характеризует число измерений распределенной нелинейности ($n = 0$ соответствует локализованной нелинейности), причем предполагается, что поле частоты ν_n имеет одну и ту же структуру вдоль всех рассматриваемых пространственных осей. Распределение поля совпадает со структурой полей в невозмущенной системе.

Коэффициенты в укороченных уравнениях для многоконтурных и распределенных автогенераторов, например, на тунNELьных диодах, приведены в [6, 7]. Для многочастотного СВЧ электронного автогенератора на основе отражательного кластрона, связанного с колебательной системой, содержащей множество резонансных частот, коэффициенты рассчитаны в [8] в предположении нелинейности, локализованной на границе резонатора ($n = 0$), а для электронного потока, одномерно ($n = 1$) распределенного вдоль резонатора, — в [9].

Степень конкуренции видов колебаний, характеризуемая отношениями $(2/3)^n \theta_m / \beta_m$ определяется зависимостью от частоты ν коэффициентов $a_m(\nu)$ в полиноме нелинейности среды F и числом измерений n , поэтому существенно зависит от природы нелинейности МАС. В электронных СВЧ автогенераторах с локализованной нелинейностью она больше ($\theta/\beta > 1$) [8], чем в ГБВ на тунNELьном диоде ($(2/3)^n \theta/\beta = -8/9$) [7, 10] и в газоразрядных приборах ($\theta/\beta \ll 1$) [5], а в гиротроне [11] существенно меняется в зависимости от режима.

В дальнейшем при выяснении основных закономерностей процесса установления рассматривается МАС, в которой отношения $(2/3)^n \times \theta_m / \beta_m$ одинаковы при всех m , i и варьируются от 0,2 до 2. Кроме того, считается, что начальные амплитуды и фазы (начальные возмущения) определяются шумами нелинейной активной среды. Поскольку в электронных потоках преобладает дробовой шум, а в излучении газового разряда — спонтанный, то они и определяют начальные условия. Интенсивность шума будет характеризоваться дисперсией шумового потока, амплитуда которого распределена по закону Рэлея, а фаза — по нормальному закону.

Качественный анализ уравнений [5, 9] показывает, что, во-первых, в автономной МАС, в которой выполняется критерий устойчивости стационарного режима одновременно для одного и для трех видов колебаний, установление трех видов колебаний возможно лишь при таких начальных условиях, когда виду колебаний с наибольшим усилением достаются наименьшие начальные возмущения. Для приблизительно одинаковых начальных значений $E_m \cos \Phi_m$ должно реализоваться одночастотное состояние с видом колебаний, имеющим наибольший коэффициент усиления a_m . Во-вторых, при сильной конкуренции рост дисперсии должен повышать вероятность реализации одночастотного состояния, делая ее практически одинаковой для всех видов колебаний, а вероятность установления многочастотного режима сводить к нулю. Это связано с тем, что возрастание интенсивности дробового шума увеличивает начальные амплитуды E_m^0 до значений, когда возбуждение происходит, как в «жестком» режиме, и различие в коэффициентах усиления a_m (существенно проявляющееся при малых $E_m^0/E_{m\text{ст}}$) слабо влияет на процесс установления.

Поэтому реализация трехчастотного состояния возможна лишь в случаях, если начальные условия для всех видов колебаний приблизительно одинаковы, но это с увеличением дисперсии становится маловероятным. Следовательно, должен устанавливаться одночастотный режим колебаний, которому соответствует наибольшее начальное значение $E_m \cos \Phi_m$. С ростом дисперсии такое энергетическое преимущество у каждого вида колебаний возникает одинаково часто.

При слабой конкуренции рост шума не должен заметно изменять спектр колебаний МАС в стационарном состоянии. Практически эта ситуация всегда имеет место в газовых ОКГ [5].

В-третьих, при целенаправленном воздействии на МАС должна существовать возможность управления процессом установления, чтобы достичь определенного стационарного состояния. Поскольку МАС устойчива к малым возмущениям, внешнее воздействие будет эффективным в случае превышения им некоторого порога. Например, при воздействии внешним сигналом с частотой $\nu_s = \Omega_s$ на МАС, в стационарном состоянии которой существует только второй вид колебаний с частотой ν_2 , должен иметь место «порог переключения» E_T , с превышением которого в системе устанавливается первый вид колебаний с частотой ν_1 , а второй гаснет. При воздействии с момента $t = 0$ сигналом на МАС, автономный стационарный режим которой является многочастотным, должен существовать «порог гашения» E_g , превышение которого должно приводить к возникновению одночастотного состояния. В-четвертых, поскольку реакция МАС на внешнее возмущение зависит от соотношения внесенной и генерируемой за период энергии, уровень E_T должен быть ниже при воздействии на МАС в начальный момент времени.

2. МАШИННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проверку полученных выводов удобно провести, используя машинный эксперимент, позволяющий исследовать различные режимы работы и модели МАС, пока еще не реализованных.

Для исследования процессов установления в автономных МАС укороченные уравнения при $E_s = 0$ интегрировались на ЭВМ методом Рунге—Кутта по 100 циклам с различными начальными условиями, задаваемыми генератором белого шума. Полученные результаты подтверждают первый и второй выводы. Как показано в табл. 1, в которой приведены вероятности реализации состояний (в процентах) для заданной степени конкуренции, повышение интенсивности дробового шума (дисперсии его амплитуды) меняет распределение вероятности установления того или иного стационарного режима по-разному для различной степени конкуренции.

Таблица 1

Степень конкуренции $(2/3)^n \theta/\beta$	1,9		1,5		0,2	
Дисперсия амплитуды шума	$0,38 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$0,38 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$	$0,38 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-5}$
Номера видов колебаний	1	25	32	10	16	7
	2	55	36	15	28	8
	3	5	30	5	14	6
Одновременно	1	15	2	70	42	79
	2					
	3					
						82

Установлено, что для заданной интенсивности дробового шума степень конкуренции видов колебаний, обусловленная характером зависимости от частоты коэффициентов $a_m(v)$ в полиноме F определяет переход МАС в то или иное стационарное состояние в большей мере, чем соотношения между начальными значениями $E_m^0 \cos \Phi_m^0$.

Таблица 2

№ видов колебаний	1, 2, 3	1	2	3
Коэффициент усиления		$0,857 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$0,866 \cdot 10^{-3}$
Степень конкуренции $(2/3)^n \theta/\beta$	1,9 1,5 0,2	15 70 79	25 10 7	55 15 8
				5 5 6

Из табл. 2, иллюстрирующей зависимость вероятности реализации каждого из четырех возможных (двухчастотное состояние при $(2/3)^n \theta/\beta \geq 1$ либо при одинаковых для различных видов колебаний коэффициентах неустойчивости [5]) стационарных состояний МАС от степени конкуренции, следует, что с уменьшением последней установление трехчастотного режима становится более вероятным, хотя и не сто процентным: он реализуется лишь в случаях, когда виду колебаний с наибольшим коэффициентом усиления a_m «достается» самое низкое начальное значение $E_m^0 \cos \Phi_m^0$.

Зависимость результата процесса установления от соотношения начальных значений видов колебаний тем заметней, чем выше степень конкуренции, т. е. взаимосвязь видов колебаний. При $(2/3)^n \theta/\beta = 1,9$ даже малые отклонения от соотношения начальных условий, благоприятного для реализации многочастотного состояния при заданных коэффициентах усиления, приводят к значительному перераспределению энергии между видами колебаний и установлению одночастотного состояния. Напротив, с уменьшением конкуренции многочастотное состояние реализуется при большем разбросе начальных значений $E_m^0 \cos \Phi_m^0$ у разных видов колебаний друг относительно друга.

Машинный эксперимент показывает наличие упомянутых ранее порогов. Установлено, что для сильной конкуренции $((2/3)^n \theta/\beta = 2)$ «порог переключения» E_T равен $6,5 \cdot 10^{-5} E_{2\text{ст}}$, для слабой конкуренции $((2/3)^n \theta/\beta = 0,2)$ «порог гашения» $E_q = 30 \cdot 10^{-5} E_{m\text{ст}}$. При этом уровень «порога переключения» зависит от момента начала воздействия сигнала. Для $(2/3)^n \theta/\beta = 2$ при воздействии сигнала с момента времени, когда амплитуды видов колебаний составляют $0,8 E_{m\text{ст}}$, величина $E_T = 2,4 \cdot 10^{-4} E_{2\text{ст}}$, т. е. на порядок выше, чем при воздействии с $t = 0$.

Таким образом, машинный эксперимент подтверждает результаты качественного анализа процессов установления и показывает, что начальные условия влияют на реализацию того или иного стационарного состояния МАС.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Oh i, Japan J. Appl. Phys., 7, № 2, 180 (1968).
2. М. С. Полякова, Диссертация, МГУ, 1970.
3. Э. С. Воробейчиков, Б. Н. Пойзнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 14, № 12, 1519 (1971).

4. Ю. А. Митропольский, Д. Г. Киреневский, сб. Математическая физика, вып. 4, изд. Наукова думка, Киев, 1968, стр. 93.
5. У. Лэмб, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966, стр. 285.
6. Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 15, № 4, 741 (1970).
7. Т. А. Панина, Диссертация, МЭИ, 1973.
8. Э. С. Воробейчиков и др., Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 13, № 8, 923 (1970).
9. С. К. Анохин, Б. Н. Пойзнер, Т. С. Портнова, Сб. статей работ аспирантов радиофизического факультета, изд. ТГУ, Томск, 1972.
10. А. Scott, Active and nonlinear wave propagation in electronics, Wiley, N. Y., 1970.
11. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).

Сибирский физико-технический институт
при Томском государственном университете

Поступила в редакцию
5 октября 1972 г.

SETTING OF OSCILLATIONS IN MULTI-FREQUENCY SELF-OSCILLATING SYSTEMS UNDER RANDOM INITIAL CONDITIONS IN THE PRESENCE OF EXTERNAL SIGNAL

E. S. Vorobeychikov, B. N. Poyzner, T. S. Portnova

The integration of abbreviated equations obtained by methods shows that the results of setting processes in autonomous and multi-frequency self-oscillating system (MSS) under random initial conditions has a stochastic character and depends on the change of the coefficients in the nonlinearity polynom with the frequency, as well as on the dispersion of white noise amplitude. Under the action of a small harmonic signal which frequency is close to one of the modes there exist a „switching threshold“ of MSS in a single-frequency state from one mode to another perturbed by a signal. Its height depends on the moment of switching-on the signal. There also exists a „threshold of switching-off“ of MSS in a multi-frequency state when all modes besides the perturbed one are cancelled.

УДК 551.510.535

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ФЛУКТУАЦИЙ КВ СИГНАЛОВ

В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов

На основе дифракционных расчетов получены функции распределения флуктуаций амплитуд КВ сигналов при отражении (рассеянии) их в ионосфере. Рассмотрены различные статистические модели ионосферы: бесконечный и ограниченный фазовые экраны, отражение волн на частотах, близких к критической, слой с мелкими ($\ell \sim \lambda$) неоднородностями и др. Показано, что максимальная величина флуктуации интенсивности $\sigma_I = \langle (\Delta I)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ за бесконечным фазовым экраном (связанная с эффектом статистической фокусировки на гауссовых неоднородностях) пропорциональна $\ln S_0^2$ для одномерного и $\sqrt{S_0^2}$ для двумерного изотропного экрана (S_0^2 — средний квадрат набега фазы на фазовом экране, $S_0^2 \gg 1$). Найденные функции распределения сопоставлены с распределениями, полученными при различных модельных представлениях КВ сигналов.

При изучении различного рода случайных процессов (в частности, статистики КВ сигналов в волноводе Земля — ионосфера) одной из наиболее важных характеристик является функция распределения флуктуаций изучаемого процесса [1] (флуктуаций амплитуд R и интенсивностей $I = R^2$ КВ сигналов).

В последние два-три десятилетия появились работы, в которых сделана попытка получить распределения R , где в качестве измеряемых параметров фигурируют первые два момента $\langle R \rangle$ и $\langle R^2 \rangle$. Эти распределения основываются на более общих предположениях [2], чем хорошо известный обобщенный закон Рэлея (см., например, [3, 4]), и могут описать больший класс экспериментальных распределений флуктуаций амплитуд. К этим новым распределениям, прежде всего, следует отнести четырех- и двухпараметрическое распределения [3, 4], в которых, как и в случае рэлеевского распределения, ортогональные компоненты поля E'_1 и E'_2 считаются распределенными по нормальному закону, однако полагаются при этом: зависимыми случайными величинами, имеющими к тому же разные дисперсии и средние значения; μ — распределение [5], где учтены «мелкие» флуктуации фазы регулярной компоненты сигнала; распределения, основанные на модели пуассоновских шумов [6–8]; «интуитивное» m -распределение Накагами и др. [9–15]. Почти все эти распределения опираются на модельные представления о сигнале и не связываются их авторами с характером распространения волн. Это обстоятельство приводит к ряду казусов. Например, глубокие замирания сигналов (с дисперсией $\sigma_I > 1$) часто описывают в предположении о коррелированности нормальных компонент (E'_1 , E'_2) поля, что (как будет показано ниже) в реальных условиях вряд ли имеет место.

Вместе с тем уровень наших знаний об ионосферном распределении радиоволн позволяет получить ряд распределений параметров сигнала, основываясь на модельных представлениях о рассеивающих средах

и результатах расчетов дифракции радиоволн в таких средах (класс МДР-распределений). Например, представление ионосферного рассеивающего слоя в виде эквивалентного фазового экрана с крупномасштабными (размер l много больше длины волны λ), неоднородностями (разд. 1) позволяет получить сведения о функциях распределения интенсивности сигнала в случае произвольных возмущений фазы волны на экране, в частности, при наличии на экране неоднородностей, приводящих к статистической фокусировке радиоволн, а также изучить распределения в случае пространственной ограниченности этого экрана (разд. 2). Вполне определенные результаты можно получить и для некоторых других моделей ионосферного слоя (разд. 3—5). Если учесть также, что функция распределения флуктуаций сигнала содержит существенно большую информацию о рассеивающих средах, чем обычно используемые при решении обратной задачи первый и второй корреляционные моменты параметров сигналов, то проводимая ниже попытка анализа возможных МДР-распределений представляется целесообразной.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ СИГНАЛА ЗА БЕСКОНЕЧНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

Многочисленные экспериментальные исследования структуры отраженного КВ сигнала [16] указывают на преимущественную роль неоднородностей ионосферы с размерами l , много большими длины волны λ в появлении быстрых флуктуаций уровня принимаемых сигналов. Поэтому мы при анализе МДР-распределений подробно остановимся именно на этом случае.

Другая особенность состоит в том, что толщина слоя с неоднородностями обычно в несколько раз меньше расстояний от этого слоя до точек передачи и приема сигналов, в связи с чем определяющую роль в структуре принимаемого сигнала может играть распространение волны в свободном пространстве за ионосферным слоем. Более того, как было отмечено в [17], при $l \gg \lambda$ накопление флуктуаций фазы волны в условиях ее полного внутреннего отражения от ионосферы происходит преимущественно в некоторой небольшой (по сравнению с толщиной ионосферного слоя) области высот вблизи уровня отражения.

Поэтому, учитывая, что неоднородности ионосферы вызывают прежде всего флуктуации фазы волны и мало сказываются на величине амплитуды, мы представим ионосферный слой с неоднородностями в виде хаотически изменяющей фазу волны экрана (ФЭ).

Предположим, что рассеяние волн в ионосфере происходит на малые углы θ_S , так что можно пренебречь различием в условиях распространения волн, рассеянных под разными углами*. Тогда, используя принцип Гюйгенса, поле волны при $\theta_S \ll 1$ в точке приема можно записать в виде

$$E(\rho_2, r_2) = \frac{i\omega \exp(-iS_p)}{2\pi r_1 r_2 c} \iint_{-\infty}^{\infty} E(\rho, 0) \exp \left\{ -\frac{i\omega}{2r c} \left(\left[x - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{r_1}{r} x_2 - \frac{r_2}{r} x_1 \right]^2 + \left[y - \frac{r_1}{r} y_2 - \frac{r_2}{r} y_1 \right]^2 \right) \right\} dx dy, \quad (1)$$

* Характерный угол рассеяния $\theta_S \sim \frac{\lambda S_0}{\pi l}$, где $S_0 = \sqrt{\langle (\Delta S)^2 \rangle}$ — дисперсия флуктуаций фазы радиоволны в слое из-за неоднородностей.

где c — скорость света, S_p — регулярный набег фазы, $|\rho| = \sqrt{x^2 + y^2}$, r_1 и r_2 — наклонные дальности от источника и приемника волн до слоя с неоднородностями, $r = r_1 + r_2$ — геометрическое расстояние, проходимое волной в отсутствие рассеяния при излучении ее из пункта $\rho_1(x_1, y_1)$ и приеме в пункте $\rho_2(x_2, y_2)$, $E(\rho, 0)$ — поле волны на фазовом экране, $E(\rho, 0) = \exp[-i(\omega t - \Delta S)]$. Без особого ограничения общности рассмотрения положим $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

Представим поле в точке приема в виде [18, 19]

$$\begin{aligned} E &= fE_0 + \langle E \rangle, \quad \langle E \rangle = \langle E' \rangle E_0, \\ E' &= E'_1 + iE'_2, \quad f = f_1 + if_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где f — флюктуирующее поле, $\langle f \rangle = 0$, $\langle E \rangle$ — среднее поле волны, а E_0 — поле волны в отсутствие неоднородностей. Тогда для флюктуирующего поля из (1), (2) можно получить соотношение, отличающееся от (1) тем, что в знаменателе перед интегралом вместо r_1r_2 будет стоять величина r . Из (1) следует также выражение для среднего поля

$$\langle E'(\rho_2, r_2) \rangle = \langle E'(\rho, 0) \rangle = \langle e^{i\Delta S} \rangle, \quad (3a)$$

которое при нормальном законе распределения флюктуаций на экране принимает вид*

$$\langle E' \rangle = \exp(-S_0^2/2), \quad S_0^2 \equiv \langle (\Delta S)^2 \rangle. \quad (3b)$$

Из (1) — (3) легко получить [19, 20]

$$R_{ff^*}(\rho_2, r_2) \equiv R_{ff^*}\left(\frac{r_1}{r}\rho\right); \quad (4)$$

$$R_{ff}(0, r_2) = \frac{ik_0}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\xi, \eta, 0) \exp\left[-\frac{ik_0}{4r}(\xi^2 + \eta^2)\right] d\xi d\eta. \quad (5)$$

Для нормального закона распределения фазы ΔS на экране

$$R_{ff^*}(\xi, \eta, 0) = \exp\{-S_0^2[1 - \rho_S(\xi, \eta)]\} - \exp\{-S_0^2\}, \quad (6)$$

где $\rho_S(\xi, \eta)$ — нормированная функция корреляции флюктуаций фазы.

Из (2) — (6) видно, что при $S_0^2 \gg 1$ (сильно рассеивающий фазовый экран) $\langle E'_1 \rangle = \langle E'_2 \rangle = 0$, $\sigma_1^2 = \langle f_1^2 \rangle = \langle f_2^2 \rangle = \sigma_2^2$, а $\rho_{E'_1 E'_2} = 0$, и функция распределения амплитуд R описывается однопараметрическим законом Рэлея [3, 4].

Рассмотрим теперь случай слабых возмущений фазы на экране, когда $\langle E' \rangle \approx 1$, а $f(\rho, 0) \approx i\Delta S$. Поскольку $f(\xi, \eta, 0)$ связана линейным соотношением с флюктуациями фазы ΔS , то при нормальном законе распределения ΔS величина $f(\xi, \eta, 0)$, а следовательно, и $f(0, r_2)$ распределены по нормальному закону. Кроме того,

$$\langle E'_1 \rangle = 1, \quad \langle E'_2 \rangle = 0, \quad \sigma_{1,2}^2 = \langle f_{1,2}^2 \rangle,$$

$$\rho_{E'_1 E'_2} = \frac{\text{Im } R_{ff}}{[\langle f_1^2 \rangle \langle f_2^2 \rangle]^{1/2}}. \quad (7)$$

* Такой закон распределения имеет место, когда на пути волны находится много неоднородностей, эффективно изменяющих ее фазу. В противоположном случае закон распределения ΔS может существенно отличаться от нормального. При этом возможно появление мнимой части среднего поля и более медленное, по сравнению с (3б), убывание его с ростом S_0 .

Используя (5) и (6), для гауссовой функции корреляции $\rho_S(\xi, \eta) = \exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{l_x^2} + \frac{\eta^2}{l_y^2}\right)\right]$ получаем

$$R_{ff} = -\frac{(G_x^- G_y^+ + G_x^+ G_y^-) + i(G_x^+ G_y^+ - G_x^- G_y^-)}{2[1 + D_x^2]^{1/2}[1 + D_y^2]^{1/2}}; \quad (8)$$

$$G_{x,y}^\mp = \left[\sqrt{1 + D_{x,y}^2} \mp D_{x,y} \right]^{1/2} \quad (9)$$

$(D_{x,y} = \frac{4\bar{r}c}{\omega l_{x,y}^2})$, откуда с помощью (4), (5), (7) легко получить выражения для $\sigma_{1,2}^2$ и $\rho_{1,2}$. В частности, в случае изотропных неоднородностей ($l_x = l_y = l$, $D_x = D_y = 0$) имеем (см. также [19])

$$\begin{aligned} \langle f_1^2 \rangle &= \frac{1}{2} (R_{ff}^* + \operatorname{Re} R_{ff}) = \frac{S_0^2}{2} \frac{D^2}{1 + D^2}, \\ \langle f_2^2 \rangle &= \frac{1}{2} (R_{ff}^* - \operatorname{Re} R_{ff}) = \frac{S_0^2}{2} \left(2 - \frac{D^2}{1 + D^2}\right), \\ \rho_{1,2} &= -\frac{2D}{2 + D^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, модель бесконечного ФЭ при $S_0^2 \ll 1$ и нормальном законе распределения фазы на экране соответствует четырехпараметрическому нормальному распределению [3, 4]*. В зоне Фраунгофера ($D \gg 1$), как легко видеть из (7), (10), $\rho_{1,2} = 0$, а $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, и мы имеем обобщенный закон распределения Рэлея—Райса. В области применимости геометрооптического приближения ($D \ll 1$) форма закона распределения мало отличается от гауссовой. В связи с этим следует отметить неверные в принципиальном отношении утверждения автора [21] (стр. 232) об универсальности райсовского закона при флюктуациях фазы волны в точке приема, меньших 2π . Законы распределения амплитуды, как мы видели, могут быть в этом случае разными, однако все они имеют форму, мало отличающуюся от формы смешенного гауссова распределения.

Выше было показано, что при рассеянии волны на сильно рассеивающем ФЭ корреляция между компонентами поля E'_1 и E'_2 близка к нулю. Это означает, что распределения, дающие замирания более глубокие, чем рэлеевский закон, следует искать не в предположении о коррелированности нормально распределенных компонент E'_1 и E'_2 , как это широко распространено в литературе по ионосферному распространению волн КВ диапазона, а в отказе от предположения о нормальном законе их распределения.

Физически это может быть связано с тем обстоятельством, что при наличии на экране крупномасштабных ($D \ll 1$, $S_0^2 \gg 1$) фокусирующих неоднородностей полное поле волны E' вблизи фокуса такой линзы состоит из большого числа n коррелированных составляющих ($n \sim D^{-1}$).

Приближенное решение задачи о распределении флюктуаций интенсивности за экраном с фокусирующими неоднородностями может быть получено из (1). Представим поле волны на экране в виде

* Ниже мы покажем, что далеко за ограниченным экраном четырехпараметрическое распределение получается при $S_0 < 1$ для любого распределения амплитуды и фазы ча экране.

$$\begin{aligned} E(\rho, 0) &= e^{-i\omega t} E'(\rho, 0), \\ E'(\rho, 0) &= e^{i\Delta S} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{L^2}\right) + 1 - \exp\left(-\frac{2\rho^2}{L^2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

(L — размер линзы) и разложим $\Delta S(\rho)$ в ряд Тейлора вблизи значения $\rho = 0$, ограничиваясь членами разложения второго порядка.

Подставляя (11) в (1) и проводя интегрирование по ρ , получаем искомое выражение для поля сигнала за линзой, которое мы не приводим ввиду его громоздкости. Приближенное выражение для интенсивности сигнала за одномерной линзой (в пренебрежении осцилляциями из-за краев линзы) имеет вид

$$\begin{aligned} I(x, r_2) &\approx I_0 \exp\{-2x_0^2 I_0^2\} + (1 - \exp\{-x_0^2\})^2 \\ \left(x_0 = \frac{x\sqrt{2}}{L}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

В случае изотропной двумерной линзы

$$I(\rho, r_2) \approx I_0 \exp\{-2\rho_0^2 I_0^2\} + (1 - \exp\{-\rho_0^2\})^2, \quad (13)$$

где $I_0 = \frac{1}{[(1-\alpha)^2 + D^2]^{1/k}}$ — интенсивность на оси линзы, $D = \frac{4\bar{r}c}{\omega L^2} \ll 1$, $\rho_0 = \frac{\rho\sqrt{2}}{L}$, $\alpha = zF^{-1}$, $F^{-1} = \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=0}$ — обратное фокусное расстояние линзы. Индекс $k = 1$ соответствует случаю изотропной линзы, $k = 2$ — одномерной.

Из (12), (13) легко получить распределение интенсивности $I(x_0; \rho_0 = 0) \equiv I_0$ на оси линзы (распределение максимумов интенсивности).

Для нормального закона распределения α (закон распределения α тождествен закону распределения ΔS) имеем

$$\begin{aligned} P(I_0) &= P(\alpha) \left| \frac{\partial \alpha}{\partial I_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha_0 (3-k) I_0^{(1+k/2)} \sqrt{1 - I_0^k D^2}} \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{(I_0^{k/2} - \sqrt{1 - I_0^k D^2})^2}{2\alpha_0^2 I_0^k}\right] + \exp\left[-\frac{(I_0^{k/2} + \sqrt{1 - I_0^k D^2})^2}{2\alpha_0^2 I_0^k}\right] \right\} \\ (\alpha_0 &= \langle (zF^{-1})^2 \rangle), \end{aligned} \quad (14)$$

если

$$I_0^k \ll D^{-2} \quad \text{и} \quad P(I_0) = 0 \quad \text{при} \quad I_0^k > D^{-2}.$$

На примере (14) легко видеть, что $P(I_0)$ достаточно медленно убывает (как $1/I_0^{1+k/2}$) при $I_0 \gg 1$. Таким образом, распределения (14) позволяют оценочно описать высокие уровни излучения, в связи с чем распределения такого типа мы будем называть HER-распределениями.

Используя (12), (13), можно получить распределения для I . Действительно, приближенно мы можем считать ρ_0 равновероятно распределенным в пределах относительных расстояний: $\rho_0 = \frac{\sqrt{2}\rho}{L} \sim \pm 1$ ($P(\rho_0) \approx \frac{1}{\pi}$). Учитывая, что при $I \geq 1$ ($I_0 > 1$) вклад второго слагаемого в (12), (13) мал, и используя преобразование

$$P(I) = \int dI_0 \left| \frac{\partial(I, I_0)}{\partial(\rho_0, I_0)} \right|^{-1} P(I_0) P(\rho_0(I_0, I)), \quad (15)$$

получаем интегральное выражение для HER-распределения интенсивностей за линзой:

$$\begin{aligned} P(I) = & \frac{1}{4^{1/k} \sqrt{2\alpha_0} \pi I} \int_0^{D-(3-k)} \frac{1}{I_0^{(2+k/2)} \sqrt{1 - I_0^k D^2}} \times \\ & \times \left[\exp \left\{ - \frac{(I_0^{k/2} + \sqrt{1 - I_0^k D^2})^2}{2\alpha_0^2 I_0^k} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(I_0^{k/2} - \sqrt{1 - I_0^k D^2})^2}{2\alpha_0^2 I_0^k} \right\} \right] \times \\ & \times \frac{dI_0}{\sqrt{\left| \ln \frac{I_0}{I} \right|}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$I^k \ll D^{-2}, \quad P(I) = 0 \quad \text{при} \quad I^k > D^{-2}.$$

Если не интересоваться поведением $P(I)$ при очень малых I , то, используя (16), можно показать, что при любых значениях верхнего предела интегрирования в (16) область интегрирования вблизи него дает малый вклад. Поэтому мы не совершим большой ошибки, если устремим D к нулю. Учитывая логарифмическую особенность подынтегрального выражения в (16), легко провести необходимые упрощения и вычисления [22]. В результате получим следующее выражение для HER-распределения за линзой*:

$$P(I) = \frac{C_k}{\sqrt{2\pi} \alpha_0 I^{(2+k/2)}} \left[\exp \left\{ - \frac{(I^{k/2} - 1)^2}{2\alpha_0^2 I^k} \right\} + \exp \left\{ - \frac{(I^{k/2} + 1)^2}{2\alpha_0^2 I^k} \right\} \right] \quad (17)$$

$$(\zeta < I^k, \quad \zeta < 1).$$

Заметим, что распределения (16), (17) необходимо нормировать, исходя из физических соображений о законе сохранения энергии ($\langle I \rangle \approx 1$). Нетрудно убедиться, что в случае (17) действительно $\int IP(I) dI \equiv 1$, хотя $\int P(I) dI \rightarrow \infty$. Последнее связано с переходом к геометрооптическому пределу $D \rightarrow 0$ и физически означает сложение стремящегося к бесконечности числа когерентных лучей N в фокусе линзы ($N \sim D^{-1}$). Используя (17), определим величину дисперсии флуктуаций интенсивности. В результате несложных преобразований имеем, что при $S_0^2 \gg 1$

$$\sigma_I = \langle (I - 1)^2 \rangle \sim \ln S_0^2$$

для одномерной и

$$\sigma_I \sim \sqrt{S_0^2}$$

для двумерной линзы (при получении этих соотношений учитывалось условие фокусировки сигнала $\alpha \equiv S_0^2 D \sim 1$). Эти результаты, как показывает детальное рассмотрение, подтверждаются результатами численных расчетов [23].

* Распределение (17) для одномерной линзы ($k = 2$) совпадает с распределением [9], полученным Солпитером на основе качественных соображений.

Мы довольно подробно остановились на выводе и анализе распределения флюктуаций интенсивности за линзой, поскольку это одно из немногих распределений, которое может объяснить большие флюктуации сигналов. В заключение заметим, что распределение (17) легко обобщается на случай, когда сама величина α_0 медленно флюктуирует и эти флюктуации распределены по нормальному закону.

2. МДР-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗА ОГРАНИЧЕННЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

Задачи о флюктуациях поля за ограниченным фазовым экраном рассматривались в ряде работ [18]. Выражение для поля за ограниченным ФЭ записывается в приближении Кирхгофа (1), где интегрирование проводится в ограниченном интервале значений ρ или вводится функция освещенности бесконечного экрана $K(\rho)$. Используя имеющиеся выражения, можно получить соответствующие формулы для функций корреляции флюктуирующих полей R_{ff^*} и R_{ff} . На основе таких расчетов легко показать, что при $D_1 \ll 1$ ($D_1 = \frac{4\bar{r}c}{\omega d^2}$, d — характерный масштаб функции $K(\rho)$) функции распределения амплитуды (интенсивности) сигнала тождественны соответствующим функциям распределения за бесконечным экраном.

