

СОДЕРЖАНИЕ

Шишов В. И. Мерцания источников конечных угловых размеров	1277
Тептин Г. М., Фахрутдинова А. Н. Исследование федингующих радиоотражений от метеорных следов. I	1286
Островский Л. А., Рубаха Н. Р. Нелинейный магнитный звук в гравитационном поле	1293
Рыбачек С. Т. О влиянии существенной области ионосферного слоя на характеристики распространения СДВ	1300
Крохмальников Е. Б., Солодовников Г. К. Эффекты распространения радиоволн в трехмерно-неоднородной магнитоактивной ионосфере	1304
Благовещенский А. С., Борисов В. В. Падение плоской электромагнитной волны на движущийся скачок плотности ионизованного газа	1314
Суворов Е. В. О распространении электромагнитных волн в плазме с широким магнитного поля	1320
Киценко А. Б., Панченко В. И. Возбуждение электромагнитных волн в плазме потоком сфазированных осцилляторов	1325
Литвак А. Г., Фрайман Г. М. Взаимодействие пучков встречных электромагнитных волн в прозрачной нелинейной среде	1341
Васьков В. В. О нелинейном взаимодействии двух монохроматических ленгмюровских волн	1349
Генчев Ж. Д., Калмыкова С. С. Кинетическая теория электромагнитных флуктуаций в анизотропном плазменном полупространстве	1355
Фрайман А. А. Дифракция флуктуирующего излучения	1362
Андреев Г. А., Левенец Б. П., Магид Р. М., Хохлов Г. И. Влияние аддитивной и мультипликативной помех на точность измерения углового положения источника излучения системами с широтно-импульсной модуляцией	1367
Мельник Ю. А. Пространственно-временная обработка радиотепловых сигналов излучателей, движущихся в ближней зоне интерферометра	1376
Кляцкин В. И., Кон А. И. О смещениях пространственно-ограниченных световых пучков в турбулентной среде в приближении марковского случайного процесса	1381
Свет С. Д. Оптимальная оценка марковских двоичных сигналов в аддитивном флуктуационном шуме	1389
Антропов В. А., Антропова Л. Х., Моргачева Г. А., Котосонов Н. В., Шуваев А. Г. К вопросу об использовании эффекта магнитосопротивления для измерения проходящей мощности СВЧ	1393
Варьвдин В. С., Коломойцев Ф. И., Овсяников В. В. О распределении тока и входном сопротивлении изогнутых вибраторов конечной толщины	1398
Чебышев В. В. Обратная электродинамическая задача для несимметрично возбужденного импедансного цилиндра	1407
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Генкин В. Н., Пискарев В. И., Трифонов Б. А. О детекторе на основе InSb <i>n</i> -типа при температуре 77°К	1417
Овчинников Г. И., Татарский В. И. К вопросу о соотношении теории когерентности и уравнения переноса излучения	1419
Миронов В. Л., Патрушев Г. Я. Корреляция флуктуаций амплитуд в разнесенных по углу волновых пучках	1421
Каневский М. Б. О среднем поле при сверхрефракции	1424

УДК 538.576.22

МЕРЦАНИЯ ИСТОЧНИКОВ КОНЕЧНЫХ УГЛОВЫХ РАЗМЕРОВ

В. И. Шишов

Рассматриваются мерцания бесконечно удаленных источников малых угловых размеров на толстом слое статистически однородной и изотропной случайно преломляющей среды с одним характерным размером неоднородностей. Анализ основан на решении дифференциального уравнения для четвертого момента комплексной амплитуды поля волны. Основное внимание обращается на режим насыщенных флуктуаций, который не описывается методом плавных возмущений. Показано, что число параметров углового спектра, которое можно определить методом мерцаний, определяется отношением расстояния z от наблюдателя до слоя к толщине слоя Δz . В частности, если наблюдатель находится на границе или внутри слоя, то методом мерцаний можно определить только один параметр углового спектра—характерный размер

Мерцания радиоисточников на неоднородностях межпланетной плазмы широко используются для определения характеристик угловых спектров этих источников [1, 2]. Теоретически метод определения угловых характеристик источников по характеристикам мерцаний основан на связи между пространственным спектром мерцаний $M(q)$ и угловым спектром распределения интенсивности источника J , которая получена в [1] для модели фазового экрана:

$$M(q) = M_0(q)J^2(qz), \quad (1)$$

где z — расстояние от наблюдателя до экрана, q — пространственная частота, $M_0(q)$ — пространственный спектр мерцаний точечного источника.

В модели фазового экрана принимается, что случайно преломляющая среда сосредоточена в геометрически очень тонком слое. Как будет показано ниже, это упрощающее предположение является достаточно сильным и учет протяженности случайно преломляющей среды приводит к существенному изменению связи между пространственным спектром мерцаний и угловым спектром источника.

Мерцания источников конечных угловых размеров при прохождении излучения через протяженные случайно преломляющие среды рассматривались в работах [3, 4] в приближении метода плавных возмущений. Как известно, область применимости метода плавных возмущений ограничена ненасыщенными (слабыми) флуктуациями интенсивности. В работе [5] была сделана попытка решения уравнения для четвертого момента комплексной амплитуды поля, выведенного в работах [6, 7], применительно к источникам достаточно больших угловых размеров.

В данной работе будут рассмотрены мерцания бесконечно удаленного источника конечных угловых размеров, излучение которого прошло через статистически однородную и изотропную случайно преломляющую среду с одним характерным размером неоднородностей. Рассмотрение будет основано на решении уравнения для четвертого момента комплексной амплитуды поля волны, выведенного в работах [6–10]. Ме-

тодика решения этого уравнения была разработана в [11, 12] применительно к случаю плоской волны (бесконечно удаленный точечный источник).

Вначале будет рассмотрен случай, когда наблюдатель находится в слое случайно преломляющей среды, а затем полученные результаты будут обобщены на случай, когда наблюдатель находится на некотором расстоянии от слоя.

1. НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ И УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТВЕРТОГО МОМЕНТА КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ

Итак, рассмотрим следующую задачу. На плоскопараллельный слой случайно преломляющей среды падает монохроматическое излучение от источника малых угловых размеров, причем среднее направление распространения нормально к поверхности слоя. Среда является статистически однородной и изотропной и имеет один характерный масштаб неоднородностей a , который определим соотношением

$$a^2 = \frac{\partial^2 B_\mu(r)}{\partial r^2} (B_\mu(r) - 1) \Big|_{r=0}, \quad (2)$$

где $B_\mu(r)$ — корреляционная функция флуктуаций показателя преломления:

$$B_\mu(r) = \overline{\mu(\mathbf{r}_1)\mu(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r})}. \quad (3)$$

Интегральное рассеяние в слое происходит на малые углы, и средний квадрат флуктуаций набега фазы на размере одной неоднородности много меньше единицы.

Излучение от бесконечно удаленного источника малых угловых размеров можно представить как слабо возмущенную плоскую волну. Комплексную амплитуду E этой волны будем характеризовать четвертым моментом

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = \overline{E(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u}, \mathbf{z}) E(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}, \mathbf{z}) E^*(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{z}) E(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{z})}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}$ — двумерные векторы в плоскости, перпендикулярной среднему направлению распространения излучения, ось z ориентирована вдоль направления распространения излучения.

Если $I(\varphi)$ — угловое распределение интенсивности источника и $J(k\mathbf{v})$ — угловой спектр источника, равный

$$J(k\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} I(\varphi) \exp[-ik(\mathbf{v}\varphi)] d^2\varphi, \quad (5)$$

то начальное условие на границе слоя $z = 0$ следует брать в виде

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})|_{z=0} = J^2(k\mathbf{v}), \quad (6)$$

что соответствует наблюдениям мерцаний на двух независимых интерферометрах с одинаковой базой \mathbf{v} . Вектор \mathbf{u} показывает взаимное расположение интерферометров. В дальнейшем мы будем полагать, что источник является изотропным, $J(k\mathbf{v}) = J(kv)$.

При перечисленных выше условиях четвертый момент Φ подчиняется следующему дифференциальному уравнению, записанному в безразмерных координатах [6, 7]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\beta f(\xi, \eta) \Phi - i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_x \partial \xi_x} - i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta_y \partial \xi_y}; \quad (7)$$

$$\beta = k^3 a^2 \int_0^{\infty} B_u(u, z)|_{u=0} dz; \quad (8)$$

$$f(u, v) = 2 - 2R(u) - 2R(v) + R(u + v) + R(u - v),$$

$$R(u) = \int_0^{\infty} B_u(u, z) dz / \int_0^{\infty} B_v(u = 0, z) dz, \quad (9)$$

координаты ξ, η, ζ связаны с u, v, z соотношениями

$$\xi = u/a, \quad \eta = v/a, \quad \zeta = z/ka^2. \quad (10)$$

Ниже мы рассмотрим задачу (6), (7) в предположении, что наблюдатель находится внутри или на границе слоя. Методика решения уравнения (7) была развита в работах [11, 12] применительно к плоским волнам. Эта методика применима и к случаю источника конечных угловых размеров.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ИТЕРАЦИОННОГО РЯДА

Используя фурье-преобразование функции $\Phi(q, \eta, \zeta)$ по ξ [11, 12]:

$$\Phi(q, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) \exp[-i(\xi q)] d^2 \xi, \quad (11)$$

вместо (7) получим интегро-дифференциальное уравнение, от которого легко перейти к интегральному (с учетом (6)):

$$\begin{aligned} M(q, \eta, \zeta) &= \delta(q) J^2(ka\eta) \exp[-\beta\gamma(\eta)\zeta] + \beta \int_0^{\zeta} d\zeta_1 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 q_1 \psi(q - q_1, \eta_1) \exp[-\beta D(q, \eta_1, \zeta_1) + \\ &+ \beta D(q_1, \eta_1, \zeta_1)] M(q_1, \eta_1, \zeta_1), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\gamma(\eta) = 2 - 2R(\eta),$$

$$\begin{aligned} \psi(q, \eta) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [2R(\eta) - R(\eta + \xi) - R(\eta - \xi)] \times \\ &\times \exp[-i(\xi q)] d^2 \xi; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D(q, \eta, \zeta) &= \int_0^{\zeta} \gamma(\eta + q(\zeta - \zeta')) d\zeta', \\ \eta_1 &= \eta + q(\zeta - \zeta_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде итерационного ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n M_n, \quad (15)$$

$$M_0 = \delta(q) J^2(ka\eta) \exp[-\beta\gamma(\eta)\zeta].$$

Для n -го коэффициента получаем

$$M_n(q, \eta, \zeta) = \int_0^{\zeta} d\zeta_1, \dots, \int_0^{\zeta_{n-1}} d\zeta_n \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2q_1, \dots, \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2q_{n-1} \times \quad (16)$$

$$\times \exp(-\beta L_n) \prod_{i=1}^n \{\psi(q_{i-1} - q_i)\} J(ka \eta_n),$$

где

$$\eta_i = \eta + \sum_{l=1}^i q_{l-1}(\zeta_{l-1} - \zeta_l), \quad (17)$$

$$L_n = \sum_{i=0}^n \int_{\zeta_{i+1}}^{\zeta_i} \gamma(\eta_i + q_i(\zeta_i - \zeta')) d\zeta'.$$

В выражениях (16), (17) следует полагать $q_0 = q$, $q_n = 0$;

$$\zeta_0 = \zeta_1, \quad \zeta_{n+1} = 0; \quad \eta_0 = \eta.$$

Повторяя рассуждения работ [11, 12], можно показать, что переменные ζ_i в эффективной области интегрирования незначительно меняются вблизи некоторых средних значений

$$\langle \Delta \zeta_i \rangle = \langle (\zeta_i - \zeta_{i+1}) \rangle \approx \frac{1}{\beta \gamma(\eta_i)} \frac{L_n}{n}, \quad (18)$$

поэтому L_n очень слабо зависит от переменных ζ_i . Можно также показать, что основной вклад в ряд (15) вносят члены с n , лежащими в пределах

$$n_1 - \sqrt{n_1} \leq n \leq n_1 + \sqrt{n_1}, \quad (19)$$

$$n_1 = E[L_n],$$

где $E[x]$ — целая часть x . При n , достаточно больших и находящихся в области (19), имеем

$$M_n(q, \eta, \zeta) \approx \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2q_1, \dots, \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2q_{n-1} \frac{(L_n)^n}{n!} \exp(-\beta L_n) \times \quad (20)$$

$$\times \prod_{i=1}^n \{P(\Delta q_i, \eta_i)\} J^2(ka \eta_n);$$

$$P(q, \eta_i) = \frac{1}{\gamma(\eta_i)} \psi(q, \eta_i). \quad (21)$$

Величина L_n слабо зависит от переменных q_i , поэтому ряд (15) является некоторым разложением по степеням L_n .

3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Мы будем исследовать ряд (15) при $\eta = 0$, что соответствует наблюдению мерцаний на двух независимых точечных приемниках. Как было показано в [11, 12], вклад различных членов ряда (15) в случае точечного источника определяется величиной

$$L_1 = \int_0^{\zeta_1} \gamma(q(\zeta - \zeta_1)) d\zeta' + \int_{\zeta_1}^{\zeta} \gamma(q(\zeta - \zeta')) d\zeta' \approx \int_0^{\zeta} \gamma(q(\zeta - \zeta')) d\zeta', \quad (22)$$

а при протяженных источниках существен также размер источника φ_0 (точный смысл φ_0 будет определен позднее).

При малых L_1 спектр мерцаний определяется первым итерационным членом

$$M(q) - \delta(q) \approx \beta M_1 = \beta \int_0^{\zeta} \sin^2[q^2(\zeta - \zeta_1)] \tilde{R}(q) \times \\ \times J^2(kaq(\zeta - \zeta_1)) \exp(-\beta L_1) d\zeta_1, \quad (23)$$

где $\tilde{R}(q)$ — преобразование фурье-функции $R(\xi)$. При

$$\int_0^{\zeta} \gamma(\zeta - \zeta') d\zeta' \ll \begin{cases} 1 & (\beta \gg 1) \\ 1 + \ln(1 + ka\varphi_0\zeta) & (\beta \ll 1) \end{cases} \quad (24)$$

спектр (23) описывает существенную область частот.

Приближение (23) соответствует, в основном, приближению метода плавных возмущений, хотя и имеет несколько большую область применимости при больших размерах источника. Мерцания протяженных источников в этом приближении рассматривались в работах [3-5], и мы не будем останавливаться на этом случае. Отметим только, что мерцания источников на неоднородностях протяженной среды содержат существенно меньше информации об угловом спектре источника, чем мерцания на фазовом экране. В частности, при $\zeta \gg 1$ для достаточно больших источников спектр мерцаний зависит только от одного параметра углового спектра — характерного размера источника φ_0 :

$$\varphi_0^{-2} = \int_0^{\infty} J^2(x) x dx. \quad (25)$$

Перейдем к случаю больших L_1 . Наиболее простой вариант этого случая мы имеем при $\beta \ll 1$, который и рассмотрим вначале. При $\beta \ll 1$ в существенной области частот $|\eta_i| \gg 1$ и условие, противоположное условию (24), имеет вид

$$2\beta\zeta > 1 + \ln(1 + ka\zeta\varphi_0). \quad (26)$$

Ряд (15) близок к ряду экспоненты, и, как показано в [11, 12], основной вклад в него дают члены с n , лежащими в области (19). Заменив во всех слабо зависящих от n множителях в M_n n на $n_1 = E[2\beta\zeta]$, в том числе положив кратность интеграла по q_i равной n_1 , получаем после суммирования

$$M(q, \zeta) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 q_1, \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 q_n J^2(ka\eta_n) \prod_{i=1}^{n_1} \{P(\Delta q_i, \eta_i)\}. \quad (27)$$

Из соотношения (18) имеем $\langle \Delta\zeta_i \rangle \approx \frac{1}{2\beta} \approx \frac{\zeta}{n_1}$ и

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{n_1} q_i \Delta\zeta_i \approx \frac{\zeta}{n_1} \sum_{i=0}^{n_1} q_i = \zeta \sum_{i=0}^{n_1} \frac{i}{n} \Delta q_i. \quad (28)$$

Вычислим наиболее существенные параметры спектра мерцаний: индекс мерцаний m

$$m^2 = \frac{(\overline{\Delta I})^2}{(\overline{I})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} [M(q) - \delta(q)] d^2 q \quad (29)$$

и второй момент спектра

$$(q_2)^2 = \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 [M(q) - \delta(q)] d^2 q. \quad (30)$$

Вводя переменные интегрирования

$$t_i = \sum_{l=1}^{n_i} \frac{l}{n} \Delta q_l$$

и пользуясь теорией предельных законов распределения сумм независимых случайных величин [13], получаем

$$m_2 = \frac{3}{2\beta\zeta(ka\zeta)^2} \int_0^\infty \exp[-3x^2/2\beta\zeta(ka\zeta)^2] J^2(x) x dx; \quad (31)$$

$$(q_2)^2 = \frac{3}{2} \beta\zeta + \frac{1}{m^2(ka\zeta)^2} \int_0^\infty \exp[-3x^2/2\beta(ka\zeta)^2] J^2(x) x^3 dx. \quad (32)$$

Приближенно имеем

$$m^2 \approx \begin{cases} 1 & (2\beta\zeta(ka\zeta_0)^2 \ll 1) \\ \frac{1}{2\beta\zeta(ka\zeta)^2 \varphi_0^2} & (2\beta\zeta(ka\zeta_0)^2 \gg 1) \end{cases} \quad (33)$$

$$(q_2)^2 \approx \begin{cases} 2\beta\zeta & (2\beta\zeta(ka\zeta_0)^2 \ll 1) \\ \frac{3}{2} \beta\zeta & (2\beta\zeta(ka\zeta_0)^2 \gg 1) \end{cases} \quad (34)$$

Таким образом, второй момент спектра мерцаний очень слабо зависит от размера источника. Аналогичное утверждение можно сделать и в отношении моментов более высоких порядков. При $2\beta\zeta(ka\zeta_0)^2 \gg 1$ вид спектра мерцаний не зависит от вида углового спектра источника. Напомним, что в случае фазового экрана по пространственному спектру мерцаний в принципе можно определить полностью угловой спектр источника.

При $\beta \gg 1$ изложенные выше результаты применимы при

$$\zeta \gg \beta^{-2/3} \ln(\ln \beta), \quad (35)$$

ибо, как показано в [11], при выполнении этого неравенства в существенной области значений q выполняется неравенство $|\eta_i| \gg 1$ для основной массы значений i .

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗА СЛОЕМ

Статистически однородная среда и фазовый экран являются двумя крайними случаями распределения случайно преломляющей среды между источником и наблюдателем. Ниже мы рассмотрим промежуточный

случай слоя случайно преломляющей среды толщиной $\Delta\zeta$, расположенного на расстоянии ζ от наблюдателя. Расстояние опсчитывается от границы, ближайшей к источнику.

Повторяя рассуждения предыдущих пунктов, получаем при

$$\int_0^{\Delta\zeta} \gamma(\zeta - \zeta') d\zeta' \ll 1 \quad (36)$$

$$M(q) - \delta(q) \approx \beta \int_0^{\Delta\zeta} \sin^2 [q^2(\zeta - \zeta')] R_1(q) J^2(kaq(\zeta - \zeta')) d\zeta'. \quad (37)$$

Как видно из (37), в спектр мерцаний угловой спектр входит сглаженный по участку $kaq\Delta\zeta$.