Особенность статистики сигнала за ограниченным экраном состоит в наличии эффекта «замывания» флюктуаций сигнала [18]. Этот эффект имеет место при выполнении следующих условий:

$$d \gg l, \quad D_1 \gg 1. \quad (18)$$

В случае больших набегов фазы S_0 на экране $R_{ff^*}(r_2, 0) \gg R_{ff}(r_2, 0)$ и среднее поле в точке приема отсутствует*. Флюктуирующее поле, как сумма многих независимых компонент, распределено поциальному закону. Соответственно распределение амплитуд подчиняется рэлеевскому закону:

$$P(R) = \frac{2R}{\sigma} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right), \quad (19)$$

$$\sigma^2 = \frac{R_{ff^*}}{(1 + D_{1E}^2)^k} \approx \frac{1}{D_{1E}^{2k}},$$

где $D_{1E} = D_1 S_0$, а k соответственно равно $1/2$ и 1 для одномерного и двумерного экранов. Сохранение рэлеевской формы с дисперсией, меньшей 1 (при $S_0^2 \gg 1$), за ограниченным экраном подобно эффекту, имеющему место при приеме флюктуирующего излучения на «остронаправленную» антенну [24]. При малых набегах фазы на экране ($S_0 < 1$) и для функции корреляции $R_{ff^*}(0)$ гауссовой формы имеем

$$R_{ff^*}^{(0)} \approx \frac{S_0^2}{2} \frac{1}{(1 + D_1^2)^k} \quad (k = 1, 2); \quad (20)$$

* $\langle E(r_2) \rangle = \frac{\exp(-S_0^2)}{1 + D_2^2} [1 + iD_2] \rightarrow 0$ при $S_0 \rightarrow \infty$, где $D_2 = \frac{4\bar{r}c}{\omega d^2}$ (экран двумерный). Предполагается, что $K(\rho) = \exp\left\{-\frac{2|\rho|^2}{d^2}\right\}$.

$$R_{ff}^{(0)} \approx S_0^2 \frac{(1 + D_2^2)^k}{D_1^{2k} D_2^{2k}} \exp \left\{ -ik \operatorname{arctg} \frac{1}{D_2} \right\}, \quad (21)$$

$$D_1 \frac{d}{l} = D \gg 1.$$

Из (20) и (21) видно, что при $D_2 \sim 1$ $\operatorname{Im} R_{ff} \neq 0$ и $\langle f_1^2 \rangle \neq \langle f_2^2 \rangle$. Таким образом, в этом случае флуктуации амплитуды принимаемого сигнала подчинены, вообще говоря, четырехпараметрическому распределению с малыми значениями дисперсии. При $D_2 \gg 1$ (зона Фраунгофера относительно размеров d ограниченного экрана) $\operatorname{Im} R_{ff}$ близко к нулю, но $\langle f_1^2 \rangle \neq \langle f_2^2 \rangle$, т. е. в этом случае амплитуда сигнала подчинена трехпараметрическому распределению.

Проведенное рассмотрение справедливо, естественно, для любого закона распределения фазы на экране. Но при отличии статистики фазы на экране от гауссовой выражение (19) для σ^2 будет иметь другой вид. Можно показать, что указанным распределениям подчинены флуктуации амплитуд сигналов и за ограниченным амплитудным экраном.

Интересно отметить, что рассмотренным выше условиям может соответствовать, например, случай отражения радиоволн от спорадических E_s -слоев. Ввиду малой толщины E_s -слоя (~ 500 м), сравнимой с размером неоднородностей (≥ 200 м), флуктуации фазы в слое не могут иметь гауссова распределения. Вместе с тем, для слоя E_s характерна ограниченность горизонтальных размеров ($d \sim 100 \div 300$ км), что и приводит к выполнению условий (18).

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД СИГНАЛА ПРИ РАССЕЯНИИ НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ С $l \lesssim \lambda$

В приближении однократного рассеяния, которое обычно хорошо выполняется, рассеянное поле $E^S \sim \int \epsilon_1(r) e^{ikr} dr$ (ϵ_1 — флуктуации диэлектрической проницаемости) и распределение E^S при $V^{1/3} \gg l$ всегда подчинено нормальному закону. Соответственно флуктуации амплитуд сигнала в общем случае описываются обобщенным распределением Рэлея [25]:

$$W(R) = \frac{R}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{R^2 + \langle E \rangle^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{R \langle E \rangle}{\sigma^2} \right), \quad (22)$$

регулярная компонента сигнала отсутствует. Тогда $W(r)$ описывается классическим законом Рэлея. Если движение неоднородностей можно считать замороженным, то характерные времена изменения флуктуаций поля по порядку величины равны $\tau \sim a_k v$ (a_k — характерный пространственный радиус корреляции флуктуаций, v — скорость перемещения неоднородностей относительно приемного и передающего пунктов) и $a_k \sim \lambda/\gamma_{\text{эфф}}$, где $\gamma_{\text{эфф}}$ — минимальная из величин θ_s , θ_g , θ_0 , через которые соответственно обозначены эффективный угол рассеяния волн, характерный угловой размер диаграмм направленности или освещенной (в случае импульсного излучения) области и угловой размер рассеивающей области. (Более подробно см. [25].)

Предположим для определенности, что $\theta_0 \ll \theta_s$, θ_g . Тогда при условии $a_k \gg d$ (d — характерный размер рассеивающей области) время корреляции флуктуаций будет определяться величиной d/v . Легко видеть, что такое условие эквивалентно условию $\lambda \bar{r} \gg d^2$ или $D_2 \gg 1$.

(эффект «замывания» флюктуаций). При этом статистика медленных флюктуаций в предельном случае «замывания» быстрых осцилляций определяется не (22), а статистикой изменения дисперсии флюктуаций диэлектрической проницаемости в ограниченных областях (статистикой ограниченных областей). Поскольку принимаемая мощность $P_s \sim \langle \epsilon_1^2 \rangle$, а амплитуда сигнала $R = A_s \sim \langle \epsilon_1^2 \rangle^{1/2} \sigma_e$, то при нормальном законе распределения величины σ_e мы получаем нормальное распределение для R :

$$P(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} \exp \left\{ -\frac{R'^2}{2\sigma_e^2} \right\} \quad (R' = R - \langle R \rangle) \quad (23)$$

(см. [10]). Такая ситуация вполне может реализоваться при рассеянии волн на мелких неоднородностях спорадического слоя E_s , а в случае сильных ионосферных возмущений (или при прохождении трассы через экваториальную и полярную зоны) и при рассеянии высокочастотной части КВ диапазона на неоднородностях F -слоя.

Если в формировании принимаемого сигнала участвует не одна, а определенное число N ограниченных рассеивающих областей, то [1]

$$P_{N'}(R) = \frac{1}{\sigma_e \Gamma(N/2)} \left(\frac{R'}{2\sigma_e} \right)^{N-1} \exp \left(-\frac{R'^2}{2\sigma_e^2} \right).$$

Такая же ситуация может иметь место при рассеянии волн на метеорных следах. При этом $P(R)$ может описываться распределением, полученным с помощью модели импульсных шумов (см. [9]).

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ СИГНАЛА ПРИ МАЛОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ОТРАЖЕНИЯ РАДИОВОЛН ОТ ИОНОСФЕРЫ

На частотах, близких к f_{kp} — критической частоте прохождения волн при вертикальном или наклонном падении ($f \leq f_{kp, \text{эфф}}$), как известно, происходит частичное отражение волны от ионосферы [26]. Поэтому наличие неоднородностей концентрации вблизи f_{kp} должно привести к сильным флюктуациям коэффициента отражения от ионосферы и, следовательно, к флюктуациям интенсивности сигнала в точке приема. Коэффициент отражения волны (по интенсивности) для вертикального падения волны на плоский параболический слой равен [26]

$$\frac{R^2}{1 - R^2} = \exp \left\{ -a \frac{f_{kp}^2 - f^2}{f_{kp}} \right\}, \quad (24)$$

где $a = \frac{4\pi^2 z_m}{c}$, z_m — полутолщина параболического слоя, $f_{kp}^2 = \frac{e^2}{\pi m} N_\sim$, $N_\sim = \langle N \rangle + \Delta N$. Если неоднородности достаточно крупные (много больше размеров зоны Френеля) и достаточно плавны (отсутствие «многолучевости», вызванной крупными неоднородностями), то интенсивность волны в точке приема при $R^2 \ll 1$

$$I \approx I_0 R^2 \approx I_0 \exp \left\{ -a \left[\langle f_{kp} \rangle - \frac{f^2}{\langle f_{kp} \rangle} \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{a}{2} \left(\langle f_{kp} \rangle + \frac{f^2}{\langle f_{kp} \rangle} \right) \delta N \right\}, \quad (25)$$

$$\ln I - \ln I_0 \sim \beta_1 \delta N,$$

где

$$I_1 = I_0 \exp \left\{ -a \left[\langle f_{kp} \rangle - \frac{f^2}{\langle f_{kp} \rangle} \right] \right\}, \quad \delta N = \frac{\Delta N}{\langle N \rangle},$$

$$I_0 \text{ — интенсивность волны при } R = 1, \text{ а } \beta_1 = \frac{a}{2} \left(\langle f_{kp} \rangle + \frac{f^2}{\langle f_{kp} \rangle} \right).$$

Таким образом, флуктуации логарифма интенсивности пропорциональны δN . При нормальном законе распределения δN флуктуации интенсивности (и амплитуды) будут распределены по логарифмически-нормальному закону:

$$P(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 I} \exp \left\{ -\frac{(\ln I - \ln I_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}, \quad (26)$$

где $\sigma_1^2 = \langle (\delta N)^2 \rangle \beta_1^2$. При наклонном падении на слой вектором поляризации, расположенным в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, выражение (26) остается справедливым, если в нем заменить f_{kp} на $f_{kp\text{eff}} = f_{kp} \sec \theta_0$, где θ_0 — угол входа волны в ионосферный слой*. Однако теперь уже необходимо учитывать флуктуации угла θ_0^{**} . Если флуктуации $\Delta\theta \ll \sin 2\theta_0$, то $P(I)$ будет иметь вид (26) с заменой σ_1^2 на

$$\sigma_{\text{eff}}^2 = \langle \Delta\theta^2 \rangle \operatorname{tg}^2 \theta_0 \times \\ \times \left[\frac{\langle f_{kp} \rangle}{\cos \theta_0} - \frac{f^2}{\langle f_{kp} \rangle} \cos \theta_0 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle f_{kp} \rangle}{\cos \theta_0} + \frac{f^2}{\langle f_{kp} \rangle} \cos \theta_0 \right)^2 \langle (\delta N)^2 \rangle$$

(можно показать, что флуктуации $\Delta\theta$ и δN всегда некоррелированы) и заменой в выражении для $I_1 \langle f_{kp} \rangle \rightarrow \langle f_{kp} \rangle \sec \theta_0$. В случае, когда $\Delta\theta_0 \gg \sin 2\theta_0$, закон распределения $P(I)$ не будет подчиняться (26). Кроме того, при этом условии может оказаться несправедливым и пренебрежение «многолучностью» сигнала. Как следует из [16], в условиях невозмущенной ионосферы на умеренных и низких широтах $\Delta\theta$, как правило, не превышает нескольких градусов и условие $\Delta\theta \ll \sin 2\theta_0$, по-видимому, часто может выполняться.

5. О МДР-РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ В ТОЛСТОМ СЛОЕ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ И В СЛУЧАЕ МНОГОСКАЧКОВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Мы уже указывали в разд. 1, что ионосферный слой с неоднородностями приближенно может быть представлен эквивалентным ФЭ. Во время сильных возмущений, что особенно часто имеет место в авроральной зоне, это приближение может, вообще говоря, оказаться слишком грубым. Поэтому остановимся коротко на возможных распределениях $P(I)$ в случае, когда становятся существенными эффекты, обусловленные конечной толщиной рассеивающего слоя. Если $D_{\Delta r} S_0 = D \frac{\Delta r}{r} S_0 \ll 1$ (Δr — толщина слоя), то действие толстого слоя эквивалентно действию ФЭ. Если $D_{\Delta r} S_0 \gg 1$, то, в силу центральной предельной теоремы, поле принимаемой волны распределено нормально, а флуктуации $P(R)$, так же как и в случае ФЭ, распределены по обобщенному закону Рэлея. Вместе с тем, можно показать, что наличие статистически расположенных

* Для поля E с вертикальным вектором поляризации, несмотря на некоторые особенности [26], учитывая оценочный характер рассмотрения, можно считать, по-видимому, что ситуация сильно не изменится.

** Имеются в виду флуктуации θ_0 , вызванные неоднородностями слоя, при прохождении волны до точки отражения.

ных по толстому слою ограниченных областей с неоднородностями здесь уже не приводит к столь сильным эффектам замывания флюктуаций, как при рассеянии волн на ограниченном ФЭ. При наличии в слое широкого спектра неоднородностей по аналогии с тропосферным распространением (см. [25]) можно ожидать логарифмически-нормального распределения величин I и R . Такая же ситуация может, вообще говоря, иметь место и в случае турбулентного фазового экрана.

Результаты для $P(I)$ в случае многоскакового распределения можно получить, основываясь на формулах работы [27]. Если рассеивающие экраны не ограничены, то при наличии на пути распространения волны многих экранов закон распределения $P(R)$ должен стремиться к рэлеевскому закону или в случае многих, достаточно слабых ($\sum S_0^2 \ll 1$) экранов — к закону Райса*. Когда экраны ограничены, то $P(R)$ существенно зависит от взаимного расположения экранов. Если соседние экраны расположены «близко», так что на расстоянии между ними еще не происходит «замывания» флюктуаций, то суммарный эффект замывания уменьшается и распределение $P(R)$ при большом числе скачков стремится к распределению бесконечного экрана. В другом предельном случае эффект замывания флюктуаций сначала может даже увеличиваться и распределения $P(I)$, вообще говоря, будут подобны распределениям разд. 2.

Заканчивая рассмотрение МДР-распределений флюктуаций амплитуд КВ сигналов, необходимо еще раз подчеркнуть, что эти распределения основаны на конкретных модельных представлениях о статистической структуре ионосфера и условиях распространения в ней радиоволн. Поэтому такие МДР-распределения в значительно большей степени, чем [3, 4, 6], пригодны для целей изучения неоднородной структуры ионосферы по определяемой экспериментально статистике КВ сигналов. Сравнение теоретических МДР-распределений с результатами экспериментов будет рассмотрено отдельно.

Авторы признательны Ю. А. Кравцову за замечания, сделанные при чтении статьи в рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гиеденко, Курс теории вероятностей, изд. Наука, М., 1965.
2. Д. Д. Кловский, И. М. Самусенко, Радиоэлектроника в народном хозяйстве, Материалы научно-технической конференции, Куйбышев, 1970.
3. Р. Векманн, J. Res. NBS, 66D, № 3, 231 (1962).
4. Д. Д. Кловский, Передача дискретных сообщений по радиоканалам, изд. Связь, М., 1969.
5. А. Г. Вологдин, С. Ф. Миркотан, С. М. Савельев, Геомагн. и аэрономия, 12, № 2, 226 (1972).
6. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1961.
7. И. С. Всехсвятская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 10, 1490 (1968).
8. И. С. Всехсвятская, Геомагн. и аэрономия, 2, № 4, 712 (1962).
9. Е. Е. Sa!peter, Astrophys. J., 147, № 2, 433 (1967).
10. M. Nakagami, Statist. Methods in Radio Wave Propagation, 3, Pergamon Press, 1960.
11. Э. И. Гинзбург, О. Г. Журавский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 1, 5 (1972).
12. М. П. Долуханов, Флюктуационные процессы при распространении радиоволн, изд. Связь, М., 1971.
13. Э. И. Гинзбург, О. Г. Журавский, Л. Н. Ручкан, Геомагн. и аэрономия, 11, № 2, 343 (1971).
14. M. Nakagami, Radio Sci., 68D, № 9, 995 (1964).
15. Р. Векманн, Radio Sci., 68D № 9, 927 (1964).

* Все это справедливо в предположении, что точка наблюдения расположена в зоне Фраунгофера хотя бы относительно среднего экрана. В обратном предельном случае распределение будет близко к логарифмически-нормальному.

16. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
17. Н. Г. Денисов, Л. М. Ерухимов, Геомагн. и аэрономия, 6, № 4, 695 (1966).
18. Н. Г. Денисов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1965.
19. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 628 (1961).
20. Л. М. Ерухимов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1965.
21. Л. М. Финк, Теория передачи дискретных сообщений, изд. Сов. радио, М., 1970.
22. С. Е. Рыжик, И. М. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов, Физматгиз, М., 1960.
23. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968); В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
24. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 620 (1967).
25. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
26. В. Л. Гinzбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
27. Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1852 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
2 октября 1972 г.

DISTRIBUTION OF SW-SIGNAL FLUCTUATIONS¹

V. A. Alimov, L. M. Erukhimov

Based on the diffraction calculations, the distribution functions of amplitude fluctuations of SW-signals when reflecting (scattering) in the ionosphere are obtained. Different statistical ionospheric models are considered: infinite and bounded phase screens, wave reflection at the frequencies close to the critical one, a layer with small ($l \sim \lambda$) inhomogeneities and so on. It is shown the maximum value of the intensity fluctuation $\sigma_I = \langle (\Delta I)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ behind the infinite phase screen (associated with the statistical focusing effect on Gaussian inhomogeneities) is proportional to $\ln S_0^2$ for one-dimensional and $\sqrt{S_0^2}$ for two-dimensional isotropic screens (S_0^2 is the mean square of the phase difference on the phase screen, $S_0^2 \gg 1$). The distribution functions found are compared with distributions obtained on different model assumptions of SW-signals.

УДК 621.371.22

ФЛУКТУАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА НЕОДНОРОДНОГО ПОГЛОЩАЮЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

B. Г. Безродный

В первом приближении метода возмущений получена связь между флюктуациями диэлектрической проницаемости неоднородного поглощающего полупространства и флюктуациями поверхностного импеданса его границы. Показано, что результат малочувствителен к виду регулярной зависимости диэлектрической проницаемости от координат.

1. На распространение электромагнитных волн низкой частоты (в диапазоне от единиц герц до десятков килогерц) вокруг Земли сильное влияние оказывают нижние слои ионосферы. Электрические свойства ионосферы простейшим образом можно описать при помощи комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon_0(z) = \epsilon'_0(z) + i\epsilon''_0(z)$, зависящей лишь от высоты z относительно начала ионосферного слоя. Естественно, что при этом не учитываются анизотропия свойств ионосферы, связанная с влиянием магнитного поля Земли, и горизонтальные градиенты ϵ_0 .

В рамках модели изотропной слоистой ионосферы действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости определяются формулами [1]

$$\epsilon'_0(z) = 1 - \frac{4\pi N(z) e^2}{m [\omega^2 + v^2(z)]},$$

$$\epsilon''_0(z) = \frac{4\pi N(z) v(z) e^2}{m \omega [\omega^2 + v^2(z)]},$$

где m и e — масса и заряд электрона, $N(z)$ — концентрация электронов, $v(z)$ — эффективная частота соударений. Для частот рассматриваемого диапазона выполняется неравенство $\omega \ll v$. В меру выполнения этого неравенства $\left| \frac{d\epsilon'_0}{dz} \right| \ll \left| \frac{d\epsilon''_0}{dz} \right|$, так что глубина проникновения волны в ионосферный слой определяется поведением лишь мнимой части диэлектрической проницаемости $\epsilon''_0(z)$, т. е. скин-эффектом в неоднородном проводящем слое. Что же касается $\epsilon'_0(z)$, она не успевает получить сколь-нибудь заметного приращения и практически совпадает с единицей на всей толщине скин-слоя.

Ввиду большой проводимости нижних слоев ионосферы, ее свойства на низких частотах удобно характеризовать приведенным поверхностным импедансом. Совершенно естественно поэтому и флюктуации параметров ионосферы свести к флюктуациям поверхностного импеданса. Это избавляет от необходимости исследования процесса распространения волн в ионосферном слое при расчетах флюктуационных полей в полости между Землей и ионосферой и дает возможность легко обоб-

щить для подобных расчетов результаты, полученные в ряде работ (см., например, [2, 3]) по рассеянию волн на неровных границах. Так возникает задача о флюктуациях поверхностного импеданса на границе неоднородного поглощающего полупространства. Для простоты рассмотрим сначала скалярную задачу, а затем укажем, при каких условиях полученные результаты удается обобщить на случай электромагнитного поля.

2. Пусть на неоднородный слой $z > 0$ из нижнего полупространства падает плоская волна единичной интенсивности. Распространение волны в слое будем описывать скалярным уравнением Гельмгольца

$$\Delta U(\mathbf{R}) + k^2 [\epsilon_0(z) + \epsilon_1(\mathbf{R})] U(\mathbf{R}) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{R} = \{r, z\}$, $r = \{x, y\}$, зависимость от времени предполагается гармонической $\sim e^{-i\omega t}$, $k = \omega/c$, c — скорость света. Регулярную неоднородность слоя будем характеризовать комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0(z)$, зависящей только от одной координаты:

$$\epsilon_0(z) = \begin{cases} 1 + i\epsilon''_0(z) & (z > 0) \\ 1 & (z < 0) \end{cases}, \quad (2)$$

$\epsilon''_0(+0) = 0$, $\frac{d\epsilon''_0}{dz} > 0$. Относительно флюктуаций $\epsilon_1(\mathbf{R})$ диэлектрической проницаемости будем предполагать, что их интенсивность изменяется с высотой, так что $\epsilon_1(\mathbf{R})$ можно представить в виде $\epsilon_1(\mathbf{R}) = i\sigma_\epsilon(z)\alpha(r, z)$, где $\sigma_\epsilon^2(z) = \langle \epsilon_1^2 \rangle$, $\langle \alpha^2(r, z) \rangle = 1$, $\langle \alpha(r_1, z_1)\alpha(r_2, z_2) \rangle = W_\epsilon(r_2 - r_1, z_2 - z_1)$, косые скобки означают статистическое усреднение.

Решение уравнения (1) будем проводить методом возмущений. Представим поле $U(\mathbf{R})$ в виде

$$U(\mathbf{R}) = U_0(\mathbf{R}) + U_1(\mathbf{R}), \quad (3)$$

где $U_0(\mathbf{R}) = \exp(i k x \cos \psi_0) f(z)$ — решение уравнения (1) при $\epsilon_1 = 0$, ψ_0 — угол, образованный вектором падающей волны с плоскостью $z=0$. Перейдем от U_1 и α к их спектральным разложениям по координатам x и y :

$$U_1(\mathbf{R}) = \exp(i k x \cos \psi_0) \int d\mathbf{x} \tilde{U}_1(\mathbf{x}, z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}}, \quad (4)$$

$$\alpha(r, z) = \int d\mathbf{x} \hat{\alpha}(\mathbf{x}, z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}}.$$

Подставляя выражения (3) и (4) в формулу (1), получим уравнение для спектральной плотности $\tilde{U}_1(\mathbf{x}, z)$ флюктуационного поля:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}_1(\mathbf{x}, z)}{\partial \mathbf{x}^2} + k^2 [\sin^2 \psi_x + i\epsilon''_0(z)] \tilde{U}_1(\mathbf{x}, z) =$$

$$= -ik^2 f(z) \sigma_\epsilon(z) \tilde{\alpha}(\mathbf{x}, z), \quad (5)$$

где $\mathbf{x}'^2 = x'_x^2 + x_y^2$, $x'_x = k \cos \psi_0 + x_x$, $\sin^2 \psi_x = 1 - \frac{x'^2}{k^2}$. Нас будет интересовать величина флюктуационного поля в нижнем полупространстве. Используя функцию Грина $\tilde{G}_0(\mathbf{x}'; z < 0, z_1)$ уравнения (5), его решение при $z < 0$ запишем в виде

$$\tilde{U}_1(x, z < 0) = \frac{ik^2}{4\pi} \int_0^\infty dz_1 f(z_1) \tilde{G}_0(x'; z < 0, z_1) \sigma_\epsilon(z_1) \tilde{\alpha}(x, z_1). \quad (6)$$

Входящее в формулу (6) поле нулевого приближения $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2f}{dz^2} + k^2 [\sin^2 \psi_0 + i\epsilon''_0(z)] f(z) = 0 \quad (7)$$

с граничным условием

$$f(+\infty) = 0 \quad (8)$$

и условиями непрерывности при переходе через границу $z = 0$

$$\begin{aligned} f(+0) &= f(-0), \\ \frac{df(+0)}{dz} &= \frac{df(-0)}{dz}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $y(z, \psi_0)$ — решение уравнения (7) при $z > 0$, удовлетворяющее граничному условию (8). Сшивая это решение на границе слоя $z = 0$ при помощи соотношений (9) с полем в нижнем полупространстве, получим

$$f(z > 0) = \frac{2 \sin \psi_0}{\sin \psi_0 + \eta_0(\psi_0)} \frac{y(z, \psi_0)}{y(0, \psi_0)}, \quad (10)$$

где $\eta_0(\psi_0) = \frac{1}{iky(0, \psi_0)} \frac{dy(0, \psi_0)}{dz}$ — поверхностный импеданс регулярной задачи, соответствующий углу скольжения ψ_0 падающей волны.

Функция Грина $\tilde{G}_0(x'; z < 0, z_1)$ описывает поле, создаваемое в области $z < 0$ точечным источником, расположенным внутри рассеивающего слоя. В соответствии с этим \tilde{G}_0 затухает на бесконечности ($\tilde{G}_0|_{z \rightarrow +\infty} = 0$) и переходит в плоскую волну при $z < 0$ ($\tilde{G}_0|_{z < 0} \sim \sim \exp(-i\sqrt{k^2 - x'^2} z)$).

Будем искать \tilde{G}_0 в виде комбинации двух линейно независимых решений $\varphi_{1,2}$ однородного уравнения (5). Если $\varphi_1(z)$ удовлетворяет граничному условию $\varphi_1(+\infty) = 0$, а $\varphi_2(z)$ — условию $\varphi_2|_{z < 0} \sim \sim \exp(-i\sqrt{k^2 - x'^2} z)$, то

$$\tilde{G}_0(x'; z < 0, z_1) = \frac{4\pi \varphi_1(z_1) \varphi_2(z)}{\varphi_1(0) \left[\frac{d\varphi_2(0)}{dz} \right] - \left[\frac{d\varphi_1(0)}{dz} \right] \varphi_2(0)}. \quad (11)$$

Выбирая $\varphi_1(z) \equiv y(z, \psi_x)$, $\varphi_2 \equiv \exp(-i\sqrt{k^2 - x'^2} z)$, выражение для функции Грина получим в виде

$$\tilde{G}_0(x'; z < 0, z_1) = \frac{4\pi i \exp(-i\sqrt{k^2 - x'^2} z)}{k \left[\sqrt{1 - \frac{x'^2}{k^2}} + \eta_0(\psi_x) \right]} \frac{y(z_1, \psi_x)}{y(0, \psi_x)}. \quad (12)$$

Подставляя (10) и (12) в формулу (6), приходим к окончательному выражению для спектральной плотности рассеянного поля:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(x, z < 0) = & -\frac{2k \sin \psi_0 \exp(-i\sqrt{k^2 - x'^2}z)}{[\sin \psi_0 + \eta_0(\psi_0)] [\sin \psi_x + \eta_0(\psi_x)]} \times \\ & \times \int_0^\infty dz_1 \frac{y(z_1, \psi_0)}{y(0, \psi_0)} \frac{y(z_1, \psi_x)}{y(0, \psi_x)} \sigma_e(z_1) \tilde{\alpha}(x, z_1) \end{aligned} \quad (13)$$

С другой стороны, не представляет труда получить выражение для $\tilde{U}_1(x, z < 0)$ и в случае отражения плоской волны от границы $z = 0$, на которой считаются заданными регулярный поверхностный импеданс $\eta_0(\psi_0)$ и флюктуации импеданса $\eta_1(\psi_0, r) = \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}r} \tilde{\eta}_1(\psi_0, x)$:

$$\tilde{U}_1(x, z < 0) = -\frac{2 \sin \psi_0 \exp(-i\sqrt{k^2 - x'^2}z) \tilde{\eta}_1(\psi_0, x)}{[\sin \psi_0 + \eta_0(\psi_0)] [\sin \psi_x + \eta_0(\psi_x)]}. \quad (14)$$

Сравнивая формулы (13) и (14), искомое выражение для флюктуаций импеданса $\eta_1(\psi_0, r)$ получим в виде

$$\begin{aligned} \eta_1(\psi_0, r) = & k \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}r} \int_0^\infty dz_1 Y(z_1, \psi_0) Y(z_1, \psi_x) \times \\ & \times \sigma_e(z_1) \tilde{\alpha}(x, z_1), \end{aligned} \quad (15)$$

где введены обозначения:

$$Y(z_1, \psi_0) \equiv \frac{y(z, \psi_0)}{y(0, \psi_0)}, \quad Y(z_1, \psi_x) \equiv \frac{y(z, \psi_x)}{y(0, \psi_x)}.$$

Функция $Y(z, \psi_x)$ по определению удовлетворяет однородному уравнению (5) с граничными условиями $Y(+\infty, \psi_x) = 0$, $Y(0, \psi_x) = 1$. Если характерный размер неоднородностей диэлектрической проницаемости l_\perp в плоскости (x, y) велик по сравнению с длиной волны,

$$kl_\perp \gg 1, \quad (16)$$

то, как следует из уравнения (5), функции $Y(z, \psi_x)$ и $Y(z, \psi_0)$ мало отличаются друг от друга в области, дающей основной вклад в интеграл в формуле (15). В результате формула (15) может быть преобразована к виду

$$\eta_1(\psi_0, r) = k \int_0^\infty dz_1 [Y(z_1, \psi_0)]^2 \sigma_e(z_1) \alpha(r, z_1). \quad (17)$$

Не конкретизируя, по-прежнему, зависимости $\epsilon_0 = \epsilon_0(z)$, укажем некоторые общие свойства функции $Y(z, \psi_0)$. Она равна единице в начале слоя и переходит в ВКБ-асимптотику вдали от границы:

$$Y(z, \psi_0) \approx \exp \left\{ ik \int_0^z dz' \sqrt{\sin^2 \psi_0 + i\epsilon_0''(z')} \right\}. \quad (18)$$

В промежуточной области значений z под $Y(z, \psi_0)$ следует понимать точное решение уравнения (7), определяющееся конкретным видом функции $\epsilon_0''(z)$.

Глубину проникновения волны в слой (глубину неоднородного скин-слоя) определим соотношением

$$\delta = \int_0^\infty dz |Y(z, \psi_0)|. \quad (19)$$

Производя в формуле (17) замену переменных $z_1 = \xi\delta$ и переобозначая $Y(z_1, \psi_0) \rightarrow Y(\xi, \psi_0)$, для корреляционной функции флюктуаций поверхностного импеданса получим следующее выражение:

$$\langle \eta_1(\psi_0, r) \eta_1^*(\psi_0, r') \rangle = \begin{cases} k^2 \epsilon_0^2 l_z \delta A W_{\epsilon \perp}(r' - r) & \text{при } \delta \gg l_z, \\ k^2 \epsilon_0^2 \delta^2 B W_\epsilon(r' - r, 0) & \text{при } \delta \ll l_z \end{cases}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} l_z W_{\epsilon \perp}(r' - r) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_z W_\epsilon(r' - r, \rho_z), \\ A &= \int_0^{\infty} d\xi [\epsilon_0''(\xi\delta)]^{2s} |Y(\xi, \psi_0)|^4 \sim 1, \\ B &= \left| \int_0^{\infty} d\xi [\epsilon_0''(\xi\delta)]^s [Y(\xi, \psi_0)]^2 \right|^2 \sim 1. \end{aligned} \quad (21)$$

При выводе (20) и (21) предполагалось, что дисперсия флюктуаций диэлектрической проницаемости растет с высотой по закону

$$\sigma_\epsilon(z) = \sigma_{\epsilon 0} [\epsilon_0''(z)]^s, \quad (22)$$

где s — некоторое положительное число. Из формулы (20) видно, что интервалы корреляции флюктуаций поверхностного импеданса совпадают с интервалами корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости в плоскости (x, y) , дисперсия флюктуаций импеданса зависит от соотношения между вертикальным размером l_z флюктуаций ϵ_1 и глубиной скин-слоя δ , а конкретный вид зависимости $\epsilon_0 = \epsilon_0(z)$ лишь незначительно изменяет величины A , B и δ .

3. Выясним, к каким отличиям приводит учет векторного характера электромагнитного поля. Применяя к уравнениям Максвелла метод возмущений, для флюктуационных компонент E_{1j} , электрического поля можно легко получить уравнения

$$\begin{aligned} \Delta E_{1j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d\epsilon_0}{dz} E_{1z} + k^2 \epsilon_0 E_{1j} &= -k^2 \epsilon_1 E_{0j} - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_0 \nabla \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где x_j может принимать значения x, y, z . Нетрудно показать, что если горизонтальный масштаб суммарной неоднородности среды велик по сравнению с длиной волны (неравенство (16)), а вертикальный — не слишком мал,

$$\max \left\{ \frac{l_{\perp}}{l_z}, \frac{l_{\perp}}{\sigma_\epsilon} \left| \frac{d\sigma_\epsilon}{dz} \right|, \frac{l_{\perp}}{\epsilon_0} \left| \frac{d\epsilon_0}{dz} \right| \right\}, \ll k^2 l_{\perp}^2, \quad (24)$$

рассеяние на флюктуациях диэлектрической проницаемости ϵ_1 не приводит к возникновению волн, поляризация которых отлична от поляризации падающей волны E_0 .

Введением однокомпонентного электрического или магнитного векторов Герцä задача снова может быть сведена к скалярной. В результате для волны, поляризованной нормально к плоскости падения, полностью справедливы все полученные ранее результаты; для волны, поляризованной в плоскости падения, отличие состоит в замене во всех формулах $\hat{\epsilon}(z) = \epsilon_0(z) + \epsilon_1(R)$ на

$$\hat{\epsilon}(R) = \epsilon(R) - \frac{1}{k^2} V \epsilon \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{V \epsilon} \right). \quad (25)$$

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность И. М. Фуксу за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля—ионосфера, изд. Наука, М., 1967.
- 2 Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
- 3 В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 15, № 12, 1875 (1972).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
10 января 1973 г.

SURFACE IMPEDANCE FLUCTUATIONS OF A LOSSY HALF-SPACE

V. G. Bezrodnyy

A relation has been obtained (in the first approximation of perturbation method) between fluctuations in dielectric constant of a non-uniform lossy half-space and those of the impedance at the boundary. The result is shown to depend but slightly on the explicit coordinate dependence of the dielectric constant.

УДК 621.391.81 : 538.566

О ФЛУКТУАЦИЯХ ТОЧКИ ПОВОРОТА В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

И. М. Фукс

В приближении геометрической оптики исследуется вопрос о случайных смещениях точки поворота при полном внутреннем отражении плоской волны от слоисто-неоднородного полупространства, где наряду с регулярной рефракцией происходят флуктуации показателя преломления. В двух предельных случаях—крупномасштабных и мелкомасштабных флуктуаций показателя преломления—получены функции распределения и вычислены первые моменты случайных смещений точки поворота. Для промежуточного случая, когда градиент случайной компоненты показателя преломления имеет тот же порядок, что и средний градиент (приводящий к регулярной рефракции), построена интерполяционная формула для функции распределения флуктуаций точки поворота. В заключение приведены статистические оценки коэффициента просачивания волнового поля за первую точку поворота и получены неравенства, ограничивающие применимость геометрооптического рассмотрения

Модель плоско-слоистой неоднородной среды часто используется при решении широкого круга задач радиофизики и гидроакустики (см., например, [1, 2]). Пренебрежение объемным характером неоднородностей позволяет от трехмерных задач дифракции волн перейти к одномерным, что значительно упрощает теоретическое исследование и вместе с тем по существу правильно описывает явления рефракции, отражения и преломления волн в реальных стратифицированных средах (например, радиоволн — в ионосфере и тропосфере, звука — в приповерхностных слоях моря и т. д.).

В настоящей работе исследуются статистические характеристики флуктуаций точек поворота, возникающие при полном внутреннем отражении волн от слоистой случайно-неоднородной среды с регулярной рефракцией.

1. Постановка задачи. Пусть на полупространство $z > 0$ с изменяющимся показателем преломления $n = n(z)$ [$n(z < 0) = 1$] под углом ϕ_0 к плоскости $z = 0$ падает плоская волна. По мере проникновения поля в неоднородную среду угол $\psi = \psi(z)$ между волновым вектором и плоскостью $z = 0$ изменяется по закону Снеллиуса

$$n(z) \cos \psi(z) = \cos \phi_0. \quad (1)$$

В точке поворота $z = z_m$, где угол $\psi(z)$ изменяет знак, происходит полное внутреннее отражение. Из (1) видно, что точку поворота можно определить как наименьший корень $z = z_m$ уравнения

$$\eta(z) = \sin^2 \phi_0, \quad (2)$$

где $\eta(z) = 1 - n^2(z) = N(z) + \nu(z)$. Здесь функция $N(z)$ описывает регулярное (неслучайное) изменение показателя преломления с высотой, а $\nu(z)$ — случайная функция, усреднение по ансамблю реализаций которой в дальнейшем обозначается скобками $\langle \rangle$. Ниже мы будем считать, что

а) $N(z)$ является монотонно возрастающей функцией, так что уравнение

$$N(z) = \sin^2 \psi_0 \quad (3)$$

для точки поворота в среде без флюктуаций имеет единственное решение $z = z_m^0$ (см. рис. 1);

б) функция $v(z)$ является стационарной функцией с нулевым средним значением и конечными дисперсиями $v(z)$ и $\dot{v}(z) = \frac{d\dot{v}}{dz}$:

$$\langle v \rangle = \langle \dot{v} \rangle = 0, \quad \langle v^2 \rangle = \sigma^2, \quad \langle \dot{v}^2 \rangle = \sigma_1^2;$$

в) значения функции $v(z)$ и ее производной $\dot{v}(z)$ в той же точке являются независимыми случайными величинами, так что совместная плотность распределения вероятностей $w(v, \dot{v})$ распадается на произведение одномерных:

$$w(v, \dot{v}) = w(v) w_1(\dot{v}). \quad (4)$$

Отметим, что для нормальных процессов (4) является следствием стационарности.

Задача проводимого ниже исследования заключается в определении статистических характеристик случайной величины z_m — функции распределения $W(z_m)$ и моментов — по известным статистическим характеристикам случайной функции $v(z)$.

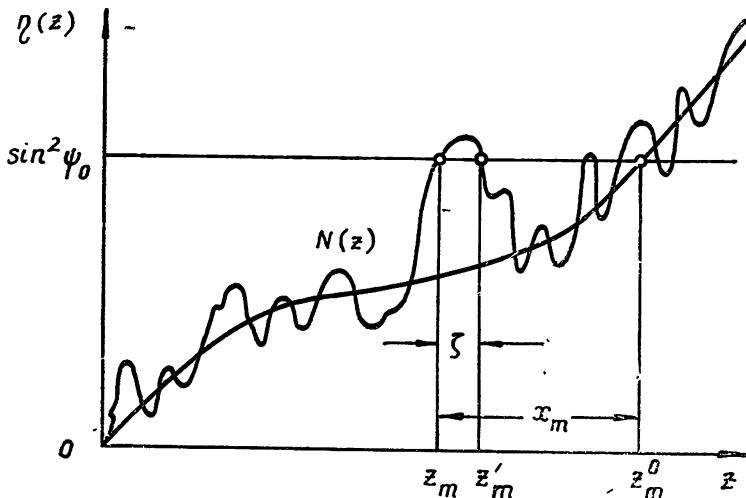


Рис. 1.

2. Плавные флюктуации. Если рассматривать $v(z)$ в левой части уравнения (2) как малое возмущение, то, раскладывая $\eta(z)$ в ряд Тейлора вблизи $z = z_m^0$, нетрудно получить решение z_m в виде следующего ряда:

$$z_m \approx z_m^0 - \frac{v}{\alpha} + \frac{vv}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\beta v^2}{\alpha^3} + \dots \quad (5)$$

Здесь введены обозначения $\alpha = \dot{N} = \frac{dN}{dz}$, $\beta = \ddot{N} = \frac{d^2N}{dz^2}$, и значения всех функций в правой части (5) относятся к точке $z = z_m^0$. Получен-

ный ряд (5) хорошо сходится при выполнении условия $\nu \ll \alpha$, т. е. в случае достаточно плавных возмущений $\nu(z)$, которые не приводят к появлению в (2) новых корней по сравнению с уравнением (3), а вызывают лишь флюктуации z_m относительно невозмущенного значения z_m^0 . Если $\nu(z)$ является нормальным случайным процессом, то для функции распределения W смещений z_m относительно z_m^0 из (5) следует (см., например, [3], § 12)

$$W(t_m) = [1 + \gamma(t_m^3 - 2t_m)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t_m^2/2), \quad (6)$$

где $t_m = \frac{\alpha}{\sigma}(z_m^0 - z_m)$ и $\gamma = \frac{\beta\sigma}{2\alpha^2}$.

3. Быстрые флюктуации. Перейдем теперь к исследованию обратного предельного случая мелкомасштабных (быстрых) флюктуаций $\nu(z)$, когда $\nu \gg \alpha$. Плотность распределения вероятности $W(z_m)$ случайной величины z_m можно определить из соотношения

$$W(z_m) = - \left. \frac{d \bar{P}(Z)}{dZ} \right|_{Z=z_m},$$

где $\bar{P}(Z) = P\{z_m \geq Z\}$ есть вероятность того, что наименьший корень z_m уравнения (2) лежит правее точки $z = Z$ (в дальнейшем $P\{\cdot\}$ означает вероятность события, указанного в скобках $\{\cdot\}$).

Обозначим через $A(0, Z)$ событие, заключающееся в том, что в интервале $0 < z < Z$ функция $\eta(z)$ нигде не превышает уровня $\eta_0 = \sin^3 \psi_0$, т. е.

$$A(0, Z) = \{\eta(z) < \eta_0, 0 < z \leq Z\}. \quad (7)$$

Очевидно, что событие $A(0, Z)$ эквивалентно событию $\{z_m \geq Z\}$. Событие, дополнительное к $A(0, Z)$, состоит в том, что хотя бы в одной точке интервала $0 < z < Z$ происходит событие $B(z)$ — пересечение $\eta(z)$ с уровнем η_0 :

$$B(z) = \{\eta(z) = \eta_0, \eta'(z) > 0\}. \quad (8)$$

При $\nu \gg \alpha$ в окрестности точки $z = z_m^0$ с большой вероятностью происходят многократные пересечения $\eta(z)$ с уровнем η_0 . Очевидно, что характерное расстояние, на котором происходят пересечения, имеет порядок $\approx \sigma/\alpha$ и значительно превышает интервал корреляции этих случайных пересечений. Поэтому, в меру выполнения неравенства $\sigma_1 \gg \alpha$, точки пересечения $\eta(z)$ с η_0 можно считать независимыми и, следовательно, распределенными по закону Пуассона. Отсюда следует, что вероятность события A , заключающегося в том, что в интервале $0 < z < Z$ ни разу не произойдет событие B , равна

$$\bar{P}(Z) = P\{A(0, Z)\} = \exp\left\{-\int_0^Z p_z(B) dz\right\}, \quad (9)$$

где $p_z(B)$ — плотность вероятности точек пересечения, которая выражается через совместную плотность распределения $w_{\eta\eta}$ случайной функции η и ее производной $\dot{\eta}$ (см., например, [4]):

$$p_z(B) = \int_0^\infty \dot{\eta} w_{\eta\dot{\eta}}(\eta = \eta_0, \dot{\eta}, z) d\dot{\eta}. \quad (10)$$

Переходя от η , $\dot{\eta}$ к распределению v , \dot{v} и воспользовавшись формулой (4), преобразуем (10) к виду

$$p_z(B) = w[\eta_0 - N(z)] \int_{-\dot{N}(z)}^{\infty} w_1(v)[v + \dot{N}(z)] d\dot{v}. \quad (11)$$

Вместо случайной координаты z_m удобнее иметь дело с флюктуациями смещения $x_m = z_m^0 - z_m$ точки поворота относительно невозмущенного значения z_m^0 . В связи с этим перейдем от z к новой координате $x = z_m^0 - z$ с началом отсчета в точке $z = z_m^0$ и введем функцию

$$F(x) = N(z_m^0) - N(z_m^0 - x),$$

описывающую регулярную часть отклонения квадрата показателя преломления от его значения $N(z_m^0) = \eta_0$ в точке поворота. Предположим, наконец, что относительные значения флюктуаций точки поворота достаточно малы ($|x_m| \ll z_m^0$), и с вероятностью, близкой к единице, можно считать, что вблизи $z = 0$ нет точек пересечения $\eta(z)$ с η_0 : для этого достаточно потребовать, чтобы $\eta_0 \gg \sigma$. Тогда, исходя из (9) и (11), функцию распределения $P(X)$ случайных отклонений x_m и соответствующую плотность вероятности $W(x_m)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} P(X) &= \mathbb{P}\{x_m \leq X\} = \mathbb{P}\{z_m \geq z_m^0 - X\} = \bar{P}(Z = z_m^0 - X) = \\ &= \exp\left\{-\int_X^{\infty} g(x) dx\right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$W(x_m) = g(x_m) \exp\left\{-\int_X^{\infty} g(x) dx\right\},$$

где

$$g(x) = w[F(x)] \int_{-\dot{F}(x)}^{\infty} w_1(v)[v + \dot{F}(x)] d\dot{v}. \quad (13)$$

4. Предельное распределение. Покажем, что при больших значениях параметра $q = \sigma/\alpha$ функция (12) стремится к некоторому предельному распределению, параметры которого могут быть найдены по заданным функциям $w(v)$ и $w_1(v)$. Ограничимся сначала линейным профилем $N(z)$, когда $F(x) = \alpha x$ и, следовательно,

$$g(x) = w(\alpha x) \int_{-\alpha}^{\infty} w_1(v)[v + \alpha] d\dot{v}. \quad (14)$$

Перейдем от x к безразмерной координате $t = \alpha x/\sigma$. Тогда для случайной величины нормированного на σ/α смещения $t_m = \alpha x_m/\sigma$ получаем из (12) и (14) функцию распределения

$$P(T) = \mathbb{P}\{t_m \leq T\} = \exp\left\{-\lambda \int_T^{\infty} \tilde{w}(t) dt\right\} \quad (15a)$$

и плотность вероятности

$$W(t_m) = \lambda \tilde{w}(t_m) \exp\left\{-\lambda \int_{t_m}^{\infty} \tilde{w}(t) dt\right\}, \quad (15b)$$

где

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_1(t) [q\dot{t} + 1] dt, \quad q = \sigma_1/\alpha \quad (16)$$

и вместо $w(v)$ и $w_1(\dot{v})$ введены безразмерные функции новых переменных t и \dot{t} : $\tilde{w}(t) = \sigma w(\sigma t)$, $\tilde{w}_1(\dot{t}) = \sigma_1 w_1(\sigma_1 \dot{t})$, характерный масштаб изменения которых равен единице.

Из (16) следует, что для нормального распределения

$$\lambda \approx q/V\sqrt{2\pi} = \sigma_1/\alpha \sqrt{2\pi}. \quad (17)$$

График функции $\lambda(q)$ в случае нормального распределения приведен на рис. 2 (тонкая линия соответствует зависимости (17)).

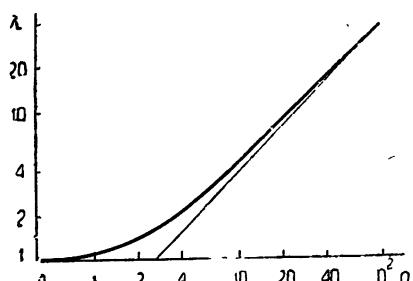


Рис. 2.

Из (15 б) видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ значения случайной величины t_m , для которых $W(t_m)$ существенно отличается от нуля, смещаются в область $t \gg 1$. Поэтому удобно от t_m перейти к новой переменной

$$\tau = -\ln \left[\lambda \int_{t_m}^{\infty} \tilde{w}(t) dt \right], \quad (18)$$

плотность распределения вероятностей которой дается формулой

$$W(\tau) = \exp [-\tau - e^{-\tau}], \quad (19)$$

так что наиболее вероятные значения τ принадлежат области $|\tau| \leq 1$.

С другой стороны, для широкого класса функций $\tilde{w}(t)$, достаточно быстро убывающих при $t \rightarrow \infty$, решение уравнения (18) при $\lambda \rightarrow \infty$ и ограниченных значениях τ имеет вид

$$t_m \approx U(\lambda) + u(\lambda)\tau, \quad (20)$$

где явный вид функций $U(\lambda)$ и $u(\lambda)$ зависит от асимптотического поведения $\tilde{w}(t)$ при $t \gg 1$. В качестве простейших примеров приведем значения $U(\lambda)$ и $u(\lambda)$ для трех различных функций $\tilde{w}(t)$.

$$a) \quad \tilde{w}(t) = \frac{1}{V2\pi} \exp(-t^2/2). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (18), получаем

$$e^{-\tau} \approx \frac{\lambda}{t V2\pi} \exp(-t^2/2) \left[1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right],$$

откуда при $2 \ln \lambda \gg 1$ следует (20) с $U(\lambda)$ и $u(\lambda)$ в виде

$$U(\lambda) \approx V2\ln\lambda \left[1 - \frac{\ln(4\pi\ln\lambda)}{4\ln\lambda} \right], \quad u(\lambda) \approx \frac{1}{V2\ln\lambda}. \quad (22)$$

$$\text{б)} \quad \tilde{w}(t) \approx \frac{1}{2} e^{-t} \quad (\text{при } t \gg 1), \quad (23)$$

$U(\lambda) \approx \ln(\lambda/2), \quad u(\lambda) \approx 1 \quad (\text{при } \ln \lambda \gg 1).$

$$\text{в)} \quad \tilde{w}(t) \approx ar/t^{r+1} \quad (\text{при } t \gg 1 \text{ и } r \gg 1), \quad (24)$$

$U(\lambda) \approx (a\lambda)^{1/r}, \quad u(\lambda) \approx r^{-1}(a\lambda)^{1/r},$

где a — постоянная порядка единицы.

Для первых двух моментов случайной величины t_m из (19) с учетом (20) получаем

$$\langle t_m \rangle = U(\lambda) + Cu(\lambda); \quad (25)$$

$$\langle (\delta t_m)^2 \rangle = \langle (t_m - \langle t_m \rangle)^2 \rangle = \sigma_t^2 = u^2(\lambda) \frac{\pi^2}{6}, \quad (26)$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера.

Так как при $\lambda \rightarrow \infty$ и для достаточно быстро убывающих функций $\tilde{w}(t)$ выполняется неравенство $U \gg u$ и имеют место (22)–(24), то, как следует из (25), (26), среднее смещение точки поворота $\langle t_m \rangle \approx U(\lambda)$ значительно превосходит дисперсию флюктуаций $\sigma_t \sim u(\lambda)$ около этого среднего.

Более высокие моменты распределения (19) выражаются через ζ -функцию Римана. В частности, вычислив третий и четвертый центральный моменты, для коэффициента асимметрии γ_a и эксцесса γ_s получаем

$$\gamma_a = \frac{\langle (\delta t_m)^3 \rangle}{\sigma_t^3} \approx 1,1, \quad \gamma_s = \frac{\langle (\delta t_m)^4 \rangle}{\sigma_t^4} - 3 \approx 2,4.$$

Оценки, аналогичные приведенным выше, показывают, что нелинейностью профиля $F(x)$ вблизи точки поворота можно пренебречь, если выполняется неравенство $U\gamma \ll 1$, где параметр нелинейности γ введен в формуле (6).

5. Интерполяционная формула. Полученные в предыдущих разделах результаты относятся к двум предельным случаям: плавных, крупномасштабных ($q \ll 1$) флюктуаций показателя преломления или достаточно быстрых ($q \gg 1$), мелкомасштабных. Для приближенного вычисления $W(z_m)$ в промежуточной области значений параметра $q \approx 1$ мы воспользуемся методом, предложенным в [5] при решении задачи о затенениях статистически неровной поверхности (см. также [6]).

Прежде всего заметим, что функция распределения $\bar{P}(Z)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{P}(Z + \Delta Z) = \bar{P}(Z)P(\Delta Z | Z), \quad (27)$$

где $P(\Delta Z | Z)$ — вероятность того, что в интервале $Z < z \leq Z + \Delta Z$ нет пересечений функции $\eta(z)$ с уровнем $\eta_0 = \sin^2 \psi_0$, при условии, что пересечения отсутствуют и в области $0 < z \leq Z$. Для достаточно малых ΔZ вероятность $P(\Delta Z | Z)$ можно представить в виде

$$P(\Delta Z | Z) = 1 - p_Z(B | A)\Delta Z, \quad (28)$$

где $p_Z(B | A)$ — плотность вероятности события B (8), при условии, что происходит событие A (7).

Подставляя (28) в (27), переходя к пределу $\Delta Z \rightarrow 0$ и учитывая, что $\bar{P}(0) = 1$, получаем

$$\bar{P}(Z) = \exp \left\{ - \int_0^Z p_z(B | A) dz \right\}. \quad (29)$$

Эта формула является точной, пока не делается никаких упрощающих предположений о виде $p_z(B | A)$.

Отметим, что распределение Пуассона (9) вытекает из (29) в предельном случае $q \gg 1$, когда вероятность большого числа пересечений велика и события A и B можно считать независимыми. Действительно, если предположить, что $p_z(B, A) \approx p_z(B) p_z(A)$, то $p_z(B | A) = \frac{p_z(A, B)}{p_z(A)} \approx p_z(B)$ и (29) совпадает с (9). В задаче о рассеянии на шероховатой поверхности этот предельный случай, как показано в [6, 7], соответствует сильным затенениям.

Воспользуемся теперь другой аппроксимацией для плотности вероятности (см. [5, 6]), основанной на том, что при $q \leq 1$ число пересечений мало отличается от единицы, т. е. вероятность того, что для каждой реализации $v(z)$ уравнение (2) имеет только один корень, довольно велика. Это позволяет считать, что если в точке $z = Z$ происходит пересечение (B) , то с вероятностью, близкой к единице, в интервале $0 < z \leq Z$ пересечений нет (A) , т. е. $p_z(A | B) \approx 1$ и, следовательно,

$$p_z(B, A) = p_z(B) p_z(A | B) \approx p_z(B).$$

Воспользовавшись для $p_z(B)$ формулой (10), отсюда получаем

$$p_z(B | A) \approx \frac{p_z(B)}{p_z(A)} \approx \left[\int_{-\infty}^{\eta_0} w_\eta(\eta) d\eta \right]^{-1} \int_0^\infty w_{\eta\dot{\eta}}(\eta_0, \dot{\eta}, z) \dot{\eta} d\dot{\eta}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и переходя к новой переменной $x = z_m^0 - z$, для функции распределения $P(X)$ случайных смещений $x_m = z_m^0 - z_m$ точек поворота получаем (ср. (12))

$$P(X) = \exp \left\{ - \int_x^\infty G(x) dx \right\}, \quad G(x) = g(x) \left[\int_{-\infty}^{F(x)} w(v) dv \right]^{-1}, \quad (31)$$

где $g(x)$ определяется по формуле (13). В отличие от результатов предыдущих разделов, асимптотически верных в предельных случаях $q \ll 1$ и $q \gg 1$, распределение (31), по-видимому, нельзя рассматривать как приближение к точному решению по какому-либо малому параметру, так как не удается провести аналитическую оценку погрешностей, допущенных при упрощении $p_z(B | A)$ до вида (30). Однако ниже мы покажем, что в обоих предельных случаях из выражения для функции распределения в виде (31) вытекают правильные асимптотические формулы, и, следовательно, ее можно рассматривать как интерполяционную во всей области изменения параметра q .

В случае плавных флуктуаций показателя преломления, когда $\dot{F} \gg v$, из (13) имеем

$$g(x) \approx \dot{F}(x) w[F(x)],$$

и, следовательно, для функции распределения $P(X)$ и плотности вероятности $W(x_m)$ из (31) получаем

$$P(X) = \int_{-\infty}^{F(X)} w(v) dv, \quad W(x_m) = \dot{F}(x_m) w[F(x_m)]. \quad (32)$$

Видно, что плотность вероятности (6) для $t_m = \alpha x_m / \sigma$ является частным случаем формулы (32) при гауссовой функции $w(v)$ и нелинейном профиле $F(x) = \alpha x - \frac{1}{2} \beta x^2$.

Нетрудно убедиться, что и при произвольном q для линейного профиля $F = \alpha x$ входящий в (31) интеграл легко вычисляется:

$$\int_x^{\infty} G(x) dx = -\lambda \ln \int_{-\infty}^x w(v) dv. \quad (33)$$

Переходя к новой переменной $t = \alpha x / \sigma$ и подставляя (33) в (31), получаем интерполяционные формулы

$$P(T) = P\{t_m < T\} = \left[\int_{-\infty}^T \tilde{w}(t) dt \right]^\lambda; \quad (34a)$$

$$W(t_m) = \lambda \tilde{w}(t_m) \left[\int_{-\infty}^{t_m} \tilde{w}(t) dt \right]^{\lambda-1}. \quad (34b)$$

В предельных случаях быстрых (мелкомасштабных) флюктуаций, когда $\lambda \gg 1$, (34 а) можно преобразовать к виду, совпадающему с (15 а):

$$P(T) = \left[1 - \int_T^{\infty} \tilde{w}(t) dt \right]^\lambda \underset{\lambda \gg 1}{\approx} \exp \left\{ -\lambda \int_T^{\infty} \tilde{w}(t) dt \right\}.$$

Таким образом, в обоих предельных случаях ($q \ll 1$ и $q \gg 1$) (31) переходит в полученные ранее асимптотические формулы для $P(T)$. На рис. 3 а, б приведены построенные по формулам (34 а) и (34 б) графики $P(T)$ и $W(t_m)$ при $\lambda = 1, 2, 10, 10^2, 10^3$ для нормального распределения $\tilde{w}(t)$. Видно, что с увеличением λ максимум плотности распределения (34 б) смещается и кривая $W(t_m)$ становится все более несимметричной, приближаясь по форме к предельному распределению (19) от переменной $\tau = (t_m - U)/\sigma$.

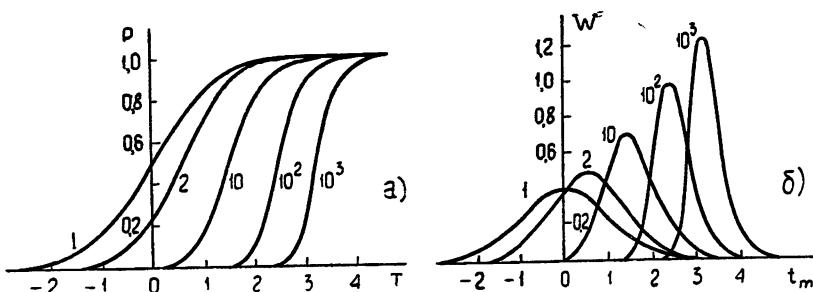


Рис. 3.

6. Коеффициент прохождения. Для того, чтобы наименьший корень z_m уравнения (2) можно было считать «физической» точкой поворота, необходимо потребовать малости коэффициента прохождения V волны через первый выброс (см. рис. 1):

$$V(\zeta) = \exp \left\{ -k \int_{z_m}^{z'_m} \sqrt{\eta(z) - \sin^2 \phi_0} dz \right\}. \quad (35)$$

Здесь z'_m — ближайший к z_m корень уравнения (2), $\zeta = z'_m - z_m$ — длина первого выброса функции $\eta(z)$ над уровнем $\eta_0 = \sin^2 \phi_0$, k — волновое число излучения.

Так как наибольшую опасность (с точки зрения просачивания поля) представляют выбросы малой длительности ζ , то для получения оценок случайной величины V достаточно ограничиться случаем $q \gg 1$ и воспользоваться параболической аппроксимацией выбросов (см. [8], § 31). С этой целью разложим в (35) случайную функцию $\eta(z)$ в ряд Тейлора по степеням $\xi = z - z_m$:

$$\eta(z) \approx \eta_0 + \dot{\eta}\xi + \frac{1}{2} \ddot{\eta}\xi^2 \quad (36)$$

и учтем, что при $z = z'_m$ также происходит пересечение $\eta(z)$ с η_0 , т. е. $\dot{\eta} + \frac{1}{2} \ddot{\eta}\xi^2 = 0$, откуда следует, что $\ddot{\eta} = -2\dot{\eta}/\zeta$. Подставляя (36) в (35), получаем

$$\ln V(\zeta) = -\frac{\pi}{8} k \zeta^{3/2} \nu^{1/2}. \quad (37)$$

С другой стороны, очевидно, что при параболической аппроксимации должна существовать связь между длиной выброса ζ и значением производной ν в начале выброса. Вычисления, в принципе, не отличающиеся от приведенных в § 31 [8], позволяют получить в случае нормального процесса $\nu(z)$ соотношение

$$\dot{\nu}(z_m) = \frac{\sigma_1^2}{2\sigma^2} \sqrt{2 \ln \lambda} \zeta \quad (38)$$

и следующую формулу для плотности распределения случайной величины ζ :

$$W(\zeta) = \frac{2\zeta}{\zeta_0^2} \exp[-\zeta^2/\zeta_0^2], \quad \zeta_0^{-2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \ln \lambda. \quad (39)$$

Подставляя (38) в (37) и учитывая (39), приходим к выводу, что случайная величина $v = \ln V$ распределена по экспоненциальному закону

$$W(v) = \frac{1}{v_0} \exp(-v/v_0), \quad v_0 = \frac{\pi k l \sqrt{\sigma}}{4(2 \ln \lambda)^{3/4}}, \quad (40)$$

где l — интервал корреляции флюктуаций показателя преломления, введенный соотношением $l = \sigma/\sigma_1$.

Для того, чтобы просачиванием поля можно было пренебречь, т. е. считать $V \ll 1$, достаточно потребовать $v_0 \geq 1$. Таким образом, получаем неравенство, обеспечивающее возможность геометрооптического подхода к задаче о точках поворота в случайной слоисто-неоднородной среде:

$$kl \sqrt{\sigma} \geq (\ln \lambda)^{3/4}. \quad (41)$$

Это неравенство получено для случая $\ln \lambda \gg 1$, когда справедливо предельное распределение точек поворота (19). В области промежуточных

значений параметра $q \approx 1$, когда $\zeta \approx l$, из довольно элементарных оценок вытекает неравенство

$$kl V^\sigma \geq 1,$$

которое, как видно, слабее условия (41).

В заключение отметим, что полученные выше результаты могут быть использованы для оценки влияния случайных смещений точки поворота (уровня отражения) на характер флюктуаций поля, отраженного от слоисто-неоднородной среды.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ф. Г. Басса и П. В. Блиоха за обсуждение результатов, а также Л. Е. Копиловича за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1970.
3. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
4. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов, ЖТФ, 24, № 1, 103 (1954).
5. В. G. Smith, IEEE Trans., AP-15, № 5, 668 (1967).
6. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 4, 552 (1969).
7. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 1, 101 (1964).
8. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, изд. Наука, М., 1970.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
7 декабря 1972 г.

FLUCTUATIONS OF A TURNING POINT IN A STRATIFIED-INHOMOGENEOUS MEDIUM

I. M. Fux

In the geometrical optics approximation the problem is investigated of random displacements of the turning point at the full internal reflection of a plane wave from a stratified-inhomogeneous semi-space where in addition to the regular refraction, the refractive index fluctuations take place. In two limit cases-large-scale and small-scale refractive index fluctuations, the distribution functions are obtained and the first moments of random displacements of the turning point are calculated. The interpolation formula is plotted for the distribution function of the turning point fluctuations for the intermediate case when the gradient of the random component of the refractive index is of the same order as the mean gradient leading to the regular refraction. In conclusion the statistical estimations of the coefficient of the wave field penetration behind the first turning point are presented and the inequalities limiting the applicability of the geometric-optics consideration are obtained.

УДК 538.574.2

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИГНАЛОВ ОТ ГРАНИЦ ДВИЖУЩИХСЯ ПРОВОДНИКА И ФРОНТА ВКЛЮЧЕНИЯ ПРОВОДИМОСТИ

A. B. Мананкова

Рассмотрена нестационарная задача об отражении и преломлении электромагнитных сигналов с произвольной временной зависимостью от границы, движущейся с постоянной скоростью.

В настоящей работе рассмотрена задача о преломлении и отражении импульсного электромагнитного сигнала произвольной временной зависимости от движущегося с постоянной скоростью скачка проводимости. При учете движения границы интересно рассмотреть параллельно две задачи: I — движение в поле плоской электромагнитной волны скачка проводимости, который включается движущимся фронтом ионизации, или ударной волны в плотной среде в предположении, что направленной скоростью образовавшихся вторичных электронов (электронов проводимости) можно пренебречь; II — движение проводника конечной проводимости σ . В лабораторной системе отсчета картина электромагнитных процессов в задачах I и II существенно отличается, если скорость движения не равна нулю, различными являются материальные уравнения, которые связывают индуцируемые в среде токи со значениями компонент электромагнитного поля. В последнем пункте работы строится решение задачи при движении границы со скоростью, большей скорости света, $\beta \geq 1$, при этом приводятся и обсуждаются только результаты для задачи I. Вместо традиционной схемы решения — переход к движущейся системе отсчета, построение стационарного решения, применение прямого и обратного преобразований Лапласа с последующим переходом к лабораторной системе — в работе используется метод функций Римана [3]. Подобный подход позволяет избежать громоздкой процедуры построения решения нестационарной задачи.