Условия, при которых спектр мерцаний определяется членами ряда (15) с большими n , являются средними между условиями (26), (35) и аналогичными условиями для фазового экрана [14]

$$2\overline{\Delta S^2} = 2\beta\Delta\zeta \gg 1, \quad \beta\Delta\zeta\zeta^2 \gg \ln(\beta\Delta\zeta). \quad (38)$$

При выполнении этих условий соотношение (27) сохраняет свою силу, однако η_{n_i} определится выражением

$$\eta_{n_i} = \zeta \sum_{i=0}^{n_i} \left(1 - \frac{\Delta\zeta}{\zeta} + \frac{i}{n} \frac{\Delta\zeta}{\zeta} \right) \Delta q_i. \quad (39)$$

Интегрируя (27) по q , вводя переменные интегрирования

$$t_i = \sum_{k=1}^{n_i} \left(1 - \frac{\Delta\zeta}{\zeta} + \frac{i}{n} \frac{\Delta\zeta}{\zeta} \right) \Delta q_k,$$

получаем после частичного интегрирования

$$m^2 = \frac{1}{(ka\zeta B)^2} \int_0^\infty \exp[-x^2/2(ka\zeta B)^2] J^2(x) x dx, \quad (40)$$

$$B^2 = 2\beta\Delta\zeta \left[1 - \frac{\Delta\zeta}{\zeta} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta\zeta}{\zeta} \right)^2 \right].$$

Аналогично

$$(q_2)^2 = 2\beta\Delta\zeta \left[\frac{\Delta\zeta}{\zeta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta\zeta}{\zeta} \right)^2 \right] + \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta\zeta}{\zeta} \right)^2 \times \\ \times \frac{1}{(ka\zeta)^4 B^2} \int_0^\infty \exp[-x^2/2(ka\zeta B)^2] J(x) x^3 dx. \quad (41)$$

При малых значениях $\Delta\zeta/\zeta$ приближенно имеем

$$m^2 \approx \begin{cases} 1 & (2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_0)^2 \ll 1) \\ \frac{1}{2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_0)^2} & (2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_0)^2 \gg 1) \end{cases} \quad (42)$$

$$(q_2)^2 \approx \begin{cases} 2\beta\Delta\zeta & (2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_2)^2 < 1) \\ \frac{1}{(ka\zeta\varphi_2)^2} & \left(1 < 2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_2)^2 < \frac{\zeta}{\Delta\zeta}\right), \\ 2\beta\Delta\zeta \frac{\Delta\zeta}{\zeta} & \left(2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_2)^2 > \frac{\zeta}{\Delta\zeta}\right) \end{cases} \quad (43)$$

где

$$\varphi_2^{-2} = \int_0^{\infty} J^2(x) x^3 dx / \int_0^{\infty} J^2(x) x dx. \quad (44)$$

Таким образом, второй момент спектра мерцаний зависит от второго момента углового спектра источника только при

$$1 < 2\beta\Delta\zeta(ka\zeta\varphi_2)^2 < \frac{\zeta}{\Delta\zeta}.$$

Из выражений (27) и (39) видно, что угловой спектр входит в спектр мерцаний усредненным по участку, который определяется переменной частью $\eta_{n_i} = (\zeta - \Delta\zeta)q + \Delta\zeta \sum_{i=1}^{n_1} (i/n)\Delta q_i$, равной $|\Delta\eta_{n_i}| = |\Delta\zeta \sum_{i=1}^{n_1} (i/n)\Delta q_i| \approx \Delta\zeta \sqrt{n_1} \approx \Delta\zeta \sqrt{2\beta\Delta\zeta}$. Поэтому угловой спектр усредняется по участку $ka\zeta \sqrt{2\beta\Delta\zeta}$, который характеризует минимальные обнаружимые детали в угловом спектре источника. С другой стороны, метод мерцаний позволяет изучать угловые спектры не шире чем $ka\zeta \sqrt{2\beta\Delta\zeta}$. Таким образом, от величины отношения $\Delta\zeta/\zeta$ зависит максимальное число деталей углового спектра, которые можно обнаружить методом мерцаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. T. Little, A. Hewich, Mon. Not. R. Astron. Soc., **134**, 221 (1966).
2. M. H. Cohen, E. J. Gundermann, D. E. Harris, Astrophys. J., **150**, № 3, 767 (1967).
3. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, № 2, 306 (1964).
4. K. G. Budden, B. J. Uscinski, Proc. Roy. Soc., **A-316**, 315 (1970).
5. В. И. Шишов, Астрон. ж., **47**, № 1, 182 (1970).
6. В. И. Шишов, Тр. ФИАН, **38**, 171 (1967)
7. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **11**, № 6, 886 (1968)
8. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **56**, вып. 6, 2107 (1969)
9. Л. А. Чернов, Акуст. ж., **15**, вып. 4, 554 (1969).
10. M. J. Veega, J. Opt. Soc. Amer., **59**, № 9, 1134 (1969).
11. В. И. Шишов, ЖЭТФ, **61**, вып. 4 (10), 1399 (1971).
12. K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Acta Optica, **18**, № 10, 767 (1971).
13. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарные связанные величины, изд. Наука, М., 1965.
14. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 1, 85 (1971).

SCINTILLATIONS OF SOURCES OF FINITE ANGULAR DIMENSIONS

V. I. Shishov

The scintillations of infinitely distant sources of small angular dimensions on a thick layer of the statistically homogeneous and isotropic randomly-reflecting medium with one characteristic dimension of inhomogeneities are considered. The analysis is based on the solution of the differential equation for the fourth moment of the complex amplitude of the wave field. Basic consideration is given to the saturated fluctuation regime which is not described by the smooth perturbation method. It is shown that the number of the angular spectrum parameters, which may be determined by the scintillation method, is determined by the ratio of the distance z from the observer to the layer and the thickness Δz . In particular, if the observer is at the boundary or inside the layer, then using the scintillation method one may determine only one parameter of the angular spectrum the characteristic dimension.

УДК 621.371.332.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЕДИНГУЮЩИХ РАДИООТРАЖЕНИЙ ОТ МЕТЕОРНЫХ СЛЕДОВ. I

Г. М. Тетин, А. Н. Фахрутдинова

В статье приводится анализ экспериментального материала по федингующим метеорным радиотражениям, полученным в измерениях на трассе 800 и 1600 км на частотах 40,3, 42,3, 57,7, 44 Мгц и по радиолокационным данным на частотах 34 и 68 Мгц. Приведены экспериментальные статистические характеристики метеорных радиотражений в стадиях образования и развитого фединга.

Полученные количественные характеристики находятся в хорошем согласии с теорией фединга, основанной на турбулентных представлениях.

В настоящее время рассеяние радиоволн на метеорных следах широко используется на практике при передаче сигналов точного времени, в радиосвязи, а также в исследованиях распределения метеорного вещества в околосолнечном пространстве и при изучении верхней атмосферы. Для всех этих практических приложений требуется знание характеристик радиотражений от метеорных следов. Одним из важных свойств сигналов, рассеянных метеорными следами, является образование фединга в среднем через 0,4 сек [1] после появления метеорного радиоэхо. Федингующие метеорные сигналы существенно отличаются по своим свойствам от чисто зеркального эхо, и их изучению посвящено довольно много работ [2]. При этом основные трудности исследований заключались в отсутствии полной теории, позволяющей определять с достаточной точностью различные количественные характеристики федингующих метеорных радиоэхо. Наиболее известная работа Маннинга [3] дает неплохой идейный подход, который, однако, позволяет исследовать лишь некоторые качественные характеристики федингов (не всегда удовлетворительно согласующиеся с практикой).

В работе [4] получены теоретические характеристики федингующих метеорных радиотражений в предположении, что определяющим механизмом, ответственным за возникновение историчных зеркальных центров на долгоживущих метеорных следах, являются турбулентные движения. В момент возникновения фединга мы имеем два зеркальных центра, для развитого фединга зеркальных точек на следе достаточно много. Они образуют некоторую случайную картину с возникающими и исчезающими отражающими центрами, которая может быть описана статистически. Характеристики отраженного от метеорного следа сигнала в стадиях возникновения и развитого фединга существенно различны. Зная свойства турбулентных движений на метеорных высотах, можно получить количественные оценки для параметров фединга в стадии возникновения и развитого фединга и провести сравнение с экспериментальными данными.

В настоящей работе исследуются статистические характеристики фединга, необходимые как для практических приложений, использующих метеорное рассеяние радиоволн, так и для построения теории.

ОБРАЗОВАНИЕ ФЕДИНГА

Одна из важных характеристик, используемых в практических приложениях, — вероятность появления фединга при метеорных радиоотражениях различной длительности. Была исследована вероятность появления фединга при рассеянии назад и вперед на двух частотах. На рис. 1 приведено в процентах отношение числа федингующих следов к общему числу метеорных радиоотражений данной длительности τ на среднеширотной трассе (1600 км) на частотах 34, 68 Мгц, а для случая радиолокации — на частотах 34, 68 Мгц. Отчетливо проявляется тенденция к увеличению вероятности появления фединга метеорного радиоотражения заданной длительности с увеличением используемой частоты излучения, а также в радиолокационном случае по сравнению с рассеянием вперед.

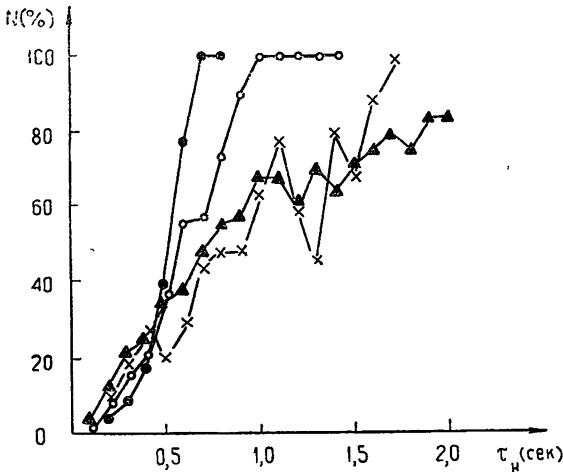


Рис. 1.

Рис. 1. Вероятность появления фединга для метеорных радиоотражений заданной длительности.

●●● — $f=68$, ○○○ — $f=34$, ××× — $f=58$, ▲▲▲ — $f=42$ Мгц.

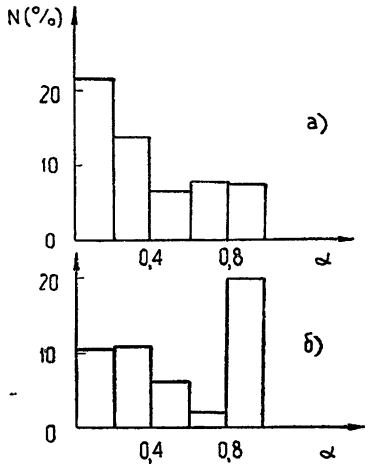


Рис. 2.

Рис. 2. Частота появления федингов с различными глубинами замираний первого фединга по недоуплотненным (а) и переуплотненным (б) следам.

На рис. 2 представлено распределение федингов с различными глубинами замираний первого периода фединга на частоте 42,3 Мгц (трасса 1600 км) по недоуплотненным (а) и переуплотненным (б) следам; $\alpha \approx 0,3$ по недоуплотненным следам, по переуплотненным — $\alpha \approx 0,6$. Отметим, что число федингующих отражений с ростом глубины замираний фединга падает, но для переуплотненных следов снова возрастает при значениях глубины замираний вблизи 1. На наш взгляд, это связано с быстрым нарастанием амплитуды в начальной стадии переуплотненного эхо, что ведет к увеличению числа регистраций с большей глубиной фединга (см. рис. 3).

На рис. 3 приведена зависимость глубины замираний первого фединга от момента его образования τ_n , который определяется следующим образом:

$$\tau_n = t_1 - \frac{t_2}{2}, \quad (1)$$

где t_1 — время от начала радиоотражения до первого минимума, t_2 — время от первого до второго минимума на амплитудно-временной характеристике метеорного радиоэхо. В табл. 1 приведены использованные данные.

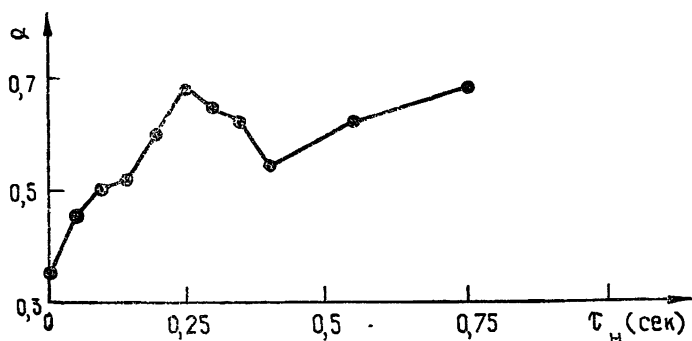


Рис. 3. Зависимость глубины замириания фединга от времени его появления.

Таблица 1

τ_n (сек)	0	0—0,05	0,05—0,10	0,10—0,15	0,15—0,20	0,20—0,25
n	33	136	97	51	42	23
τ_n (сек)		0,25—0,30	0,30—0,35	0,35—0,40	0,40—0,55	
n		19	24	24	17	

Замечен устойчивый рост глубины фединга со временем его образования, что соответствует общим представлениям о развитии фединга.

Для детального сравнения нашей экспериментальной кривой с теоретической при построении последней необходимо знать распределение метеорных следов с различными зенитными углами. Однако возможно сравнение среднего значения τ_n величины глубины замириания с теоретическим значением. При $\alpha = 0,6$ имеем $\tau_n = 0,25$ сек, что согласуется с теоретическим значением ($\tau_n = 0,22$ сек) для среднего зенитного угла 45° .

Из теории начальной стадии фединга [4] можно определить величину первого фединга. С учетом среднего минимального времени образования фединга

$$\tau_n = \frac{\lambda}{(D_{\perp\perp}(r_0))^{1/2}} \quad (2)$$

($D_{\perp\perp}(r_0)$ — поперечная структурная функция турбулентной скорости ветра, $r_0 = \sqrt{R\lambda}$ — нулевая зона Френеля, R — расстояние до следа, λ — длина рабочей волны) и первого периода фединга \bar{T}_1 , определяемого по формуле

$$\bar{T}_1 = \frac{\lambda}{2(D_{\perp\perp}(r_0))^{1/2}}, \quad (3)$$

можно найти среднее отношение первых периодов фединга на двух частотах

$$\left(\frac{\bar{T}_{1,1}}{\bar{T}_{1,2}}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left[\frac{D_{\perp\perp}(R\lambda_2)}{D_{\perp\perp}(R\lambda_1)}\right]^{1/2}. \quad (4)$$

По одновременным наблюдениям на частотах 42,3 и 57,7 МГц было получено экспериментальное значение отношения первых периодов фединга, равное $1,2 \pm 0,06$, а рассчитанное теоретически по формуле (4) с использованием данных [4, 7] о структурной функции оказалось равным 1,17. Имеющееся расхождение экспериментальных и теоретических значений находится в пределах ошибок.

Распределение федингов в зависимости от величины первых периодов приведено на рис. 4. На частоте 42,3 МГц (рис. 5 а) средний период составляет $\sim 0,27$ сек, а на частоте 57,7 МГц — $\sim 0,22$ сек.

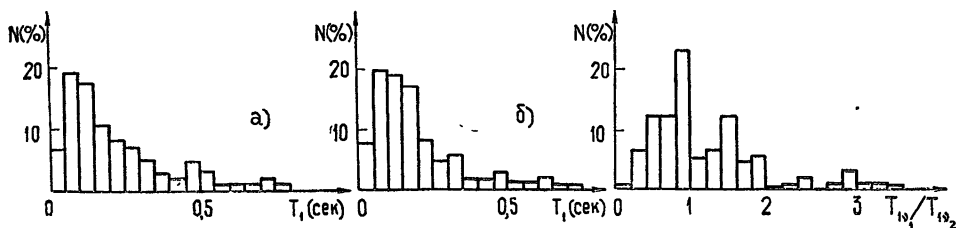


Рис. 4.

Рис. 4. Распределение федингов по величине первых периодов на частотах 42,3 МГц (а) и 57,7 МГц (б).

Рис. 5.

Рис. 5. Распределение отношений первых переходов фединга для одновременных наблюдений метеорных радиоотражений на двух частотах.

На рис. 5 изображено распределение отношений первых периодов фединга при одновременных наблюдениях на частотах 42,3 и 57,7 МГц на трассе 1600 км. Несколько больший разброс отношений, чем ожидалось, вероятно, обусловлен ошибками измерений.

СТАДИЯ РАЗВИТОГО ФЕДИНГА

Для длительных метеорных следов возможно использование спектрального анализа амплитудно-временных характеристик федингующих радиоэхо, так как к длительным метеорным следам относятся в основном переуплотненные следы, которые характеризуются медленным изменением средней амплитуды [5]. Спектральный анализ проводился методом, описанным в [6]. На рис. 6 приведен типичный вид спектра метеорного сигнала в зависимости от величины периода.

Приведенный спектральный анализ амплитудно-временных характеристик более чем трехсот метеорных радиоотражений на трассах длиной 800 км (40,3 МГц), 1600 км (42,3 и 57,7 МГц) и 1600 км (44 МГц) выявил следующие основные свойства федингующих радиоэхо.

Частотный спектр для всех радиоотражений имеет вид, как на рис. 7, т. е. спектральная плотность растет с уменьшением частоты. На рис. 8 прямой линией показана теоретическая зависимость спектральной плотности как функции квадрата частоты, полученная по формуле, справедливой для развитого фединга [4]:

$$S(f) = \frac{S_0(f)}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_*^2}\right), \quad (5)$$

где f — частота фединга, $\sigma_* = \frac{2\sqrt{b} \cos \theta}{\lambda}$, b — интенсивность турбулентности горизонтальных движений, λ — длина волны излучения, θ — угол места принятой радиоволны, отраженной от метеорного следа, $S_0(f)$ — коэффициент, определяемый в случае нормированного спектра из условия нормировки $\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_0(f) df = 1$, f_{\min} — минимальная частота фединга, определяемая из соотношения $f_{\min} = 1/\tau$, f_{\max} находится из условия $f_{\max} = 2\Delta V_{\max}/\lambda$, ΔV_{\max} — максимальная разность турбулентных скоростей.

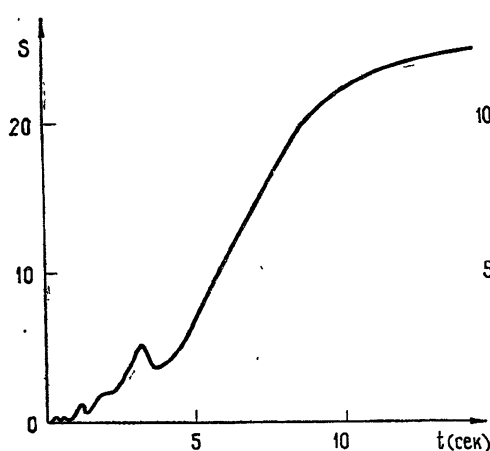


Рис. 6.

Рис. 6. Спектр эхо длительностью 36 сек. Частота 40,3 Мгц, трасса 600 км. (Здесь и далее S в условных единицах.)

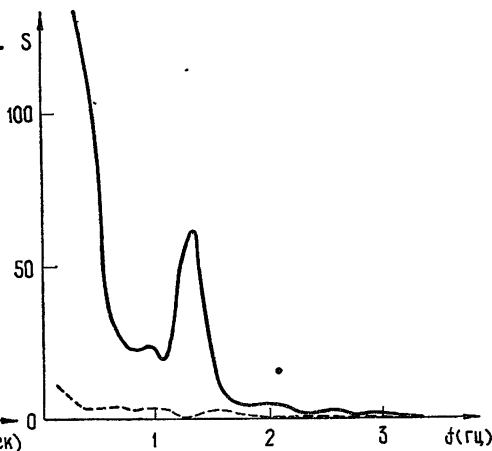


Рис. 7.

Рис. 7. Частотный спектр метеорного радиоотражения, зарегистрированный одновременно на двух частотах. Сплошная линия соответствует 42,3 Мгц, штриховая — 57,7 Мгц. Длина трассы 600 км.

Экспериментальный ход спектральной плотности близок к теоретическому. Отклонения наблюдаются для метеорных следов малой длительности, что объясняется зависимостью свойств этих федингующих радиоотражений от начальной стадии образования фединга. Область перехода, как следует из спектрального анализа, находится в интервале 0,3—1 сек, что соответствует теории.

По одновременным измерениям на двух частотах было найдено, что зависимость спектра от длины волны практически соответствует теоретической. Проверка производилась как по наклонам прямых, определяемых методом наименьших квадратов, так и по величине отсекаемых этой прямой отрезков на оси ординат (см. рис. 8), причем оба способа определения величины σ_* дают одинаковые значения. Среднее отклонение от теоретического — не более 15%.