1. Исходные уравнения. Построение решения. В положительном направлении оси ox движется граница проводящей области. Уравнение движения $x = \beta\tau$, $\beta = v/c$, $\tau = ct$. На границу нормально падает плоская электромагнитная волна произвольной временной зависимости

$$E_y = -B_z = \Psi(z + x)h(z + x), \quad (1)$$

$x = 0$, $\tau = 0$ — точка и момент встречи падающей волны и границы, $h(\tau + x)$ — единичная функция включения.

В лабораторной системе отсчета уравнения, описывающие поведение компонент электромагнитного поля для задач I и II соответственно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial \tau} \\ -\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \tau} + \bar{\alpha}E \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial \tau} \\ -\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\bar{\alpha}(E - \beta B)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right., \quad (2)$$

$$\bar{a} = \alpha h(\beta\tau - x), \quad \alpha = 4\pi\sigma/c, \quad E_z \equiv E, \quad B_z \equiv B.$$

Необходимые для решения системы (2) начальные данные вытекают из (1). Схема построения решения подробно будет продемонстрирована на задаче I, для задачи II будут приведены только окончательные формулы. Промежуточные выкладки в I и II не имеют принципиальных отличий.

Электромагнитные поля в вакууме представляют собой сумму полей падающей волны $E^{(n)} = -B^{(n)} = \Psi(\xi_2)$ ($\xi_2 = \tau + x$) и отраженной $E^{(o)} = B^{(o)} = \varphi(\xi_1)$ ($\varphi(\xi_1)$ — неизвестная функция аргумента $\xi_1 = \tau - x$). На движущейся границе выполняются условия непрерывности для поперечных составляющих E и B , которые получаются интегрированием по бесконечно тонкому переходному слою в предположении конечности E, B . В области $x < \beta\tau$ из системы (2) для E - и B -компонент электромагнитного поля получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \begin{pmatrix} E(x, \tau) \\ B(x, \tau) \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Для описания полей, проникающих в проводящую область, достаточно взять решение однородного уравнения (3), содержащего одну из двух произвольных функций — $f(\xi_2)$ (вторая — произвольная функция аргумента $\xi_1 = \tau - x$) [3]:

$$E = \exp \left[-\frac{\alpha}{4} (\xi_1 + \xi_2) \right] \left[f_E(\xi_2) + ab \int_0^{\xi_2} f_E(\eta) \times \right. \\ \left. \frac{I_1 \left[\frac{\alpha}{2} (\xi_2 - \eta)^{1/2} (\xi_1 - \gamma\eta)^{1/2} \right]}{(\xi_2 - \eta)^{1/2} \left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \eta \right)^{1/2}} d\eta \right]. \quad (4)$$

$$\left(a = \frac{\alpha}{2} \gamma^{1/2}, \quad \gamma = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad b = -\frac{1}{\gamma} \left(\xi_2 - \frac{\xi_1}{\gamma} \right) \right).$$

Если $\xi_1 = \gamma\xi_2$ (уравнение движения границы в характеристических координатах), то $E = \exp \left[-\frac{\alpha}{4} (1 + \gamma) \xi_2 \right] f_E(\xi_2)$, $B = \exp \left[-\frac{\alpha}{4} \times \right. \\ \left. \times (1 + \gamma) \xi_2 \right] f_B(\xi_2)$, т. е. с точностью до известного экспоненциального множителя функции $f_{E, B}(\xi_2)$ определяются значениями полей на границе:

$$f_{E, B}(\xi_2) \exp \left[-\frac{\alpha}{4} (1 + \gamma) \xi_2 \right] = \varphi(\gamma\xi_2) \pm \Psi(\xi_2).$$

Значение отраженного поля на движущейся границе $\varphi(\gamma\xi_2)$ интегральным образом связано с искомыми функциями $f_{E, B}(\xi_2)$, что затрудняет их определение. В работе предлагается находить не f_E и f_B отдельно (или, что то же самое, E - и B -компоненты поля), а их комбинацию: $u^- = E - B$, $u = E + B$. В задаче II соответственно $u^- = E - B$, $u = E + B$.

Рассматриваемая разность полей также удовлетворяет уравнению (3), но соответствующая этой разности неизвестная функция $f^-(\xi_2)$ определяется сразу из граничного условия при $\xi_1 = \gamma\xi_2$

$$u^-(\gamma \xi_2, \xi_2) = 2\Psi(\xi_2) = \exp \left[-\frac{\alpha}{4}(1+\gamma)\xi_2 \right] f^{(-)}(\xi_2). \quad (5)$$

Поскольку значение $f^-(\xi_2)$ определено, то, используя формулы (4), можно написать выражение для $u^-(\xi_1, \xi_2)$. Вторую искомую функцию $u = E + B$ можно определить через u^- из системы (2):

$$E + B = -\frac{4}{\alpha} \exp \left[\frac{\alpha}{4}(\xi_1 + \xi_2) \right] \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\exp \left[-\frac{\alpha}{4}(\xi_1 + \xi_2) \right] (E - B) \right] \equiv u(\xi_1, \xi_2). \quad (6)$$

Таким образом, $u(\xi_1, \xi_2)$ определяется дифференцированием по ξ_1 выражений для $u^{(-)}$, что дает возможность получить формулы для вычисления E - и B -полей.

$$\text{I. } E = \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau \right) \left[\Psi(\xi_2) \exp(s_1 \xi_2) + \left(1 - \frac{1}{ab\sqrt{\gamma}} \right) Z_1 - \frac{\alpha}{2a^2 b} Z_2 \right],$$

$$B = \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau \right) \left[-\Psi(\xi_2) \exp(s_1 \xi_2) - \left(1 + \frac{1}{ab\sqrt{\gamma}} \right) Z_1 - \frac{\alpha}{2a^2 b} Z_2 \right],$$

$$\varphi(\xi_1) = \frac{(-1)}{\sqrt{\gamma}} \exp(-s_1 \xi_1) \int_0^{\xi_1/\gamma} \Psi(\eta) \frac{I_1 \left[a \left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \eta \right) \right]}{\left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \eta \right)} d\eta.$$

$$\text{II. } E = \exp \left[-\frac{\alpha}{4\gamma^{1/2}}(\xi_1 + \gamma \xi_2) \right] \left[\Psi(\xi_2) \exp(s_{11} \xi_2) + \left(1 - \frac{1}{ab\gamma} \right) Z_1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}ba^2} Z_2 \right],$$

$$B = \exp \left[-\frac{\alpha}{4\gamma^{1/2}}(\xi_1 + \gamma \xi_2) \right] (-1) \left[\Psi(\xi_2) \exp(s_{11} \xi_2) + \left(1 + \frac{1}{ab\gamma} \right) Z_1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{\gamma}ba^2} Z_2 \right], \quad (7)$$

$$\varphi(\xi_1) = \frac{(-1)}{\gamma} \exp \left(-\frac{\alpha \xi_1}{2\gamma^{1/2}} \right) \int_0^{\xi_1} \Psi \left(\frac{\eta}{\gamma} \right) \exp \left(s_{11} \frac{\eta}{\gamma} \right) \frac{I_1 \left[\frac{\alpha}{\gamma} (\xi_1 - \eta) \right]}{(\xi_1 - \eta)} d\eta,$$

$$Z_1 = ab \int_0^{\xi_2} \Psi(\eta) \exp(s_1 \eta) \frac{I_1 \left[\frac{\alpha}{2} (\xi_2 - \eta)^{1/2} (\xi_1 - \gamma \eta)^{1/2} \right]}{(\xi_2 - \eta)^{1/2} \left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \eta \right)^{1/2}} d\eta,$$

$$Z_2 = a^2 b^2 \int_0^{\xi_2} \Psi(\eta) \exp(s_1 \eta) \frac{I_2 \left[\frac{\alpha}{2} (\xi_2 - \eta)^{1/2} (\xi_1 - \gamma \eta)^{1/2} \right]}{\left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \eta \right)} d\eta.$$

$$\left(i = I, II; \quad s_I = \frac{\alpha}{4} (1 + \gamma); \quad s_{II} = \frac{\alpha}{2} V^{-\gamma} \right).$$

Соотношения (7) полностью описывают картину электромагнитных процессов в рассматриваемой задаче при произвольных значениях β , σ и функции $\Psi(\xi_2)$ и являются удобными для выяснения общих качественных закономерностей. Решение (7) допускает предельный переход к идеальной проводимости $\sigma \rightarrow \infty$. При $\beta \rightarrow 1$ приходим к решению задачи о падении плоской волны на фронт ионизации, движущийся со скоростью света. При $\beta \rightarrow 0$ имеем решение нестационарной задачи о падении электромагнитного сигнала на неподвижную проводящую стенку. Значения $-1 < \beta < 0$ соответствуют случаю, когда импульс падающего поля «догоняет» движущуюся границу.

2. Исследование выражений (7) в общем случае оказывается сложной задачей. Поэтому мы будем исходить из некоторой аппроксимации, допускающей широкое варьирование временной зависимости падающего поля. Так, например, если

$$\Psi(\xi_2) = \{ \exp [i(\omega\xi_2 + \varphi)] [\exp(-d_1\xi_2) - \exp(-d_2\xi_2)] \},$$

то, меняя параметры ω , φ , d_1 , d_2 , можно рассмотреть достаточно разнообразные случаи сигналов. Благодаря такому выбору временной зависимости $\Psi(\xi_2)$ интегралы Z_1 и Z_2 в (7) удается свести к хорошо известным и табулированным специальным функциям — функциям Ломмеля — $Y_1(w, y)$, $Y_2(w, y)$, Бесселя — $I_l(y)$, экспоненциальным функциям.

Приведем выражения для векторов E и B электромагнитного поля, полученных с использованием результатов работы [1]:

$$B = \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau + i\varphi \right) \left[-I_0(y) - \left(1 + \frac{\alpha n^2}{2a^2} \right) \bar{Y}(m) - \left(1 + \frac{\alpha m^2}{2a^2} \right) \bar{Y}(n) + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{1/2} I_1(y) \right], \quad (8a)$$

$$E = \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau + i\varphi \right) \left[I_0(y) + \left(1 - \frac{\alpha n^2}{2a^2} \right) \bar{Y}(m) + \left(1 - \frac{\alpha m^2}{2a^2} \right) \bar{Y}(n) + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{1/2} I_1(y) \right],$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1) = \exp \left[-\frac{\alpha}{4} \frac{(1 + \gamma)}{\gamma} \xi_1 + i\varphi \right] (-1) \left[\frac{(-1)}{\gamma^{1/2}} I_1(y) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha m^2}{2a^2} \bar{Y}(n) + \frac{\alpha n^2}{2a^2} \bar{Y}(m) \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$y = \frac{\alpha}{2} (\xi_1 \xi_2)^{1/2}, \quad x_{I, II} = i\omega - d_1 + s_{I, II}, \quad d_2 = \infty,$$

$$\bar{Y}(m) = Y_1(m^2 \xi_2, y) + Y_2(m^2 \xi_2, y), \quad m^2 = x + \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$\bar{Y}(n) = Y_1(n^2 \xi_2, y) + Y_2(n^2 \xi_2, y), \quad n^2 = x - \sqrt{x^2 - a^2}.$$

В аргументах функций Бесселя и Ломмеля в отраженной волне значение ξ_2 следует заменить на его значение на границе: $\xi_2 = \xi_1/\gamma$.

Для задачи II —

$$\begin{aligned}
 E &= \exp \left[-\frac{\alpha}{4\gamma^{1/2}} (\xi_1 + \gamma\xi_2) + i\varphi \right] \left[I_0(y) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{1/2} I_1(y) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{n^2}{a\gamma} \right) \bar{Y}(m) + \left(1 - \frac{m^2}{\gamma a} \right) \bar{Y}(n) \right], \\
 B &= \exp \left[-\frac{\alpha}{4\gamma^{1/2}} (\xi_1 + \gamma\xi_2) + i\varphi \right] \left[-I_0(y) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{1/2} I_1(y) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 + \frac{n^2}{a\gamma} \right) \bar{Y}(m) - \left(1 + \frac{m^2}{\gamma a} \right) \bar{Y}(n) \right], \\
 \varphi(\xi_1) &= (-1) \exp \left(-\frac{\alpha}{2\gamma^{1/2}} \xi_1 + i\varphi \right) \left[\frac{n^2}{\gamma a} \bar{Y}(m) + \frac{m^2}{\gamma a} \bar{Y}(n) - \frac{1}{\gamma} I_1(y) \right].
 \end{aligned} \tag{86}$$

3. Рассмотрим простейший случай временной зависимости сигнала $\Psi(\xi_2) = h(\xi_2)$. При этом за счет сокращения числа параметров упрощаются общие выражения (8 а), (8 б), и удается просмотреть картину электромагнитных процессов одновременно в задачах I и II 1) при скорости движения границы $-1 < \beta < 1$ и 2) при падении сигнала конечной длительности T (последовательным «включением» и «выключением» ступеньки) при любом соотношении $1/c\alpha$ и T .

Рассмотрим поле внутри проводящей области. Для $\xi_1 > \xi_2$ ($x < 0$, $\beta > 0$) имеем

$$E \approx -B \approx \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau \right) I_0 \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\xi_1 \xi_2} \right) \left[1 + O \left(\gamma \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^{1/2} \right) \right] \tag{9}$$

и при $\sigma\tau \rightarrow \infty$, $E \approx B \rightarrow 0$, если $\xi_1 \neq \xi_2$. В области между границей и точкой встречи волны и фронта $B \approx -2 + \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau \right) I_0 \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\xi_1 \xi_2} \right)$, а E -поле определяется выражением (9). Время установления стационарного режима ($\tau \rightarrow \infty$) находится из условия $I_0(y) \exp \left(-\frac{\alpha}{2}\tau \right) \ll 1$.

При $-1 < \beta < 0$, $\gamma > 1$ электромагнитные поля в проводящей области описываются другими выражениями:

$$\begin{aligned}
 E &\approx \frac{\gamma - 1}{\gamma} \exp \left[\frac{x}{4} \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} (\xi_1 - \gamma\xi_2) \right], \\
 B &\approx (-1) \frac{(1 + \gamma)}{\gamma} \exp \left[\frac{\alpha}{4} \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} (\xi_1 - \gamma\xi_2) \right],
 \end{aligned}$$

т. е. поля экспоненциально затухают при удалении от границы $\xi_1 = \gamma\xi_2$. При $\sigma \rightarrow \infty$ $E = B = 0$, если $\xi_1 \neq \gamma\xi_2$, а на движущейся границе, так же как и при движении обычного проводника, возникает поверхностный ток. При этом выполняется известное соотношение $|E - \beta B|_{\xi_1=\gamma\xi_2} = 0$.

На рис. 1, 2 приведены величины E - и B -компонент поля (расчитанного по формулам (8) с использованием таблиц [2, 5]), проникающего в глубь проводящей области $x < 0$, и суммарного поля $E = \Psi(\xi_2) + \varphi(\xi_1)$ вне границы, $\beta = 0$. Числа на каждой из кривых соответствуют безразмерному моменту времени $x\tau/2$. На рис. 3, 4 приведены поля внутри проводящей области (вне границы возмущение отсутствует) для

$\beta = 1$. На рис. 5 изображены значения полей на движущейся границе $x = \beta t$. Пунктирные кривые соответствуют задаче II. Числа на каждой кривой определяют значения $\gamma = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$.

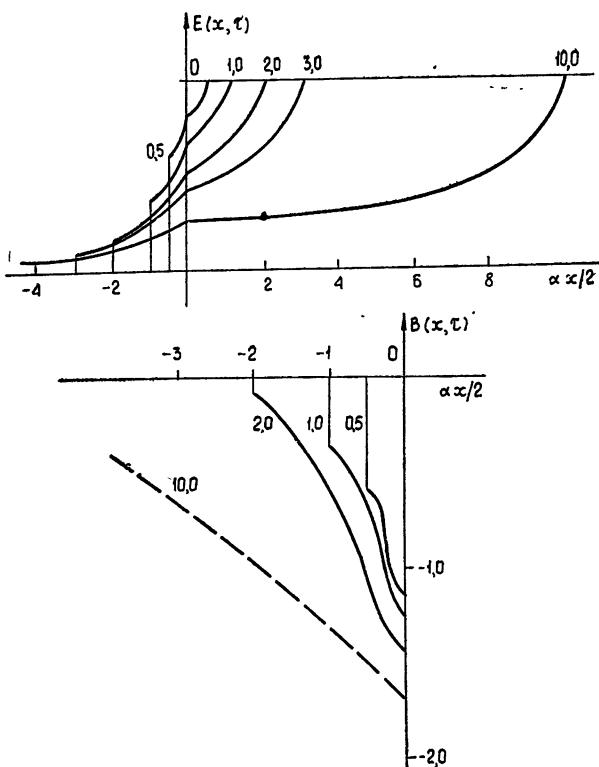


Рис. 1, 2.

При $\beta > 0$ и $1 \leq \gamma \leq 0$ стационарные значения полей в задачах I и II различны. Время установления стационарного режима зависит от скорости движения границы. Оно минимально в задаче I при $\gamma = 0$, $\beta = 1$ и равно $\alpha t/2 \approx 2$, и максимально при $\gamma = 1$, $\beta = 0$: $\alpha t/2 \approx 0,6 \cdot 10^2$ *. Интересно отметить, что при $\beta = 1$ в задаче I получаются и наиболее простые выражения для E и B : для фронта ионизации наиболее «естественно» двигаться со скоростью света. Задача II соответствует обратная картина: зависимость от скорости времени установления дается следующим выражением: $\alpha t/2 \geq 0,3 \cdot 10^2 \frac{(1 + \gamma)}{\gamma^{1/2}}$. При $\beta < 0$, $\gamma > 0$, т. е. при движении границы «назад», сходная картина электромагнитных полей внутри проводящей области, как было выяснено выше, приводит к малому различию в отраженных полях (или в значениях поля на границе; на рис. 5 см. кривые для значений $\gamma > 1$). Если временная зависимость $\Psi(\xi_2)$ задана в виде «ступеньки», то всегда реализуется случай «сильной» проводимости.

* Имеются в виду те времена, при которых отличие от стационарного значения ($t = \infty$) в отраженной волне и одновременно в значении поля на границе будет менее чем 10%.

Остановимся на картине электромагнитных полей, когда $\Psi(\xi_2) = -h(\xi_2) \exp(i\omega - d)\xi_2$, $|i\omega - d|$ — характерный временной масштаб падающего поля. Для значений $1 \geq \beta < 0$ в случае $|(i\omega - d)/\alpha| \ll 1$ в области $0 < x < \beta\pi$ также происходит формирование статического неоднородного магнитного поля и статических неоднородных токов*:

$$B \approx 2 \exp \left[\frac{2(i\omega - d)}{1 - \gamma} x \right], \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha E = \frac{2(i\omega - d)}{1 - \gamma} \exp \left[\frac{2(i\omega - d)}{1 - \gamma} x \right].$$

При обратном соотношении параметров $\left| \frac{i\omega - d}{\alpha} \right| \gg 1$, т. е. в случае «слабой» проводимости, поперечные составляющие векторов E и B преломленной волны равны

$$E \approx -B = \exp \left[(i\omega - d)\xi_2 - \frac{\alpha}{4} (\xi_1 - \gamma \xi_2) \right] \quad (\beta > 0).$$

Как и следовало ожидать, имеем слабое, в масштабе $|1/i\omega - d|$, затухание поля.

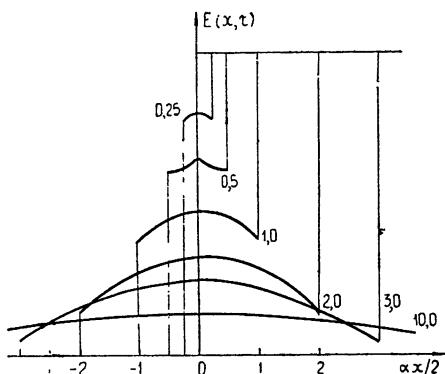


Рис. 3.

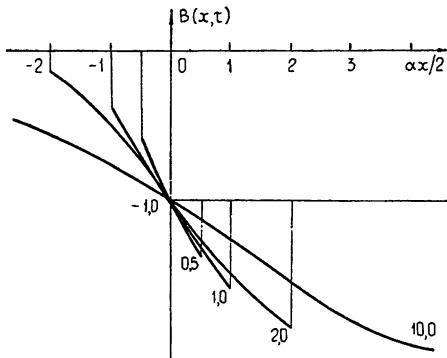


Рис. 4.

В случае «сильной» проводимости и $\beta < 0$ поведение полей описывается экспоненциальным множителем

$$\exp \left[\frac{\alpha}{4} \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} (\xi_1 - \gamma \xi_2) + \frac{i\omega - d}{1 - \gamma} \left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \gamma \xi_2 \right) \right].$$

Как и в задаче II, поле «резко» (в масштабе $\frac{1}{|i\omega - d|}$) затухает при удалении от границы. Значения полей при $\xi_1 = \gamma \xi_2$:

$$E(\gamma \xi_2, \xi_2) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \exp [(i\omega - d)\xi_2], \quad B(\gamma \xi_2, \xi_2) = (-1) \frac{(1 + \gamma)}{\gamma} \times \\ \times \exp [(i\omega - d)\xi_2].$$

4. При движении границы со скоростью, большей скорости света (задача I), вне проводящей области существует только невозмущенное поле внешних источников. Специфика граничных условий приводит

* Характер электромагнитных полей в установившемся режиме при гармоническом воздействии обсуждался в работе [4] для более полного описания свойств плазмы, образующейся за фронтом ионизации (задача I).

к необходимости повторно проводить решение задачи, сформулированной в п. 1. Компоненты электромагнитного поля для падающего сигнала произвольной временной зависимости определяются следующими выражениями:

$$E + B = -\frac{\alpha}{2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\tau\right) \left[h(\xi_2) \int_0^{\xi_2} \Phi(\eta) I_0(a\eta) d\eta - h\left(\frac{\xi_1}{\gamma}\right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\xi_1/\gamma} \Phi(\eta) I_0(a\eta) d\eta \right], \quad (10)$$

$$E - B = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\tau\right) \left\{ h(\xi_2) \left[2\Phi(\xi_2) + \alpha \int_0^{\xi_2} \Phi(\eta) \left(\frac{\xi_1}{\gamma} - \eta \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{I_1(a\eta)}{z} d\eta \right] - ah\left(\frac{\xi_1}{\gamma}\right) \int_0^{\xi_1/\gamma} \Phi(\eta) \frac{I_1(a\eta)}{z} d\eta \right\},$$

$$\Phi(\eta) = \Psi(\eta) \exp\left[\frac{\alpha}{4}(1+\gamma)\eta\right], \quad az = \frac{\alpha}{2}(\xi_2 - \eta)^{1/2}(\xi_1 - \gamma\eta)^{1/2}.$$

Существенно, что помимо слагаемых, перед которыми стоит единичная функция включения $h(\xi_2)$, в (10) присутствуют интегралы, умноженные на $h(\xi_1/\gamma)$. Поскольку в случае сверхсветового движения $\gamma < 0$, соответствующие члены «включаются» при $\xi_1 < 0$ и «выключаются» для $\xi_1 = \tau - x > 0$. Этому, как будет видно далее, соответствует различная структура формул в области $\xi_1 > 0$ и $\xi_1 < 0$.

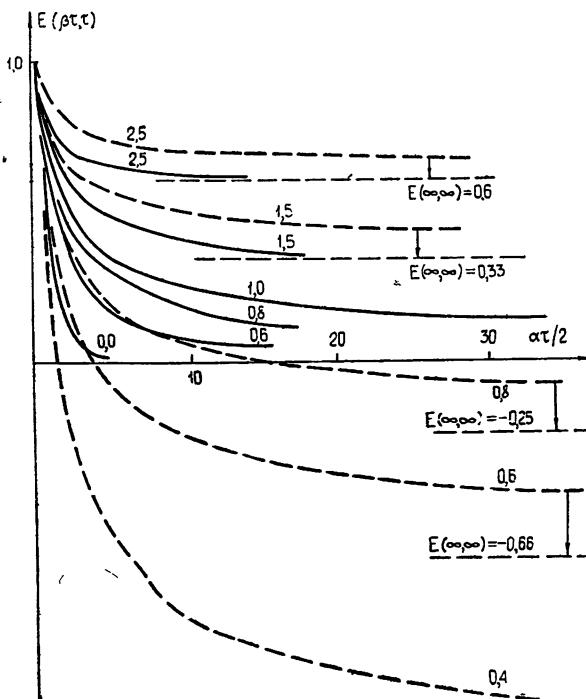


Рис. 5.

Если временная зависимость падающего сигнала $\Psi(\xi_2) = \exp[(i\omega - d)\xi_2]$, то входящие в (10) интегралы в области $\xi_1 > 0$ можно свести к функциям Ломмеля и Бесселя, а в области $\xi_1 < 0$ — к элементарным функциям:

$\xi_1 < 0$ —

$$E = \frac{m^2 - \alpha/2}{2\Omega} \exp(q_1) - \frac{n^2 - \alpha/2}{2\Omega} \exp(q_2), \quad B = \frac{(-1)(m^2 + \alpha/2)}{2\Omega} \times \\ \times \exp(q_1) + \frac{n^2 + \alpha/2}{2\Omega} \exp(q_2), \quad q_1 = x \frac{\xi_1}{\gamma} - \frac{\alpha}{4} (\xi_1 + \xi_2) - m^2 b, \\ q_2 = x \frac{\xi_1}{\gamma} - \frac{\alpha}{4} (\xi_1 + \xi_2) - n^2 b; \quad (11)$$

$\xi_1 \geq 0$ —

$$E = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\tau\right) \left\{ I_0(y) + \frac{m^2 - \frac{\alpha}{2}}{2\Omega} \bar{Y}(m) - \frac{n^2 - \frac{\alpha}{2}}{2\Omega} \bar{Y}(n) \right\}, \quad \Omega = \sqrt{x^2 - a^2}, \\ B = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\tau\right) \left\{ -I_0(y) - \frac{m^2 + \frac{\alpha}{2}}{2\Omega} \bar{Y}(m) + \frac{n^2 + \frac{\alpha}{2}}{2\Omega} \bar{Y}(n) \right\}. \quad (12)$$

Общие выражения при различных предельных значениях параметров упрощаются. Рассмотрим случай высокой проводимости $\omega/\alpha \ll 1$, точнее, $\left[\frac{2(i\omega - d)}{\alpha(1+\gamma)}\right] \ll 1$. При этом можно убедиться, что вторые слагаемые в (11) и члены с $\bar{Y}(n)$ в (12) описывают поле волны, сосредоточенной вблизи границы:

$$q_2 \approx \frac{\alpha}{4} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} (\xi_1 - \gamma \xi_2), \quad \bar{Y}(n) \sim \exp(q_2).$$

При $\sigma = \infty$ они описывают формирующийся на движущейся границе поверхностный ток $J = -\frac{4\gamma}{1-\gamma^2} \exp\left[\frac{2(i\omega - d)\tau}{1+\gamma}\right]$, который определяет разрыв вектора B на границе из соотношения $(1-\beta^2)[B] = J$, если $\beta \neq 1$.

Первые слагаемые в (11) и слагаемые с $\bar{Y}(m)$ в (12) представляют неоднородное статическое магнитное поле и объемные токи, сформировавшиеся в области $0 < x < \beta\tau$:

$$j = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha E = \frac{i\omega - d}{(1-\gamma)^2} \exp(q_1), \quad B = -\frac{2}{1-\gamma} \exp(q_1), \quad q_1 = 2x \frac{i\omega - d}{1-\gamma}.$$

При обратном соотношении параметров первый член описывает слабозатухающую волну $\exp\left[i\omega\xi_2 - \frac{\alpha}{4}(\xi_1 - \gamma\xi_2)\right]$, второй — волну, «бегущую» за фронтом, $O\left(\frac{\alpha}{\omega}\right) \exp\left[\frac{i\omega}{\gamma}\xi_1 + \frac{\alpha}{4\gamma}(\xi_1 - \gamma\xi_2)\right]$, слабозатухающую только на «своем» характерном масштабе: $\frac{1-\beta}{1+\beta}\omega$. Учитывая сильное затухание этой волны, а также малую ее амплитуду, можно считать,

что при выполнении условия $\frac{\alpha}{2\omega} \ll 1$ за фронтом существует одна прошедшая волна. Наличие двух волн в случае высокой проводимости и формирование поверхностного тока в случае $\sigma = \infty$ является характерным при движении границы с $\beta > 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратанович, Распространение электромагнитных волн в многопроводных системах, ВЦ АН СССР, М., 1958.
2. А. С. Барк, Н. И. Кузнецов, Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных, ВЦ АН СССР, М., 1962.
3. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4, М., 1958.
4. В. И. Семенова, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, секция V, 1972, стр. 34.
5. Л. Н. Кармазина, Э. А. Чистова, Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, ВЦ АН СССР, М., 1958.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
16 марта 1972 г.,
после объединения
28 февраля 1973 г.

REFLECTION AND REFRACTION OF PULSE ELECTROMAGNETIC SIGNALS FROM MOVING CONDUCTOR BOUNDARIES AND FRONT OF CONDUCTIVITY SWITCHING

A. V. Manankova

The nonstationary problem when the boundaries move with the constant velocity in the field of a plane wave with an arbitrary time dependence is considered.

УДК 621.372.821.2

МЕТОД ЧАСТИЧНЫХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЛНОВОДНО-РЕЗОНАТОРНЫХ СИСТЕМ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко

Рассмотрено решение краевой задачи для электромагнитного поля волноводно-резонаторных систем с граничными поверхностями сложной формы на основе предложенного строгого метода частичных пересекающихся областей. Рассчитаны с помощью ЭВМ матрицы рассеяния различных трехплечих H -плоскостных волноводных соединений.

При расчете электромагнитных полей в сложных волноводно-резонаторных системах широко используется метод частичных областей в случаях, когда вся сложная область допускает разбиение на такие простые смежные подобласти, для которых общие решения известны. Однако такое разбиение можно провести далеко не всегда.

С другой стороны, во многих случаях сложная область определения поля, не допускающая разбиения на простые смежные подобласти, может быть разбита на простые пересекающиеся подобласти, т. е. подобласти, имеющие общие части. Заметим, что такое разбиение оказывается возможным для большого числа практических важных задач, так как волноводно-резонаторные системы обычно создаются соединением «простых» волноводов и резонаторов, и возникающая при этом сложная область естественным образом разбивается на пересекающиеся подобласти.

1. Рассмотрим случай, когда сложная область допускает разбиение на две простые пересекающиеся подобласти (см. рис. 1). (Обобщение на произвольное их число очевидно.) Как известно (см., например, [1]), задачу определения поля можно свести к решению уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = - (1/j\omega \epsilon) J \quad (k^2 = \omega^2 \epsilon \mu) \quad (1)$$

для вектора Герца Π , удовлетворяющего граничным условиям

$$\mathbf{n} \times \Pi = 0|_{S=\sigma_1 \cup \sigma_2}, \quad \nabla \cdot \Pi = 0|_{S=\sigma_1 \cup \sigma_2} \quad (2)$$

в случае идеальной проводимости поверхности $S = \sigma_1 \cup \sigma_2$ сложной области, изображенной на рис. 1 (n — единичный вектор нормали к поверхности, направленный внутрь области). Будем считать, что в уравнении (1) заданный источник с плотностью тока J полностью находится в подобласти I и не попадает в подобласть II. Тогда, обозначив векторы Герца в подобластях I и II через Π_1 и Π_2 и используя их непрерывность при переходе через поверхности S_1 и S_2 , на основании векторного аналога второго тождества Грина [1, 2] можно записать:

$$\begin{aligned}\Pi_1(\mathbf{r}_0) &= (1/j\omega\epsilon) \int_{V_J} \vec{J} \vec{G}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) dV_J + \int_{S_1} \mathbf{F}_{2,1} dS_1, \\ \Pi_2(\mathbf{r}_0) &= \int_{S_2} \mathbf{F}_{1,2} dS_2, \\ \mathbf{F}_{p,q} &= (\mathbf{n} \times \Pi_p) (\nabla \times \vec{G}_q) - \mathbf{n} \vec{G}_q \nabla \Pi_p \quad (p, q = 1, 2).\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь \vec{G}_q — диадная функция Грина (тензор второго ранга) векторного уравнения Гельмгольца (1) области q ($q = 1, 2$), удовлетворяющая на поверхности S_q (см. рис. 1) тем же граничным условиям, что и Π на S ; V_J — объем, занимаемый источником J .