Для индивидуальных спектров характерны некоторые отклонения в величине амплитуды на отдельных частотах фединга (см., например, максимум на рис. 7 а на частоте 1,2 гц). Это объясняется большей

амплитудой и временем существования двух «отражающих» центров метеорологического следа с постоянной разностью их скоростей перемещения по сравнению с другими. Естественно, что при этом должны наблюдаться аналогичный максимум и на другой частоте излучения, но максимум в спектре должен быть смещен в соответствии с отношением частот. Отношение частот фединга, соответствующих максимумам спектров на двух частотах излучения, равно отношению этих частот. Такое явление очень четко наблюдается во всех случаях (см. рис. 7). Усредненные спектры для метеорологических следов равной длительности показывают еще меньшие отклонения от расчетных данных, описываемых формулой (5).

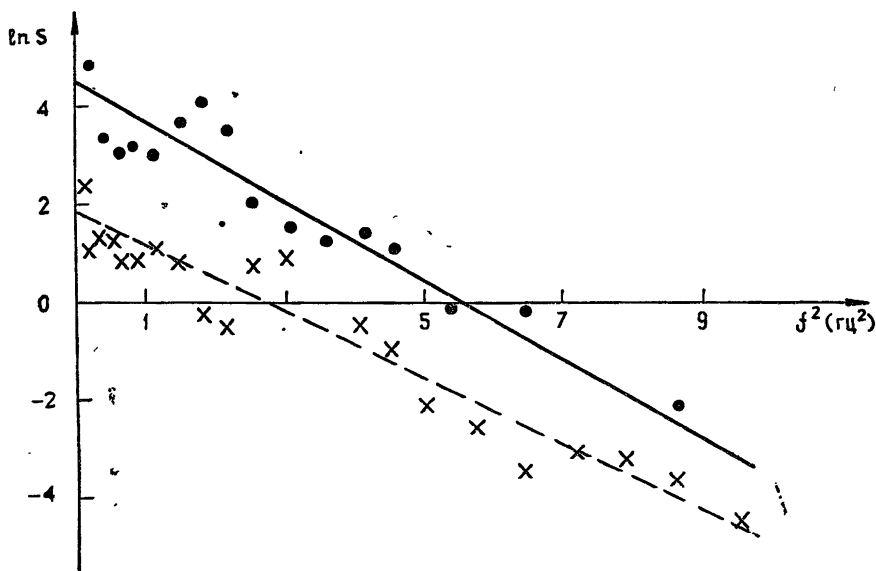


Рис. 8. Частотный спектр метеорологического радиоотражения, зарегистрированный на двух частотах, прямые линии — теоретические зависимости.

●●● — $f=42,3$, ××× — $f=57,7$ Мгц.

Зависимость от длины траектории входит в спектральную плотность (5) через $\cos \theta$. Экспериментальная проверка производилась по величине σ_* , определяемой по нормированным спектрам метеорологических радиоотражений, полученных для двух траекторий (800 и 1600 км) с близкими частотами излучения, причем выбирались месяцы с одинаковой интенсивностью турбулентности. Вместо теоретического отношения, равного 1,67, получено среднее значение 1,8, что вполне допустимо с учетом возможных расхождений в оценке величины θ . σ_* определялось одновременно двумя методами, как и выше.

Зная спектральную плотность (5) по федингующим метеорологическим радиоотражениям, можно рассчитать интенсивность турбулентных движений на метеорологических высотах. Расчеты для января и марта на основе значений σ_* , найденных по нормированным спектрам, показали хорошее согласие с результатами, полученными для этих месяцев другими методами [7, 8].

Отметим еще одну особенность. При вычислении спектров по разным частям одного и того же радиоэхо оказалось, что спектральная плотность одинакова для начальной, средней и конечной части метеорологического следа (в начальной части спектр вычислялся для времени больше 1 сек для исключения стадии образования фединга). Факт общности этих спектров говорит в пользу определяющего влияния турбулентности на федингующие метеорологические радиоотражения.

Проведенное исследование характеристик федингующих метеорных радиоотражений приводит к следующим основным выводам. Доля федингующих радиоэхо при данной длительности заметно зависит от длины волны излучения и существенно отличается в случае рассеяния вперед и назад.

Полученные характеристики для глубины первого фединга и отношения первых периодов при одновременных наблюдениях на двух частотах показало, что теоретические характеристики стадии образования фединга находятся в соответствии с экспериментом.

Исследование спектральных характеристик федингующих метеорных радиоотражений свидетельствует о хорошем согласии с теоретической зависимостью, которая близка к аналогичной зависимости для сигнала, рассеянного ионосферой [9]. Основное различие метеорного спектра сигнала, отраженного от метеорного следа, по сравнению с рассеянным ионосферой объясняется тем, что при выводе вида спектральной плотности для метеорных радиоэхо пренебрегали влиянием среднего вертикального градиента скорости по сравнению с турбулентными, что вполне обосновано, если учесть результаты радиометеорных наблюдений скорости ветра [8]. Второе важное отличие заключается в ограничении нижней границы частотного спектра метеорного радиоотражения, связанного с длительностью метеорного радиоэхо.

Все вышесказанное с учетом результатов экспериментальной проверки других количественных характеристик [4, 10] федингующего метеорного радиоотражения в стадии образования указывает на лучшее согласие с теорией фединга метеорного радиоэхо, основанного на турбулентных представлениях, чем теория «бликов» Маннинга [3]. Это позволяет получить полное описание ряда количественных характеристик федингов, необходимых для прогнозирования метеорного распространения радиоволн и других задач. В частности, возможно определение интенсивности турбулентных движений по спектрам федингующих метеорных радиоотражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. S. Greenhow, Proc. Phys. Soc. Lond. (B), **65**, 169 (1952).
2. Д. Мак-Кинли, Методы метеорной астрономии, изд. Мир, М., 1964.
3. L. A. Mapping, J. Geophys. Res., **64**, № 10, 14 (1959).
4. Г. М. Тептин, сб. Метеорное распространение радиоволн, вып. 9, изд. КГУ, Казань, 1972, стр. 58.
5. J. R. Kaiser, R. Z. Closs, Phil. Mag., **43**, № 7 (1952).
6. J. B. Blackman, I. W. Tuskey, Measurement of power spectra, Dover publications, N. Y., 1958.
7. Г. Б. Покровский, Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, **7**, № 6, 662 (1971).
8. Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, **7**, № 3, 243 (1972).
9. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
10. В. И. Бойков, Р. А. Курганов, сб. Метеорное распространение радиоволн, вып. 8, изд. КГУ, Казань, 1971, стр. 30.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
2 августа 1971 г.

INVESTIGATION OF FADING RADIO REFLECTIONS FROM METEOR TRACKS. I

G. M. Teptin, A. N. Fakhrutdinova

The analysis is made of the experimental material on fading meteor radio reflections measured on the trace 800, 1600 km at the frequencies of 40.3, 42.3, 57.7, 44 Mc/s and on radar data at the frequencies of 34 and 68 Mc/s. The experimental statistical characteristics of meteor radio reflections at the stages of fading formation and development are given.

The obtained qualitative characteristics are in good agreement with the fading theory based on turbulent ideas.

УДК 534.222.2

НЕЛИНЕЙНЫЙ МАГНИТНЫЙ ЗВУК В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Л. А. Островский, Н. Р. Рубаха

Рассматривается эволюция быстрых и медленных магнитозвуковых волн конечной амплитуды, распространяющихся по направлению силы тяжести при произвольной ориентации магнитного поля. В коротковолновом приближении изучено влияние неоднородности среды на процессы образования и диссипации ударных волн.

В данной работе исследуются некоторые нелинейные эффекты, связанные с распространением магнитозвуковых волн в неоднородной сжимаемой среде. Подобные задачи имеют ряд важных приложений, в частности, для космической плазмы. Так, при анализе динамики нагревания хромосферы и короны Солнца ударными волнами [1, 2], распространения в них (и, возможно, в верхней атмосфере Земли) возмущений от локальных вспышек и взрывов и т. д. учет магнитного поля во многих случаях имеет определяющее значение. До сих пор попытки количественного анализа таких процессов (если не считать грубых оценок) проводились либо в линейном приближении [3, 4], либо без учета магнитного поля [6].

Рассмотрим здесь плоские магнитозвуковые волны в идеально проводящей среде, находящейся в поле тяжести и постоянном магнитном поле. Направление распространения совпадает с направлением ускорения силы тяжести $\mathbf{g} = (-g\mathbf{x}_0)$. Постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 имеет две компоненты: $\mathbf{H}_0 = (H_{0x}, H_{0y}, 0)$. При этом все равновесные параметры среды зависят только от x , и уравнения магнитной гидродинамики запишутся в одномерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{H_y}{4\pi\rho} \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -g, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{H_x}{4\pi\rho} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} + u \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y \frac{\partial u}{\partial x} - H_x \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + c^2 \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где, как обычно, u , v — x - и y -компоненты скорости частиц соответственно, p — давление, ρ — плотность, $H_x = H_{0x} = \text{const}$.

Для однородной среды ($g = 0$, $H_{0y} = \text{const}$) бегущие магнитозвуко-

вые* волны описываются римановским решением (простая волна), для которого [7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a + u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (2a)$$

$$\frac{dp}{du} = c^2 \frac{d\rho}{du} = \frac{c^2 \rho}{a}, \quad \frac{dv}{du} = -\frac{H_x}{H_y} \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right), \quad (2б)$$

$$\frac{dH_y}{du} = \frac{4\pi\rho}{H_y} \left(\frac{a^2 - c^2}{a} \right),$$

где $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$, скорость a может принимать два значения a_+ и a_- , соответствующие быстрой и медленной магнитозвуковым волнам, а именно

$$a_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(c^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \pm \sqrt{\left(c^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho} \right)^2 - \frac{c^2 H_x^2}{\pi\rho}} \right), \quad (3)$$

где $H^2 = H_x^2 + H_y^2$. Ясно, что ввиду зависимости a от H и ρ такие волны искажаются, но на фиксированной характеристике $\frac{dx}{dt} = a + c$ все величины постоянны.

Вернемся к случаю неоднородной среды. Равновесные значения, очевидно, описываются уравнениями**

$$c^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} = -g\rho_0, \quad \frac{\partial H_{0y}}{\partial x} = 0, \quad u_0 = v_0 = 0. \quad (4)$$

Будем рассматривать малые, но конечные по амплитуде возмущения, длина которых мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности среды. Тогда здесь (как это ранее было сделано для обычного звука [9]) можно искать решение в виде квазиплоских волн, медленно изменяющихся на характеристиках, т. е. вместо (2) записать

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a + u) \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(u, x); \quad (5a)$$

$$\rho = \tilde{\rho}(u, x) + \psi_1(u, x), \quad v = \tilde{v}(u, x) + \psi_2(u, x), \quad (5б)$$

$$H_y = \tilde{H}_y(u, x) + \psi_3(u, x), \quad p = \tilde{p}(u, x) + \psi_4(u, x),$$

где $\tilde{\rho}$, \tilde{v} , \tilde{H}_y , \tilde{p} определяются из уравнений (2б), интегрируемых при постоянном x . Искомыми здесь являются малые функции φ и ψ , причем явная зависимость от x в (5б) считается медленной.

Подставляя (5б) в (1), учитывая (5а) и пренебрегая производными от φ , ψ по явно входящему x , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно φ и $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ (ср. [9]), которую мы не приво-

* Мы не рассматриваем альвеновских волн с вращающейся поляризацией, распространяющихся вдоль магнитного поля, так как для них нелинейность возникает в более высоком порядке по амплитуде, чем в магнитозвуковых.

** Исключение составляет случай $H_{0x} = 0$, когда H_{0y} не обязательно однородно. Обобщение полученных ниже решений на случай неоднородного горизонтального поля не представляет трудностей (ср. [8]).

дим вследствие ее громоздкости. Разрешая ее относительно φ и учитывая малость нелинейности (т. е. $u, v, \rho' = \rho - \rho_0(x), p' = p - p_0(x), H'_y = H_y - H_{0y}$ считаем малыми того же порядка, что и производные по x от медленных величин и оставляем члены порядка не выше второго), в результате получим

$$\varphi = \frac{a_0}{q} \frac{dq}{dx}, \quad (6)$$

$$q(x) = \left\{ a_0 \rho_0 \left[1 + \frac{H_{0x}^2}{H_{0y}^2} \left(1 - \frac{c_0^2}{a_0^2} \right)^2 \right] \right\}^{-1/2}.$$

Следовательно, при малой нелинейности задача сводится к интегрированию уравнения первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [a_0(x) + b(x)u] \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_0(x)}{q(x)} \frac{dq}{dx}, \quad (7)$$

где, как следует из (3),

$$b(x) = \frac{1}{a_0} \left[\frac{\partial(a_0 \rho_0)}{\partial \rho_0} + \frac{4 \pi \rho_0 (a_0^2 - c_0^2)}{H_{0y}} \frac{\partial a_0}{\partial H_{0y}} \right]. \quad (8)$$

Остальные функции v, ρ', H'_y ведут себя аналогичным образом и в первом приближении определяются через u формулами линейной теории; нахождение $\psi_{1,2,3,4}$ необходимо лишь для поправок следующего приближения.

Интегралом (8) является квазипростая волна вида

$$t - \int_0^x \frac{dx'}{a_0(x')} + \frac{u}{q(x)} \int_0^x \frac{bq}{a_0^2} dx' = F\left(\frac{u}{q}\right), \quad (9)$$

где F — произвольная функция. Амплитуда волны (9), очевидно, пропорциональна q .

В некоторой точке $x = x_*$ нелинейность приводит к образованию разрыва. Координата x_* без труда определяется из (9) и условий $\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0$,

$\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} = 0$, где $\alpha = u/q$ [10]. В дальнейшем мы конкретизируем вид функции F ,

задавая синусоидальное граничное условие

$$u(0, t) = u_m \sin \omega t, \quad (10)$$

тогда

$$F(\alpha) = \frac{1}{\omega} \text{Arcsin}(\alpha/u_m). \quad (11)$$

В этом случае разрыв образуется при $u = u_* = 0$ в точке $x = x_*$, удовлетворяющей уравнению

$$\int_0^{x_*} \frac{bq}{a_0^2} dx' = \frac{1}{\omega u_m}. \quad (12)$$

В области $x > x_m$ уравнение (8) должно быть дополнено граничными условиями на скачке.

Рассмотрим здесь два типа возмущений: а) непрерывная синусоида (10); б) «синусоидальный» импульс, имеющий вид (10) на интервале $0 \leq t \leq T = \pi/\omega$ в предположении, что вне этого интервала возмущение равно нулю. В первом случае возникает симметричный разрыв (соединяющий значения $u = \pm u_s$), скорость которого в данном приближении равна a_0 . При этом зависимость амплитуды слабого разрыва от x дается уравнением

$$\int_{x_*}^x \frac{bq}{a_0^2} dx' = \frac{1}{\omega u_m} \left(\frac{\text{Arcsin } \beta_s}{\beta_s} - 1 \right), \quad (13)$$

где $\beta_s = \frac{u_s}{qu_m}$; значение $\text{Arcsin } \beta$ берется в интервале $(0, \pi/2)$ до достижения скачком максимального значения qu_m , а при дальнейшем затухании скачка $\text{Arcsin } \beta$ лежит в интервале $(\pi/2, \pi)$.

В случае б) разрыв изменяет u от 0 до u_s ; скорость его равна $a_0 + bu_s/2$, и вместо (13) имеем явную формулу

$$\beta_i = \frac{(2\omega u_m X(x))^{1/2}}{1 + \omega u_m X(x)}, \quad X(x) = \int_{x_*}^x \frac{bq}{a_0^2} dx'. \quad (14)$$

Здесь также $\beta_i = u_s/qu_m$, но u_s — полная величина скачка.

Ясно, что в случае а) скачок диссипирует быстрее, так как его положение в волне фиксировано, тогда как в случае б) скачок «убегает» от следующей за ним простой волны.

Формулы (9) — (14) аналогичны известным соотношениям для немагнитного звука и справедливы как для быстрых, так и для медленных волн, изменяется лишь выражение для a_0 . Чтобы получить простые аналитические выражения, конкретизируем задачу следующим образом. Рассмотрим изотермическую среду (атмосферу), тогда $\rho_0(x) = \rho_0(0) \exp(-x/h)$, где $h = c_0^2/\gamma g$ — действующая высота атмосферы. Среда считается идеальным газом, т. е. $(p/\rho_0) = (p/\rho_0)^i$. Предположим далее, что магнитное поле достаточно велико, так что выполняется неравенство

$$c_0^2 \ll \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}. \quad (15)$$

Заметим, что это условие естественно считать выполненным, в частности, для больших высот ввиду резкого падения плотности с высотой*.

При условии (15) для параметров уравнения (9) получаются простые приближенные выражения

$$a_{0+}^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}, \quad a_{0-}^2 = c_0^2 \cos^2 \sigma; \quad (16)$$

$$b_+ = 3/2, \quad b_- = \frac{\gamma + 1}{2}; \quad (17)$$

$$q_+ = \exp(x/4h), \quad q_- = \exp(x/2h), \quad (18)$$

где σ — угол наклона вектора H_0 к оси x . Следовательно, изменение

* Так, в атмосфере Солнца условие (15) выполняется (даже в спокойных областях) для верхних слоев хромосферы и в короне [1, 2].

амплитуды u при $x < x_*$, пропорциональное q , ни в быстрой, ни в медленной волне не зависит от σ .

Теперь нетрудно вычислить из (12) координаты образования разрывов в быстрой и медленной волнах:

$$x_*^{(+)} = \frac{4}{3} h \ln \left(1 - \frac{3}{4} \frac{X_*^{(+)}}{h} \right)^{-1}; \quad (19)$$

$$x_*^{(-)} = 2 h \ln \left(1 + \frac{X_*^{(-)}}{2h} \right). \quad (20)$$

Здесь $X_*^{(+)} = 2 a_0^2(0)/3 \omega u_m$, $X_*^{(-)} = 2 c_0^2 \cos^2 \alpha / (\gamma + 1) \omega u_m$ — расстояния, на которых образуется разрыв в однородной среде.

На рис. 1 приведены зависимости координаты образования разрыва от высоты атмосферы для быстрой и медленной волн (величины отнесены к $X_*^{(+)}$ для быстрой волны и к $X_*^{(-)}$ для медленной). Как видно из (19), при распространении вверх всегда $x_*^{(+)} > X_*^{(+)}$, и если

$$h < \frac{a_0^2(0)}{2 \omega u_m}, \quad (21)$$

то быстрая ударная волна вообще не возникает. Это связано с неограниченным ростом скорости быстрой волны из-за уменьшения $\rho_0(x)$, так

что время $\tau = \int_0^{\infty} dx/a_0(x)$ ухода вол-

ны на бесконечность в рамках изотермической модели атмосферы остается конечным. Наоборот, для медленной волны всегда $x_*^{(-)} < X_*^{(-)}$, т. е., как и для обычного звука, при распространении вверх неоднородность способствует нелинейным искажениям из-за роста амплитуды u_m (числа Маха) в волне; при распространении же вниз ($h < 0$) и $X_*^{(-)} \geq 2|h|$ медленный разрыв не возникает вообще.

В этом приближении нетрудно также проследить за развитием и затуханием ударной волны в соответствии с формулами (13) или (14).

Для амплитуды знакопеременной волны из (13) получаем формулы, определяющие зависимость u_s от x :

$$\text{Arcsin } \beta_s^{(+)} = \beta_s^{(+)} \frac{4h}{3X_*^{(+)}} \left(1 - \exp \left(-\frac{3}{4} \frac{x}{h} \right) \right); \quad (22a)$$

$$\text{Arcsin } \beta_s^{(-)} = \beta_s^{(-)} \frac{2h}{X_*^{(-)}} \left(\exp \left(\frac{x}{2h} \right) - 1 \right). \quad (22b)$$

Для импульса же из (14) следует:

$$\beta_i^{(+)} = \frac{\sqrt{\frac{3X_*^{(+)}}{h} \left(1 - \frac{3X_*^{(+)}}{4h} - \exp \left(-\frac{3x}{4h} \right) \right)}}{\left(1 - \exp \left(-\frac{3x}{4h} \right) \right)}; \quad (23a)$$

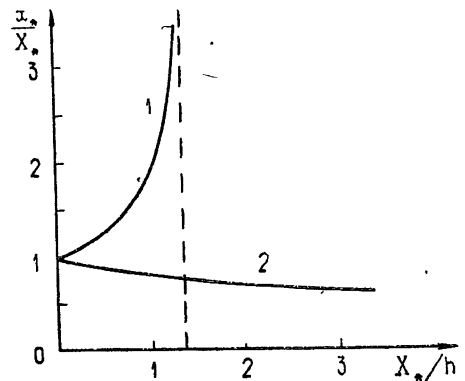


Рис. 1.
1—быстрая, 2—медленная волна.

$$\beta_i^{(-)} = \frac{X_*^{(-)}}{h} \frac{\sqrt{\frac{2h}{X_*^{(-)}} \left(\exp\left(\frac{x}{2h}\right) - 1 \right) - 1}}{\left(\exp\left(\frac{x}{2h}\right) - 1 \right)}. \quad (23б)$$

По этим формулам сразу определяется амплитуда ударной волны ($u_s \sim q\beta$) в различных случаях. Отметим здесь различия в асимптотическом поведении разрывов при $x \rightarrow \infty$ ($h > 0$). Для быстрых волн, как ясно из (22 а) и (23 а), величины $\beta_s^{(+)}$ и $\beta_i^{(+)}$ стремятся к некоторым конечным значениям. При этом, согласно (18), u_s и u_i экспоненциально растут пропорционально q_+ , как и в линейном случае. Конечность β при $x \rightarrow \infty$ (связанная с отмеченным выше «ускорением» волны) означает здесь, что профиль волны не становится линейным, как это всегда имеет место в однородной среде [10], а длительность импульса в случае (23 б) остается конечной.

Для медленных волн β экспоненциально падает при $x \rightarrow \infty$ как $\exp(-x/2h)$ для (22 б) и $\exp(-x/4h)$ для (23 б). Тогда $u_s \rightarrow u_m X_*^{(-)}/2h$, $u_i \rightarrow u_m \sqrt{2X_*^{(-)}/h} \exp(x/4h)$, т. е. в знакопеременной волне затухание разрыва полностью компенсирует нарастание амплитуды и из-за неоднородности (причем $u_s(x \rightarrow \infty)$ не зависит от u_m), а в импульсе затухание происходит медленнее, и амплитуда скачка растет.

Следует отметить, что формулы, полученные выше для медленных волн при условии (15), совпадают по виду с соответствующими формулами для немагнитного звука [9, 11], но с заменой $c \rightarrow c \cos \sigma$, причем увеличение σ ведет к более быстрому образованию разрыва и энергия волны диссипирует на меньших расстояниях, чем при $\sigma = 0$.

По известному решению для u из (2 б) находятся остальные величины, причем в данном приближении можно пренебречь всеми нелинейными поправками. Например, в быстрой волне (при условии (15)) возмущение H'_y магнитного поля равно $u \sqrt{4\pi\rho_0/\sin \sigma}$; если при $x = 0$ вместо u_m задана амплитуда H'_y , то в полученных решениях u_m пропорционально $\sin \sigma$. Амплитуда H'_y в неоднородной среде меняется иначе, чем u ; в частности, при движении вверх как в простой волне, так и на разрыве при $x \rightarrow \infty$ величина $(H'_y)_{\max}$ пропорциональна $\exp(-x/4h)$.

В заключение выражаем признательность Е. Н. Пелиновскому за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Пикельнер, М. А. Лившиц, Астрон. ж., **41**, 1007 (1964).
2. M. J. Lighthill, Aerodynamic phenomena in stellar atmospheres (5th Symposium on cosmical gas dynamics), Academic Press, London—New York, 1967, p. 429.
3. V. C. Ferraro, S. Plumpton, Astrophys. J., **127**, 459 (1958).
4. Б. А. Тверской, Докл. АН СССР, **144**, 338 (1962).
5. J. Vager, J. Hurley, J. Geophys. Res., **68**, 147 (1963).
6. С. А. Каплан, Л. А. Островский, Солнечные данные, № 6, 53 (1963).
7. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, ГИФМЛ, М., 1962.
8. N. Asano, T. Tanuti, J. Phys. Soc. Japan, **29**, 209 (1969).
9. Л. А. Островский, ПММ, **27**, 924 (1963).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
11. Н. Н. Романова Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, **6**, 134 (1970).

NONLINEAR MAGNETIC SOUND IN THE GRAVITATIONAL FIELD

L. A. Ostrovskii, N. R. Rubakha

The evolution of fast and slow magneto-sound waves of the finite amplitude propagating in the direction of the gravity force at the arbitrary orientation of the magnetic field is considered. In the shortwave approximation the influence of the medium inhomogeneity on formation and dissipation of shock waves is investigated.

УДК 621.371.25

О ВЛИЯНИИ СУЩЕСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРНОГО СЛОЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВ

С. Т. Рыбачек

Результаты настоящей работы иллюстрируют наличие области в нижней ионосфере, оказывающей существенное влияние на фазовые скорости и затухание нормальных волн. Изучается зависимость границ этой области от точности определения собственных значений, частоты и профилей $N(r)$ и $v_{эфф}(r)$.

Особенности процессов распространения СДВ, обсуждаемые в настоящей работе, были получены при изучении ряда дневных моделей волновода Земля — ионосфера [1, 2]. Ниже мы, следуя обозначениям [1], будем рассматривать сферически слоистую среду, состоящую из Земли, атмосферы ($k = \text{const}$) и изотропной ионосферы ($k = k_i(r)$). На границе Земля — атмосфера ($r = a$) задаются граничные условия импедансного типа, а на границе атмосфера — ионосфера ($r = c$) — строгие граничные условия, вытекающие из требования непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей.

Дифференциальное уравнение для радиальных функций некоторой заменой функций [1] сводилось к уравнению Рикатти

$$\frac{dy}{dr} = \epsilon'_i + \left[k^2 - \frac{v^2 - 1/4}{r^2 \epsilon'_i} \right] y^2, \quad (1)$$

в котором функция y должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности. Связь между функцией y и коэффициентом отражения от ионосферы задается соотношением

$$R_{\nu-1/2} = \frac{\zeta_{\nu-1/2}^{(2)}(kc)}{\zeta_{\nu-1/2}^{(1)}(kc)} \frac{\zeta_{\nu-1/2}^{(1)'}(kc) - [1/ky(c)]\zeta_{\nu-1/2}^{(1)}(kc)}{-\zeta_{\nu-1/2}^{(2)'}(kc) + [1/ky(c)]\zeta_{\nu-1/2}^{(2)}(kc)}.$$

При произвольной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости ϵ'_i от r решения (1), выраженного через известные аналитические функции, не существует. Нами были использованы численные методы для определения сферического импеданса $\delta_i = \frac{-i}{ky(c)}$ и собственных значений рассматриваемой граничной задачи [1, 2]. Эти методы, в рамках принятой модели, позволяют вычислять фазовые скорости и затухания нормальных волн с любой требуемой точностью. Однако при использовании экспериментальных и ионосферных профилей электронной концентрации N и эффективного числа соударений $v_{эфф}$ для расчета полей СДВ возникает ряд трудностей. Последние связаны с заданием положения границы атмосфера — ионосфера ($r = c$) и толщины ионосферного слоя, в котором учитываются локальные отражения.

Значения минимальной электронной концентрации, известные из эксперимента, лежат в области десятков, а иногда и сотен электронов в $см^3$. Если границей ионосферы в этом случае считать высоту, соответствующую N_{min} , то математический расчет будет соответствовать отражению от ионосферного слоя со скачком N , которого на самом деле нет. В связи с этим возникает вопрос о том, с какой точностью надо знать нижнюю часть профиля N , чтобы обеспечить требуемую точность в собственных значениях.

Чтобы ответить на этот вопрос, были проведены расчеты собственных значений для ряда профилей N при задании различных положений нижней границы ионосферного слоя.

В качестве примера на рис. 1 приводятся результаты таких расчетов для частоты 10 кГц. Соответствующий профиль $N(r)$ изображен на рис. 2 (профиль близок к кривой для $\chi = 15,5^\circ$ работы [3]), а зависимость $\nu_{эфф}$ от высоты ионосферного слоя аппроксимировалась формулой [4]

$$\nu_{эфф} = \nu_{эфф}^0 \exp(22,052 - 0,148 (\kappa м^{-1})h),$$

в которой мы положили $\nu_{эфф}^0 = 32 \text{ сек}^{-1}$.

Расчеты были проведены для морской трассы. Величина h на этом рисунке имеет смысл границы атмосфера — ионосфера, отсчитанной от уровня $r = a$. Сплошная кривая соответствует $\frac{\Delta \text{Re } \nu_0}{ka}$, а пунктирная —

$\Delta \text{Im } \nu_0$ — абсолютным погрешностям, возникающим при учете локальных отражений от слоя, расположенного выше h . (Заметим, что в собственных значениях при этом получается максимальная погрешность по сравнению с другими возможными экстраполяциями N на более низкие высоты.) $\frac{\text{Re } \nu_0}{ka}$ имеет смысл отношения скорости света к фазовой скорости, а $\text{Im } \nu_0$ — затухания нулевой моды.

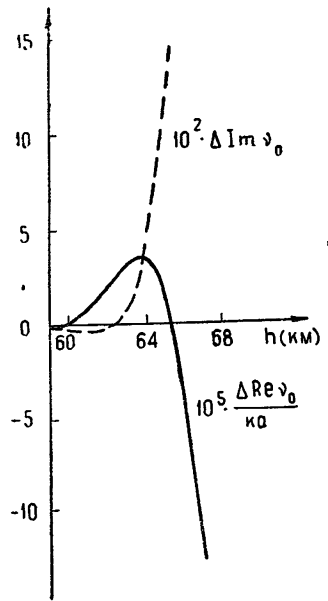


Рис. 1.

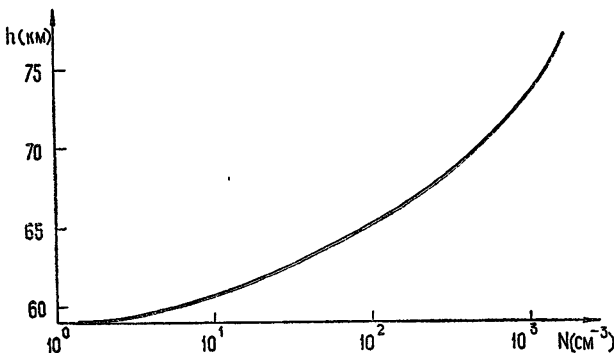


Рис. 2.

Из рис. 1 следует, что если определять собственные значения с точностью $\frac{\Delta \operatorname{Re} \nu_0}{ka} = \pm 5 \cdot 10^{-5}$ и $\Delta \operatorname{Im} \nu_0 = \pm 5 \cdot 10^{-2}$, то расчеты с любым h от 59 до 64 км дают один и тот же результат. Следовательно, можно ввести некоторую эффективную границу. Поскольку собственные числа являются немонотонными функциями h , то границей атмосфера — ионосфера на данной частоте мы будем называть минимальное значение h , при котором собственные значения получены с фиксированной точностью. Определенная таким образом граница будет, естественно, зависеть от профилей N и $\nu_{эфф}$, а также от частоты и точности определения собственных значений.

В качестве верхнего предела при интегрировании уравнения Рикати (1) мы берем значение границы $r = c + \Delta h$, выше которой среду можно считать однородной. Математически эта граница соответствует максимальному значению h , при котором собственные значения получены с некоторой фиксированной точностью. Рис. 3 иллюстрирует выбор верхней границы для тех же параметров волновода.

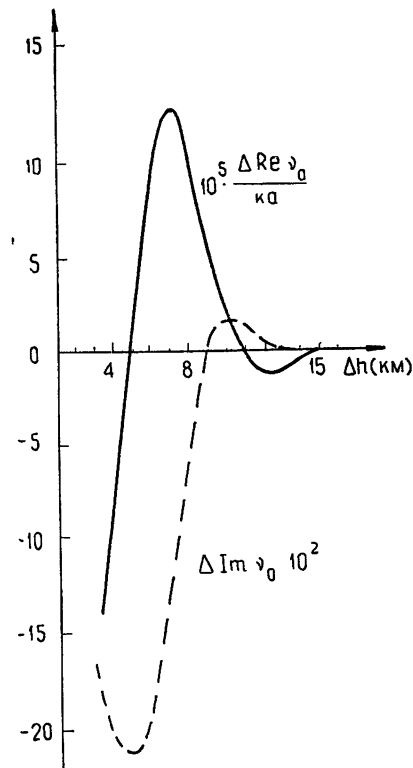


Рис. 3.

Таким образом, при расчете полей СДВ для неоднородной по радиальной координате ионосферы существенное влияние на них оказывает некоторая область в ионосфере, образованная двумя границами — $r = c$ и $r = c + \Delta h$. Толщина этой области зависит от точности определения собственных значений, частоты, а также профилей $N(r)$ и $\nu_{эфф}(r)$. Характерные зависимости верхней и нижней границы от частоты, определенные по абсолютной погрешности в собственных значениях, приводятся на рис. 4 а. При уменьшении точности определения собственных значений толщина слоя Δh уменьшается, но характер зависимости границ от частоты сохраняется. Нижняя граница имеет характерный максимум в области частот 8 ÷ 12 кГц, а верхняя — минимум в более высокочастотной области рассматриваемого диапазона (5 ÷ 60 кГц).

Из приведенных на графике зависимостей следует, во-первых, что существует диапазон частот (для рассматриваемого профиля, например, — 10 ÷ 16 кГц), для которых размеры существенной области по высоте не превышают 2—3 км при точности $\Delta \nu = \pm 10^{-1}$ и 5—6 км при точности $\Delta \nu = \pm 5 \cdot 10^{-2}$. Во-вторых, удаление от этого диапазона как в сторону более низких, так и в сторону более высоких частот приводит к увеличению существенной области. Графики на рис. 4 б иллюстрируют изменение существенной области при изменении градиента $\frac{N}{\nu_{эфф}}$ в 3 раза. Уменьшение градиента приводит к тому, что размеры существенной области увеличиваются, а ее положение по высоте сдвигается в сторону

больших концентраций. При этом положение верхней границы меняется более заметно по сравнению с нижней.

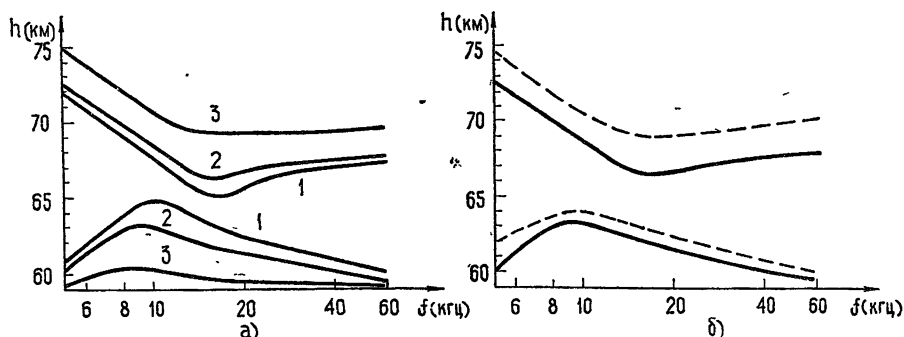


Рис. 4. а) 1— $\Delta\nu = \pm 10^{-1}$; 2— $\Delta\nu = \pm 5 \cdot 10^{-2}$; 3— $\Delta\nu = \pm 5 \cdot 10^{-3}$;
б) ——— $\nu_{эфф}^0 = 32 \text{ сек}^{-1}$; - - - $\nu_{эфф}^0 = 95 \text{ сек}^{-1}$;
 $\Delta\nu = \pm 5 \cdot 10^{-2}$.

Полученные результаты можно использовать при решении так называемой обратной задачи о восстановлении профиля $N_i(r)$ по известным собственным значениям. При этом следует отметить два момента. Во-первых, в рассматриваемом диапазоне (5—60 кГц) нельзя восстановить части профиля выше и ниже существенной области, которая определяет точность задания собственных значений. Во-вторых, при использовании экспериментальных данных надо принимать во внимание то, что их точность, как правило, не превышает $\Delta\nu = \pm 10^{-1}$, а сам эксперимент проводится в низкочастотном диапазоне, где справедливо одномодовое представление. Если ионосферный слой при этом моделировать профилем, отнесенным к высоте $\sim 60 \text{ км}$, то размеры существенной области на частотах 8—12 кГц составляют всего лишь несколько километров. В этом случае с физической точки зрения лучше ставить задачу о восстановлении эффективной проводимости.

Рассмотренные выше границы существенной области определялись одновременно по фазовой скорости и затуханию нормальной волны. Существенные области, определенные отдельно по затуханию и по фазовой скорости, вообще говоря, различны. Как правило, они пересекаются, но существует диапазон частот, где они разделены по высоте ($\sim 15 \text{ кГц}$ для рассматриваемого профиля), так что фазовая скорость определяется слоями ионосферы с более низкой концентрацией по сравнению с затуханием.

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить Г. И. Макарова и В. В. Новикова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Т. Рыбачек, Геомagnetизм и аэрономия, 8, № 3, 493 (1968).
2. С. Т. Рыбачек, Э. М. Гюннинен, Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 6, 115 (1968)
3. R. A. Smith, T. N. R. Cooney, R. G. Loch, J. A. Bourne, Conference Proceedings, 1—15 April 1966, 1, 1967, p. 335.
4. M. J. Nicolet, J. Atm. Terr. Phys., 3, 200 (1953).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
1 февраля 1972 г.

THE INFLUENCE OF BASIC REGION OF IONOSPHERIC LAYER ON PROPAGATION CHARACTERISTICS

S. T. Rybachek

The results of the present paper show the presence of the region in the lower ionosphere having a considerable effect on phase velocities and damping of normal waves. The dependence of this region boundaries on the accuracy of determining the eigen values, the frequency and profiles $N(r)$ and $\nu_{эфф}(r)$ is investigated.

УДК 621.371.25

ЭФФЕКТЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ИОНОСФЕРЕ

Е. Б. Крохмальников, Г. К. Солодовников

В приближении геометрической оптики исследуется ряд эффектов, имеющих место при распространении радиоволн в трехмерно-неоднородной магнитоактивной нестационарной ионосфере. Ионосферные эффекты для случая УКВ описываются приближенными формулами, полученными при решении дифференциальных уравнений луча с учетом магнитного поля. Приведены количественные оценки влияния магнитного поля Земли на распространение радиоволн в ионосфере.

Повышение требований к точности радиофизических исследований околоземного и космического пространства и измерений параметров движения космических объектов вызвало практическую необходимость использовать для этих целей более точные формулы эффектов с детальным учетом особенностей строения реальной среды.

В последние годы появились работы [1-4], в которых при ряде упрощающих допущений с учетом геомагнитного поля получены приближенные формулы для некоторых эффектов и оценено влияние магнитного поля на них. Выражения для фазового запаздывания и угла рефракции с учетом членов второго порядка малости в сферически-слоистой ионосфере с радиальным геомагнитным полем получены в [1]. Анализу возможностей учета поправок на члены второго порядка малости в методиках, использующих для исследования ионосферы фарадеевский угол поворота плоскости поляризации, посвящены работы [2, 3]. В [4] на основе измерений эффекта Доплера на трех когерентных частотах получена экспериментальная оценка вклада слагаемых второго порядка малости в выражение для доплеровского смещения частоты.

Однако в этих работах отсутствует рассмотрение ионосферных эффектов при достаточном общих предположениях о свойствах ионосферы (трехмерно-неоднородная магнитоактивная нестационарная).

Цель данной статьи—по возможности заполнить этот пробел.