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма второго рода относительно Π_1 и Π_2 (3) может быть решена, если, например, использовать известное представление для диады Грина в виде разложения по собственным векторным функциям своих областей $\Phi_{qn}(\mathbf{r})$ [2]:

$$\vec{G}_q(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = - \sum_n \frac{\Phi_{qn}^*(\mathbf{r}) \Phi_{qn}(\mathbf{r}_0)}{k^2 - k_{qn}^2} \quad (q = 1, 2), \quad (4)$$

где $\Phi_{qn}^* \Phi_{qn}$ образуют диаду, или аффинор, а k_{qn}^2 — собственные числа однородного уравнения Гельмгольца подобласти q . После подстановки (4) в (3) система интегро-дифференциальных уравнений сводится (см., например, [3]) к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений Π_q в ряды по функциям Φ_{qn} , которая может быть решена любым известным способом. В отсутствие источника условие существования нетривиального решения полученной системы дает уравнение для определения собственных частот рассматриваемой сложной области. Следует отметить, что в конкретных задачах может оказаться более целесообразным представление \vec{G}_q не в виде (4), а в «истокообразной» форме (см., например, [4]), так как это снижает кратность разложения \vec{G}_q в ряд.

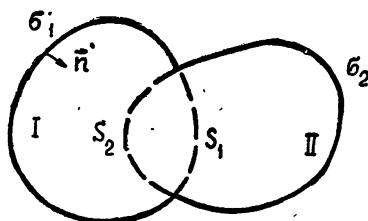


Рис. 1.

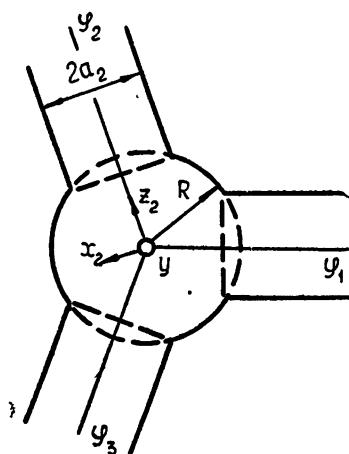


Рис. 2.

2. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу определения матрицы рассеяния H -плоскостного трехплечего соединения прямоугольных волноводов, состоящего из цилиндрической полости радиуса R

и трех присоединенных к ней радиально направленных регулярных волноводов (см. рис. 2). Размер широкой стенки волноводов равен $2a_i$ ($i = 1, 2, 3$). Поле внутри полости будем описывать в цилиндрической системе координат (ρ, α, y) , а в плечах — в декартовых системах (x_i, y, z_i) . Предположим, что в r -м плече в точке (x_A, y_A) находится источник электромагнитного поля, представляющий собой нить с электрическим током, направленным вдоль оси y и не зависящим от координаты y . В этом случае вектор Герца имеет единственную отличную от нуля составляющую вдоль оси y и обращающуюся в нуль на идеально проводящих стенках системы (скалярная задача). Обозначим эту составляющую вектора Герца в центральной области ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \alpha < 2\pi$) через $\Pi_R^{(r)}$, а в i -м волноводном плече ($-a_i \leq x_i \leq a_i$, $l_i \leq z_i < +\infty$, $l_i = \sqrt{R^2 - a_i^2}$) — через $\Pi_i^{(r)}$, где верхние индексы (r) ($r = 1, 2, 3$) указывают на номер волноводного плеча, в котором находится источник.

Тогда для определения $\Pi_R^{(r)}$ и $\Pi_i^{(r)}$ в этих пересекающихся подобластях мы получим, аналогично (3), следующую систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_i^{(r)} &= \int_{-a_i}^{a_i} \left[\Pi_R^{(r)} \frac{\partial G_i}{\partial z'_i} \right]_{z'_i=l_i} dx'_i + \delta_{ri} \Pi_0 \\ \Pi_R^{(r)} &= \sum_{i=1}^3 \int_{\varphi_i - \theta_i}^{\varphi_i + \theta_i} \left[\Pi_i^{(r)} \frac{\partial G_R}{\partial \rho'} \right]_{\rho'=R} R d\alpha' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\theta_i = \arcsin(a_i/R);$$

$$\Pi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_n(x_r) \operatorname{sh} \gamma_n'(z_r - l_r) \quad (z < z_A),$$

$$\gamma_n' = \sqrt{(n\pi/2a_r)^2 - k^2} \quad (k = 2\pi/\lambda),$$

$$\Psi_n(x_r) = \begin{cases} \cos(n\pi x_r/2a_r) & (n \text{ — нечетное}) \\ \sin(n\pi x_r/2a_r) & (n \text{ — четное}) \end{cases},$$

C_n — известные коэффициенты.

Функции Грина G_i в i -й области и G_R в центральной области, построенные согласно общей методике (см., например, [2]), равны

$$G_i = \frac{1}{a_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^i} \Psi_n(x_i) \Psi_n(x'_i) \begin{cases} \exp[-\gamma_n^i(z_i - l_i)] \operatorname{sh}[\gamma_n^i(z'_i - l_i)] & (z_i \geq z'_i) \\ \exp[-\gamma_n^i(z'_i - l_i)] \operatorname{sh}[\gamma_n^i(z_i - l_i)] & (z_i < z'_i) \end{cases}; \quad (6)$$

$$G_R = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0m}}{4J_m(kR)} \cos m(\alpha - \alpha') \times$$

$$(7)$$

$$\times \begin{cases} J_m(k\rho') [J_m(kR) N_m(k\rho) - N_m(kR) J_m(k\rho)] & (\rho \geq \rho') \\ J_m(k\rho) [J_m(kR) N_m(k\rho') - N_m(kR) J_m(k\rho')] & (\rho < \rho') \end{cases},$$

где J_m и N_m — функции Бесселя первого и второго рода порядка m .

После исключения $\Pi_i^{(r)}$ в (5) и подстановки в полученное уравнение (6) и (7) задача сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_{1m}^{(r)}$ и $A_{2m}^{(r)}$ разложения $\Pi_R^{(r)}$ в ряд

$$\Pi_R^{(r)} = \sum_m [A_{1m}^{(r)} \cos m\alpha + A_{2m}^{(r)} \sin m\alpha] J_m(k\rho).$$

Задача решалась численно с помощью ЭВМ. При счете предполагалось, что все плечи одинаковы ($a_i = a$), а система возбуждается волной H_{10} единичной амплитуды ($C_n = 2\delta_{1n}$). Часть численных результатов,

Таблица 1

$R/a = 2/\sqrt{3}$,	$\varphi_1 = 0^\circ$,	$\varphi_2 = 120^\circ$,	$\varphi_3 = 240^\circ$	
λ/a	$ S_{11} $	β_{11}	$ S_{21} $	β_{21}
2,2	0,414	-0,211	0,644	+0,470
2,6	0,335	+1,241	0,666	+1,123
3,0	0,394	-1,046	0,650	+1,495
3,4	0,514	-0,462	0,607	-1,401
3,8	0,749	-0,047	0,468	-1,300

$R/a = \sqrt{2}$,	$\varphi_1 = 0^\circ$,	$\varphi_2 = 120^\circ$,	$\varphi_3 = 240^\circ$	
λ/a	$ S_{11} $	β_{11}	$ S_{21} $	β_{21}
2,2	0,727	-0,125	0,486	+1,105
2,6	0,361	-1,069	0,659	-0,647
3,0	0,355	+0,514	0,661	+0,142
3,4	0,501	-1,486	0,612	+0,742
3,8	0,778	-0,611	0,445	+1,250

полученных для элементов матрицы рассеяния $S_{lr} = |S_{lr}| \exp(j\beta_{lr})$ для различных трехплечих соединений, приведена в табл. 1, 2. Во время счета в ряде (6) учитывалось 7, а в ряде (7) — 10 слагаемых. Увеличение числа членов этих рядов еще на 1 изменяет результаты уже менее чем на 0,1 %. Результаты, полученные для симметричного Y -соединения прямоугольных волноводов (см. табл. 1, $\frac{R}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$), хорошо согласуются с экспериментальными данными для параметров элементов эквивалентной схемы, приведенных в [5].

Таблица 2

$R/a = \sqrt{2}$,	$\varphi_1 = 0^\circ$,	$\varphi_2 = 135^\circ$,	$\varphi_3 = 225^\circ$					
λ/a	$ S_{11} $	β_{11}	$ S_{22} $	β_{22}	$ S_{21} $	β_{21}	$ S_{32} $	β_{32}
2,2	0,410	-0,904	0,688	-0,134	0,647	+1,226	0,333	-0,567
2,6	0,226	+1,026	0,443	-0,647	0,690	-0,806	0,574	-0,279
3,0	0,203	-0,291	0,420	+0,910	0,693	-0,058	0,587	+0,676
3,4	0,361	+1,223	0,551	-1,234	0,660	+0,556	0,511	+1,219
3,8	0,712	-0,828	0,799	-0,495	0,497	+1,128	0,339	+1,549

Следует также заметить, что соединение, данные для которого приведены в табл. 2, обладает меньшим модулем коэффициента отражения в плечо I, чем обычное симметричное Y -соединение.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Collin, Field theory of guided waves, McGraw-Hill BC, 1960.
2. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1960.

3. П. П. Забреко и др., Интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1968.
4. Г. Т. Марков, Е. Н. Васильев, Математические методы прикладной электродинамики, изд. Сов. радио, М., 1970.
5. Справочник по волноводам, изд. Сов. радио, М., 1952.

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию
6 февраля 1973 г.

A METHOD OF PARTIAL INTERSECTING REGIONS FOR INVESTIGATING COMPLEX WAVEGUIDE RESONATOR SYSTEMS

I. G. Prokhoda, V. P. Chumachenko

The solution of the boundary problem is considered for the electromagnetic field of the waveguide-resonator systems with complex boundary surfaces on the basis of the proposed strict method of partial intersecting regions. The scattering matrices of different three-arm *H*-plane waveguide connections are calculated by an electron computer.

УДК 621.372.8

МЕТОД РАСЧЕТА ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ГОФРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДАХ

A. С. Ильинский, Э. А. Альховский, А. Г. Данилова

Предлагается метод расчета постоянных распространения в гофрированных волноводах с произвольной формой гофра, основанный на использовании аналогии между нерегулярным волноводом и регулярным волноводом с переменным заполнением. Для определения постоянных распространения используется численный метод расчета на ЭВМ.

В последние годы появился и получает все более широкое распространение новый вид фидера—гофрированные волноводы, в связи с чем становится необходимой разработка методов расчета параметров гофрированных волноводов, имеющих гарантированную точность.

В настоящей работе представлен метод расчета постоянных распространения в гофрированных волноводах с произвольной формой гофра и произвольным поперечным сечением. Электродинамическая задача определения нормальных волн периодического волновода сводится к исследованию решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для решения последней задачи используются два метода: метод прямого численного определения решений системы уравнений с периодическими коэффициентами и метод возмущений, позволяющий получить простые аналитические формулы для определения постоянных распространения. В работе указаны границы применимости метода возмущения.

Рассмотрим периодический волновод, ограниченный идеально проводящей боковой поверхностью; среда, заполняющая волновод предполагается однородной. Задача определения постоянных распространения в периодическом волноводе состоит в определении решений системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= ik \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -ik \mathbf{E} \end{aligned} \quad (1)$$

($k = \omega/c$), удовлетворяющих условию обращения в нуль касательных составляющих электрического поля на боковой поверхности волновода, представленных в виде неоднородных плоских волн [1]

$$\mathbf{E}(x, y, z) = e^{iz} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z),$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = e^{iz} \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z).$$

Функции $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ —периодические функции по z с периодом T .

Введением специальной криволинейной системы координат, которая использовалась в работах [2, 3], задача о распространении электромагнитных колебаний в гофрированном волноводе сводится к эквивалентной задаче о распространении колебаний в прямолинейном волноводе с анизотропным периодическим заполнением и регулярной боковой

поверхностью. При этом между электромагнитными полями в исходном гофрированном волноводе и волноводе с переменным заполнением устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Комплексные амплитуды E_0 , H_0 электромагнитного поля в волноводе с регулярной боковой поверхностью удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} E_0 &= ik \parallel \mu \parallel H_0, \\ \operatorname{rot} H_0 &= -ik \parallel \epsilon \parallel E_0,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\parallel \mu \parallel = \parallel \epsilon \parallel$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости, определяемые выбором преобразования координат. Касательные составляющие векторов E_0 и H_0 на боковой поверхности регулярного волновода обращаются в нуль. Переход от задачи с переменным заполнением позволяет построить метод определения постоянных распространения, не зависящий от формы гофра.

Внутри регулярного волновода существует система нормальных волн, полная в любом сечении регулярного волновода. Введем систему вектор-функций e_n , h_n

$$\begin{aligned}e_n &= \left\{ \begin{array}{l} \nabla \psi_n \text{ — электрические волны} \\ [\nabla \psi_n \wedge i_z] \text{ — магнитные волны} \end{array} \right., \\ h_n &= \left\{ \begin{array}{l} [i_z \wedge \nabla \psi_n] \text{ — электрические волны} \\ \nabla \psi_n \text{ — магнитные волны} \end{array} \right.. \end{aligned}$$

Векторы e_n и h_n пропорциональны поперечным составляющим амплитуд нормальных электрических и магнитных волн регулярного волновода. В силу полноты системы $\{e_n\}$ или $\{h_n\}$ любой вектор в плоскости поперечного сечения волновода может быть представлен как суперпозиция векторов e_n или h_n .

Определим приближенные решения системы (2) в виде конечных сумм

$$\begin{aligned}E_0^N &= \sum_{n=1}^N A_n e_n, \\ H_0^N &= \sum_{n=1}^N B_n h_n,\end{aligned}\quad (3)$$

где суммирование проводится как по электрическим, так и по магнитным типам волн. Продольные компоненты определим через поперечные из уравнений (2).

Потребуем, чтобы коэффициенты разложения (3) удовлетворяли следующим соотношениям ортогональности:

$$\begin{aligned}\iint_{K_1} (\operatorname{rot} H_0^N + ik \parallel \mu \parallel H_0^N)_t e_n d\sigma &= 0, \\ \iint_{K_1} (\operatorname{rot} E_0^N - ik \parallel \mu \parallel H_0^N)_t h_n d\sigma &= - \oint_{C_1} E_z^N h_n \tau ds.\end{aligned}\quad (4)$$

Соотношения (4) позволяют утверждать, что поля E_0^N , H_0^N удовлетворяют системе уравнений (2) в интегральном смысле. Система соотношений (4) представляет собой нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Та-

ким образом определение постоянных распространения гофрированного волновода сводится к исследованию решений системы уравнений (4). При $N \rightarrow \infty$ система решений E_0^N, H_0^N сходится в обобщенном смысле к решениям системы уравнений (2), что означает сходимость постоянных распространения к искомым постоянным распространения гофрированного волновода.

Рассмотрим более детально описанный метод на примере эллиптического гофрированного волновода. Его поверхность в цилиндрических координатах может быть задана в виде

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} + l f\left(\frac{2\pi}{T} z + x\varphi\right), \quad (5)$$

где a — большая полуось эллипса, b — отношение большой полуоси к малой, l — амплитуда гофра, T — период гофра, x — постоянная, равная нулю или единице в зависимости от вида гофра («кольцевой» или «спиральный»), $f\left(\frac{2\pi}{T} z + x\varphi\right)$ — функция, задающая модуляцию боковой поверхности.

Система (4) для такой поверхности волновода может быть записана в виде

$$\frac{dX}{dz} = (Q_0 + \alpha F_1(z) Q_1 + \dots + \alpha^t F_t(z) Q_t + \dots) X, \quad (6)$$

где $\alpha = l/a$ — малый параметр, Q_t — постоянные матрицы, $F_t(z)$ — периодические матрицы, а X есть вектор, компонентами которого являются коэффициенты разложения (3). При $\alpha = 0$ эта система описывает зависимость от z амплитуд электромагнитного поля регулярного волновода. Задача расчета постоянных распространения сводится к вычислению элементов матрицы монодромии системы (6) и ее собственных значений. Матрица монодромии (4) получается путем решения задач Коши со специальными начальными условиями для системы (6) методом Рунге—Кутта. Характеристические показатели системы ищутся в виде

$$\beta = \beta_0 + \alpha \beta_1, \quad (7)$$

где β_0 — характеристический показатель системы при $\alpha = 0$.

В силу специального вида β возникает задача нахождения наименьшего собственного значения матрицы, полученной путем вычитания из диагональных элементов матрицы монодромии системы при $\alpha = 0$, соответствующего характеристическому показателю β_0 . Наименьшее собственное значение матрицы определяется ортогональным степенным методом (5). Изложенный численный метод может быть применен к расчету постоянных распространений как симметричных, так и несимметричных волн.

Постоянные распространения и критические частоты симметричной волны могут быть рассчитаны аналитическим методом. Если ограничиться одной базисной волной и учесть матричные коэффициенты при степенях α до α^2 включительно, то для этих величин получаются достаточно простые и точные аналитические выражения. В качестве примера рассматривалась система (6) для случая $x = 0$, $b = 1$ и модулирующей функции $\sin \frac{2\pi}{T} z$. Программа численного метода написана на языке АЛГОЛ-60 и реализовывалась на БЭСМ-4.

Таблица

ka	$\beta_0 a$	$\beta_1 a$	βa					
			Базисные волны			E_{01}	E_{01}	E_{02}
			E_{01}	E_{01}	E_{02}			
2,400418			0,052314	0,07147	0,07369			0,000008
2,40158			0,091588	0,10369	0,1057			0,06567
2,4027			0,117154	0,12813	0,12924			0,1002
2,4039			0,137387	0,1455	0,146			0,1255
2,4049	0,00011		0,1889	0,23467	0,2396			0,1435
2,4123			0,2674	0,300706	0,3061			0,2390
2,4197			0,3277	0,35702	0,3607			0,3064
2,4271			0,3786	0,404954	0,4053			0,3616
2,4345			0,4236	0,44762	0,4509			
2,4419					0,4512			

β_0 — постоянная распространения немодулированного волновода,

β_1 — постоянная распространения модулированного волновода; счет по формулам (13), (15),

β — постоянная распространения модулированного волновода, машинный счет

В таблице содержатся результаты расчета дисперсионной характеристики для волны E_{01} . Для иллюстрации скорости сходимости приводятся результаты расчета с одной, двумя и тремя базисными волнами. Применение аналитического метода для волны E_{01} сводит систему (6) к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + [h - 2\theta_1 \cos pz - 2\theta_2 \cos 2pz] U = 0, \quad (8)$$

где U есть один из коэффициентов в разложении (3) (в рассмотренном случае это B_1),

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - \frac{(\nu_0^1)^2}{(ak)^2}, & q &= \frac{\nu_0^1}{a}, & p &= \frac{2\pi}{T}, \\ h &= k^2 \gamma - \epsilon^2 \left[\frac{p^2}{2} + \frac{3}{2} q^2 \right], \\ 2\theta_1 &= -\alpha(p^2 + 2q^2), \\ 2\theta_2 &= -\alpha^2 \left(-\frac{p^2}{2} - p + \frac{3}{2} q^2 \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Ищем решение (8) в виде

$$U = \sum d_n e^{(\beta \pm pnt)z}. \quad (10)$$

Подстановка приводит к системе уравнений с определителем Хилла

$$\Delta(\beta) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \gamma_{-2}^1(\beta) & \gamma_{-2}^2(\beta) 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \gamma_{-1}^1(\beta) & 1 & \gamma_{-1}^2(\beta) 0 & \gamma_{-1}^2(\beta) 0 & \dots & \dots \\ \dots & \gamma_0^2(\beta) & \gamma_0^1(\beta) & 1 & \gamma_0^1(\beta) & \gamma_0^2(\beta) \dots & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_1^2(\beta) & \gamma_1^1(\beta) & 1 & \gamma_1^1(\beta) \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad (11)$$

и β определяется из уравнения

$$\Delta(\beta) = 0, \quad (12)$$

Корни определителя Хилла являются, как известно [6], корнями уравнения

$$-\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{p}\beta\right) = \Delta(0) \sin^2\left(\frac{\pi}{p}k^{1/2}\right). \quad (13)$$

Соотношение (13) определяет дисперсионную зависимость

$$\beta = \hat{f}(k).$$

Критическое значение k находится из условия

$$\Delta(0) = 0. \quad (14)$$

Достаточно хорошее приближение получается, если ограничиться только центральным минором третьего порядка в определителе (11). В этом случае

$$\Delta(0) = 1 - \frac{2\theta_1^2\theta_2}{(p^2 - h^2)h} + \frac{2\theta_1^2}{h(p^2 - h)} - \frac{\theta_2^2}{p^2 - h^2}. \quad (15)$$

Для определения критического значения k_0 можно пользоваться еще более простой формулой, которая получается из (15), если пренебречь вторым и четвертым членами ввиду их малости:

$$(k_0)^2 = \frac{1}{2} [p^2 + 2q^2 + \alpha^2(p^2 + 3q^2)] - \sqrt{\frac{p^4}{4} + \frac{1}{2}\alpha^2(p^2 + 2q^2)^2}. \quad (16)$$

Результаты расчета дисперсионной характеристики волны E_{01} по формулам (15) и (16) приведены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Gans, A general Proof of Floquais Theorem, IEEE Trans., MTT-13, № 3 384 (1965).
2. А. Г. Свешников, ЖВММФ, 3, № 2, 314 (1963).
3. А. С. Ильинский, А. Г. Свешников, сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 13, 3 (1969).
4. Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. Мир, М., 1964.
5. В. В. Воеводин, Численные методы алгебры, Теория и алгоритмы, изд. Наука, М., 1966.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 3, изд. Наука, М., 1967.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
11 декабря 1972 г.

A METHOD OF CALCULATING THE PROPAGATION CONSTANTS IN CORRUGATED WAVEGUIDES

A. S. Il'inskii, E. A. Al'khovskii, A. G. Danilova

A method is proposed to calculate the propagation constants in corrugated waveguides with an arbitrary form of corrugation. The method based on using the analogy between irregular and regular waveguides with variable filling. A numerical method of calculation by an electron computer is used to determine the propagation constants;

УДК 621.372 8

РАССЕЯНИЕ ПОЛЯ ДИПОЛЯ КОРОТКИМ ОТРЕЗКОМ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

С. И. Лапта, В. Г. Сологуб

Рассмотрена задача о возбуждении отрезка круглого волновода (цилиндрического кольца) электрическим или магнитным диполем, расположенным на его оси. Задача сводится к нахождению решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода для фурье-преобразования составляющих плотности поверхностного тока на кольце. Эти уравнения удобны для численного анализа задачи при любых значениях ее параметров. В случае узкого кольца получены с оценкой погрешности простые приближенные выражения для плотности поверхностного тока и поля в дальней зоне. Подробно исследованы основные дифракционные характеристики рассеянного поля.

Задача о дифракции электромагнитных волн на отрезке круглого волновода представляет большой теоретический интерес и имеет обширные приложения на практике. Она тесно связана с задачами об антенном вибраторе и кольцевой антенне. Проводящий круглый цилиндр конечной длины является также удовлетворительной электрической моделью многих рассеивающих тел. Поэтому данной задаче посвящена довольно многочисленная литература (см., например, [1-14]). Однако методы исследования этой задачи носили либо существенно приближенный характер [1-6], либо основывались на численном решении интегрального уравнения первого рода для плотности поверхностного тока на стенке волновода [7-14].

В данной работе предложен математически обоснованный метод исследования задачи о дифракции на отрезке круглого волновода (цилиндрическом кольце) электромагнитных полей, возбуждаемых электрическим и магнитным диполями. Стенка кольца предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей. Рассмотрены случаи, когда диполь находится на оси кольца и ориентирован поперек либо вдоль нее. Эти задачи представляют интерес для ряда практических приложений в радиоастрономии, радиолокации и радиотехнических измерениях.

Используя точное решение системы парных интегральных уравнений одного специального вида, рассматриваемые задачи сводятся к нахождению решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода с ядрами простого вида относительно преобразования Фурье составляющих плотности поверхностного тока на кольце. Эти уравнения удобны для численного анализа задачи при всех значениях ее параметров. В случае, когда ширина кольца мала по сравнению с диаметром и длиной волны, для решения уравнений применим метод последовательных приближений. В этом случае найдены с оценкой погрешности приближенные выражения для плотности поверхностного тока и поля в дальней зоне. Исследованы основные дифракционные характеристики рассеянного поля.

Результаты, полученные в настоящей работе, в известной степени дополняют исследования, проведенные в работах [1-14].

1. ПОПЕРЕЧНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим сначала случай поперечного электрического диполя с величиной электрического момента, равной p . Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с осью Oz , совпадающей с осью кольца, и центром O , равноудаленным от его кромок; отсчет угла φ будем вести от полуплоскости, в которой лежит момент диполя.

Решение задачи будем искать с помощью электрического Π^e и магнитного Π^m векторов Герца, которые представим в виде

$$\Pi^e = \Pi_0^e + \Pi_1^e,$$

$$\Pi^m = \Pi_1^m,$$

где Π_0^e соответствует полю диполя в свободном пространстве, а Π_1^m — рассеянному полю. Вектор Π_0^e ориентирован вдоль оси диполя и по величине равен* $\Pi_0^e = p \frac{e^{ikR}}{R}$ ($R = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$, z_0 — координата точки нахождения диполя, k — волновое число). Рассеянное поле, как можно показать, полностью определяется единственными отличными от нуля z -составляющими векторов Π_1^m , которые будем искать в таком представлении:

$$\begin{aligned} \Pi_1^m(\rho, \varphi, z) &= \sin \varphi \frac{p \times}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(s)}{g} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(1)'}(g) J_1 \left(g \frac{\rho}{a} \right) \\ J_1'(g) H_1^{(1)} \left(g \frac{\rho}{a} \right) \end{array} \right\} \exp \left(is \frac{z}{a} \right) ds; \\ \Pi_1^e(\rho, \varphi, z) &= \cos \varphi \frac{p}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(s) \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g) J_1 \left(g \frac{\rho}{a} \right) \\ J_1(g) H_1^{(1)} \left(g \frac{\rho}{a} \right) \end{array} \right\} \exp \left(is \frac{z}{a} \right) ds. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь в фигурных скобках следует брать верхнюю строчку при $\rho \leq a$, а нижнюю — при $\rho \geq a$; $J_n(y)$ и $H_n^{(1)}(y)$ — функции Бесселя первого и третьего рода соответственно, штрих означает производную по аргументу, $g = \sqrt{x^2 - s^2}$, причем $\operatorname{Im} \sqrt{x^2 - s^2} > 0$ при $s \rightarrow \pm \infty$, $x = ka$, a — радиус кольца.

Зная $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$, по известным формулам можно найти рассеянное поле в любой точке пространства. Составляющие плотности поверхностного тока на кольце при этом будут иметь вид

$$j_\varphi = i \sin \varphi \frac{c \times p}{2 \pi^2 a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) \exp \left(is \frac{z}{a} \right) ds,$$

$$j_z = -\cos \varphi \frac{c \times p}{2 \pi^2 a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\gamma(s) - \frac{s}{g^2} \alpha(s) \right] \exp \left(is \frac{z}{a} \right) ds$$

(c — скорость света). Следовательно, с точностью до постоянных мно-

* Временная зависимость взята в виде $e^{-i\omega t}$.

жителей функции $\alpha(s)$ и $\beta(s) = \gamma(s) - \frac{s}{g^2} \alpha(s)$ являются преобразованием Фурье составляющих плотности поверхностного тока на кольце j_y и j_z .

Обращение в нуль тангенциальных составляющих полного электрического поля на поверхности кольца и отсутствие токов на ее дополнении до бесконечно длинного цилиндра приводят к следующей системе функциональных уравнений, которым должны удовлетворять функции $\alpha(s)$ и $\beta(s)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) s J_1(g) H_1^{(1)}(g) \exp\left(is \frac{z}{a}\right) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s) g^2 J_1(g) H_1^{(1)}(g) \times \quad (3)$$

$$\times \exp\left(is \frac{z}{a}\right) ds = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} sg H_1^{(1)}(g) \exp\left[i \frac{s}{a}(z - z_0)\right] ds \quad \left(|z| < \frac{d}{2}\right);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) \delta(s) \exp\left(is \frac{z}{a}\right) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s) s J_1(g) H_1^{(1)}(g) \exp\left(is \frac{z}{a}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g H_1^{(1)}(g) \exp\left[i \frac{s}{a}(z - z_0)\right] ds - \frac{x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(g) \times \quad (4)$$

$$\times \exp\left[i \frac{s}{a}(z - z_0)\right] ds \quad \left(|z| < \frac{d}{2}\right);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s) \exp\left(is \frac{z}{a}\right) ds = 0 \quad \left(|z| > \frac{d}{2}\right); \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(s) \exp\left(is \frac{z}{a}\right) ds = 0 \quad \left(|z| > \frac{d}{2}\right), \quad (6)$$

где $\delta(s) = \frac{s^2}{g^2} J_1(g) H_1^{(1)}(g) + x^2 J_1'(g) H_1^{(1)'}(g)$, d — ширина кольца.

При анализе этих уравнений можно применить метод, использованный в работе одного из авторов [15] при исследовании задачи о дифракции на полосе. Для этого необходимо продифференцировать уравнение (4) по z и учесть равенство, которое следует из него при $z = 0$. Продифференцированное по z уравнение (4), сложенное с (3), будем рассматривать совместно с уравнением (5) как систему парных уравнений относительно $\alpha(s)$. Аналогично из умноженного на $x^2 - 1$ уравнения (3) вычтем продифференцированное по z уравнение (4). Полученное уравнение совместно с продифференцированным по z уравнением (6) будем рассматривать как систему относительно функции $\beta(s)$.

Используя результаты работы [15], полученные системы парных интегральных уравнений можно заменить интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Соответствующие им уравнения для четных $\alpha^+(s)$, $\beta^+(s)$ и нечетных $\alpha^-(s)$, $\beta^-(s)$ частей функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ при этом будут иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha^+(s) = \eta \int_0^{\infty} \alpha^+(t) \varepsilon_1^1(t) W_{\eta s}^{\eta t} dt + \eta \int_0^{\infty} \beta^-(t) \varepsilon_2^1(t) t W_{\eta s}^{\eta t} dt - \\ - \eta \frac{\pi i}{2} \int_0^{\infty} t H_0^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} W_{\eta s}^{\eta t} dt + \alpha(0) J_0(\eta s), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\beta^-(s) &= \eta \int_0^\infty \alpha^+(t) \varepsilon_1^2(t) t^{-1} W_{\eta t}^{\eta s} dt + \eta \int_0^\infty \beta^-(t) \varepsilon_2^2(t) \times \\
&\times W_{\eta t}^{\eta s} dt + \eta \frac{\pi i}{2} \int_0^\infty g H_1^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} W_{\eta t}^{\eta s} dt - \eta \frac{\pi i}{2} \int_0^\infty H_0^{(1)}(g) \times \\
&\times \cos t \frac{z_0}{a} W_{\eta t}^{\eta s} dt; \\
\alpha^-(s) &= \eta \int_0^\infty \alpha^-(t) \varepsilon_1^1(t) U_{\eta t}^{\eta s} dt + \eta \int_0^\infty \beta^+(t) \varepsilon_2^1(t) t U_{\eta t}^{\eta s} dt - \\
&- \eta \frac{\pi}{2} \int_0^\infty t H_0^{(1)}(g) \sin t \frac{z_0}{a} U_{\eta t}^{\eta s} dt, \\
\beta^+(s) &= \eta \int_0^\infty \alpha^-(t) \varepsilon_1^2(t) t^{-1} U_{\eta t}^{\eta s} dt + \eta \int_0^\infty \beta^+(t) \varepsilon_2^2(t) U_{\eta t}^{\eta s} dt - \\
&- \eta \frac{\pi}{2} \int_0^\infty H_0^{(1)}(g) \sin t \frac{z_0}{a} U_{\eta t}^{\eta s} dt + \eta \frac{\pi}{2} \int_0^\infty g H_1^{(1)}(g) \sin t \frac{z_0}{a} U_{\eta t}^{\eta s} dt.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь введены обозначения: $\eta = \frac{d}{2a}$;

$$W_\lambda^\mu = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda^2} [\lambda J_0(\lambda) J_1(\mu) - \mu J_0(\mu) J_1(\lambda)],$$

$$U_\lambda^\mu = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda^2} [\mu J_0(\lambda) J_1(\mu) - \lambda J_0(\mu) J_1(\lambda)];$$

$$\varepsilon_1^1(t) = 1 - \frac{i\pi}{2} t [J_0(g) H_0^{(1)}(g) + J_2(g) H_2^{(1)}(g)],$$

$$\varepsilon_1^2(t) = \frac{i\pi}{2} t [2 J_1(g) H_1^{(1)}(g) - J_0(g) H_0^{(1)}(g) - J_2(g) H_2^{(1)}(g)],$$

$$\varepsilon_2^1(t) = -\frac{i\pi}{t} J_1(g) H_1^{(1)}(g), \quad \varepsilon_2^2(t) = 1 + \frac{i\pi}{t} (g^2 - 1) J_1(g) H_1^{(1)}(g),$$

причем все $\varepsilon_i^i(t) = O(t^{-2})$ при $t \rightarrow +\infty$. Постоянная $\alpha(0)$, входящая в первое уравнение системы (7), определяется из соотношения

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \alpha^+(s) \delta(s) ds + \int_0^\infty \beta^-(s) s J_1(g) H_1^{(1)}(g) ds &= C_1 = ia \left[\kappa^2 + \frac{a}{2R_0} \times \right. \\
&\times \left. \left(i\kappa - \frac{a}{R_0} \right) \right] \frac{\exp(i\kappa R_0)}{R_0},
\end{aligned} \tag{9}$$

которое следует из уравнения (4) при $z = 0$. Здесь $R_0 = \sqrt{a^2 + z_0^2}$.