В качестве исходного соотношения воспользуемся основным уравнением геометрической оптики—уравнением эйконала. В трехмерно-неоднородной магнитоактивной ионизированной среде, временные изменения в которой обусловлены не только нестационарными процессами, но и движением среды как целого относительно наблюдателя, уравнение эйконала и соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений луча имеют вид

$$(\nabla\Psi)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(r(t), \Delta\Psi, \omega, t); \quad (1)$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{v_{rp}}{v_{rp}}, \quad \frac{dk}{ds} = \frac{\omega}{c} \nabla n \cos \mu, \quad \frac{dt_{rp}}{ds} = \frac{1}{v_{rp}},$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{\omega}{c} n \cos \mu - \frac{\omega}{v_{гр}}, \quad \frac{d\omega}{ds} = -\frac{dkV}{ds} - \frac{\omega}{c} \cos \mu \frac{dn}{dt}, \quad (2)$$

где V — вектор скорости среды (излучателя) относительно наблюдателя; r — радиус-вектор текущей точки на луче; $v_{гр}$ — вектор групповой скорости; $k = \nabla\varphi$ — волновой вектор, $\cos \mu = \cos(\hat{v}_{гр} k)$, $t_{гр}$ — групповое время распространения, ds — элемент траектории луча, $n = \sqrt{1 + \alpha_{о,н}}$ — коэффициент преломления среды для обыкновенной волны (индекс «о») и необыкновенной (индекс «н»).

Последнее уравнение в (2) определяет изменение частоты сигнала (доплеровское смещение частоты), вызванное движением источника излучения (среды) и свойствами среды.

При соблюдении хорошо выполняющихся в реальной квазистационарной ионосфере (см. [5], стр. 507) условий

$$\frac{dn}{dt} \frac{1}{\omega} \ll n, \quad \frac{dn}{d\omega_0} (\omega - \omega_0) \ll n, \quad (2a)$$

где ω_0 — излучаемая частота, пространственное поведение луча будут описывать уравнения

$$\frac{dr}{ds} = \frac{v_{гр}}{v_{гр}}, \quad \frac{dk}{ds} = \frac{\omega_0}{c} \nabla n \cos \mu, \quad (3)$$

которые теперь независимы от остальных уравнений системы (2). Другими словами, при выполнении условий (2 а) влиянием временных изменений среды на пространственную траекторию луча можно пренебречь. Естественно, что при определении эффекта смещения частоты временные изменения будут играть существенную роль. Если удастся проинтегрировать уравнения (3), то функции $t_{гр}$, Ψ , ω определятся при помощи квадратур из (2).

Займемся далее решением уравнений (3). Введем в рассмотрение геоцентрическую сферическую систему координат (r, φ, λ) , у которой полярная ось z направлена в точку наблюдения A (рис. 1). Тогда с учетом равенств $k = (\omega_0/c) p$, $ds = [(dr)^2 + (rd\varphi)^2 + (r \cos \varphi d\lambda)^2]^{1/2}$ и выражений для $v_{гр}$, $\cos \mu$ (см., например, [5]) из (3) получим систему уравнений, где в качестве независимой переменной выбрана величина r :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{T\varphi} + \frac{p_\varphi}{r}}{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{Tr} + p_r} \frac{1}{r}, \\ \frac{d\lambda}{dr} &= \frac{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{T\lambda} + \frac{p_\lambda}{r \cos \varphi}}{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{Tr} + p_r} \frac{1}{r \cos \varphi}, \\ \frac{d(p_r^2)}{dr} &= \frac{\frac{\partial \alpha_{о,н}}{\partial r} + \frac{2}{r^3} p_\varphi^2 + \frac{2}{r^3 \cos^2 \varphi} p_\lambda^2}{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{Tr} + p_r}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{dp_\varphi}{dr} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{0,n}}{\partial \varphi} - \frac{\sin \varphi}{r^2 \cos^3 \varphi} p_\lambda^2}{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{Tr} + p_r},$$

$$\frac{dp_\lambda}{dr} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{0,n}}{\partial \lambda}}{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{Tr} + p_r},$$

где $\gamma = \cos(hp^0)$; h, p^0 — орты соответственно в направлениях векторов магнитного поля и p ; $h_T = h - \gamma p^0$ — вектор перпендикулярной к p составляющей h , длина которого равна $h_T = \sqrt{1 - \gamma^2}$.

Будем различать два вида задач, а именно:

- 1) известна структура среды и заданы точка наблюдения и направление прихода;
- 2) известна структура среды и заданы координаты точек наблюдения и излучения.

В дальнейшем эти два вида задач мы будем именовать задачами первого и второго типа соответственно.

Если точка наблюдения A лежит на поверхности Земли и коэффициент преломления n_A в точке A равен единице, то с помощью (2) и геометрии рис. 1 получим начальные условия для задачи первого типа: при $r = r_A$ неизвестные функции равны

$$\varphi = \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \lambda_A = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_A, \quad (5)$$

$$p_r = \sin \beta_A, \quad p_\varphi = -r_A \cos \beta_A = -C_1, \quad p_\lambda = 0,$$

где r_A — радиус Земли, β_A и ε_A — соответственно угол возвышения и азимут приходящего в точку A луча.

Для решения уравнений (4) воспользуемся итерационным методом. Рассмотрим ионосферу, коэффициент преломления которой $n = \sqrt{1 + \alpha_{0,n}^*}$ мало отличается от единицы (в смысле выполнения условия $|\alpha_{0,n}| \ll 1$). Заметим, что в реальной невозмущенной ионосфере при распространении УКВ условие $|\alpha_{0,n}| \ll 1$ хорошо выполняется.

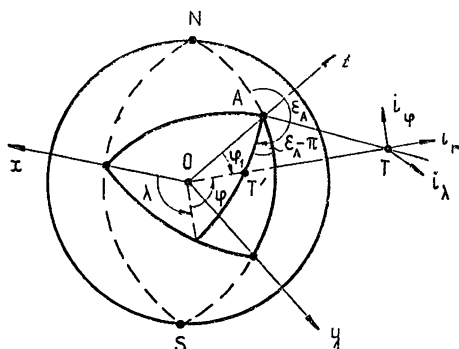


Рис. 1.

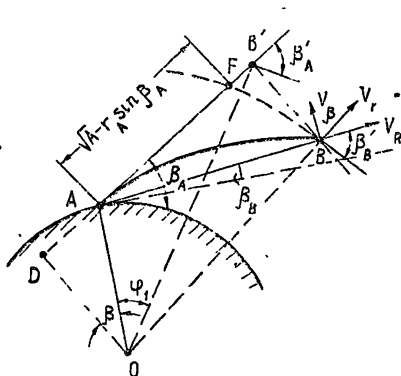


Рис. 2.

Для задачи первого типа в качестве нулевой итерации возьмем решение (4) для случая свободного пространства

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{\pi}{2} - \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \beta_A - \beta'_A, \quad \lambda^{(0)} = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_A, \\ p_r^{(0)} &= \sin \beta'_A, \quad p_\varphi^{(0)} = -C_1, \quad p_\lambda^{(0)} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где углы φ_1 и β'_A находятся из геометрических соотношений (рис. 2):

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{(\sqrt{A} - r_A \sin \beta_A) \cos \beta_A}{r}, \quad \beta'_A = \beta_A + \varphi_1, \\ \cos \beta'_A &= \frac{C_1}{r}, \quad \sin \beta'_A = \frac{\sqrt{A}}{r}, \quad A = r^2 - C_1^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для искомым функций в последующих итерациях приводить не будем, а отметим лишь, что для итерационных формул имеют место соотношения

$$\begin{aligned} p_{\varphi, \lambda} - p_{\varphi, \lambda}^{(3n-5)} &= 0(\alpha_{0, n}^n), \quad p_r - p_r^{(3n-4)} = 0(\alpha_{0, n}^n), \\ \varphi - \varphi^{(3n-3)} &= 0(\alpha_{0, n}^n), \quad \lambda - \lambda^{(3n-4)} = 0(\alpha_{0, n}^n) \\ &(n = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (8)$$

означающие, что точные значения искомым функций отличаются от своих приближенных значений в $(3n-4)$ -й итерации для p_r, λ , в $(3n-3)$ -й итерации для φ и в $(3n-5)$ -й итерации для $p_{\varphi, \lambda}$ на величины, содержащие $\alpha_{0, n}$ в степени n .

Соотношения (8) позволяют разрешить вопрос о нахождении так называемых формул n -го приближения относительно $\alpha_{0, n}$, которые получаются из соответствующих итерационных формул путем разложения их в ряды по $\alpha_{0, n}$, с последующим удержанием членов порядка $\alpha_{0, n}^{n-1}$. Так, например, формулы второго приближения ($n = 3$) для $p_{\varphi, \lambda}$ должны следовать как минимум из четвертой итерации, для p_r, λ — из пятой, а для φ из шестой итерации. Из (8) следует также, что при условии $|\alpha_{0, n}| \ll 1$ итерационный процесс сходится.

Выражения искомым функций во втором приближении очень громоздки, а поэтому целесообразно ввести некоторые упрощающие допущения. В условиях медленно изменяющейся ионосферы, когда горизонтальные градиенты электронной концентрации невелики, пренебрежем слагаемыми, содержащими производные по координатам более высокого, чем первый, порядка; аналогично поступим со слагаемыми, в которых присутствуют произведения производных.

Представим величину $\alpha_{0, n}(r, \varphi, \lambda, p_r, p_\varphi, p_\lambda)$ в виде ряда по степеням малых величин $\Delta\varphi = \varphi - \varphi^{(0)}$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda^{(0)}$, $\Delta p_r = p_r - p_r^{(0)}$, $\Delta p_\varphi = p_\varphi - p_\varphi^{(0)}$, p_λ :

$$\begin{aligned} \alpha_{0, n} &= (\alpha_{0, n})_{00} + (\alpha_{0, n})_{10} \Delta\varphi + (\alpha_{0, n})_{01} \Delta\lambda + \left(\frac{\partial \alpha_{0, n}}{\partial \gamma}\right)^{(0)} h_{r\gamma}^{(0)} \times \\ &\times (p_r - \sin \beta'_A) + \left(\frac{\partial \alpha_{0, n}}{\partial \gamma}\right)^{(0)} \frac{h_{r\varphi}^{(0)}}{r} (p_\varphi + C_1) + \left(\frac{\partial \alpha_{0, n}}{\partial \gamma}\right)^{(0)} \times \\ &\times \frac{h_{r\lambda}^{(0)}}{r \cos \varphi^{(0)}} p_\lambda + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$(\alpha_{o, H})_{00} = \alpha_{o, H}(r, \varphi^{(0)}, \lambda^{(0)}, p_r^{(0)}, p_\varphi^{(0)}, p_\lambda^{(0)}),$$

$$(\alpha_{o, H})_{10, 01} = \left(\frac{\partial \alpha_{o, H}}{\partial \varphi, \lambda} \right) \Big|_{\varphi^0, \lambda^0, p_r^{(0)}, p_\varphi, \lambda},$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_{o, H}}{\partial \gamma} \right)^{(0)} = \frac{\partial (\alpha_{o, H})_{00}}{\partial \gamma}, \quad h_r^{(0)} = h_r(r, \varphi^{(0)}, \lambda^{(0)}, p_r^{(0)}, \lambda, \gamma^{(0)}),$$

$$\gamma^{(0)} = \sin \beta'_A h_r^{(0)} - \cos \beta'_A h_\varphi^{(0)}.$$

Из итерационных формул после ряда преобразований получим значения искомых функций во втором приближении (индекс (2) вверх):

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} = & \varphi^{(0)} + \frac{C_1}{2} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_A} dr + \frac{1}{2} \int_{r_A}^r \frac{1}{r^2 \sin^3 \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{10}}{\sin \beta'_A} \times \\ & \times dr dr - \frac{1}{2} \int_{r_A}^r \left(\frac{\partial \alpha_{o, H}}{\partial \gamma} \right)^{(0)} \frac{h_r^{(0)}}{r \sin^3 \beta'_A} dr - \frac{3}{8} C_1 \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00}^2}{r^2 \sin^5 \beta'_A} dr - \\ & - \frac{1}{4} \int_{r_A}^r \frac{1}{r^2 \sin^3 \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00} (\alpha_{o, H})_{10}}{\sin^3 \beta'_A} dr dr - \frac{1}{4} \int_{r_A}^r \frac{(1 + 2 \cos^2 \beta'_A)}{r^2 \sin^5 \beta'_A} \times \\ & \times (\alpha_{o, H})_{00} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{10}}{\sin \beta'_A} dr dr + \frac{C_1^2}{4} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{10}}{r^2 \sin^3 \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_A} dr dr, \\ \lambda^{(2)} = & \frac{1}{2} \int_{r_A}^r \frac{1}{r^2 \sin \beta'_A \cos^2 \varphi^{(0)}} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{01}}{\sin \beta'_A} dr dr - \frac{1}{2} \int_{r_A}^r \left(\frac{\partial \alpha_{o, H}}{\partial \gamma} \right)^{(0)} \times \\ & \times \frac{h_r^{(0)}}{r \sin \beta'_A \cos \varphi^{(0)}} dr - \frac{1}{4} \int_{r_A}^r \frac{1}{r^2 \sin \beta'_A \cos^2 \varphi^{(0)}} \times \\ & \times \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00} (\alpha_{o, H})_{01}}{\sin^3 \beta'_A} dr dr - \frac{1}{4} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_A \cos^2 \varphi^{(0)}} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{01}}{\sin \beta'_A} \times \\ & \times dr dr + \frac{C_1}{2} \int_{r_A}^r \frac{\sin \varphi^{(0)}}{r^2 \sin \beta'_A \cos^3 \varphi^{(0)}} \left(\int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_A} dr \right) \times \\ & \times \left(\int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, H})_{01}}{\sin \beta'_A} dr \right) dr + \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_A, \end{aligned}$$

$$p_{\varphi}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_A} dr - \frac{1}{4} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00} (\alpha_{o, n})_{10}}{\sin^3 \beta'_A} dr - C_1,$$

$$p_r^{(2)} = \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{2 \sin \beta'_A} + \frac{C_1}{2 r^2 \sin \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_A} dr - \frac{1}{8} \frac{(\alpha_{o, n})_{00}^2}{\sin^3 \beta'_A} - \quad (10)$$

$$- \frac{C_1}{4} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_A} dr dr + \frac{C_1}{4} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_A} dr dr -$$

$$- \frac{C_1}{4 r^2 \sin \beta'_A} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00} (\alpha_{o, n})_{10}}{\sin^3 \beta'_A} dr + \sin \beta'_A,$$

$$p_{\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{01}}{\sin \beta'_A} dr - \frac{1}{4} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00} (\alpha_{o, n})_{01}}{\sin^3 \beta'_A} dr.$$

Перейдем далее к решению задачи второго типа, когда задано положение излучателя $B(R, \beta_B, \varepsilon_B)$ (R — наклонная дальность, β_B — угол места и ε_B — азимут). Один из возможных способов решения такой задачи — воспользоваться решением (10) задачи первого типа. Для этого надо учесть, что β_A и ε_A отличаются от β_B и ε_B на величины рефракций $\Delta\beta = \beta_A - \beta_B$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_A - \varepsilon_B$ не ниже первого порядка малости. Заметим также, что величины $(\alpha_{o, n})_{00}$, $(\alpha_{o, n})_{10, 01}$ в (10), относящиеся к точкам прямой AB' (рис. 2), связаны с точностью до величин второго порядка малости со значениями этих же функций, взятыми в точках прямой AB (индекс (a) вверху), соотношениями, следующими из (9):

$$(\alpha_{o, n})_{00} = (\alpha_{o, n})_{00}^{(a)} + \frac{\sqrt{r^2 - C_1^2} - r_A \sin \beta_B}{\sqrt{r^2 - C_1^2}} (\alpha_{o, n})_{10} \Delta\beta^{(1)},$$

$$(\alpha_{o, n})_{10, 01} = (\alpha_{o, n})_{10, 01}^{(a)}. \quad (11)$$

Разлагая в (10) величины, содержащие β_A и ε_A , в ряды по $\Delta\beta$ и $\Delta\varepsilon$, ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости и учитывая (11), получим решение для задачи второго типа. Направление же прихода луча $\beta_A^{(2)}$, $\varepsilon_A^{(2)}$ в точку A во втором приближении должно быть найдено из условий

$$\varphi_B^{(2)} = \varphi_B, \quad \lambda_B^{(2)} = \lambda_B,$$

где $\varphi_B^{(2)}$, $\lambda_B^{(2)}$ суть $\varphi^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$ при $r=r_B$, а r_B , φ_B , λ_B — координаты точки B в системе r, φ, λ .

На основе полученных выше результатов исследуем основные эффекты распространения УКВ через ионосферу. Будут рассмотрены угломестная рефракция $\Delta\beta$, фазовое ΔL и групповое ΔR запаздывания, угол поворота Φ_{ϕ} плоскости поляризации радиоволн из-за эффекта

Фарадея, скорость F_Φ вращения плоскости поляризации и доплеровское смещение частоты F_d . Точные выражения для угла рефракции определяются из простых геометрических соображений, а выражения для ΔL , ΔR , F_d с учетом $ds = \frac{v_{rp}}{v_{rp} r} dr$ следуют из (2) при условиях (2а):

$$\Delta\beta = \beta_A - \arccos \frac{r \cos \varphi}{\rho}; \quad (12)$$

$$\Delta L = L - \rho = \frac{c}{\omega_0} \Psi + ct_{rp} - \rho = \int_{r_A}^{r_B} \frac{n^2 dr}{-\frac{\partial n}{\partial \gamma} h_{rr} + p_r} - \rho; \quad (13)$$

$$\Delta R = ct_{rp} - \rho = R_{rp} - \rho = \frac{d \Delta L \omega}{d \omega}; \quad (14)$$

$$F_d = -\frac{f}{c} \left(p_r V_r + \frac{p_\varphi}{r_B} V_\varphi + \frac{p_\lambda}{r_B \cos \varphi_B} V_\lambda + \int_s \frac{\partial n}{\partial t} \cos \mu ds \right), \quad (15)$$