Итак, задача свелась к решению двух систем интегральных уравнений Фредгольма второго рода (7), (9) и (8) относительно $\alpha^+(s)$, $\beta^-(s)$ и $\alpha^-(s)$, $\beta^+(s)$ соответственно, которые не связаны между собой. Их решения при произвольных значениях параметров задачи можно получить одним из численных методов. При этом сходимость интегралов

в соотношении (9) можно улучшить, подставив в них вместо $\alpha^+(s)$ и $\beta^-(s)$ правые части уравнений системы (7). Отметим, что погрешность, возникающую при замене уравнений (7) — (9) уравнениями с конечными верхними пределами интегрирования, нетрудно оценить, если учсть эквивалентность этих уравнений в системе (3) — (6).

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ УЗКОГО КОЛЬЦА

Для решения уравнений (7), (9) и (8) воспользуемся методом последовательных приближений. Чтобы выяснить область значений параметров задачи, при которых этот метод применим, удобно перейти в уравнениях (7) к функциям $u_i(s)$ ($i = 1, 2$), связанным с $\alpha^+(s)$ и $\beta^-(s)$ соотношениями

$$u_1(s) = s^{-1/2} [\alpha^+(s) - \alpha(0) J_0(\eta s)], \quad u_2(s) = s^{1/2} \beta^-(s).$$

Полученную при этом систему интегральных уравнений удобно записать в виде одного векторного уравнения

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (10)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{f} — двухкомпонентные векторы:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix},$$

а \mathbf{K} —матричный интегральный оператор с элементами K_{ij} ($i, j = 1, 2$), определяемыми из соотношений

$$K_{ij} \psi(s) = \eta s^{-1/2} \int_0^\infty \psi(t) t^{1/2} \epsilon_j^i(t) W_{\eta s}^{\eta t} dt. \quad (11)$$

Заметим, что свободный член уравнения (10) \mathbf{f} принадлежит векторному пространству $L_2(0, \infty)$, а оператор \mathbf{K} как оператор, действующий из $L_2(0, \infty)$ в $L_2(0, \infty)$, является вполне непрерывным, и для его нормы имеет место оценка

$$\|\mathbf{K}\| < C \eta (1 + |\ln s|^{1/2}), \quad (12)$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от параметров задачи.

Аналогично, переходя в системе (8) к функциям

$$v_1(s) = s^{-3/2} [\alpha^-(s) - B_1 s J_0(\eta s) + s F_1(s)],$$

$$v_2(s) = s^{-1/2} [\beta^+(s) - B_2 J_0(\eta s) + F_2(s)],$$

где

$$B_i = \eta \int_0^\infty \alpha^-(t) \epsilon_1^i(t) t^{-1} J_1(\eta t) dt + \eta \int_0^\infty \beta^+(t) \epsilon_2^i(t) J_1(\eta t) dt,$$

$$F_i(s) = \eta \frac{\pi}{2} \int_0^\infty [H_0^{(1)}(g) - \delta_2^i g H_1^{(1)}(g)] \sin t \frac{z_0}{a} U_{\eta s}^{\eta t} dt$$

(δ_2^i — символ Кронекера), получим такое же уравнение, как и (10), но с другим свободным членом, также принадлежащим $L_2(0, \infty)$ *.

Следовательно, когда ширина кольца достаточно мала по сравне-

* Заметим, что принадлежность решения уравнения (10) векторному пространству $L_2(0, \infty)$ обеспечивает конечность энергии рассеянного поля в любой ограниченной области.

нию с его диаметром и с длиной волны, $\|K\| < 1$, и в этом случае можно воспользоваться методом последовательных приближений. Ограничиваюсь в уравнениях (7)–(9) первым приближением, получим для функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ следующие выражения:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \left[\frac{C_1}{R(\eta)} J_0(\eta s) + \eta \frac{\pi}{2} C_2 J_1(\eta s) \right] \left[1 + O\left(\frac{\eta^2 \ln \eta}{|R(\eta)|}\right) \right], \\ \beta(s) &= \eta \frac{\pi}{2} C_3 \frac{J_1(\eta s)}{s} [1 + O(\eta^2 \ln \eta)].\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}R(\eta) &= \frac{i}{\pi} \left[(\kappa^2 - 1) \left(\ln \frac{\eta}{4} + \frac{\pi}{2} \int_0^{2\kappa} H_0(t) dt \right) + \pi \kappa H_0(2\kappa) - 2 \right] + \\ &+ \kappa(\kappa^2 - 1) \frac{\pi}{2} [J_1(2\kappa) H_0(2\kappa) - J_0(2\kappa) H_1(2\kappa)] + \kappa^3 J_0(2\kappa),\end{aligned}$$

$$C_2 = - \int_0^\infty t H_0^{(1)}(g) \sin t \frac{z_0}{a} dt, \quad C_3 = \int_0^\infty t [g H_1^{(1)}(g) - H_0^{(1)}(g)] \sin t \frac{z_0}{a} dt.$$

$H_n(x)$ — функции Струве.

Отсюда и из соотношений (2) находим приближенные выражения для составляющих плотности поверхностного тока на кольце:

$$\begin{aligned}j_\varphi &= i \sin \varphi \frac{c \times p}{\pi^2 a^3} \frac{C_1}{\eta R(\eta)} \sqrt{1 - \frac{4 z^2}{d^2}} \left[1 + i \eta R(\eta) \pi \frac{C_2}{C_1} \frac{z}{d} + O(\eta^2 \ln \eta) \right], \\ j_z &= - \cos \varphi \eta \frac{c \times p}{2\pi a^3} C_3 \sqrt{1 - \frac{4 z^2}{d^2}} \left[1 + O\left(\eta \frac{\ln^2 \eta}{|R(\eta)|}\right) \right].\end{aligned}$$

При этом φ -составляющая полного поверхностного тока с погрешностью порядка $\eta^2 \ln \eta |R(\eta)|^{-1}$ будет иметь вид

$$J_\varphi = i \sin \varphi \frac{c \times p C_1}{\pi a^2 R(\eta)} = \frac{c \times a}{2\pi R(\eta)} \tilde{E}_{0\varphi}, \quad (14)$$

где $\tilde{E}_{0\varphi}$ — φ -составляющая электрического вектора поля источника при $z = 0$, $p = a$. Из (14) видно, что при $|1 - \kappa| \sim 1$ в первом приближении фаза J_φ опережает (если $\kappa < 1$) или отстает (если $\kappa > 1$) на $\pi/2$ от фазы $\tilde{E}_{0\varphi}$. Выражение тока j_z через значения составляющих поля источника у кольца оказывается значительно сложнее, поскольку

$$C_3 = \frac{1}{i \kappa^2} \left(\frac{1 - \kappa^2}{\cos \varphi} \frac{a^3}{p} E_{0z} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{a^4}{p} \frac{d}{dz} E_{0\varphi} \right) \Big|_{\substack{z=0, \\ p=a}}.$$

Таким образом, $j_z \neq 0$ даже в случае, когда в поле источника у кольца отсутствует составляющая E_{0z} (например, у нормально падающей плоской волны). При этом, если $\kappa = 1$, j_z определяется только составляющей $E_{0\varphi}$ поля источника.

Выясним теперь поведение рассеянного поля в дальней зоне. Из представления (1) следует, что в этой области сферические составляющие рассеянного поля имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_{\varphi}^1 &= H_{\varphi}^1 = \cos \varphi \frac{2x p}{a^2} \frac{J_1(x \sin \theta)}{\sin \theta} [\cos \theta \alpha(x \cos \theta) + \\
 &+ x \sin^2 \theta \beta(x \cos \theta)] \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \\
 E_{\varphi}^1 &= -H_{\theta}^1 = -\sin \varphi \frac{2x^2 p}{a^2} J_1'(x \sin \theta) \alpha(x \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \\
 E_r^1 &= H_r^1 = o\left(\frac{1}{r}\right).
 \end{aligned} \tag{15}$$

(Использованы сферические координаты r, θ, φ с центром в точке O , угол θ отсчитывается от оси Oz .)

Отсюда видно, что система кольцо — поперечный электрический диполь может излучать вдоль оси диполя (в направлениях $\varphi=0, \pi; \theta=\frac{\pi}{2}$), что обусловлено наведенным на кольце током j_z . Интенсивность излучения в этих направлениях в случае узкого кольца с точностью до величин порядка $\eta^6 \ln \eta$ описывается формулой

$$I_0^0 = \eta^4 \pi \frac{c x^4 p^2}{32 a^4} J_1^2(x) |C_3|^2.$$

Следовательно, излучение вдоль оси диполя отсутствует, если $z_0 = 0$ либо когда x совпадает с одним из корней функции $J_1(x)$.

3. СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ КОЛЬЦА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

К основным дифракционным характеристикам препятствия относятся его сечения рассеяния. При нахождении их в качестве источника рассматривают плоскую волну. Для кольца при нормальном падении на него плоской волны (вдоль оси) сечения рассеяния можно получить из решения задачи с поперечным электрическим диполем, устремив в нем $z_0 \rightarrow -\infty$, считая величину $P = p k^2 \frac{\exp(ikR_0)}{R_0}$ постоянной. Выражения (1) при этом дадут решение задачи о дифракции на кольце нормально падающей из полупространства $z < 0$ плоской волны с амплитудой P , поляризованной в плоскости, в которой находился момент диполя.

Нетрудно показать, что полное сечение рассеяния кольца в этом случае будет иметь вид

$$Q = 4\pi a^2 x \tilde{\alpha}(x),$$

где

$$\tilde{\alpha}(s) = \lim_{z_0 \rightarrow -\infty} \frac{R_0}{x^2 a} \exp(-ikR_0) \alpha(s).$$

Используя приближенное решение (13), отсюда находим явное выражение для полного сечения рассеяния узкого кольца:

$$Q = 2\pi a^2 x \frac{\operatorname{Re} R(\eta)}{|R(\eta)|^2} [1 + O(\eta^2 \ln \eta)].$$

В радиолокации часто пользуются также понятием двухпозицион-

ногого сечения рассеяния σ_d . С помощью (13), (15) получим, что при нормальном падении плоской волны на узкое кольцо

$$\sigma_d = \frac{4\pi a^2 x^2}{|R(\eta)|^2} [\cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta J_1^2(x \sin \theta) + x^2 \sin^2 \varphi (J_1'(x \sin \theta))^2]$$

с погрешностью порядка $\eta^2 \ln \eta |R(\eta)|^{-2}$. В частном случае при $\theta = \pi$ отсюда находим сечение обратного рассеяния σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{\pi a^2 x^4}{|R(\eta)|^2}.$$

Из этих формул видно, что сечения рассеяния убывают с уменьшением ширины кольца пропорционально $\ln^{-2} \frac{d}{a}$, если $|x - 1| \sim 1$, причем при низких частотах ($x \ll 1$) они пропорциональны четвертой степени частоты.

4. РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ

Из результатов, полученных в предыдущих разделах, следует, что при $|1 - x| \sim 1$ ток, наведенный на узком кольце, и рассеянное им поле малы и тем меньше, чем уже кольцо. Однако при $x \approx 1$, когда длина волны близка к длине окружности кольца, происходит резонансное увеличение всех энергетических характеристик рассеяния. Их величины теперь имеют конечные значения и не зависят от ширины кольца.

Заметим, что, если в полученных ранее выражениях положить $x = 1$, можно прийти к неверному заключению, что характеристики рассеяния принимают ненулевые значения при $a \rightarrow 0$. Это связано с неправильной последовательностью предельных переходов ($x \rightarrow 1$, $\eta \rightarrow 0$). Дело в том, что физический смысл имеет решение, полученное при комплексном x с положительной мнимой частью, когда $\operatorname{Im} x \rightarrow 0$. В соответствии с этим, устремляя ширину кольца к нулю при $\operatorname{Im} x > 0$, будем иметь правильный результат исчезновения рассеянного поля.

При любой малой, отличной от нуля ширине кольца, полагая $x = 1 + \xi$, где $|\xi| \ll 1$, найдем, что минимальное значение $|R(\eta)|$ будет равно (с точностью $O(\ln^{-1} \eta)$)

$$R(\eta)_{\min} = J_0(2) \approx 0,224,$$

когда (с погрешностью порядка $\ln^{-2} \eta$)

$$x = 1 + \frac{1 - \frac{\pi}{2} H_0(2)}{\ln \eta} \approx 1 - \frac{0,243}{\ln \eta}.$$

При этом с точностью до членов порядка $\ln^{-1} \eta$

$$J_\varphi^{\text{pes}} = i \sin \varphi \frac{c p C_1}{\pi a^2 J_0(2)} = \frac{ca}{2\pi J_0(2)} \tilde{E}_{0\varphi}. \quad (16)$$

Следовательно, при резонанском значении частоты амплитуда φ -составляющей поверхностного тока максимальна и не зависит от ширины кольца, а фаза тока в первом приближении совпадает с фазой $\tilde{E}_{0\varphi}$.

Полученные фазовые соотношения для J_φ и $\tilde{E}_{0\varphi}$ (14), (16) типичны для резонанса в цепях переменного тока. Имея в виду эту анало-

гию, можно сказать, что вдали от резонансной частоты при $\omega < \frac{c}{a}$ кольцо имеет емкостный характер, а при $\omega > \frac{c}{a}$ — индуктивный.

Резонансные значения сечений рассеяния узкого кольца с точностью $O(\ln^{-1} \eta)$ при этом имеют вид

$$Q^{\text{рез}} = \frac{2\pi a^2}{J_0(2)} \approx \frac{2\pi a^2}{0,224},$$

$$\sigma_d^{\text{рез}} = \frac{4\pi a^2}{J_0^2(2)} [\cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta J_1^2(\sin \theta) + \sin^2 \varphi (J'_1(\sin \theta))^2].$$

Отметим, что резонансное увеличение рассеянной мощности при облучении проволочного кольца нормально падающей плоской волной в случае совпадения длины волны с длиной окружности кольца впервые было замечено Поклингтоном [16]. Можно показать, что при наклонном падении плоской волны или при неосевом положении диполя резонансное рассеяние будет иметь место при всех частотах $x \approx n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Заметим также, что, как видно из выражений для дифракционных характеристик, наблюдается их резонансное увеличение в нулях функции $F(x) = J_1(2x)H_0(2x) - J_0(2x)\left[H_1(2x) - \frac{2}{\pi}\right]$ при $x \gg 1$. Однако эти резонансы будут значительно слабее, чем в случае $|1 - x| \ll 1$.

5. СЛУЧАЙ ПРОДОЛЬНОГО МАГНИТНОГО (ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО) ДИПОЛЯ

Если диполь ориентирован вдоль оси кольца, анализ задачи проводится аналогично предыдущему. При этом наведенный на кольце ток имеет единственную, отличную от нуля составляющую (j_φ в случае магнитного диполя и j_z в случае электрического), благодаря чему теперь задача сводится к нахождению решения одного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В случае узкого кольца приближенные выражения для плотности поверхностного тока имеют следующий вид:

$$j_\varphi^m = -\frac{imc}{\pi a^3 \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}}} \left[\frac{C_4}{\pi \eta L(\eta)} + C_5 \frac{z}{d} \right] [1 + O(\eta^2 \ln \eta)],$$

$$j_z^p = \eta \frac{c \times p}{2\pi a^3} \sqrt{1 - \frac{4z^2}{d^2}} \left(C_6 + C_7 \frac{z}{2a} \right) [1 + O(\eta^2 \ln \eta)],$$

соответственно для магнитного диполя с величиной момента m и для электрического. Здесь введены обозначения:

$$C_4 = \frac{a^2}{2R_0^2} \left(i \times - \frac{a}{R_0} \right) \exp(i k R_0), \quad C_5 = -ia \frac{dC_4}{dz_0},$$

$$C_6 = -ia^3 \left(\frac{d^2}{dz_0^2} + k^2 \right) \frac{\exp(i k R_0)}{R_0}, \quad C_7 = -a \frac{dC_6}{dz_0},$$

$$L(\eta) = \frac{i}{\pi} \left[\ln \frac{\eta}{4} + 2 + \frac{\pi}{2} \int_0^{2x} H_0(t) dt - \pi H_1(2x) \right] + x J_0(2x) -$$

$$- J_1(2x) + x \frac{\pi}{2} [J_1(2x) H_0(2x) - J_0(2x) H_1(2x)].$$

Полный ток, текущий по кольцу в случае магнитного диполя, с точностью порядка η^2 равен

$$J_{\varphi}^m = - \frac{imc}{\pi a^2} \frac{C_4}{L(\eta)}.$$

Зависимость дифракционных характеристик от длины волны в этих задачах также имеет осциллирующий характер, который в случае магнитного диполя выражен сильнее и при $x \gg 1$ определяется функцией $F(x)$. При этом узкое кольцо значительно лучше рассеивает поле, возбуждаемое продольным магнитным диполем, чем таким же электрическим (интенсивность излучения убывает с уменьшением ширины кольца пропорционально $1n^{-2} \frac{d}{a}$ и $\left(\frac{d}{a}\right)^4$ соответственно). При малых x (больших длинах волн) диаграммы рассеяния в обоих случаях близки между собой и приближенно описываются функцией $\sin^2 \theta$. При $x \gtrsim 1$ диаграммы рассеяния существенно различны, хотя общим для них является отсутствие излучения вдоль оси диполя.

В заключение остановимся на основных физических выводах из полученных здесь результатов.

1. Система кольцо—поперечный электрический диполь в отличие от одиночного диполя и кольца с продольным диполем может излучать вдоль оси диполя.

2. Сравнивая токи, наведенные на кольце поперечным электрическим и продольными магнитным и электрическим диполями, отметим, что по порядку величины по η j_z и j_z^o одинаковы. J_{φ} и J_{φ}^m в случае $|1-x| \sim 1$ также одного порядка, $\sim 1n^{-1} \eta$. Однако при $|1-x| \ll 1$, когда длина волны близка к длине окружности кольца, в задаче с поперечным электрическим диполем наблюдается резонансное увеличение всех энергетических характеристик рассеяния. Их величины теперь имеют конечные значения и не зависят от ширины кольца.

3. Осцилляционный характер зависимости дифракционных характеристик от длины волны при $|1-x| \sim 1$ наблюдается во всех рассмотренных задачах, хотя в случае продольного электрического диполя он менее выражен. В случаях продольного магнитного и поперечного электрического диполей при $x \gg 1$ резонансы определяются корнями функции $F(x)$, но они значительно слабее, чем резонанс в системе кольцо — поперечный электрический диполь, когда $x \approx 1$.

4. Легко видеть, что из решений рассмотренных здесь задач непосредственно следуют решения задач о возбуждении теми же источниками кольца, стоящего на бесконечной идеально проводящей плоскости. Эти задачи представляют интерес для ряда приложений. В частности, можно определить влияние экранирующего кольца на диаграмму направленности горизонтального электрического диполя, расположенного над проводящей плоскостью, и показать, что в этом случае существуют направления, вдоль которых полное поле в дальней зоне представляет собой волну с круговой поляризацией.

Метод, который был использован для анализа рассмотренных здесь задач, легко обобщается на случай нескольких соосных отрезков волновода. Он может быть применен также для исследования задачи об излучении волноводных волн из произвольной системы поперечных щелей в круглом волноводе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Леонович, М. Л. Левин, ЖТФ, 14, № 9, 481 (1944).
2. П. Я. Уфимцев, Радиотехника и электроника, 7, № 2, 260 (1962).
3. R. B. Kieburz, Electromagnetic Theory and Antennas, part 1, edited by E. C. Jordon, Pergamon Press, 1963, p. 145.
4. А. Т. Фиалковский, ЖТФ, 36, № 10, 1744 (1966).
5. W. E. Williams, Proc. Camb. Philos. Soc., 52, 322 (1956).
6. К. Aoki, J. Inst. Electronics Comm. Engrs., Japan, 44, № 9, 1341 (1961).
7. П. Л. Капица, В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 29, № 10, 1188 (1959).
8. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 37, № 7, 1181 (1967).
9. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 37, № 7, 1189 (1967).
10. С. С. Као, J. Appl. Phys., 40, № 12, 4732 (1969).
11. С. С. Као, Radio Science, 5, № 3, 617 (1970).
12. J. Goldhirsh, D. L. Knerr, R. J. Doviak, R. Unks, IEEE Trans. Electromagn. Compatib., 12, № 3, 96 (1970).
13. J. Goldhirsh, D. L. Knerr, R. J. Doviak, R. Unks, IEEE Trans. Antenn Prop., 19, № 2, 279 (1971).
14. C. W. Harrison, IEEE Trans. Electromagn. Compatib., 13, № 2, 35 (1971).
15. В. Г. Сологуб, ЖВММФ, 11, № 4, 837 (1971).
16. H. C. Rocklington, Proc. Camb. Philos. Soc., 9, 324 (1897).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
25 сентября 1972 г.,
после объединения
24 апреля 1973 г.

SCATTERING OF DIPOLE FIELD BY A SHORT SECTION OF A
CIRCULAR WAVEGUIDE

S. I. Lapta. V. G. Sologub

The problem is solved of the excitation of a circular waveguide (cylindrical ring) section by an electric or magnetic dipole situated on its axis by reducing it to solving the system of Fredholm integral equations of the second kind for Fourier transformation of components of the surface current density on the ring. These equations are suitable for numerical analysis of the problem at any parameter values. In the case of a narrow ring the simple approximate expressions for the density of the surface current and the field in a far zone are obtained as well as on error estimation. The basic diffraction characteristics of the scattered field are investigated in detail.

УДК 538.574

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ НАД ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

В. Д. Ерёмка, А. Я. Кириченко, В. Ф. Процай

Описаны результаты экспериментального исследования излучения электронных сгустков над открытой периодической структурой типа «гребенка». Исследовано возбуждение волн, отрывающихся от «гребенки», при глубине ее щелевого резонатора порядка четверти длины волны в свободном пространстве.

При наклонном падении плоской волны на бесконечную отражающую периодическую структуру образуется несколько дифракционных лучей, каждый из которых соответствует пространственной гармонике с фазовой постоянной вдоль структуры

$$\beta_n = \beta_0 - \frac{2\pi}{D} n, \quad (1)$$

где D — период структуры, β_0 — фазовая постоянная волны нулевой пространственной гармоники (в данном случае — падающей волны) поля структуры, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

На основе принципа взаимности можно утверждать, что возбуждение любым способом одной из пространственных гармоник поля такой структуры приведет к излучению энергии в основном дифракционном лепестке. Определенный интерес в этом плане представляет исследование излучающихся в пространство волн, полученных с помощью периодической структуры, непосредственно возбуждаемой предварительно сгруппированным электронным потоком. Этот вопрос обстоятельно проанализирован теоретически в ряде работ [1—7]. Однако немногочисленные экспериментальные работы [6—8] содержат противоречивые результаты. Это относится, в частности, к выводам работ [6, 8], касающимся излучения электронного сгустка над периодической структурой типа «гребенка» с глубиной щелевого резонатора $h > 0,1 \lambda$ (λ — длина генерируемых волн в свободном пространстве).

В настоящей работе представлены результаты исследования излучения электромагнитной энергии электронными сгустками, пролетающими над периодической структурой типа «гребенка» с глубиной щелевого резонатора $h > 0,1 \lambda$.

1. УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Модулированный по плотности электронный поток может эффективно возбуждать в открытой периодической структуре электромагнитные поля двух типов:

1) собственные волны структуры, содержащие только медленные пространственные гармоники, имеющие поверхностный характер и слабо излучающие с концов структуры в окружающее пространство;

2) квазисобственные волны структуры, имеющие быстрые (с фазовой скоростью, превышающей скорость света) пространственные гармоники, излучающие распределенным образом со всей поверхности структуры в определенных направлениях [5, 11]. Волны последнего типа и исследуются в настоящей работе.

Согласно теореме Флока квазисобственная волна в периодической структуре состоит из бесконечного набора пространственных гармоник, постоянные распространения которых связаны соотношением (1). Следует ожидать, что наиболее эффективно электронный поток будет взаимодействовать с пространственной гармоникой поля малого порядка. Исходя из этого, скорость электронного потока в эксперименте выбиралась примерно равной скорости (-1)-й пространственной гармоники. Так как соблюдалось условие $\lambda > 2D^*$, то из набора пространственных гармоник резонансно возбуждаемой квазисобственной волны лишь одна, нулевая, имела фазовую скорость больше, чем скорость света в свободном пространстве. В этом случае соотношение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{c}{v} = \cos \theta - \frac{\lambda}{D}, \quad (2)$$

где c — скорость света, v — фазовая скорость (-1)-й пространственной гармоники поля, излучаемого пучком, θ — угол наклона волнового вектора основной гармоники к направлению распространения электронного потока.

Отсюда следует, что направление излучения зависит как от длины излучаемой волны и периода структуры, так и от фазовой скорости пространственной гармоники поля, распространяющейся над периодической структурой.

Эксперимент был проведен в 3-сантиметровом диапазоне. Электронные сгустки формировались путем модуляции электронного потока СВЧ полем тороидального резонатора 3-сантиметрового диапазона. В отличие от экспериментов, описанных в работах [6, 8], взаимодействие электронного потока с полем периодической структуры осуществлялось на основной временной гармонике тока. Период структуры был выбран равным $D = 2,6$ мм, т. е. такой же примерно, как в работе [6]. Однако глубина щелевого резонатора структуры была взята большой, $0,1 \lambda < h = 7,5$ мм. Исследования проведены на длине волны, лежащей вне полосы пропускания «гребенки». Границная длина собственной поверхностной волны в первой полосе прозрачности определена с помощью соотношения $\lambda_{rp}/2 = 2h + d$ [9] и равна 3,2 см (d — ширина щелевого резонатора «гребенки»). Такой выбор условий исключает возможность передачи энергии модулированного потока собственной волне периодической структуры, что было характерным для эксперимента [6] и для эксперимента [8], проведенного в 8-миллиметровом диапазоне.

На рис. 1 приведены расчетные дисперсионные кривые для нулевой и (-1)-й пространственных гармоник поля используемой периодической структуры и показана расчетная область возбуждения быстрых отрывающихся волн на длине волны 3,08 см [9]. На том же рисунке точками нанесена экспериментально измеренная дисперсия, снятая в режиме самовозбуждения периодической структуры на уровне малых рабочих токов.

Исследование характеристик излучения «гребенки», возбуждаемой сгруппированным электронным потоком, производилось с помощью

* Аналогичные условия важны также в антенной технике при формировании однолепестковых диаграмм направленности [10].

рупорной антенны размером $8 \times 10 \text{ см}^2$, расположенной на расстоянии 90 см от структуры. Исходя из соотношения $r_{\min} = \frac{L_1 + L_2}{\lambda} - \frac{\lambda}{16}$, можно заключить, что, в отличие от эксперимента, описанного в работе [6], измерения проводились в дальней зоне ($L_1 = 6,5 \text{ см}$ — длина периодической структуры, $L_2 = 8 \text{ см}$ — размер рупора).

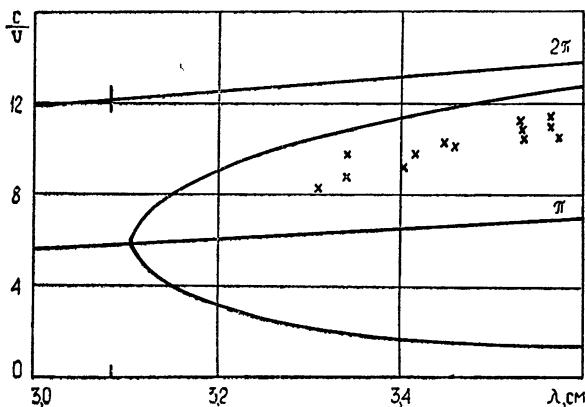


Рис. 1. Расчетная дисперсионная характеристика исследуемой структуры и данные горячих измерений.

Полюсные наконечники электромагнита, использованного для фокусировки электронного потока прибора, ограничивали возможность проведения исследований при углах излучения, существенно отличающихся от угла $\theta \approx 90^\circ$. Эта особенность эксперимента могла влиять также на количественные результаты.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА И ИХ АНАЛИЗ

При выполнении условий генерации в периодической структуре, возбуждаемой немодулированным электронным потоком, существовала поверхностная волна поля без потерь на излучение. При этом волна тока была «синхронна» с (-1) -й пространственной гармоникой электромагнитной волны. Вывод энергии этой волны осуществлялся путем излучения в свободное пространство при трансформации ее на неоднородностях ограниченной системы. На рис. 2 для примера приведено несколько диаграмм излучения медленных волн на длинах $\lambda = 3,52; 3,71; 3,83 \text{ см}$. При этом зависимость излучающейся мощности от угла носит изрезанный нерегулярный характер, по существу диаграмма направленности не формируется. Естественно предположить, что при возбуждении периодической структуры в таком режиме предварительно сгруппированными электронными сгустками диаграмма направленности ее излучения будет иметь аналогичный характер.

При возбуждении квазисобственной волны предварительно модулированным электронным потоком зависимость излучаемой мощности от ускоряющего напряжения имеет один четко выраженный максимум (рис. 3). В опыте можно было фиксировать и второй максимум при более высоком напряжении, связанный, как отмечалось в [6], с переотражениями дифракционного лепестка на плоскостях, ограничивающих «гребенку» по торцам. Необходимо отметить, что нами не обнаружены более мелкие максимумы, четко проявляющиеся в работе [6] (см. рис. 3 в [6]). Область излучения ограничивалась величиной рабочих

напряжений 1650—2200 в, что полностью соответствует области дифракционного излучения, определяемой соотношением (2) и показанной на рис. 1.

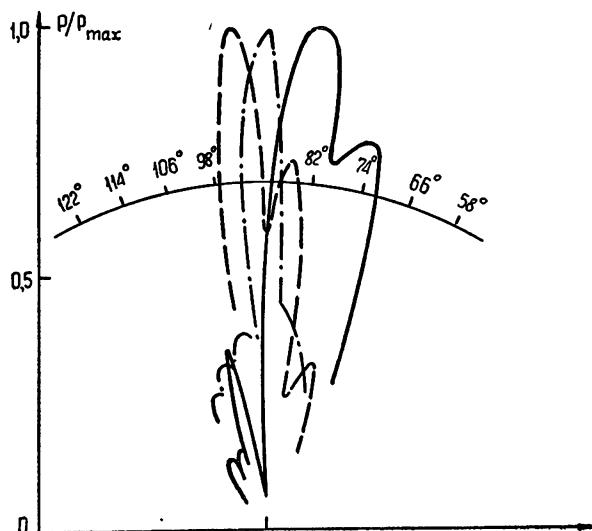


Рис. 2. Диаграммы излучения медленных волн ($\lambda = 3,71 \text{ см}$, $\lambda = 3,53 \text{ см}$, $\lambda = 3,63 \text{ см}$).

Наличие дополнительных максимумов в работе [6] можно, вероятно, объяснить передачей энергии модулированного потока медленной волне, а именно: при более низком напряжении (рис. 3 в [6], напряжение 1450 в) — (+1)-й гармонике поля; при более высоком напряжении (рис. 3 в [6], напряжение 2550 в) — (−1)-й пространственной гармонике поверхности волны. Так как при этом нулевая гармоника являлась также медленной, излучение в свободное пространство происходило из-за переотражений на границах структуры. Это расширяло область передачи энергии модулированного потока по напряжению и могло приводить к тому, что при большой глубине резонаторов структуры ($h > 0,2\lambda$) энергия потока передавалась более эффективно (−1)-й пространственной гармонике собственной поверхности волны. Естественно, при таком взаимодействии основной максимум излучения наблюдался при более высоком напряжении. При этом нарушалось соответствие результатов эксперимента выводам теории, в частности соотношению (2), и не наблюдалось качания диаграммы направленности, на что и указано в работе [6]. Однако из этого нельзя делать вывод о том, что невозможно качание диаграммы направленности излучения «гребенки», возбуждаемой предварительно модулированным потоком, при большой глубине ее резонаторов.

Исключение в нашем эксперименте условий возбуждения чисто поверхностной волны при $\lambda = 3,08 \text{ см}$ позволило наблюдать качание диаграммы направленности излучения «гребенки» с $h > 0,2\lambda$ при изменении скорости электронного потока. На рис. 4 приведены диаграммы направленности излучения предварительно промодулированного электронного потока над «гребенкой» для нескольких значений ускоряющего напряжения (1800; 1900; 2000 в). Увеличение напряжения приводит к росту угла излучения, что качественно соответствует соотношению (2), хотя полного количественного соответствия не наблюдается. Экспериментально наблюдаемые углы излучения несколько меньше, чем следует из (2). Формировалась однолепестковая диаграмма направлен-

ности излучения с шириной по уровню половинной мощности $30 \div 40$ градусов, что неизлохо соответствует известному соотношению $\Delta\theta_{0,5P} \approx \lambda/L_1$.

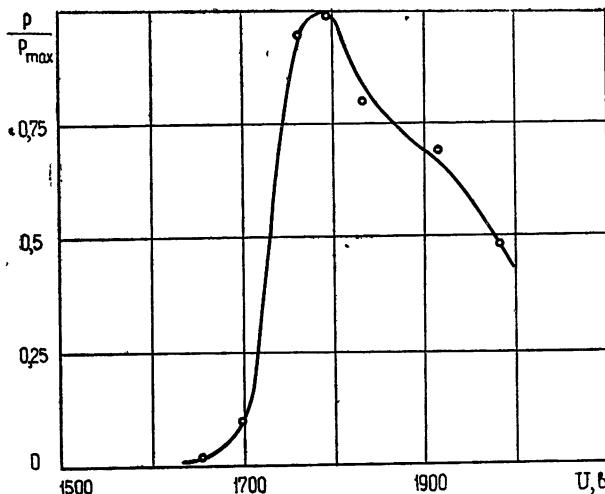


Рис. 3. Зависимость излучаемой мощности в направлении, перпендикулярном к системе, от ускоряющего напряжения.

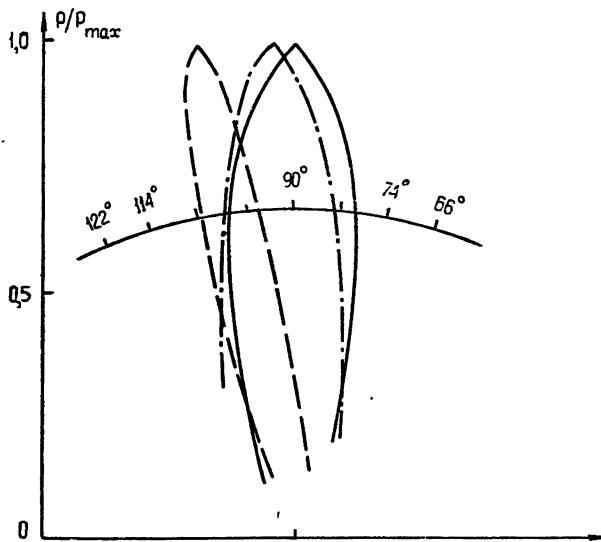


Рис. 4. Диаграмма излучения быстрых волн для нескольких значений ускоряющего напряжения ($— U = 1800$ в, $— \cdots U = 1900$ в, $— - - U = 2000$ в).

Если периодическую структуру поместить в призматический резонатор, то условие возбуждения его быстрой нулевой пространственной гармоникой, отрывающейся от поверхности структуры, можно представить в виде

$$\frac{c}{v} = \frac{\lambda}{D} \pm \frac{\lambda}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (3)$$

где a и b — размеры поперечного сечения резонатора. Как показано в [8], призматический резонатор нетрудно возбудить на нескольких типах колебаний, например, H_{10p} , H_{21p} , H_{01p} . Каждому типу волн соответствует свой угол излучения. Эффективность возбуждения каждого типа волн зависит от скорости электронного потока v_e . Так как в [8] глубина щелевого резонатора $h > 0,2\lambda$, то, используя представление о парциальных волнах в резонаторе, приходим к выводу о качании луча излучения в зависимости от скорости пучка. Таким образом, в [8] косвенно была показана возможность управления направлением дифракционного излучения путем изменения скорости потока. Эта возможность подтверждается результатами настоящей работы.

Макет прибора, использованный в эксперименте, состоял из двух каскадов с разнотипными электродинамическими системами и конструктивно подобен твистронному усилителю. В проведенном эксперименте наблюдалось также некоторое усиление мощности сигнала, подаваемой на вход модулирующего каскада. Однако исследование явления усиления на дифракционном излучении представляет самостоятельный интерес и поэтому не рассматривается в настоящей работе.

Авторы весьма признательны члену-корреспонденту АН УССР В. П. Шестопалову за внимание к работе, В. И. Бутову за помощь при изготовлении действующего макета прибора.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника, 10, № 7, 1233 (1965).
2. О. А. Третьяков, Радиотехника и электроника, 10, № 7, 1243 (1965).
3. О. А. Третьяков, Э. И. Черняков, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 36, № 1, 33 (1966).
4. В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 4, 588 (1968).
5. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
6. В. Н. Парыгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 139 (1958).
7. Y. A. Bradshaw, Proc. Symp. on Millimeter Waves, N. Y., 9, 1959, p. 223.
8. В. Д. Ерёмка, А. Я. Кирichenko, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, 12, 33 (1971).
9. А. С. Завьялов, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 5, № 5, 568 (1962).
10. К. Уолтер, Антенны бегущей волны, изд. Энергия, М., 1970.
11. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 июля 1972 г.

TOWARD ELECTRON CLUSTER RADIATION ABOVE THE PERIODIC STRUCTURE

V. D. Yerjmoka, A. Ya. Kirichenko, V. F. Protsay

The results of an experimental study of radiation from clusters above the open periodic comb-structure are reported. The excitation of waves escaping from the comb when the resonator slot is about a quarter of the wavelength in a free space investigated.

УДК 621.3.032.269.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АДИАБАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУШЕК МЦР

Е. Г. Авдошин, А. Л. Гольденберг

Для изучения потоков электронов, движущихся по винтовым траекториям, использован анализатор, основанный на методе торможения. Показано, что в статических полях с характерным размером неоднородности, существенно превышающим шаг и радиус электронной траектории, относительный разброс поперечных скоростей электронов в соответствии с дрейфовой теорией является адиабатическим инвариантом. Показана возможность минимизации разброса скоростей электронов, обусловленного неоднородностью краевого поля катода, путем подбора режима работы инжектора. Экспериментально подтверждена и уточнена теоретическая оценка зависимости разброса скоростей электронов от тока пучка.

Адиабатические электронные пушки [1] используются в мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) для создания в однородном магнитном поле рабочего пространства трубчатых электронных потоков. Если плотность пространственного заряда электронного потока в рабочем пространстве МЦР достаточно мала, то можно считать, что все электроны движутся по винтовым траекториям и обладают одинаковой кинетической энергией. Качество такого пучка можно характеризовать одним параметром — относительным разбросом вращательных скоростей, который для потока электронов, движущихся в плавно меняющихся электрических и магнитных полях, является адиабатическим инвариантом [2]. Уменьшение разброса вращательных и, следовательно, поступательных скоростей позволяет повысить КПД прибора, в частности, благодаря тому, что при этом верхний предел отношения энергии вращения к энергии поступательного движения электронов увеличивается.

Для экспериментального определения разброса вращательных скоростей электронов винтовых пучков можно воспользоваться методом торможения электронов электрическим полем*, который позволяет найти распределение поступательных скоростей, а затем, в силу равенства полных скоростей электронов, найти их осцилляторные скорости. Далее следует описание анализатора, основанного на методе торможения, и выполненных с этим анализатором экспериментов по изучению влияния неоднородности полей адиабатической пушки на разброс скоростей электронов.

1. УСТРОЙСТВО И ПРИНЦИП РАБОТЫ АНАЛИЗАТОРА

Анализатор** и исследуемая электронная пушка изображены на рис. 1. Торможение электронов происходит путем подачи на сетку

* В тех случаях, когда однозначная связь между осцилляторными и поступательными скоростями не имеет места, разброс скоростей можно определить путем непосредственного наблюдения на люминесцирующем экране следов электронов, прошедших сквозь малое отверстие диафрагмы [3], или путем торможения электронов комбинированным электрическим и нарастающим магнитным полем [4].

** Описываемый анализатор был предложен в докладе А. Л. Гольденberга, Т. Б. Панкратовой, М. И. Петелина, В. А. Флягина на V Межвузовской конференции по электронике СВЧ в 1966 г.

отрицательного (относительно корпуса лампы) напряжения. Электроны, обладающие поступательной скоростью, достаточной для преодоления тормозящего поля сетки, создают ток коллектора, по зависимости которого от напряжения сетки определяется распределение скоростей электронов. Следует, однако, иметь в виду, что электроны, отраженные тормозящим полем, могут затем совершать многократные колебания между катодом и сеткой, поскольку попадание электрона на катод, возможное только при вполне определенной фазе вращения, маловероятно.

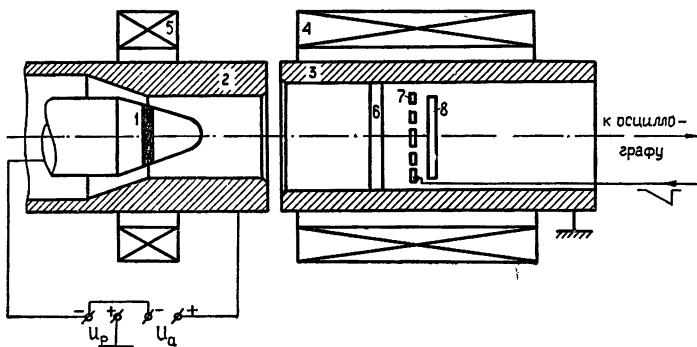


Рис. 1. Схема анализатора:
1—катод, 2—анод, 3—корпус, 4—основной соленоид, 5—вспомогательный соленоид, 6—диафрагма с секторным вырезом, 7—сетка, 8—коллектор.

Если не обеспечить быстрого вывода отраженных электронов, то из-за накопления их в пространстве между катодом и сеткой распределение скоростей электронов может исказиться. Для отбора отраженных электронов перед сеткой помещается диафрагма с одним или несколькими секторными вырезами. Диафрагма пропускает в анализатор лишь часть пучка, но зато позволяет вывести из потока отраженные электроны благодаря тому, что они смещаются по азимуту при движении в скрещенных полях инжектора пушки.

В описываемых далее экспериментах изменение тормозящего напряжения сетки анализатора производилось с помощью генератора пилообразных импульсов. Катод адиабатической пушки работал в режиме температурного ограничения тока эмиссии при всех измерениях, за исключением экспериментов по изучению влияния пространственного заряда в инжекторе на разброс скоростей электронов. Поскольку электроды анализатора не могли рассеивать больших мощностей, измерения проводились с пучками, средняя мощность которых не превышала 50 вт*.

Для относительного разброса осцилляторных скоростей электронов δv_{\perp} было принято следующее определение:

$$\delta v_{\perp} = \frac{U_{c(0.9)} - U_{c(0.1)}}{2 \left[U_p - \frac{U_{c(0.9)} + U_{c(0.1)}}{2} \right]} . \quad (1)$$

Здесь U_p — полное напряжение пучка, $U_{c(0.1)}$ и $U_{c(0.9)}$ — напряжения сетки, при которых ток коллектора равен соответственно 0,1 и 0,9 максимальной величины.

* Результаты таких измерений могут быть применены к пушкам МЦР, работающим в режимах с большей мощностью, путем использования соотношений подобия [5].

2. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЕЙ В ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ ПУШКИ НА РАЗБРОС СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

В переходной области между инжектором и участком однородного магнитного поля движение электронов происходит в неоднородных полях—электрическом (между анодом и корпусом лампы) и нарастающим магнитном. Влияние неоднородностей этих полей на качество пучка может быть значительным, если их характерные размеры недостаточно велики по сравнению с радиусом электронной орбиты и смещением электрона за период вращения.

Эффект влияния неоднородности поля в ускоряющем промежутке на разброс скоростей электронов можно проиллюстрировать на примере экспериментов, проведенных с пушкой, имевшей следующие размеры (обозначения приведены на рис. 2).

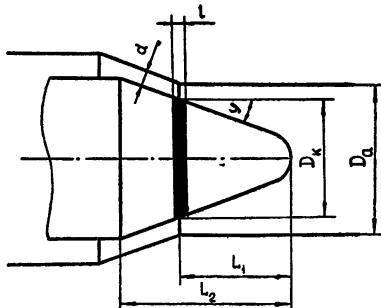


Рис. 2. Обозначения основных размеров адиабатической электронной пушки.

D_k , мм	D_a , мм	l , мм	L_1 , мм	L_2 , мм	d , мм	φ
20	23,3	4	20	30	1,65	5°30'

Пушка работала в режиме с анодным напряжением $U_a = 700$ в и напряженностями магнитных полей в инжекторе $H_k = 250$ э и на однородном участке $H_0 = 1000$ э. Осциллограммы коллекторного тока, полученные при различных ускоряющих напряжениях, показаны на рис. 3. Горизонтальная развертка осциллографа осуществлялась напряжением сетки, которое в паузах между отрицательными пилообразными импульсами имело небольшие положительные значения. Поэтому, кроме спада тока, обусловленного увеличением тормозящего напряжения сетки (в правых частях осциллограмм), на каждом снимке рис. 3 заметно резкое уменьшение тока из-за вторичной эмиссии с коллектора, возникавшей при положительном напряжении на сетке. При небольшом увеличении напряжения корпуса лампы U_p (рис. 3 а и 3 б) крутизна спада коллекторного тока почти не менялась, а при дальнейшем увеличении ускоряющего напряжения (рис. 3 в) кривая торможения становилась более пологой, т. е. относительный разброс осцилляторных скоростей увеличивался. В последнем случае, как показали оценки, смещение электрона за период вращения было близко к характерному размеру поля линзы или даже превосходило его, что способствовало увеличению разброса скоростей.

Изучение влияния распределения магнитного поля на разброс скоростей электронов проводилось с пушкой, имевшей размеры

D_k , мм	D_a , мм	l , мм	L_1 , мм	L_2 , мм	d , мм	φ
20	26	1	17	27	3,0	17°

Анодное напряжение пушки было близко к критическому напряжению, при котором электроны касаются поверхности анода. Изменение распределения магнитного поля и одновременно коэффициента перемагничивания пучка $\alpha = H_o/H_k$ производилось путем изменения магнитного поля в анализаторе при почти постоянном поле H_k на катоде. В этих экспериментах, результаты которых приведены в табл. 1, изменения распределения магнитного поля в переходной области не приводили к сколько-нибудь значительным изменениям разброса скоростей электронов, что

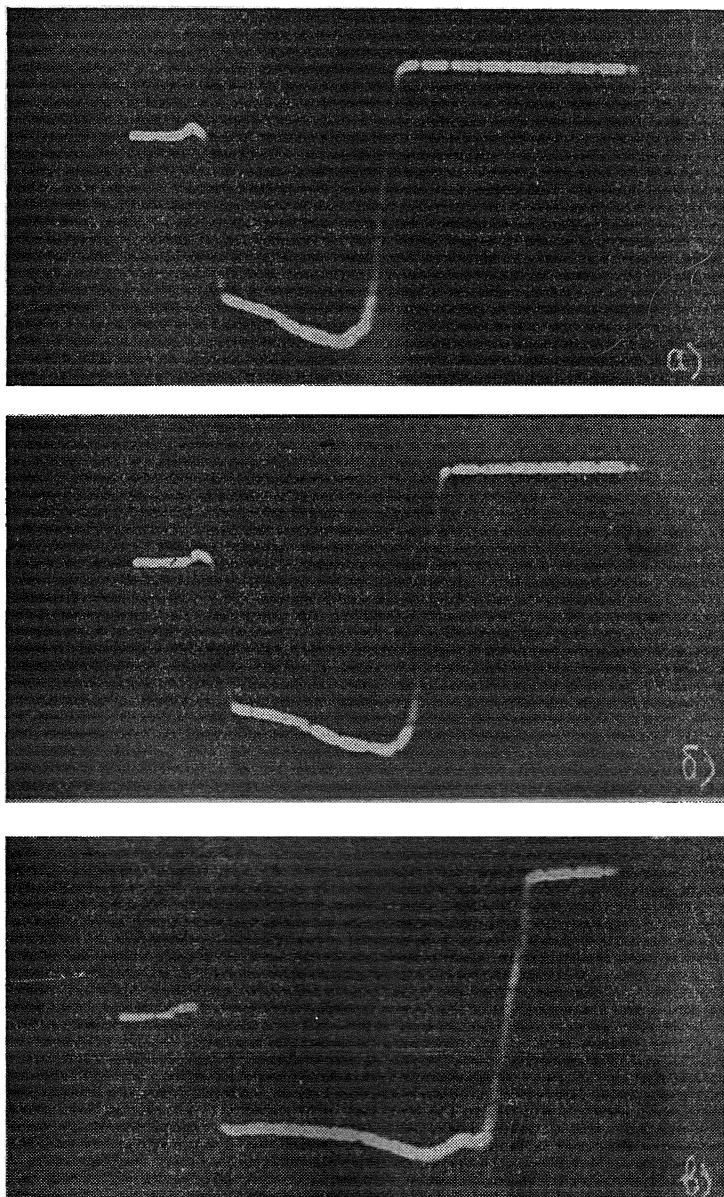


Рис. 3. Осциллографмы тока коллектора:
а) $U_p=600$ в, $\delta v_{\perp}=25\%$; б) $U_p=700$ в,
 $\delta v_{\perp}=27\%$; в) $U_p=1000$ в, $\delta v_{\perp}=37\%$.

Таблица 1

<i>n</i>	<i>a</i>	<i>U_a, в</i>	<i>U_p, в</i>	$\delta v_{\perp}, \%$
1	4	785	800	12
2	4	785	1000	12
3	8	785	1700	11
4	8	785	1900	10
5	12	700	2000	11
6	12	700	2400	10

и следовало ожидать, поскольку существенно нарушить плавность изменения магнитного поля в исследуемой электронно-оптической системе было практически невозможно. Характерный размер неоднородности поля электростатической линзы также был достаточно велик, и при небольших изменениях ускоряющего напряжения, как видно из табл. 1, качество электронного пучка почти не изменялось.

Таким образом, эксперименты подтвердили, что при движении электронов в полях, размер неоднородности которых значительно больше, чем радиус вращения электрона и его смещения за период вращения, относительный разброс осцилляторных скоростей электронов, как и следует из адиабатической теории, остаётся неизменным.

Во всех последующих экспериментах условия плавности изменения полей в переходной области были выполнены, что подтверждалось контрольными измерениями.

3. ВЛИЯНИЕ КРАЕВОГО ПОЛЯ КАТОДА НА РАЗБРОС ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

В электронной пушке, имеющей радиус катода порядка радиуса вращения электрона в инжекторе, размеры неоднородности краевого поля катода заведомо невелики и, следовательно, условия адиабатичности не могут быть выполнены достаточно строго. Однако и в этом случае подбор формы электродов, инжектора позволяет, в принципе, получить пучок с малым разбросом скоростей электронов. Очевидно, что из многих вариантов решения этой задачи целесообразно выбирать такие, которые обеспечивают наименьшую критичность разброса скоростей по отношению к изменениям режима работы пушки. С этой точки зрения предпочтительны электронно-оптические системы, в которых электроны проходят в краевом поле катода с примерно одинаковыми фазами вращения по траекториям, наиболее удаленным от конца катода.

Эксперимент, показывающий возможность минимизации разброса скоростей электронов при сильно неоднородном краевом поле катода, проводился с двумя пушками, в которых использовались одинаковые катоды со следующими размерами:

<i>D_k, мм</i>	<i>l, мм</i>	<i>L₁, мм</i>	<i>L₂, мм</i>	φ
20	1	17	27	17°

и аноды разных диаметров D_a — 26 и 42 мм.

Результаты этих измерений представлены на рис. 4 в виде зависимостей разброса скоростей δv_{\perp} от величины

$$r_{\perp k} (\text{м.м.}) = \frac{17 \sqrt{U_a(\vartheta)}}{H_k (\text{э})},$$

равной радиусу вращения электрона в плоском магнетроне и приближенно характеризующей эту величину в аксиально-симметричной пушке; нетрудно показать, что шаг электронной траектории в инжекторе примерно пропорционален величине $r_{\perp k}$. Из рис. 4 видно, что при равных поперечных размерах электронной траектории разброс скоростей в обеих пушках был почти одинаковым, откуда следует, что качество пучка не зависело существенно от формы анода. При увеличении параметра $r_{\perp k}$ в пушке с большим расстоянием между анодом и катодом разброс δv_{\perp} сначала уменьшался, а затем снова возрастал. Приближенные оценки показывают, что минимум δv_{\perp} отмечался в режиме, в котором электроны проходили на большом удалении от конца катода — в области, где краевое поле катода менялось относительно плавно.

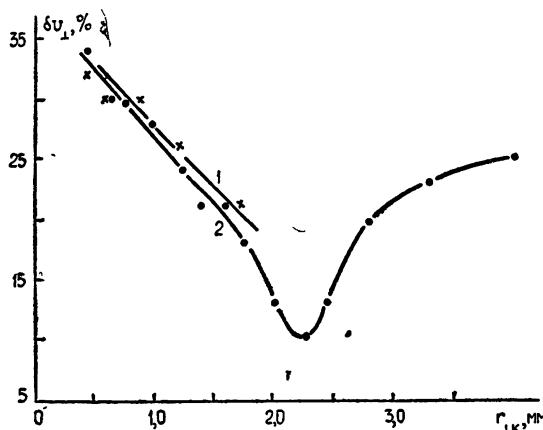


Рис. 4. Зависимости разброса осцилляторных скоростей электронов от радиуса вращения электрона в инжекторе для пушек, отличающихся величиной зазора d между анодом и катодом; 1— $d=3.5$ мм; 2— $d=8$ мм.

4. ИЗМЕНЕНИЕ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ ПРИ ПОВЫШЕНИИ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В ИНЖЕКТОРФ

Распределение скоростей электронов в адиабатической пушке может изменяться при увеличении тока пучка из-за искажения конфигурации электрического поля полем электронного потока. В наибольшей степени на движение электронов влияет пространственный заряд электронов в инжекторе, где плотность электронного потока имеет наибольшую величину. В приближении малого пространственного заряда изменение относительного разброса скоростей $\delta v_{\perp p}$, обусловленное зарядом электронов, по порядку величины равно [2]

$$\delta v_{\perp p} \approx \frac{10 J(a) H_0 (\text{кэ})}{R_k (\text{см}) E_k^2 (\text{кв/см}) \alpha}, \quad (2)$$

где E_k — напряженность электрического поля вблизи эмиттера.

Эксперименты по изучению влияния пространственного заряда электронов на качество электронного пучка проводились с пушкой, имевшей следующие размеры.

D_K , мм	D_a , мм	l , мм	L_1 , мм	L_2 , мм	d , мм	φ
20	26	1	17	27	30	17°

В этой пушке использовались два катода с различной шероховатостью эмиттирующей поверхности и, соответственно, с различным разбросом скоростей электронов при малых токах эмиссии [6]. Зависимости относительного разброса осцилляторных скоростей от электронного тока, как видно из рис. 5, для обоих катодов имели вид прямых с одинаковым наклоном. На основании результатов этих измерений соотношение (2) для $\delta v_{\perp p}$ может быть написано в виде

$$\delta v_{\perp p} \approx \frac{22 J(a) H_0(\text{кэ})}{R_K(\text{см}) E_K^2(\text{кв/см}) \alpha}. \quad (2a)$$

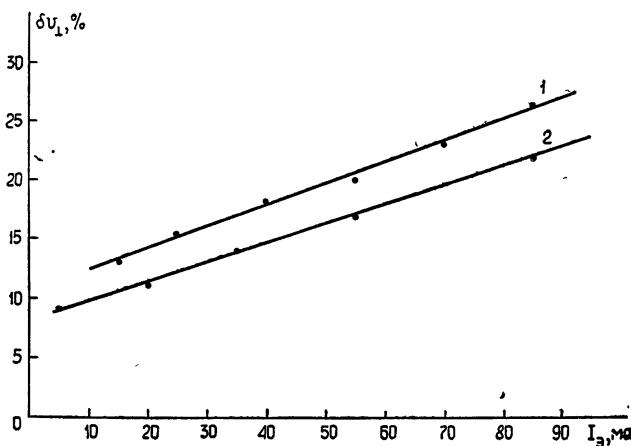


Рис. 5. Зависимости разброса осцилляторных скоростей электронов от тока эмиссии; 1—синтерированный катод; 2—прессованный катод.

Таким образом, непосредственные измерения и теоретические оценки приращения разброса скоростей, обусловленного зарядом электронного потока в инжекторе, дали значения, совпадающие по порядку величины.

Необходимо отметить, что в этих экспериментах предельная плотность пространственного заряда в инжекторе не была достигнута, так как при повышении тока пучка увеличивалась плотность пространственного заряда электронного потока в анализаторе, из-за чего точность измерения электронных скоростей ухудшалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Гольденберг, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Авт свидетельство № 226044 с приоритетом от 16 июня 1967 г.
2. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 16, № 1, 141 (1973).
3. В. А. Прус, М. В. Дереновский, К. Я. Лиждвой, В. П. Тараненко, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, № 10, 66 (1970).

4. Е. Г. Шустин, И. Ф. Харченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 12, 1800 (1970).
5. Дж. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
6. Ш. Е. Цимлинг, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 8, 1247 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 октября 1972 г.

EXPERIMENTAL STUDY OF ADIABATIC ELECTRON MCR GUNS

E. G. Avdoshin, A. L. Gol'denberg

An analyser based on the deceleration method is used to study the electron beams moving along screw trajectories. It is shown that in static fields with the characteristic size of an inhomogeneity exceeding essentially a step and radius of the electron trajectory a relative dispersion of transverse electron velocities in accord with the drift theory is an adiabatic invariant. The possibility is shown to minimize the electron velocity dispersion due to the cathode edge field inhomogeneity by choosing the regime of injector operation. A theoretical estimation of the dependence of the electron velocity dispersion on the beam current is experimentally supported and refined.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.574

ОБ ОДНОМ ВИДЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

M. B. Тинин

Одним из механизмов, привлекаемых к объяснению дальнего распространения коротких радиоволн, является дальнее распространение боковой волны в ионосфере [1–3]. Так как при распространении радиоволны на большие расстояния сферичность ионосферы может оказаться существенной, то представляет интерес исследование той части поля, которая в случае сферически слоистой ионосферы эквивалентна боковой волне в плоской модели в том смысле, что при увеличении радиуса кривизны соответствующие формулы переходят в формулы для боковой волны.

Рассмотрим поле с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ элементарного радиального диполя, расположенного в точке $r = b$, $\theta = 0$ в волноводе, образованном внутренней хорошо проводящей сферой (Землей) и сферической однородной изотропной ионосферой ($r \geq d$) (см. рис. 1) с волновым числом k_l .

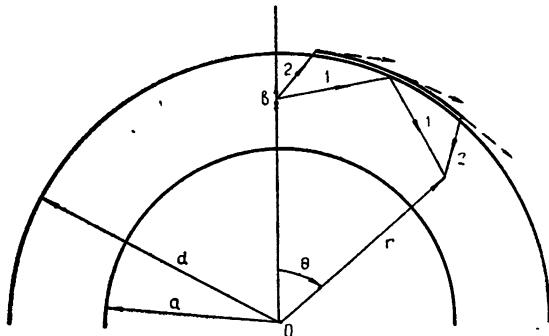


Рис. 1.

Используя известную [4, 5] процедуру построения решения подобных задач, можно получить представление решения в виде ряда «скакков»—интегралов, суммирующих вклад всех спиральных волн, распространяющихся в волноводе Земля—ионосфера. Имея в виду исследование дифракционных эффектов, обусловленных отражением первичной сферической волны от ионосферы, вычислим методом наибыстрейшего спуска с учетом соответствующего обхода контуром наибыстрейшего спуска полюсов подынтегрального выражения тот член этого ряда, который содержит волны, отразившиеся только от ионосферы. Нетрудно показать, что вклад седловой точки при этом определяет геометрооптическую отраженную волну, а вклад вычетов — дифракционную часть потенциала Герца $\Pi_1^{(2)}$:

$$\Pi_1^{(2)} = \frac{P_0}{\epsilon b^2} \sqrt{\frac{d}{\sin \theta 2 \pi k_l [1 - (k_l/k)^2]}} \sum_{n=0}^M \frac{\exp \left(i \varphi (\nu_n) + i \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{[1 - (\nu_n/kr)^2] [1 - (\nu_n/kb)^2]}}, \quad (1)$$

где P_0 — дипольный момент источника, k — волновое число свободного пространства ($k > k_l$), ϵ — диэлектрическая проницаемость свободного пространства (используется система СИ).

$$\varphi(v) = v\theta + \int_{kb}^{kd} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{z}\right)^2} dz + \int_{kr}^{kd} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{z}\right)^2} dz, \quad (2)$$

полюса v_n определяются из дисперсионного уравнения

$$k \xi_{v_n-1/2}^{(2)}(kd) \xi_{v_n-1/2}^{(1)'}(k_l d) - k_l \xi_{v_n-1/2}^{(1)}(k_l d) \xi_{v_n-1/2}^{(2)'}(kd) = 0 \quad (3)$$

(функции $\xi_v^{(1)(2)}(z)$ связаны с функциями Ханкеля соотношением $\xi_v^{(1)(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \times H_{v+1/2}^{(1)(2)}(z)$).

Для полюсов, расположенных в окрестности $k_l d$, можно получить следующее приближенное решение уравнения (3).

$$v_n \approx k_l d + e^{\frac{i\pi}{3}} \left(\frac{k_l d}{2} \right)^{1/3} \left[\frac{3}{2} \pi \left(n - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}. \quad (4)$$

Волны, описываемые выражением (1), как видно из дисперсионного уравнения (3), непосредственно связаны с дифракционными лучами Келлера [6], вдоль которых (пунктирные стрелки на рис. 1) происходит отток энергии от волны, распространяющейся во внешней среде вдоль границы раздела $r = d$.

Ряд (1) при достаточном удалении вдоль слоя сходится хорошо, но с уменьшением расстояния $L = d \theta$ либо с увеличением радиуса кривизны d при фиксированном расстоянии сходимость этого ряда ухудшается, и он становится неудобным для исследования дифракционной части поля. В этом случае замена суммы (1) интегралом с последующим его асимптотическим вычислением дает

$$\Pi_1^{(2)} = \frac{i P_0 \exp(i l \varphi(k_l d))}{2 \pi \epsilon k_l b^2 \sqrt{\rho^3 \sin \theta \left[1 - \left(\frac{k_l}{k} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{k_l d}{kr} \right)^2 \right]^{1/4} \left[1 - \left(\frac{k_l d}{kb} \right)^2 \right]^{1/4}}}, \quad (5)$$

где

$$\rho = \theta + \arccos \frac{k_l d}{kr} + \arccos \frac{k_l d}{kb} - 2 \arccos \frac{k_l}{k}. \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что полученная формула для боковой волны (5) на вогнутой поверхности с увеличением радиуса кривизны d переходит в формулу для боковой волны на плоской границе раздела [7].

Установив связь между боковой волной (5) и волнами типа (1), обсудим возможность дальнего ионосферного распространения радиоволн посредством боковой волны. Как видно из рассмотренного, дифракционная часть поля, на небольших расстояниях имеющая вид боковой волны (5) (соответствующий ей луч обозначен на рис. 1 цифрой 2), на большом удалении от источника вдоль слоя представляет собой сумму экспоненциально затухающих волн (1). Следовательно, даже в отсутствие поглощения при $k_l d \gg 1$ дифракционная часть поля вдали от источника экспоненциально мала для рассмотренной модели (сферически слонистая кусочно-однородная среда) и не может быть привлечена, как было сделано в работах [1-3], к интерпретации дальнего распространения радиоволн.