где $\rho = [r^2 - 2r_A r \sin \varphi + r_A^2]^{1/2}$ — расстояние от наблюдателя до рассматриваемой точки луча, V_r , V_φ , V_λ — составляющие скорости излучателя на оси координатной системы r , φ , λ . Угол поворота Φ_Φ плоскости поляризации и частота F_Φ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_\Phi &= -\frac{\omega_0}{2c} (\Delta L_0 - \Delta L_H), \\ F_\Phi &= \frac{1}{2} (F_{d0} - F_{dH}). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя значения $\varphi^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$, $p_{r,\varphi,\lambda}^{(2)}$, найденные в результате решения задачи второго типа, из (12)–(15) после ряда преобразований получим во втором приближении при $r = r_B$ выражения

$$\begin{aligned} \Delta\beta^{(2)} &= -\frac{\sqrt{A_B} C_0}{2R} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o,n})_{00}^{(a)}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr - \frac{\sqrt{A_B}}{2R} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2 \sin^3 \beta'_B} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o,n})_{10}}{\sin \beta'_B} \times \\ &\times dr dr + \frac{\sqrt{A_B}}{2R} \int_{r_A}^{r_B} \left(\frac{\partial \alpha_{o,n}}{\partial \gamma} \right)^{(0)} \frac{h_{r\varphi}^{(0)}}{r \sin^3 \beta'_B} dr + \frac{3}{8} \frac{\sqrt{A_B} C_0}{R} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o,n})_{00}^2}{r^2 \sin^5 \beta'_B} dr + \\ &+ \frac{\sqrt{A_B}}{4R} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(1 + 2 \cos^2 \beta'_B) (\alpha_{o,n})_{00}}{r^2 \sin^5 \beta'_B} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o,n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr dr + \\ &+ \frac{\sqrt{A_B}}{4R} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2 \sin^3 \beta'_B} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o,n})_{00} (\alpha_{o,n})_{10}}{\sin^3 \beta'_B} dr dr - \frac{C_0^2 \sqrt{A_B}}{4R} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o,n})_{10}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr dr + \frac{C_0 (R + 2r_A \sin \beta_B)}{2A_B} (\Delta\beta^{(1)})^2 + \\
 & + \frac{\sqrt{A_B} C_0 r_A \sin \beta_B}{2R} \Delta\beta^{(1)} \left[3 \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^4 \sin^5 \beta'_B} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr dr + \right. \\
 & + \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2 \sin^3 \beta'_B} \int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr dr + \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{r^4 \sin^5 \beta'_B} (r^2 + 2C_0^2) dr - \\
 & \left. - \frac{1}{r_A \sin \beta_B} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\sqrt{A} - r_A \sin \beta_B)}{\sqrt{A}} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr \right];
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\Delta \underline{L}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{\sin \beta'_B} dr - \frac{1}{8} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{00}^2}{\sin^3 \beta'_B} dr + \frac{C_0}{4} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} \times \tag{18}$$

$$\int_{r_A}^r \frac{(\alpha_{o, n})_{00}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr dr + \frac{r_A \sin \beta_B R}{2\sqrt{A_B}} (\Delta\beta^{(1)})^2 + \frac{R}{2\sqrt{A_B}} \Delta\beta^{(1)} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr;$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{c}{f} F_A^{(2)} &= V_R + \frac{V_r r_B}{2\sqrt{A_B}} (\alpha_{o, n})_B + \frac{r_A \sin \beta_B}{\sqrt{A_B}} V_\beta \Delta\beta^{(2)} + \frac{V_\beta}{2\sqrt{A_B}} \times \\
 & \times \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr + \frac{V_\varepsilon}{2R \cos \beta_B} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{01}}{\sin \beta'_B} dr - \frac{1}{8} V_r \frac{(\alpha_{o, n})_B^2 r_B^3}{A_B^{3/2}} - \\
 & - \frac{V_R}{2} (\Delta\beta^{(1)})^2 + \frac{(r_B^2 - r_A^2) r_B}{2A_B^{3/2}} V_r (\Delta\beta^{(1)})^2 - \frac{r_A^2 \sin \beta_B \cos \beta_B r_B}{2A_B^{3/2}} \times \\
 & \times V_r (\alpha_{o, n})_B \Delta\beta^{(1)} - \frac{r_A \sin \beta_B C_0}{2\sqrt{A_B}} \Delta\beta^{(1)} V_\beta \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr - \tag{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{r_A \sin \beta_B r_B}{2A_B^{3/2}} \Delta\beta^{(1)} V_r \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr - \frac{V_\beta}{4\sqrt{A_B}} \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{00} (\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr - \\
 - \frac{C_0 r_B}{4A_B^{3/2}} V_r (\alpha_{o, n})_B \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{10}}{\sin \beta'_B} dr - \frac{V_\varepsilon}{4R \cos \beta_B} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{00} (\alpha_{o, n})_{10}}{\sin^3 \beta'_B} dr - \frac{r_A^2 \sin \beta_B}{2R} \Delta \beta^{(1)} V_\varepsilon \int_{r_A}^{r_B} \frac{(\alpha_{o, n})_{01}}{r^2 \sin^3 \beta'_B} dr.$$

Здесь величины $C_0, \sin \beta'_B, \varphi_B^{(0)}$ получаем соответственно из величин $C_1, \sin \beta'_A, \varphi^{(0)}$ заменой в них β_A на β_B ; $A_B = r_B^2 - C_0^2, V_R, V_\beta, V_\varepsilon$ — соответственно радиальная, угломестная и азимутальная составляющие скорости излучателя, которые связаны со скоростями $V_r, V_\varphi, V_\lambda$ соотношениями

$$V_R = \frac{\sqrt{A_B}}{r_B} V_r - \frac{C_0}{r_B} V_\varphi, \quad V_\beta = \frac{C_0}{r_B} V_r + \frac{\sqrt{A_B}}{r_B} V_\varphi, \quad V_\lambda = V_\varepsilon.$$

Выражения для $\Delta R^{(2)}, \Phi_\Phi^{(2)}$ и $F_\Phi^{(2)}$ с учетом (17) — (19) следуют из (14), (16).

Приведем результаты численной оценки влияния магнитного поля Земли на $\Delta \beta$ и ΔL . В табл. 1 для ряда высот и углов места β_B приведены результаты численных расчетов величин $M \Delta \beta = \frac{\Delta \beta_{сл} - \Delta \beta_H}{\Delta \beta_{сл}} 100(\%)$

и $M \Delta L = \frac{\Delta L_{сл} - \Delta L_H}{\Delta L_{сл}} 100(\%)$, характеризующие влияние магнитного поля на величины $\Delta \beta$ и ΔL . Индекс «H» указывает, что расчет проведен с магнитным полем, а «сл» — в слоистой изотропной ионосфере.

Таблица 1

z (км) \ β_B^0	250	320	600	1000	2000
10	23	31	16	12	11
	20	26	14	13	13
60	14	18	7,0	7,0	7,0
	10	13	7,0	6,0	6,0

Величины $\Delta \beta$ и ΔL определены путем численного интегрирования на ЭВМ уравнений (4).

Расчеты проведены для обыкновенного луча при значениях гирочастоты $f_H = 1,5$ Мгц, критической частоты $f_0 = 6,3$ Мгц, $f = 20$ Мгц и распространения, близкого к продольному. В качестве модели нижней ионосферы использовалась парабола (высота начала $z_0 = 180$ км, высота максимальной электронной концентрации $z_{max} = 320$ км), а верхняя ионосфера аппроксимировалась степенной функцией с показателем $k^{-1} = -(0,40 \div 0,12 \cdot 10^{-12} N_{max})$, где k — вертикальный градиент приведенной высоты внешней ионосферы, N_{max} — максимальная электронная концентрация в m^{-3} [7]. Верхняя строка в табл. 1 для каждого угла β_B относится к $\Delta \beta$, а нижняя — к ΔL .

Из табл. 1 следует, что на высоте вблизи максимума слоя F_2 величины $M \Delta \beta$ и $M \Delta L$ максимальны и могут достигать 20% и более.

На рис. 3 представлена экспериментальная кривая (точки) разности доплеровских частот двух когерентных колебаний (20 и 30 МГц), полученная по сигналам ИСЗ «Интеркосмос-2» 17.01.70 г., а также тео-

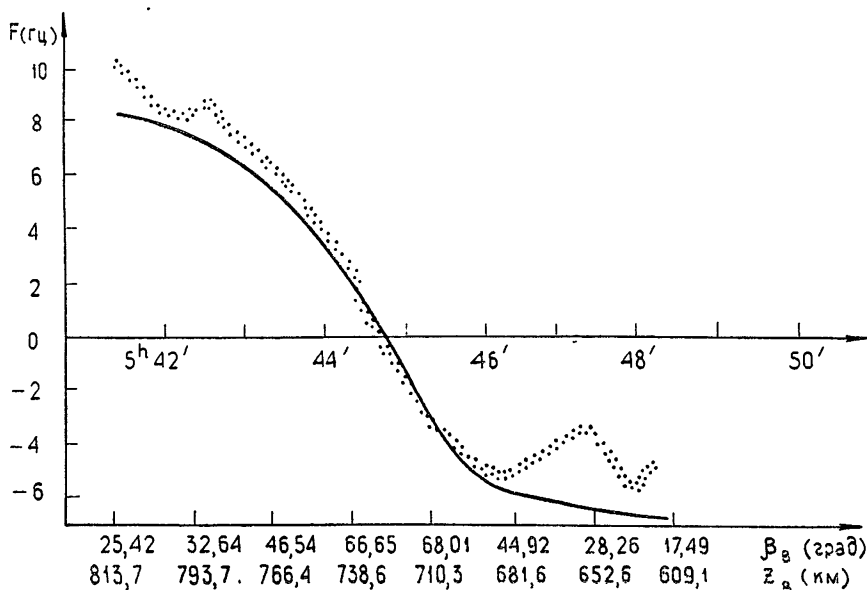


Рис. 3.

ретическая (сплошная) кривая, рассчитанная по формуле (15), но без магнитного поля, с использованием параметров ионосферы, измеренных в том же опыте. На рис. 3 указано изменение угла места и высоты спутника в течение сеанса наблюдения. Расхождение кривых может быть объяснено неучетом магнитного поля Земли при расчете.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Воронин, Геомагнетизм и аэрономия, 4, № 3, 531 (1964).
2. W. J. Ross, J. Geophys. Res., 70, № 3, 597 (1965).
3. Sunanda Basu, J. Geophys. Res., 72, № 2, 5339 (1967).
4. I. F. Wilman, Trans. IEEE, Aerosp. Electr. Syst., 1, № 3, 283 (1965).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. С. М. Слудкер, Геомагнетизм и аэрономия, 11, № 1, 157 (1971).

Поступила в редакцию
7 июля 1971 г.

EFFECTS OF RADIO WAVE PROPAGATION IN THREE-DIMENSIONAL NONUNIFORM MAGNETOACTIVE IONOSPHERE

E. B. Krokhmal'nikov, G. K. Solodovnikov

In the geometrical optics approximation a number of effects taking place when propagating in a three-dimensional nonuniform magnetoactive nonstationary ionosphere is investigated. For the USW case the ionospheric effects are described by approximative formulas obtained when the differential ray equations are solved with taking into account the magnetic field. Quantitative estimations of the Earth magnetic field influence on the radio wave propagation in the ionosphere are presented.

УДК 621.317.255

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВИЖУЩИЙСЯ СКАЧОК ПЛОТНОСТИ ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА

А. С. Благовещенский, В. В. Борисов

Рассмотрена задача о падении плоской электромагнитной волны на движущийся скачок плотности ионизованного газа со скоростью, большей скорости электромагнитного сигнала в среде (вакууме).

Рассмотрение задач, связанных с движением фронта ионизации — импульса ионизирующего излучения в поглощающей среде, — возможно с помощью упрощенных моделей, приводящих к изучению электромагнитных колебаний за фронтом изменения параметров среды (скачком плотности заряженных частиц), скорость движения которого v в зависимости от условий поглощения ионизирующего излучения и торможения образовавшихся «быстрых» электронов меньше, равна или больше скорости света c . В работах [1, 2] исследовались вопросы о падении плоской электромагнитной волны на скачок электронной плотности, движущийся со скоростью $v < c$, $v = c$. В настоящей работе рассмотрим задачу для случая $v > c$.

1. В положительном направлении оси Ox движется со скоростью $v > c$ фронт изменения параметров среды. Плотность ионов и электронов на фронте одинакова и равна n_0 всюду за фронтом, начальная скорость их равна нулю. Положение фронта в момент времени $t = 0$ примем за плоскость yOz . Скорость движения скачка — границы раздела двух сред — полагаем постоянной, уравнение границы $x = vt$. Пренебрежем движением ионов и, полагая, что скорость электронов много меньше скорости света, для определения поперечных составляющих векторов E , B в ионизованной области, $x < vt$, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} en_0 v_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{e}{m} E_y, \end{aligned}$$

e , m , v_y — соответственно заряд, масса и поперечная составляющая вектора скорости электрона.

При $x > vt$ E_y и B_z удовлетворяют волновому уравнению. Электромагнитные поля за фронтом при $x < vt$ определяются падающей на границу плоской электромагнитной волной $E_y = -B_z = I(t + x/c)u(t + x/c)$, где $u(t + x/c)$ — непрерывно дифференцируемая функция,

$$I(s) \equiv \begin{cases} 1 & (s > 0) \\ 0 & (s < 0) \end{cases}.$$

Ограничимся построением поперечной составляющей вектора E .

2. Как следует из п. 1, рассматривается задача

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \varepsilon(tv - x) E_y = 0,$$

$$E_y|_{t < 0} = I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (1)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{\omega_0^2}{c^2} I(s), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}.$$

Сведем (1) к задаче Коши с данными при $t = 0$. Найдем для этого

$$\lim_{t \rightarrow 0+} E_y \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Пусть $t_0 < 0$, тогда при $t > t_0$ E_y — решение задачи Коши уравнения (1):

$$E_y|_{t=t_0} = I\left(t_0 + \frac{x}{c}\right) u\left(t_0 + \frac{x}{c}\right),$$

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \delta\left(t_0 + \frac{x}{c}\right) u(0) + I\left(t_0 + \frac{x}{c}\right) u'_t\left(t + \frac{x}{c}\right) \Big|_{t=t_0}.$$

Решая задачу для уравнения $\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y = f(x, t)$, где $f(x, t) = \varepsilon(tv - x) E_y$, найдем

$$E_y = I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right) - \frac{c}{2} \iint_{\Delta_{x,t}} \varepsilon(t'v - x') E_y(t', x') dt' dx', \quad (2)$$

$\Delta_{x,t}$ — треугольник, образованный характеристиками уравнения (1), пересекающимися в точке x, t , и прямой $t = t_0$.

Равенство (2) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции $E_y(x, t)$. Решение (2) в области $x > vt$ или $-x > ct$ дает $E_y = I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right)$, так как либо ядро уравнения (2) ($x > vt$), либо свободный член ($-x > ct$) равны нулю. Для точек области $x < vt$, $-x < ct$ уравнение (2) может быть решено методом последовательных приближений, причем решение — непрерывная при $x < vt$, $-x < ct$ функция. Подставляя это решение в уравнение (2), получим в окрестности линии $x + ct > 0$

$$E_y = u(0) + O(x + ct),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = u'_t\left(t + \frac{x}{c}\right) \Big|_{t + \frac{x}{c} = 0+} + \frac{1}{2} \omega_0^2 t u(0) + O(x + ct). \quad (3)$$

Как следует из уравнения (2), в окрестности линий $x = vt$ и $x = ct$, $t \neq 0$, E_y непрерывна и непрерывно дифференцируема.

Найдем данные задачи Коши для E_y при $t = 0$. Очевидно, что выражения для $E_y|_{t=0, x \neq 0}$ и $\frac{\partial}{\partial t} E_y|_{t=0, x \neq 0}$ совпадают с данными Коши, которым удовлетворяет функция

$$E_y|_{t < 0} = I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right), \text{ т. е.}$$

$$E_y|_{t=0} = I(x) u(x),$$

(4)

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=0} = \delta\left(\frac{x}{c}\right) u(0) + I(x) u'_t\left(t + \frac{x}{c}\right) \Big|_{t=0}.$$

Начальные данные для E_y при $t = 0$ могут отличаться от (4) лишь слагаемыми, сосредоточенными в точке $x = 0$, т. е. функциями вида

$$\sum_{k=0}^N a_k \delta^{(k)}(x). \text{ Из (3) следует, что } E_y|_{t=0} \text{ не содержит слагаемого, со-}$$

средоточенного в точке $x = 0$, а $\frac{\partial}{\partial t} E_y = u(0) \delta\left(t + \frac{x}{c}\right) + F(x, t)$,

где $F(x, t)$ — ограниченная функция, и, следовательно, $\left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=0} =$

$= u(0) \delta\left(\frac{x}{c}\right) + I(x) u'_t\left(t + \frac{x}{c}\right) \Big|_{t=0}$. Таким образом, (4) есть начальные данные для E_y при $t = 0$.

3. Так как при $x > vt$ $E_y = I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right)$ и начальные данные для E_y совпадают с (4), то для функции $E(x, t) = E_y(x, t) - I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right)$ приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} E = \varepsilon(tv - x) I\left(t + \frac{x}{c}\right) u\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

решение которого при нулевых начальных данных определяет $E_y(x, t)$:

$$E_y(x, t) = I(\xi_2) u\left(\frac{\xi_2}{\omega_0}\right) - \frac{1}{4} \int_{\psi(\xi_1)}^{\xi_2} d\xi_2' u\left(\frac{\xi_2'}{\omega_0}\right) \times \\ \times \int_{-\frac{\beta-1}{\beta+1} \xi_2'}^{\xi_1} d\xi_1' J_0\left\{\sqrt{(\xi_1 - \xi_1')(\xi_2 - \xi_2')}\right\},$$

где $J_0(s)$ — функция Бесселя,

$$\psi(\xi_1) = \begin{cases} 0 & (\xi_1 \geq 0) \\ -\frac{\beta+1}{\beta-1} \xi_1 & (\xi_1 < 0) \end{cases},$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \xi_1 = \omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad \xi_2 = \omega_0\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

После интегрирования получаем

$$E_y(x, t) = I(\xi_2) u\left(\frac{\xi_2}{\omega_0}\right) - \quad (5)$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\psi(\xi_1)}^{\xi_2} d\xi_2' u\left(\frac{\xi_2'}{\omega_0}\right) \sqrt{\frac{\xi_1 + \xi_2'(\beta-1)/(\beta+1)}{\xi_2 - \xi_2'}} J_1\left\{\sqrt{\left(\xi_1 + \xi_2' \frac{\beta-1}{\beta+1}\right)(\xi_2 - \xi_2')}\right\}.$$

4. Пусть падающая электромагнитная волна имеет временную зависимость в виде функции включения, т. е. $I(\xi_2) u\left(\frac{\xi_2}{\omega_0}\right) = E_0 I(\xi_2)$.

Рассмотрим выражение для поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля E в области $\xi_1 \leq 0$. Перейдем в (5) к новой переменной $\eta = \xi_1' - \frac{1}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\frac{\beta+1}{\beta-1}\xi_1$ и обозначим $a =$

$$= \frac{1}{2}\left(\xi_2 + \xi_1 \frac{\beta+1}{\beta-1}\right), \text{ тогда}$$

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = E_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \int_{-a}^a d\eta \sqrt{\frac{a+\eta}{a-\eta}} J_1\left(\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \sqrt{a^2-\eta^2}\right) \right\} = \quad (6)$$

$$= E_0 \cos \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \frac{1}{2} \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{\beta+1}{\beta-1}\right) = E_0 \cos \frac{t\omega - x}{\sqrt{\beta^2-1}} \frac{\omega_0}{c}.$$

Так как $E_y(\xi_1, 0) = u(0) + O(\xi_2)$ в окрестности $\xi_2 = 0+$ и E_y — непрерывная функция в области $x < vt, -x < ct$, то, используя (6) при $\xi_1 = 0$, построим решение характеристической задачи Коши и, тем самым, выражение для E_y при $\xi_1 > 0$:

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = E_0 \left\{ J_0(\sqrt{\xi_1 \xi_2}) + \int_0^{\xi_2} d\xi_2' \frac{\partial}{\partial \xi_2'} \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \xi_2' \times \right. \\ \left. \times J_0(\sqrt{\xi_1(\xi_2 - \xi_2')}) \right\}.$$

Замена переменной интегрирования $\tau = (1 - \xi_2'/\xi_2)^{1/2}$ приводит последнее к виду

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = E_0 \left\{ J_0(z) - \omega \int_0^1 J_0(z\tau) \sin \left[\frac{1}{2} \omega (1 - \tau^2) \right] \tau d\tau \right\}.$$

Здесь обозначили $\omega = \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \xi_2, z = \sqrt{\xi_1 \xi_2}$. Интеграл, входящий в формулу для E_y , есть функция Ломмеля для двух переменных $U_2(\omega, z)$ [3], и решение задачи в области $\xi_1 \geq 0, \xi_2 > 0$ сводится к известным специальным функциям:

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = E_0 \{ J_0(z) - U_2(\omega, z) \} = E_0 U_0(\omega, z). \quad (7)$$

При $\beta \rightarrow 1$ $\omega \rightarrow 0$ и $E_y \rightarrow E_0 J_0(z)$, что совпадает с результатом работы [2].

5. Рассмотрим поперечную составляющую вектора E , если падающая на движущуюся границу плоская волна имеет временную зависимость $E_y = E_0 I(\xi_2) \cos \frac{\omega}{\omega_0} \xi_2$ — косинусоидальные колебания с частотой ω и фазой, равной нулю на фронте.

При $\xi_1 \leq 0$, переходя в выражении (5) к новой переменной η , получим

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = E_0 \left\{ \cos \frac{\omega}{\omega_0} \xi_2 - \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \times \right. \\ \left. \times \left[a \cos \frac{\omega}{\omega_0} b \int_0^a d\eta \frac{\cos(\omega/\omega_0)\eta}{\sqrt{a^2-\eta^2}} J_1 \left(\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \sqrt{a^2-\eta^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \frac{\omega}{\omega_0} b \int_0^a d\eta \frac{\eta}{\sqrt{a^2-\eta^2}} \sin \frac{\omega}{\omega_0} \eta J_1 \left(\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1}} \sqrt{a^2-\eta^2} \right) \right] \right\}.$$

$$\text{Здесь } b = \frac{1}{2} \left(\xi_2 - \xi_1 \frac{\beta+1}{\beta-1} \right).$$

Интегралы, входящие в последнее выражение, сводятся к табличным [4], и после преобразований найдем

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \xi_2 + \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{\beta+1}{\beta-1} \xi_1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_2}{\omega_0} \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} \xi_2 + \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{\beta+1}{\beta-1} \xi_1 \right) \right\}, \quad (8)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Определяя из (8) $E_y(0, \xi_2)$ и поступая аналогично проделанному в п. 4, для поперечной составляющей вектора E в области $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 > 0$ получим

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_0} U_0(\omega_1, z) + \frac{\omega_2}{\omega_0} U_0(\omega_2, z) \right\}, \\ \omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \xi_2, \quad \omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} \xi_2.$$

Представления функций $U_n(\omega, z)$ и $V_n(\omega, z)$ в виде рядов дают возможность рассмотреть поведение E_y в окрестности характеристик $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ и при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от частот ω , ω_0 и скорости движения границы v .

В окрестности фронта волны, уходящей в плазму, $\xi_2 = 0$, используя разложение $U_n(\omega, z)$ по степеням ω/z , получим

$$E_y(\xi_1, \xi_2) \approx E_0 J_0(\sqrt{\xi_1 \xi_2}).$$

Условия применимости последнего соотношения $\frac{\omega_1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \ll 1$,

$\frac{\omega_2}{\omega_0} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \ll 1$. Поведение поперечной составляющей вектора E при малых значениях аргумента ξ_2 не зависит от скорости движения v .

Если $\frac{\omega_1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \gg 1$, $\frac{\omega_2}{\omega_0} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \gg 1$, что выполняется в окрестности $\xi_1 = 0$ ($\xi_2 > 0$), или при $t \rightarrow \infty$ на конечных расстояниях от $\xi_1 = 0$

при любом соотношении частот ω , ω_0 и произвольном значении параметра $\beta = \frac{v}{c} \geq 1$, то из разложения в ряд функции $V_n(\omega, z)$ и формулы

$U_{n+1}(\omega, z) - V_{-n+1}(\omega, z) = \sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{z^2}{2\omega} - \frac{n\pi}{2}\right)$ [3] следует

$$E_y(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{1}{2} \frac{E_0}{\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta+1} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \xi_2 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \xi_1 \right) + \frac{\omega_2}{\omega_0} \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} \xi_2 + \frac{\omega_0}{\omega_2} \xi_1 \right) \right\},$$

Таким образом, E_y — суперпозиция двух колебаний с различными амплитудами. Частоты определяются значениями ω_0 , ω , β и отличны от частот в области $\xi_1 < 0$.

При $v \rightarrow c$ $\frac{\omega_1}{\omega_0} \rightarrow 0$, $\frac{\omega_2}{\omega_0} \rightarrow 2 \frac{\omega}{\omega_0}$ и, следовательно, $E_y \rightarrow E_0 U_0(\omega_3, z)$, где $\omega_3 = 2(\omega/\omega_0)\xi_2$. Результат совпадает с приведенным в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Семенова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1077 (1967).
2. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 54 (1971).
3. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
5 апреля 1971 г.

INCIDENCE OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON A MOVING JUMP OF IONIZED GAS DENSITY

A. S. Blagoveshchenskii, V. V. Borisov

The incidence of a plane electromagnetic wave on a moving jump of the ionized gas density with the velocity greater than that of the electromagnetic signal in the medium has been considered.

УДК 538.56 : 533.95

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С ШИРОМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Е. В. Суворов

Обсуждается эффект поворота плоскости поляризации при распространении линейно поляризованной волны в плазме с широм магнитного поля. Найденные решения в приближении геометрической оптики, определяющие распространение волн в такой среде при ее плавной неоднородности.

Распространение электромагнитных волн в плазме с широм магнитного поля исследовалось в статье [1], где основное внимание было уделено взаимодействию нормальных волн «обычной» геометрической оптики (которую можно использовать при слабом шире магнитного поля) в точке плазменного резонанса для необыкновенной волны. В настоящей работе мы остановимся на двух вопросах, касающихся распространения волн в плазме с сильным широм магнитного поля: повороте плоскости поляризации, связанном с широм, и нахождении нормальных волн в однородной плазме с равномерным широм в геометрикооптическом приближении.

1. Распространение вдоль z плоских $e^{-i\omega t}$ -волн в плазме с магнитным полем, перпендикулярным оси z , определяется уравнениями [2]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [(n_1^2 \cos^2 \alpha + n_2^2 \sin^2 \alpha) E_x + (n_1^2 - n_2^2) \sin \alpha \cos \alpha E_y] &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [(n_1^2 - n_2^2) \sin \alpha \cos \alpha E_x + (n_1^2 \sin^2 \alpha + n_2^2 \cos^2 \alpha) E_y] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где E_x и E_y — проекции вектора электрического поля в волне на оси декартовой системы координат, α — угол между осью y и внешним магнитным полем \vec{H} (см. рис. 1), $n_1^2 = 1 - v_e(1 - v_e)(1 - v_e - u_e)^{-1}$ и $n_2^2 = 1 - v_e$ — показатели преломления высокочастотных нормальных волн, распространяющихся в однородной магнитоактивной плазме поперек магнитного поля ($v_e = \omega_0^2/\omega^2$, $u_e = \omega_H^2/\omega^2$; $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ — электронная ленгмюровская частота, $\omega_H = eH/mc$ — гирочастота электронов), c — скорость света в вакууме.

Несколько необычный вид уравнений связан с тем, что угол α отличен от нуля. Уравнения (1) применимы и в том случае, когда величины α , n_1^2 и n_2^2 зависят от z .

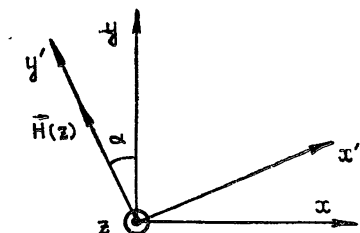


Рис. 1.

При исследовании волн, распространяющихся в плазме с равномерным широм магнитного поля ($\alpha = \pi/2$), удобно в уравнениях (1) перейти к новым переменным — проекциям электрического поля на оси «крученной» системы координат, связанной с внешним магнитным полем (рис. 1):

$$H = H_{y'}, \quad x' = x \cos \kappa z + y \sin \kappa z, \quad y' = -x \sin \kappa z + y \cos \kappa z.$$

В новых переменных уравнения (1) принимают вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{x'}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - \kappa^2 \right) E_{x'} &= 2\kappa \frac{dE_{y'}}{dz}, \\ \frac{d^2 E_{y'}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - \kappa^2 \right) E_{y'} &= -2\kappa \frac{dE_{x'}}{dz}. \end{aligned} \tag{1a}$$

Уравнения (1a) описывают также распространение вдоль z низкочастотных волн $\omega \ll \omega_{H_i}$ ($\omega_{H_i} = eH/Mc$ — гирочастота ионов) при наличии z -составляющей внешнего магнитного поля. В качестве n_1 и n_2 в этом случае следует взять показатели преломления магнитозвуковой и альвеновской волн:

$$n_1^2 = 1 + v_i/u_i,$$

$$n_2^2 = \left[1 - v_e \left(1 + \frac{v_i}{u_i} \right) \right] \left(1 - v_e \cos^2 \theta + \frac{v_i}{u_i} \sin^2 \theta \right)^{-1}.$$

Здесь θ — угол между осью z и внешним магнитным полем; $v_i = \omega_{0i}^2/\omega^2$, $u_i = \omega_{Hi}^2/\omega^2$, ω_{0i} и ω_{Hi} — ионная ленгмюровская и гирочастота.

Отметим, что уравнения (1) определяют и распространение волн в одноосном кристалле, ось которого перпендикулярна направлению распространения и поворачивается по закону $\alpha = \kappa z$ (см. [3]).

Решение системы (1) в случае, когда величины n_1^2 и n_2^2 не зависят от z , складывается из экспонент $e^{i(\omega/c)\tilde{n}z}$ [3]:

$$E = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^2 C_j (i\tilde{K}_j x'_0 + y'_0) e^{i(\omega/c)\tilde{n}_j z}. \tag{2}$$

Здесь x'_0 и y'_0 — единичные орты осей x' и y' , C_j — величины, характеризующие амплитуды двух нормальных волн, \tilde{n}_j — корни дисперсионного уравнения, отвечающего системе (1),

$$\tilde{n}_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \{ n_1^2 + n_2^2 + 2\delta^2 \pm [(n_1^2 - n_2^2)^2 + 8(n_1^2 + n_2^2)\delta^2]^{1/2} \} \tag{3}$$

$$(\delta = \kappa c/\omega),$$

коэффициенты поляризации \tilde{K}_j определяются соотношением

$$i\tilde{K}_j \equiv \left(\frac{E_{x'}}{E_{y'}} \right)_j = \frac{2in_j \delta}{n_1^2 - \tilde{n}_j^2 - \delta^2}. \tag{4}$$

В выражении (2) учтены лишь волны, бегущие в положительном направлении оси z ; в противоположном направлении также могут распространяться две нормальные волны с теми же \tilde{n}_j .

Нетрудно убедиться, что в случае, когда параметр

$$R = \frac{8(n_1^2 + n_2^2)\delta^2}{(n_1^2 - n_2^2)^2} \tag{5}$$

значительно превосходит единицу, поляризация нормальных волн «крученной» системы близка к круговой ($\tilde{K}_j = \pm 1$). Разность «показателей преломления» с учетом членов порядка $1/R$ равна

$$\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}_2^2 \approx 2\delta(1 + 1/2R). \quad (6)$$

В системе координат $x'y'z$ происходит поворот плоскости поляризации на угол

$$\varphi' = -xz(1 + 1/2R). \quad (7)$$

Основная часть этого поворота связана с кручением системы координат, однако и при переходе в декартову систему xuz остается поворот плоскости поляризации на угол

$$\varphi = -\frac{xz}{2R}. \quad (8)$$

Независимо от знака разности ($n_1^2 - n_2^2$) этот поворот происходит в направлении, противоположном повороту магнитного поля. В силу условия $R \gg 1$ поворот плоскости поляризации происходит значительно медленнее поворота магнитного поля.

Для компонент поля E_x и E_y высокочастотных $e^{-i\omega t}$ -волн, распространяющихся вдоль z в плазме однородной концентрации, в которой кроме магнитного поля с широм ($H_{\perp} = \text{const}$, $\alpha = xz$) имеется постоянная z -составляющая магнитного поля, тоже получается система однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Дисперсионное уравнение, отвечающее этой системе, не является биквадратным: «показатели преломления» \tilde{n}_j различны для нормальных волн «крученной» системы, распространяющихся в $+z$ - и $-z$ -направлениях. Последнее обстоятельство связано с тем, что в одном случае кручение системы координат происходит в направлении фарадеевского вращения, а в другом случае — против него.

2. При достаточно плавной зависимости величин n_1^2 и n_2^2 от z можно, используя стандартную процедуру представления поля E в виде ряда по степеням c/ω (см., например, [2]), получить из уравнений (1) приближение геометрической оптики для нормальных волн «крученной» системы:

$$E_{y,j} = \frac{C_j}{\sqrt{\chi_j}} \exp\left(i \int_{z_0}^z \tilde{n}_j(z) dz\right), \quad E_{x,j} = i\tilde{K}_j E_{y,j}, \quad (9)$$

где $\chi_j = \tilde{n}_j(1 + \tilde{K}_j^2) + 2\delta\tilde{K}_j$, z_0 — точка, определяющая начало отсчета, z — текущая координата, а величины \tilde{n}_j и \tilde{K}_j определены соотношениями (3), (4).

Интегральный критерий применимости приближения геометрической оптики (9), основанный на оценке первого приближения к полю E , имеет вид

$$\frac{c}{2\pi\omega} \left| \int_{z_0}^z \left(-\frac{3}{4} \frac{\chi'^2}{\chi^2} + \frac{1}{2} \frac{\chi''}{\chi} \right) \frac{1 + \tilde{K}^2}{\chi} dz \right| \ll 1 \quad (10)$$

(χ' означает производную по z).

Более простые необходимые условия применимости геометрооптического приближения получаются из сравнения различных членов в уравнениях нулевого и первого приближений. Кроме обычных критериев

$$\frac{c}{2\pi\omega} \frac{d\tilde{n}_j}{dz} \ll \tilde{n}_j \quad \text{и} \quad \frac{c}{2\pi\omega\tilde{n}_j} \frac{dE_{0j}}{dz} \ll E_{0j}$$

(изменения амплитуды $E_{0j} = C_j/\sqrt{\chi_j}$ и «показателя преломления» \tilde{n}_j малы по длине волны) при $R \gg 1$ появляются дополнительные условия

$$\kappa \frac{d\tilde{n}_j}{dz} \ll \tilde{n}_j \quad \text{и} \quad \kappa \frac{dE_{0j}}{dz} \ll E_{0j},$$

означающие, что изменения амплитуды и «показателя преломления» должны быть малы также на характерном масштабе изменения магнитного поля $1/\kappa$. Приведенные решения пригодны и в том случае, если показатель вращения магнитного поля κ является медленной функцией координат.

Заметим, что в случае $|n_1^2 - n_2^2| \ll n_1^2 + n_2^2$, $\kappa \ll \omega/c$ для системы уравнений (1) можно воспользоваться квазиизотропным приближением [4]. Решение (9) получается, если в уравнениях для медленных амплитуд перейти к переменным E_x' и E_y' и произвести «вторичное укорачивание».

В плазме с широм магнитного поля существуют, таким образом, два типа решений в приближении геометрической оптики. Во-первых, это обычные решения, которые получаются из системы (1), если ее коэффициенты — достаточно плавные функции z . Для системы (1) шир магнитного поля является неоднородностью с характерным масштабом $L \sim 1/\kappa$. Чтобы условия применимости геометрооптического приближения не нарушались из-за поляризационного вырождения, необходимо, чтобы выполнялось условие $(\omega/c)n\Delta nL \gg 1$ (т. е. $R \ll 1$).

Во-вторых, в плазме с широм магнитного поля существует решение в приближении геометрической оптики (9) для нормальных волн «крученой» системы, которые получаются из уравнений (1а), если их коэффициенты — плавные функции z . Это приближение справедливо и в том случае, если шир магнитного поля не является плавной неоднородностью ($R \gg 1$). При $R \ll 1$ приближение геометрической оптики для нормальных волн «крученой» системы совпадает с приближением обычной геометрической оптики. Последнее приближение применимо до тех пор, пока разность показателей преломления нормальных волн достаточно велика.

Характерной особенностью нормальных волн «крученой» системы является то, что их «показатели преломления» различны и в вакууме. Поэтому для высокочастотных волн возможна любопытная ситуация, когда геометрическое решение для нормальных волн «крученой» системы применимо во всем переходном слое от плотной плазмы к вакууму. Как следует из (4), излучение в виде одной геометрооптической волны «крученой» системы обладает линейной поляризацией в плотной плазме ($R \ll 1$) и круговой — в вакууме ($R = \infty$). Поэтому линейно поляризованная волна, совпадающая в плотной плазме с нормальной волной обычной геометрической оптики, в рассматриваемом приближении выйдет в вакуум с круговой поляризацией. Знак круговой поляри-

зации зависит от частоты излучения и параметров переходного слоя. Так, если во всем переходном слое $n_1^2(\omega) > n_2^2(\omega)$ ($\omega_0 < \omega < \omega_H$), то необыкновенная волна выйдет из плазмы с круговой поляризацией, в которой вектор \mathbf{E} вращается в направлении поворота магнитного поля (обыкновенная волна имеет противоположный знак круговой поляризации). Если во всем переходном слое $n_1^2(\omega) < n_2^2(\omega)$ ($\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$) — ситуация обратная*.

Приведенные рассуждения обратимы на случай прохождения волны из вакуума в плотную плазму через плавный переходный слой.

Автор благодарен Ю. А. Кравцову за обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Fidone, G. Granata, Nucl. Fusion, **11**, 133 (1971).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
3. В. Л. Гинзбург, ЖТФ, **14**, 181 (1944).
4. Ю. А. Кравцов, Докл. АН СССР, **183**, 74 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 декабря 1971 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE PROPAGATION IN PLASMA WITH CORD OF THE MAGNETIC FIELD

E. V. Suvorov

The paper discusses the polarization plane rotation when a linearly polarized wave is propagating in plasma with a sheared magnetic field. The geometrical optics solutions determining the wave propagation in such a medium with smooth inhomogeneity are found.

* Мы здесь не рассматриваем случай, когда разность $n_1^2(\omega) - n_2^2(\omega)$ меняет знак внутри переходного слоя, что свидетельствует о наличии в нем плазменного резонанса. Некоторые особенности взаимодействия волн в области резонанса рассмотрены в работе [1].

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ПОТОКОМ СФАЗИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. Б. Киценко, В. И. Панченко

В работе исследуется взаимодействие потока сфазированных осцилляторов с холодной плазмой в постоянном магнитном поле. Показано, что модуляция потока по азимутальному углу импульса приводит к появлению неустойчивостей параметрического типа, если для собственных частот плазмы ω_α и ω_β выполняется условие распадного типа $|\omega_\alpha| + |\omega_\beta| = n \omega_B$ ($n = 2, 3, \dots$) и фазовые скорости волн α и β направлены противоположно. Параметрическое возбуждение происходит в условиях, когда отсутствует модуляция плотности и скорости пучка.

При взаимодействии одноименных ветвей колебаний, когда $|\omega_\alpha| = |\omega_\beta|$, параметрическое возбуждение имеет место как для целых, так и для полужелых гармоник гирочастоты частиц потока. Если угол между направлением внешнего магнитного поля и волновым вектором равен $\pi/2$, то полужелые гармоники не возбуждаются. Инкременты нарастания колебаний при параметрической неустойчивости пропорциональны глубине модуляции $\text{Im } \omega \sim (n_b/n_p) \omega_\alpha$ (n_b и n_p — соответственно плотности частиц пучка и плазмы).

В условиях комбинированного пучково-параметрического резонанса инкременты нарастания колебаний порядка $(n_b/n_p)^{1/3} \omega_\alpha$. Наличие параметрического резонанса существенно влияет на величину инкремента нарастания колебаний при пучковом резонансе.

1. Как известно, анизотропия функции распределения частиц потока или плазмы по скоростям приводит к новым эффектам при возбуждении электромагнитных волн в плазме. Ранее детально исследовалось взаимодействие с плазмой потоков частиц с одинаковым ларморовским радиусом (см. [1–8]). Такие потоки возникают при инжекции заряженных частиц под углом к внешнему магнитному полю. При этом могут оказаться существенными эффекты, связанные с группировкой частиц по азимутальному углу импульса [5, 13]. Такая группировка приводит к появлению неустойчивостей параметрического типа, которые можно использовать как для усиления электромагнитных колебаний, так и для нагрева плазмы. Заметим, что анизотропия функции распределения частиц плазмы по азимутальному углу импульса может естественно возникнуть на квазилинейной стадии развития колебаний [9].

В настоящей работе исследуется взаимодействие потока сфазированных осцилляторов с холодной плазмой в постоянном магнитном поле. Показано, что модуляция потока по азимутальному углу импульса приводит к появлению неустойчивостей параметрического типа. Параметрические эффекты могут проявиться и при возбуждении волн в области обычных пучковых резонансов. Параметрическое возбуждение происходит в условиях, когда отсутствует модуляция плотности и скорости пучка.

2. Пусть невозмущенная функция распределения частиц потока по скоростям f_0 описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \epsilon \omega_B \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

где φ — угол в импульсном пространстве $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_\perp, \varphi, p_\parallel)$, $\omega_B = |e| B_0 / m_b c$ — гирочастота частиц потока, e и m_b — заряд и релятивистская масса частиц потока, $\epsilon = \text{sgn } e$, B_0 — внешнее постоянное магнитное поле. Если в начальный момент времени f_0 — периодическая по φ функция, то ее можно представить в виде

$$f_0(p_\perp, p_\parallel, \varphi + \epsilon \omega_B t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{0,n}(p_\perp, p_\parallel) \exp[in(\varphi + \epsilon \omega_B t)]. \quad (2)$$

Из условия вещественности f_0 следует, что коэффициенты $f_{0,n}$ обладают следующим свойством: $f_{0,n} = f_{0,-n}^*$.