Нужно, однако, заметить, что в более сложной модели, учитывающей неоднородный характер ионосферы, возможны ситуации, когда отрицательный градиент диэлектрической проницаемости увеличивает эффективный радиус кривизны [8], что, как видно из предыдущего, уменьшает дифракционное ослабление направляемых слоем волны. Исследование свойств волн, направляемых такими участками квазикритической рефракции, выходит за рамки данного сообщения и является предметом последующих работ автора.

Автор благодарен Г. И. Макарову и В. В. Новикову за обсуждение результатов работы и ценные замечания и признателен В. М. Полякову за большое внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Schmidt, Zs. techn. Phys., 17, № 11, 443 (1936).
2. H. A. Hess, Proc. IRE, 36, 981 (1948).
3. N. C. Gerson, Radio Wave Absorption in the Ionosphere, Pergamon Press, N. Y., 1962, p. 113.
4. H. Breit, Terr. Radio Waves, N. Y., 1949.

5. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, сб. I Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, Москва—Харьков, 1968, стр. 242.
6. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, Пять лекций по асимптотическим методам в задачах дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, Л., 1972.
7. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
8. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
29 января 1973 г.

УДК 621.396.677

ОПТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА В НЕКОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАДИОГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ

Э. М. Зуйкова, Л. А. Пасманик, В. И. Турчин

В [1] предложен весьма перспективный метод измерения диаграммы направленности антенны по СВЧ голограмме ее поля в зоне Френеля, основанный на том, что по содержащейся в голограмме амплитудно-фазовой информации о поле в зоне Френеля, согласно принципу Гюйгенса, можно определить поле на любом расстоянии от нее, включая дальнюю зону. Существенным в этом методе является дальнейшая обработка полученной информации. Нетрудно показать [1], что если СВЧ голограмма снимается на сфере радиуса R в зоне Френеля*, то обработка с целью выделения информации о диаграмме направленности представляет собой комплексное преобразование Френеля, т. е. операцию типа свертки.

В настоящее время используется два способа обработки: обработка в когерентном свете [1, 4–6] и обработка на ЭВМ [2, 3]. В данной работе предлагается оптическая обработка в некогерентном свете, которая существенно проще обработки в когерентном свете и позволяет достаточно оперативно, используя сравнительно простую схему, получать как двумерную диаграмму направленности, так и ее сечения.

В качестве аналогового устройства для обработки применен коррелометр, основанный на использовании принципов геометрической оптики [7]. Такой коррелометр осуществляет операцию свертки двух двумерных функций $T_1(x, y)$ и $T_2(x, y)$, каждая из которых записана в плотностном виде на фотоматериале (такую запись будем называть транспарантом).

Выходной сигнал коррелометра i (электрический ток на выходе ФЭУ) представляется в виде

$$i \sim \int_0^{D_x} \int_0^{D_y} T_1(x, y) T_2(x - \xi, y - \eta) dx dy, \quad (1)$$

где ξ, η — взаимное смещение центров транспарантов по обеим координатам, D_x, D_y — размеры апертуры схемы.

Сместив один транспарант относительно другого и регистрируя выходной сигнал как функцию взаимного смещения транспарантов $\xi = \alpha t$ и $\eta = \beta t^{**}$ (t — время, α и β — скорости взаимного смещения транспарантов по обеим координатам), мы получаем двумерную функцию, являющуюся результатом свертки $T_1(x, y)$ и $T_2(x, y)$ у

Для получения диаграммы направленности в качестве транспарантов T_1, T_2 должны использоваться записанные в яркостном виде голограмма и эталонная функция Френеля $\left(\exp \left[\frac{i\pi}{R\lambda} (x^2 + y^2) \right] \right)$, где λ — длина волны СВЧ поля). Однако в некогерентной оптике возникают трудности непосредственной реализации комплексных преобразований, связанные с невозможностью фиксации фазы на транспаранте.

* Регистрация голограмм на сфере особенно удобна для полноповоротных антенн, так как сканирование в этом случае осуществляется за счет поворота самой антенны.

** $\alpha \gg \beta$, в результате чего при смещении по пилообразному закону обеспечивается полнота записи двумерного отклика.

Используя рассмотренную выше схему обработки, модуль комплексного преобразования Френеля можно получить следующим путем. Вместо транспаранта с комплексной функцией Френеля используются два транспаранта: первый с плотностной записью, соответствующей функции косинуса Френеля, и второй, являющийся амплитудной синусоидальной решеткой с периодом d , смещающейся относительно первого. При взаимном смещении этих транспарантов, например, по оси x , получается эквивалентный транспарант

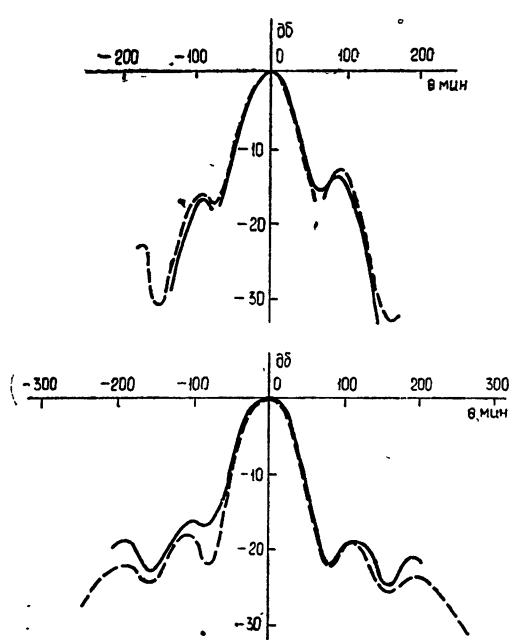


Рис. 1, 2. Азимутальное (рис. 1) и высотное (рис. 2) сечения диаграммы направленности РТ-7.

Пунктирной линией нанесено азимутальное (и высотное) сечение диаграммы направленности РТ-7, снятой по Солнцу, сплошной — восстановленное по голограмме.

В реальной схеме синусоидальная решетка закрепляется неподвижно относительно голограммы, и смещение ее относительно френелевского транспаранта осуществляется в процессе обработки при смещении голограммы.

Нетрудно видеть, что в результате свертки голограммы с эквивалентным транспарантом $T_2(x, y, \xi, \eta)$ получается сумма двух модулей ее френелевского преобразования, промодулированных во времени с частотой $F_H = a/d$ и сдвинутых по оси x относительно друг друга на $2\pi/d\omega_0^2$. Учтем, что существует конечный размер γ френелевского отклика на голограмму, вне которого его можно считать достаточно малым. Тогда, если выбрать период синусоидальной решетки d из условия

$$d < \frac{2\pi}{\gamma\omega_0^2}. \quad (4)$$

возможно выделение одного из модулей преобразования на фоне другого.

Кроме затруднения с комплексным преобразованием, оптической обработке (как в когерентном, так и в некогерентном свете) присуща трудность, связанная с однополярностью фотоматериалов, вследствие чего биполярные функции записываются на транспарант на некотором постоянном уровне, дающем «паразитные» отклики. Если A , B и C — постоянные уровни записи соответственно голограммы, косинуса Френеля и одномерной решетки, то отклик коррелометра $\Phi(\xi, \eta)$ можно представить как (см. также [3])

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) = \tilde{\Phi}(\xi, \eta) + A \int_0^{D_x} \int_0^{D_y} \cos \omega_0^2 [(x - a t)^2 + (y - b t)^2] \cos \left(\frac{2\pi}{d} x \right) dx dy + \\ + \int_0^{D_x} \int_0^{D_y} \Gamma_R(x, y) \cos \omega_0^2 [(x - a t)^2 + (y - b t)^2] \cos \left(\frac{2\pi}{d} x \right) dx dy \sim \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{T}_2(x, y, \xi, \eta) = T_{2+}(x, y, \xi, \eta) + T_{2-}(x, y, \xi, \eta), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} T_{2\pm}(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2} \cos \omega_0^2 \left[(x - \xi \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\pi}{d\omega_0^2})^2 + (y - \eta)^2 \right] \cos \left[\frac{2\pi}{d} a t \mp \right. \\ \left. \mp \left(\frac{\pi}{d\omega_0^2} \right)^2 \right] \mp \frac{1}{2} \sin \omega_0^2 \left[(x - \xi \pm \right. \\ \left. \pm \frac{\pi}{d\omega_0^2})^2 + (y - \eta)^2 \right] \sin \left[\frac{2\pi}{d} a t \mp \right. \\ \left. \mp \left(\frac{\pi}{d\omega_0^2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

индекс функции Френеля здесь $\omega_0^2 = \pi/R \lambda$.

$$\sim \tilde{\Phi}(\xi, \eta) + \Phi_A(\xi, \eta) + \Phi_1\left(\xi + \frac{\Omega}{d\omega_0^2}, \eta\right) + \Phi_2\left(\xi - \frac{\Omega}{d\omega_0^2}, \eta\right).$$

В правой части выражения (5) для сокращения записи мы опустили слагаемые, соответствующие откликам на одно из двух слагаемых $\tilde{T}_2(x, y, \xi, \eta)$ (см. (2)) (на T_{2+}), от которых, как указывалось выше, можно избавиться с помощью пространственной фильтрации.

В выражении (5) Ω — частота пространственной модуляции в голограмме, $\Gamma_R(x, y)$ — интерференционный член в голограмме, $\Phi_A(\xi, \eta)$ — отклик на постоянную составляющую записи голограммы, $\Phi_1(\xi, \eta)$ — модуль диаграммы направленности, $\Phi_2(\xi, \eta)$ — модуль преобразования Френеля поля, комплексно-сопряженного полю антенны в зоне Френеля*, по аналогии с оптической голографией называемое мнимым изображением, $\tilde{\Phi}(\xi, \eta)$ — отклик на постоянные уровни B и C . Доказательство того, что отклик на интерференционный член голограммы дает сумму диаграммы направленности и мнимого изображения, рассмотрено в [3].

Нетрудно показать (из (3), (5)), что временной спектр $\tilde{\Phi}(\xi, \eta)$ примыкает к нулю, в то время как остальные члены имеют несущую частоту a/d . В связи с этим $\tilde{\Phi}(\xi, \eta)$, как низкочастотную составляющую можно подавить электрическим фильтром, поставленным на выходе коррелометра. Вследствие конечных размеров областей, вне которых функции $\Phi_{A, 1, 2}(\xi, \eta)$ существенно отличны от нуля, при соответствующем выборе частоты пространственной модуляции Ω возможно выделение модуля диаграммы направленности.

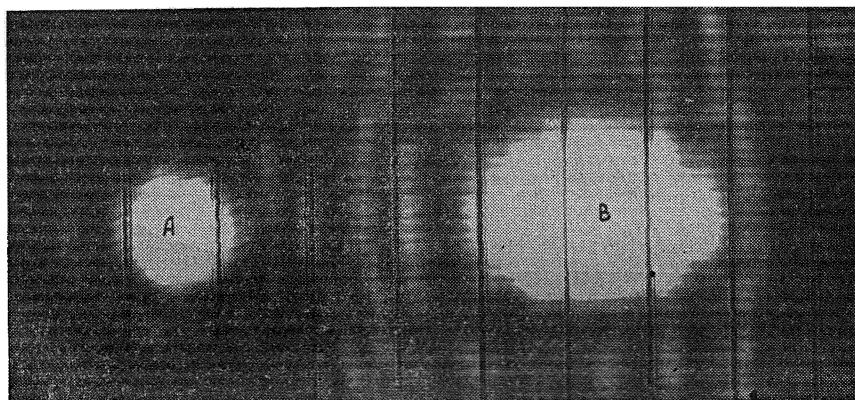


Рис. 3. Двумерный вид диаграммы направленности антенны.

Пятно, обозначенное буквой A , и близлежащая зона соответствуют диаграмме направленности антенны, пятно B — отклику на постоянную составляющую. Около пятна A просматривается кольцо, соответствующее 1-м боковым лепесткам.

По изложенной выше методике была обработана СВЧ голограмма 7-метровой параболической антенны, снятой на волне 10 см [5], причем при получении азимутального сечения в качестве одномерной синусоидальной решетки использовалась заложенная в голограмме пространственная модуляция по азимутальной координате с частотой Ω , что приводит к увеличению динамического диапазона системы.

На рис. 1, 2 приведены полученные в результате обработки главные сечения диаграммы направленности с нанесенными на них соответствующими сечениями диаграммы, снятой по Солнцу. На рис. 3 приводится фотография двумерной диаграммы направленности, регистрируемой на фототелеграфном аппарате «НЕВА».

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Бахрах, А. П. Курочкин, Докл. АН СССР, 171, 6 (1966).
- В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, Докл. АН СССР, 205, 4 (1972).

* Можно показать, что $\Phi_2(\xi, \eta)$ является полем антенны на сфере радиуса $R/2$.

3. В. И. Турчин, Н. М. Цейтлин, А. К. Чандаев, Радиотехника и электроника, 18, № 4 (1973).
4. Л. Д. Бахрах, О. Н. Владимирова, А. П. Курочкин, Г. А. Соболев, Г. Х. Фридман, сб. Антенны, вып. 2, изд. Связь, М., 1967, стр. 33.
5. Л. Д. Бахрах, Д. А. Дмитренко, А. И. Курочкин, Н. М. Цейтлин, Д. А. Арутюнян, Докл. АН СССР, 201, 3 (1971).
6. А. П. Курочкин, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1169 (1968).
7. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Оптические анализаторы, изд. Сов. радио, М., 1972.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
1 февраля 1973 г.

УДК 539.285

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ МНОГОЧАСТОТНОГО СПИНОВОГО ЭХО

B. C. Гречишкян, B. C. Кирчанов, E. M. Шишкин

Двухчастотное спиновое эхо в последнее время нашло себе ряд практических применений [1-3]. Поэтому нами предпринята попытка дать наглядное объяснение явлению, а также выяснить возможность предсказания моментов появления сигналов спинового эха в случае многочастотного возбуждения многоуровневой спин-системы без громоздких квантово-механических расчетов.

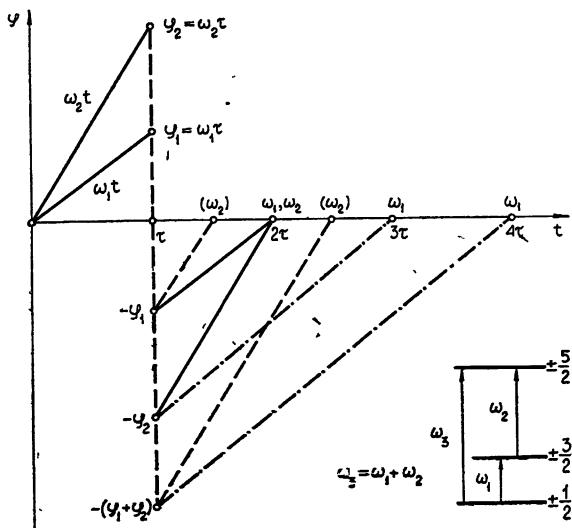


Рис. 1. Фазовый портрет двухчастотного спинового эха в случае $J = 5/2$, $\eta = 0$.

Схема построения фазового портрета ясна из рис. 1. Пусть спин ядра $J = 5/2$, параметр асимметрии градиента электрического поля $\eta = 0$. В этом случае можно обнаружить два чисто квадрупольных перехода на частотах ω_0 и $2\omega_0$ ($\omega_0 = \frac{3}{20}eQq_{22}$,

где eQq_{22} — константа квадрупольной связи). Если с помощью двух пар импульсов одновременно возбудить переходы $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$, текущая фаза для двух намагниченностей без учета влияния внешних и внутренних неоднородностей будет линейно изменяться во времени после окончания действия первых 90-градусных импульсов. В момент времени t на систему спинов воздействуют 180-градусные импульсы, которые изменяют знаки текущих фаз. Поскольку имеется переход с самого ниж-

него уровня на самый верхний через промежуточное состояние $\pm 3/2$, то необходимо учесть и суммарную фазу — $(\varphi_1 + \varphi_2)$.

После окончания действия 180-градусных импульсов фазы свободно эволюционируют во времени и необходимо найти комбинаторику всех текущих фаз. Проводя из точек $-\varphi_1$, $-\varphi_2$ и $-(\varphi_1 + \varphi_2)$ прямые, параллельные прямым начальных фаз $\varphi_1 = \omega_0 t$ и $\varphi_2 = 2\omega_0 t$, мы тем самым выделяем группы спинов с частотами лармировой прецессии ω_0 и $2\omega_0$. Хорошо известно, что момент появления сигнала эха связан с фазовой когерентностью спинов: это момент, когда соответствующая фаза $\sin(\omega_0(t - nt))$ обращается в нуль, т. е. $t = nt$. Из рис. 1 видно, что при двухчастотном возбуждении спин-системы сигналы спинового эха на несущей частоте ω_0 будут наблюдаться в моменты времени $2t$, $3t$ и $4t$, а на несущей частоте $2\omega_0$ — в моменты $3/2t$, $2t$ и $5/2t$. Этот факт находит себе экспериментальное подтверждение (см. рис. 2). В CdI_2 на I^{127} наблюдалось 6 сигналов двухчастотного спинового эха [4].

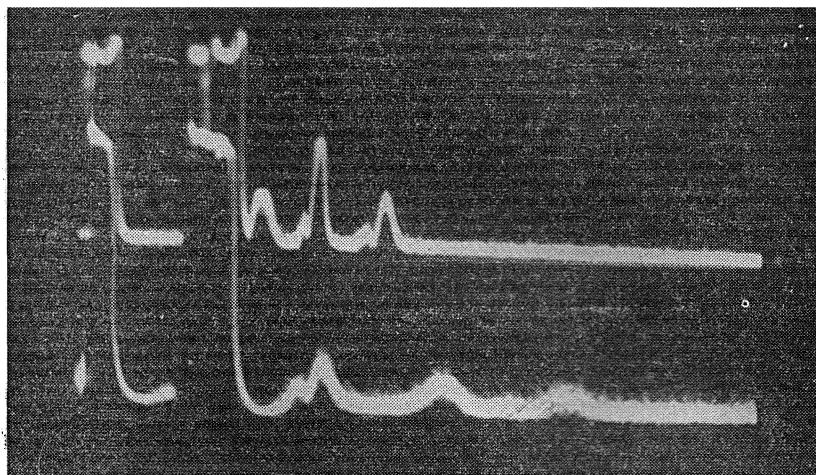


Рис. 2. Осциллограмма двухчастотного квадрупольного эха в CdI_2 при 77°K . Верхний луч—переход $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ (28,6 МГц), нижний луч—переход $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ (14,3 МГц).

Если $\eta \neq 0$, то частоты ω_1 и ω_2 для переходов $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ уже не являются кратными. Однако и этот случай может быть легко проанализирован с помощью фазового портрета. Можно показать, что на несущей частоте ω_1 сигналы двухчастотного эха наблюдаются в моменты времени $2t$, $(1 + \omega_2/\omega_1)t$ и $(2 + \omega_2/\omega_1)t$, а на несущей частоте ω_2 — в моменты времени $(1 + \omega_1/\omega_2)t$, $2t$ и $(2 + \omega_1/\omega_2)t$. Предлагаемая методика может быть применена для анализа трехчастотного эха (см. рис. 3), а также случая воздействия внешних магнитных полей на многочастотное эхо [5]*.

В случае трехчастотного воздействия наблюдается по пять сигналов эха для каждого перехода ($J = 7/2$): на несущей частоте ω_0 в моменты времени $2t$, $3t$, $4t$, $6t$ и $7t$; на несущей частоте $2\omega_0$ в моменты $3/2t$, $2t$, $5/2t$, $7/2t$ и $4t$. И, наконец, на частоте $3\omega_0$ в моменты времени $4/3t$, $5/3t$, $2t$, $8/3t$ и $3t$. Таким образом, положение сигналов в шкале времени можно предсказать с помощью фазового портрета; не прибегая к квантово-механическим расчетам для отдельной частицы [6], которые также отражают лишь тривиальный факт частотной комбинаторики.

Для решения же вопроса о релаксационном поведении двухчастотного спинового эха [5] необходимо решение «многочастичной» задачи. Следует отметить, что поскольку переход к врачающейся системе координат в случае двухчастотного воздействия не представляется очевидным, то нахождение секулярной части гамильтониана магнитных диполь-дипольных взаимодействий H_{dd} по отношению к двухчастотному квадрупольному гамильтониану H_Q ($J = 5/2$) представляет более трудоемкую задачу по сравнению с одночастотным случаем.

* Приводимая в статье Н. Е. Айнбindera (Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 633 (1973)) программа ранее обсуждалась в диссертации Е. М. Шишкина. Появление дополнительных эх в этой программе не следует из фазового портрета и не подтверждается экспериментом.

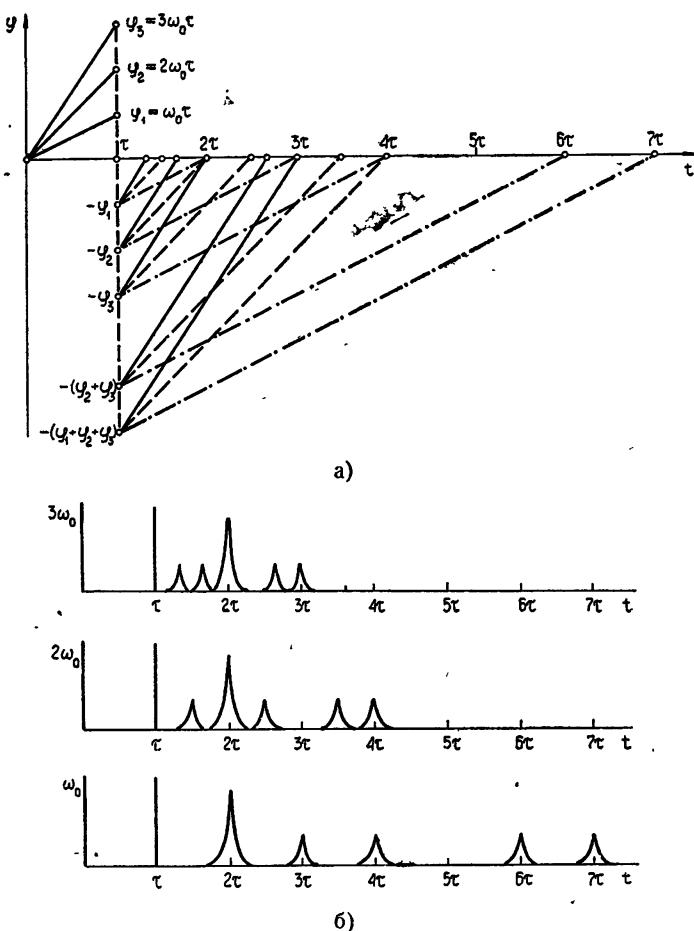


Рис. 3. Фазовый портрет трехчастотного спинового эхо для $J = 7/2$, $\eta = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гречишкін, Е. М. Шишкін, ЖЭТФ, 61, вып. 2 (8), 727 (1971).
2. V. S. Grechishkin, E. M. Shishkin, Organic Magnetic Resonance, 5, 1 (1973).
3. V. S. Grechishkin, E. M. Shishkin, 17th Congress AMPERE, Turku, Finland, 1972, p. 24.
4. В. С. Гречишкін, Е. М. Шишкін, Оптика и спектроскопия, 33, 589 (1972).
5. А. Д. Гордеев, В. С. Гречишкін, Е. М. Шишкін, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 5, 796 (1972).
6. В. С. Гречишкін, Радиоспектроскопия, 12, № 6, 3 (1969).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
23 октября 1972 г.

УДК 537.525.92

КОЭФФИЦИЕНТ ДЕПРЕССИИ ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ПЕРИОДИЧЕСКИ РАЗДЕЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ

G. H. Rapoport, A. T. Фишаковский

Рассматривается система с периодом $2L$ по оси z (в направлении движения электронного потока).

На части периода $0 < z < 2(L - \delta)$ электронный поток разделяется на отдельные элементы бесконечно тонкими проводящими стенками, образующими ячеистую структуру с ячейкой в виде правильного шестиугольника в плоскости xy . В зазорах длиной 2δ элементарные пучки не экранированы друг от друга и сливаются в сплошной электронный поток.

В данном сообщении дается оценка коэффициента депрессии Γ поля объемного заряда [1-4] для такой системы в квазистатическом приближении.

Для обычных (неразделенных) электронных потоков в периодических системах, рассматривавшихся ранее в литературе, Γ определяется выражением [2, 3]

$$\Gamma = -i\gamma\varepsilon_0 \frac{\int \rho_1 ds}{\int |\rho_1|^2 ds} \frac{1}{2L} \int_0^{2L} dz \int E_z'' \rho^* ds, \quad (1)$$

где

$$\rho = \rho_1(x, y) e^{i(\omega t - \gamma z)}, \quad (2)$$

ω — частота, γ — параметр распространения волны (2) плотности заряда, ρ_1 , ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, $s = \pi b^2$ — попечное сечение пучка, E_z'' — продольная составляющая нерезонансной слагающей поля.

Согласно [4] основной вклад в E_z'' вносится, как правило, квазистатическим полем $\hat{E}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где φ — решение уравнения Пуассона с правой частью, определяемой (2). Функция $\rho_1(x, y)$ определяется действующим на электроны полем $E = E' + E''$, в частности его резонансной слагающей E' . При подстановке в (2) функции $\rho_1(x, y)$, соответствующей $E' = 0$, (2) определяет не коэффициент депрессии, а квадрат коэффициента редукции R плазменной частоты ω_p .

Таким образом, вычисление Γ или R^2 связано с решением соответствующих самосогласованных задач. Однако в приближенных эпенках Γ и R^2 для нешироких пучков ($\gamma b < 1,5$) часто используют нечувствительность выражения (1) к малым вариациям $\rho_1(x, y)$, аппроксимируя $\rho_1(x, y)$ проходящей заданной функцией, например, $\rho_1 = \text{const}$ [5].

Ограничимся далее рассмотрением систем с осевой симметрией поля E' во внутренней области радиуса A , занятой электронным потоком*, для которых $a \ll A < 0,15\lambda; 0,5 < \gamma a < 1,5$. Здесь a — радиус элементарного пучка (вписанного в шестиугольную ячейку), $\lambda = 2\pi/\beta\gamma$ — длина волны в свободном пространстве**.

Тогда значения E'_z на осях и условия для \hat{E}_z на границах почти всех элементарных пучков, за исключением расположенных на периферии потока, приближенно совпадают. То же должно быть справедливо и для функций распределения $\rho_1(x, y)$ плотности заряда в различных элементарных пучках. В этом случае определение Γ сводится приближенно к вычислению квазистатического поля \hat{E}_z и выражения (1) для одного элементарного пучка. Квазистатическое поле \hat{E} элементарного пучка удовлетворяет условию периодичности по z и следующим условиям на шестигранной границе элементарного пучка:

$$\begin{aligned} \hat{E}_z &= 0 \quad \text{при } 0 < z < 2(L - \delta), \\ \hat{E}_n &= 0 \quad \text{при } 2(L - \delta) < z < 2L, \end{aligned} \quad (3)$$

n — нормаль к границе. Последнее условие выполняется ввиду симметрии задачи: оно учитывает наличие других элементарных пучков.

Далее приближенно заменим шестигранную границу элементарного пучка поверхностью круглого цилиндра радиуса a и перейдем к решению модельной задачи с граничными условиями (3) в пределах периода $2L$ на этой поверхности с симметричным относительно ее оси распределением амплитуд плотности заряда $\rho_1(r)$. Для упрощения расчетов мы аналогично [6] примем $\rho_1 = \text{const}***$.

Общее решение уравнения Пуассона, удовлетворяющее условию периодичности, запишем в виде

* Имеется в виду распределение E' в зазорах резонаторов без пролетных отверстий.

** Эти условия совместны для достаточно медленных электронных пучков ($\beta < 0,1 \div 0,2$).

*** Хотя при $\omega_p \ll \omega$ более точной являлась бы аппроксимация ρ_1 модифицированной бесселевой функцией $J_0(\gamma r)$.

$$\varphi(r, z) = \frac{q}{\gamma} \left[1 - \frac{I_0(\gamma r)}{I_0(\gamma a)} \right] e^{-i\gamma z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{I_0(\gamma_n r)}{I_0(\gamma_n a)} e^{-i\gamma_n z}, \quad (4)$$

$$\gamma_n = \gamma + \frac{\pi n}{L}, \quad q = \frac{\rho_1}{\epsilon_0 \gamma}$$

(экспоненциальный множитель $e^{i\omega t}$ здесь и далее опущен).

Удовлетворяя граничным условиям на поверхности цилиндра, приходим к формулировке задачи в виде интегрального уравнения первого рода с сингулярным ядром

$$\frac{1}{2L} \int_{-\delta}^{\delta} K(z - \zeta) \varepsilon(\zeta) d\zeta = -1, \quad (5)$$

где функция ε связана с полем \hat{E}_z по формуле

$$E_z(a, z) = q \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} \varepsilon(z), \quad (6)$$

и ядро $K(z)$ есть

$$K(z) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_n a)}{I_0(\gamma_n a)} \exp\left(-i \frac{\pi n}{L} z\right). \quad (7)$$

Для дальнейшего в ядре $K(z)$ удобно выделить сингулярную часть

$$K(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2L} + G(z), \quad (8)$$

причем оказывается, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(-z) &= -\operatorname{Re} G(z), \\ \operatorname{Im} G(-z) &= \operatorname{Im} G(z). \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения (5) $\varepsilon(z)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varepsilon(-z) &= -\operatorname{Re} \varepsilon(z), \\ \operatorname{Im} \varepsilon(-z) &= \operatorname{Im} \varepsilon(z). \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициент депрессии записывается в виде

$$\Gamma = \Gamma_0 + i \frac{2}{\gamma a} \left[\frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} \right]^2 \frac{\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon(z) dz \int_{-\delta}^{\delta} g(z) dz}{\int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} K(z - \zeta) \varepsilon(\zeta) g(z) d\zeta dz}, \quad (10)$$

где $g(z)$ — некоторая весовая функция, Γ_0 соответствует случаю отсутствия зазоров ($\delta \rightarrow 0$):

$$\Gamma_0 = 1 - 2 \frac{I_1(\gamma a)}{\gamma a I_0(\gamma a)}.$$

Если положить $g(z) = 1$ и выбрать пробную функцию в виде

$$\varepsilon(z) = \frac{z}{\delta} e^{i\gamma z}, \quad (11)$$

т. е. так, чтобы она удовлетворяла соотношениям (9) и дополнительному условию

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon(z) e^{-i\gamma z} dz = 0, \quad (12)$$

то получим простое явное выражение для Γ . По этому выражению построены зави-

симости коэффициента депрессии Γ от величины $\bar{\delta} = \delta/L$ для $\theta = 2\gamma L = \pi$ и $\theta = 1,5 \pi$ и значений $a = \gamma a$, указанных на рис. 1.

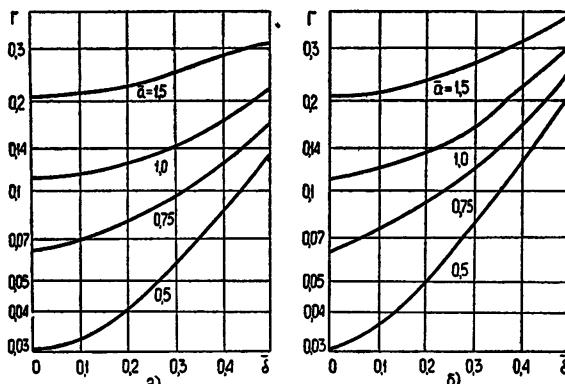


Рис. 1. а) $\theta = \pi$; б) $\theta = 1,5 \pi$.

Полученные результаты легко обобщаются на случай неполного заполнения пространства электронным потоком, когда величина ρ_1 в рассмотренной модельной задаче является произвольной функцией r и отлична от нуля только в окружности радиуса $b < a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 26, № 1, 126 (1956).
2. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, № 10, 2340 (1957).
3. В. А. Солнцев, ЖТФ, 38, № 1, 100 (1968).
4. В. А. Солнцев, ЖТФ, 38, № 1, 109 (1968).
5. Дж. Роу, Теория нелинейных явлений в приборах СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1969.

Поступила в редакцию
2 ноября 1972 г.