В дальнейшем предполагается, что в исходном состоянии нестационарные токи и заряды отсутствуют ($f_{0,1} = f_{0,-1} = 0$), а постоянные ток и заряд пучка скомпенсированы. Ларморовские радиусы всех частиц потока предполагаются одинаковыми, т. е. для $f_{0,n}$ выбирается следующее выражение:

$$f_{0,n} = \gamma_{-\epsilon n} \frac{n_b}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_\perp - p_{\perp 0}) \delta(p_z - p_{z0}), \quad (2a)$$

где n_b — плотность частиц потока, γ_n — некоторые коэффициенты, удовлетворяющие условию $\gamma_n = \gamma_{-n}^*$ ($\gamma_0 = 1$, $\gamma_{\pm 1} = 0$).

Для исследования малых колебаний рассматриваемой системы воспользуемся методом Фурье — Лапласа. Малая добавка f к функции распределения потока по скоростям удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} -i\omega f(\omega, \mathbf{k}) - f(t=0, \mathbf{k}) + i\mathbf{k}\mathbf{v} f(\omega, \mathbf{k}) - \epsilon \omega_B \frac{\partial f}{\partial \varphi} + e \sum_n \left\{ E(\omega + n\epsilon \omega_B, \mathbf{k}) + \frac{1}{c} [V, B(\omega + n\epsilon \omega_B, \mathbf{k})] \right\} \frac{\partial (f_{0,n} e^{in\varphi})}{\partial p} + \\ + e \sum_n \left\{ \frac{\partial E(\omega + n\epsilon \omega_B, \mathbf{k})}{\partial \omega} + \frac{1}{c} \left[V, \frac{\partial B(\omega + n\epsilon \omega_B, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right] \right\} \times \\ \times n f_{0,n} e^{in\varphi} \frac{\partial \omega_B}{\partial p} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

\mathbf{k} — волновой вектор.

С помощью уравнения (3) и уравнений Максвелла получим

$$\sum_{k=1}^3 T_{ik}(\omega) E_k(\omega) = - \sum_{k,n} \epsilon_{ik}^b(n, \omega) E_k(\omega - n\omega_B) + Q_i(\omega), \quad (4)$$

где величины $Q_i(\omega)$ определяются начальными условиями, а

$$T_{ik} = \frac{c^2}{\omega^2} k_i k_k - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \delta_{ik} + \epsilon_{ik}^{(p)}, \quad (5)$$

δ_{ik} — символ Кронекера, $\epsilon_{ik}^{(p)}$ — тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_1 \delta_{ij} + (\epsilon_3 - \epsilon_1) h_i h_j + i\epsilon_2 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} h_k. \quad (6)$$

Здесь $h_i = \frac{B_{0i}}{|B_0|}$, ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга и

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_e^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \omega_e}{\omega(\omega^2 - \omega_e^2)}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (7)$$

ω_p и ω_e — соответственно ленгмюровская и циклотронная частоты электронов плазмы.

Для компонент тензора диэлектрической проницаемости сфазированного релятивистского потока осцилляторов $\varepsilon_{ik}^b(n, \omega)$ находим

$$\varepsilon_{11}^b(n, \omega) = -\frac{\omega_b^2}{\omega^2} \delta_{n,0} - \gamma_n \sum_s \left\{ \frac{\omega_b^2 \omega_B}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} [sC_s (aC_{s-n})' + (s-n) \times \right.$$

$$\left. \times C_{s-n} (aC_s)'] - \beta_{\perp}^2 \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] C_s C_{s-n} \right\},$$

$$\varepsilon_{22}^b(n, \omega) = -\frac{\omega_b^2}{\omega^2} \delta_{n,0} + \gamma_n \sum_s \left\{ \frac{\omega_b^2 \omega_B}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} [sS_s (aS_{s-n})' + \right.$$

$$\left. + (s-n) S_{s-n} (aS_s)'] - \beta_{\perp}^2 \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] S_{s-n} S_s \right\},$$

$$\varepsilon_{33}^b(n, \omega) = -\frac{\omega_b^2}{\omega^2} \delta_{n,0} - \gamma_n \sum_s \left\{ \frac{\omega_b^2 2k_z v_{z0}}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} U_{s-n} U_s + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_{\perp}^2 \omega_b^2 \omega_B}{\beta_{\perp}^2 \omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} a [sU_s U'_{s-n} + (s-n) U_{s-n} U'_s] - \right.$$

$$\left. - \beta_{\perp}^2 \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] U_{s-n} U_s \right\}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_{12}^b(n, \omega) = -i \varepsilon \gamma_n \sum_s \left\{ \frac{\omega_b^2 \omega_B}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} s \left[\frac{(a^2 C_s i S_{s-n})'}{a} + n S_s S_{s-n} \right] - \right.$$

$$\left. - \beta_{\perp}^2 \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] C_s i S_{s-n} \right\},$$

$$\varepsilon_{21}^b(n, \omega) = i \varepsilon \gamma_n \sum_s \left\{ \frac{\omega_b^2 \omega_B}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} (s-n) \left[\frac{(a^2 C_{s-n} i S_s)'}{a} - \right. \right.$$

$$\left. - n S_s S_{s-n} \right] - \beta_{\perp}^2 \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] C_{s-n} i S_s \right\},$$

$$\varepsilon_{13}^b(n, \omega) = -\gamma_n \sum_s \frac{\omega_b^2 \omega_B}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} \left\{ \frac{\beta_z}{\beta_{\perp}} [(a^2 C_{s-n} C_s)'] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + ani S_{s-n} C_s \left. + \frac{k_z}{k_\perp} a U_{s-n} C_s \right\} + \gamma_n \sum_s \beta_z \beta_\perp \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] U_{s-n} C_s, \\
\epsilon_{31}^b(n, \omega) &= -\gamma_n \sum_s \frac{\omega_b^2 \omega_B}{\omega(\omega - n\omega_B) \Delta_s} \left\{ \frac{\beta_z}{\beta_\perp} [(a^2 C_s C_{s-n})' - \right. \\
& - ani S_s S_{s-n}] + \frac{k_z}{k_\perp} a U_s C_{s-n} \left. \right\} + \gamma_n \sum_s \beta_z \beta_\perp \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] C_{s-n} U_s, \\
\epsilon_{23}^b(n, \omega) &= i \epsilon \gamma_n \sum_s \frac{\omega_b^2}{\omega \Delta_s} \left\{ \frac{k_\perp v_{z0}}{\omega - n\omega_B} \left[\frac{(a^2 C_{s-n} i S_s)'}{a} - n S_{s-n} S_s \right] + \right. \\
& + \frac{k_z v_{\perp 0}}{\omega - n\omega_B} U_{s-n} i S_s \left. \right\} - i \epsilon \gamma_n \sum_s \beta_z \beta_\perp \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] U_{s-n} i S_s, \\
\epsilon_{32}^b(n, \omega) &= -i \epsilon \gamma_n \sum_s \frac{\omega_b^2}{\omega \Delta_s} \left\{ \frac{\beta_z}{\beta_\perp} \left(1 - \frac{k_z v_{z0}}{\omega - n\omega_B} \right) [(a i S_{s-n} U_s)' + n C_{s-n} U_s] + \right. \\
& + \frac{k_z v_{\perp 0}}{\omega - n\omega_B} i S_{s-n} U_s - \frac{k_\perp v_{z0}}{\omega - n\omega_B} n U_{s-n} U_s + i \epsilon \gamma_n \sum_s \beta_z \beta_\perp \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \times \\
& \quad \times \left[1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] i S_{s-n} U_s,
\end{aligned}$$

где $\omega_b = (4\pi e^2 n_b / m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота потока, k_z , v_{z0} и k_\perp , $v_{\perp 0}$ — соответственно параллельные и перпендикулярные внешнему магнитному полю составляющие волнового вектора и скорости потока, $\beta_z = v_{z0}/c$, $\beta_\perp = v_{\perp 0}/c$, $\Delta_s = \omega - s\omega_B - k_z v_{z0}$. Функции $U_s = J_s(a)$, $C_s = (s/a) J_s(a)$, $S_s = -i J'_s(a)$ зависят от аргумента $a = \frac{k_\perp v_{\perp 0}}{\omega_B}$,

штрих означает дифференцирование по аргументу a . Ось z направлена вдоль B_0 , ось x выбирается таким образом, чтобы волновой вектор лежал в плоскости zx .

Можно убедиться, что компоненты ϵ_{ik}^b удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\epsilon_{ik}^b(-n, \omega - n\omega_B)}{\gamma_{-n}} = \frac{\epsilon_{ik}^b(n, \omega)}{\gamma_n} \quad (9a)$$

при $i = k = 1$, $i = k = 2$, $i = k = 3$, $i = 1, k = 3$ и

$$\frac{\epsilon_{ik}^b(-n, \omega - n\omega_B)}{\gamma_{-n}} = -\frac{\epsilon_{ki}^b(n, \omega)}{\gamma_n} \quad (9b)$$

при $i = 1, k = 2$ и $i = 2, k = 3$.

Отметим еще одно свойство симметрии тензора диэлектрической проницаемости потока:

$$\frac{\epsilon_{ik}^b(-n, -\omega)}{\gamma_{-n}} \Big|_{k_z \rightarrow -k_z} = (-1)^n \frac{\epsilon_{ik}^b(n, \omega)}{\gamma_n} \quad (9b)$$

при $i = 1, k = 1; i = 2, k = 2; i = 3, k = 3; i = 2, k = 3; i = 3, k = 2$ и

$$\left. \frac{\varepsilon_{ik}^b(-n, -\omega)}{\gamma_{-n}} \right|_{k_z \rightarrow -k_z} = (-1)^{n+1} \frac{\varepsilon_{ik}^b(n, \omega)}{\gamma_n} \quad (9г)$$

при $i = 1, k = 2; i = 2, k = 1; i = 1, k = 3; i = 3, k = 1$.

3. В соответствии с методикой, развитой в Приложении 1, ищем решение уравнения (4) для E_k в виде разложения по собственным векторам оператора T ,

$$E_k(\omega) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(\omega) e_k^{(\alpha)}(\omega), \quad (10)$$

где $e_k^{(\alpha)}(\omega)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^3 T_{ik}(\omega) e_k^{(\alpha)}(\omega) = \lambda_{\alpha}(\omega) e_i^{(\alpha)}(\omega). \quad (11)$$

Для собственных чисел оператора T имеем уравнение

$$\lambda^3 - \text{Sp } T \lambda^2 + \text{Sp } \phi \lambda - \det T = 0, \quad (12)$$

ϕ — тензор алгебраических дополнений T .

В случае холодной плазмы, когда тензор диэлектрической проницаемости плазмы определяется формулой (6), находим

$$\text{Sp } T = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2N^2, \quad (13)$$

$$\text{Sp } \phi = N^4 - N^2 [\varepsilon_1 (3 - \cos^2 \theta) + \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta)] + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3.$$

Выражение для $\det T$ запишем в общепринятой форме [10]:

$$\det T = AN^4 + BN^2 + C, \quad (14)$$

где

$$A = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta, \quad B = (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \sin^2 \theta - \varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta), \quad (15)$$

$$C = \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \quad N = \frac{kc}{\omega}.$$

Частоты собственных колебаний плазмы определяются условием $\det T = 0$ или $\lambda_{\alpha}(\omega) = 0$.

Исследуем уравнение (12) в некоторых предельных случаях. При $k \rightarrow \infty$ и конечным ω находим

$$\lambda_1 \approx A, \quad \lambda_{2,3} \approx -N^2. \quad (16)$$

Собственные частоты плазмы определяются в этом случае условием $\lambda_1 = 0$ и соответствуют продольным колебаниям. При $k \rightarrow \infty$ и $N \sim 1$

$$\lambda_1 \approx 1, \quad \lambda_{2,3} = -N^2 + 1. \quad (17)$$

Условие $\lambda_{2,3} = 0$ определяет в этом случае частоты поперечных электромагнитных волн. Если $k \rightarrow 0$ и ω конечно, то

$$\lambda_{1,3} = \frac{\omega^2 \pm \omega \omega_e - \omega_p^2}{\omega (\omega \pm \omega_e)}, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (18)$$

При $k \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$ из условия $\det T = 0$ находим собственные частоты

$$\omega = \pm \cos \theta \frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \omega_e. \quad (19)$$

Вблизи дисперсионной кривой имеем при $k \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$

$$\lambda_1 = -\frac{\cos^2 \theta N^4 - \omega_p^4 / \omega_e^2}{N^2 (2 - \sin^2 \theta)}, \quad \lambda_2 = -\frac{\omega_p^2}{\omega_e^2}, \quad (20)$$

$$\lambda_3 = -N^2 (2 - \sin^2 \theta).$$

В области малых частот необходимо учитывать ионы, поэтому уравнение (20) имеет ограниченную область применимости.

Ход дисперсионных кривых $\omega = \omega(k)$ холодной электронной плазмы при $\theta \neq 0, \pi/2$ качественно представлен на рис. 1 (см. [11]). Отметим, что выполняются неравенства $\omega_{01} > \omega_+ > \omega_p > \omega_{02}$, ω_- .

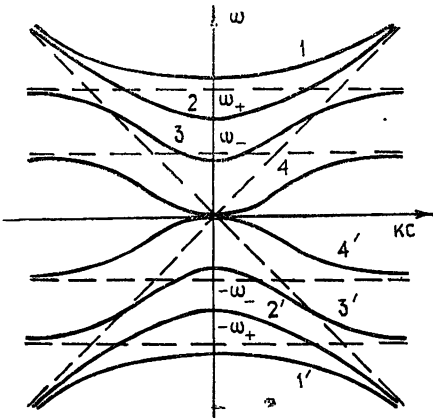


Рис. 1.

Рис. 1. Дисперсионные кривые $\omega = \omega(k)$ холодной электронной плазмы при произвольном значении θ , отличном от 0 или $\pi/2$.

1— ω_{01} —быстрая необыкновенная волна, 2— ω_p —обыкновенная волна, 3— ω_{02} —медленная необыкновенная волна, 4—быстрая магнитозвуковая волна;

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \omega_p^2 + \omega_e^2 \pm \left[(\omega_p^2 + \omega_e^2)^2 - 4 \omega_p^2 \omega_e^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$\omega_{01,02} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_e^2 + 4 \omega_p^2} \pm \omega_e \right);$$

$$1' - (-\omega_{01}), \quad 2' - (-\omega_p), \quad 3' - (-\omega_{02}).$$

Рис. 2. Дисперсионные кривые $\omega = \omega(k)$ холодной электронной плазмы при $\theta = \pi/2$.

$$\omega_h = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_e^2},$$

$$1 - \omega_{01}, \quad 2 - \omega_p, \quad 3 - \omega_{02}, \quad 1' - (-\omega_{01}), \quad 2' - (-\omega_p), \quad 3' - (-\omega_{02}).$$

Вектор $e^{(\alpha)}(\omega)$, вычисленный для соответствующей ему частоты собственных колебаний $\omega_{\alpha}(\lambda_{\alpha}(\omega_{\alpha})=0)$, определяет поляризацию электромагнитной волны в плазме:

$$E_k(t) \sim e_k^{\alpha}(\omega_{\alpha}) \exp(-i \omega_{\alpha} t). \quad (21)$$

Можно представить нормированный на единицу вектор поляризации в инвариантной форме [12]

$$e_k^{(\alpha)}(\omega_{\alpha}) = \frac{\psi_{ik}}{\sqrt{\psi_{ii} \text{Sp} \psi}} \Big|_{\omega = \omega_{\alpha}}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{ik} = & \varkappa_i \varkappa_k N^4 + N^2 \left[-\varepsilon_3 \delta_{ik} - \varepsilon_1 \varkappa_i \varkappa_k + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \times \right. \\ & \times (h_i h_k + [\varkappa h]_i [\varkappa h]_k) + i \varepsilon_2 \left(\sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ikm} h_m + \varkappa h \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ikm} \varkappa_m \right) \left. + \right. \\ & \left. + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_{ik} + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3) h_i h_k + i \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ikm} h_m \right] \end{aligned} \quad (23)$$

и $\text{Sp} \psi$ определяется (13). В (22) i надо выбирать таким образом, чтобы $\psi_{ii} \neq 0$. Такой выбор всегда возможен (см. Приложение 2).

Нормированные векторы поляризации определены формулой (22) с точностью до произвольного фазового множителя $e^{i\varphi}$. Выбором этого множителя всегда можно добиться, чтобы векторы поляризации, соответствующие собственным частотам $+\omega_\alpha$ и $-\omega_\alpha$, были связаны соотношением

$$e_i^{*\alpha}(\omega_\alpha) = e_i(-\omega_\alpha). \quad (24)$$

Дифференцируя (12) по ω и подставляя в полученное соотношение значение частоты ω_α , обращающее в нуль одно из собственных чисел ($\lambda_\alpha(\omega_\alpha) = 0$), найдем производную от λ_α по ω для собственной частоты ω_α :

$$\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \det T}{\text{Sp} \psi} \Big|_{\omega = \omega_\alpha}. \quad (25)$$

Формулы (25), (13) и (14) могут быть использованы для вычисления величин $\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)$, которые понадобятся в дальнейшем при нахождении инкрементов нарастания колебаний.

4. Как показано в Приложении 1 (см. (П.1.14)), исследование пучковых резонансов в первом приближении по плотности пучка может быть проведено с помощью дисперсионного уравнения

$$1 + \frac{\sum_{i,k=1}^3 e_i^{*\alpha}(\omega_\alpha) \varepsilon_{ik}^b(0, \omega) e_k^\alpha(\omega_\alpha)}{\lambda_\alpha(\omega)} = 0. \quad (26)$$

При выводе (26) учтено, что при вещественных ω оператор T — эрмитов, поэтому, если вектор $e^{(\alpha)}(\omega_\alpha)$ нормирован на единицу, то $g_i^\alpha(\omega_\alpha) = e_i^\alpha(\omega_\alpha)$.

При $a = \frac{k_\perp v_{\perp 0}}{\omega_B} \sim 1$ и $\omega - k_z v_{z0} \approx S \omega_B$ можно удерживать в ε_{ik}^b только резонансное слагаемое $\sim \Delta_s^{-2}$, т. е.

$$\varepsilon_{ik}^b(n, \omega) \approx \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} \right) B_i(s) B_k^*(s), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(s) = & \beta_\perp \frac{S}{a} J_s(a), \quad B_2(s) = -\varepsilon \beta_\perp i J'_s(a), \\ B_3(s) = & \beta_z J_s(a). \end{aligned} \quad (28)$$

Полагая $\varepsilon = \omega - \omega_\alpha$ ($\lambda_\alpha(\omega_\alpha) = 0$) и $\delta_1 = \omega_\alpha - S\omega_B - k_z v_{z0}$, при $|\varepsilon|, |\delta_1| \ll \omega_\alpha$ из (26) получаем

$$\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) \varepsilon (\varepsilon + \delta_1)^2 + \omega_b^2 \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_\alpha^2}\right) W_{\alpha, S} = 0, \quad (29)$$

где

$$W_{\alpha, S} = \left| \sum_i e_i^{(\alpha)}(\omega_\alpha) B_i^*(S) \right|^2. \quad (30)$$

В случае точного резонанса, когда $\delta_1 = 0$, для инкремента нарастания колебаний имеем

$$\text{Im } \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \omega_b^2 \frac{(1 - k_z^2 c^2 / \omega_\alpha^2)}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)} W_{\alpha, S} \right|^{1/3}. \quad (31)$$

Отметим, что возбуждение электромагнитных волн в холодной плазме при прохождении через нее релятивистского несфокусированного потока осцилляторов исследовалось уже в работе [6] несколько иным методом.

Уравнение (26) можно использовать и для изучения возбуждения волн «линейными» пучками при $a = \frac{k_\perp v_\perp 0}{\omega_B} \rightarrow 0$.

5. В случае параметрического резонанса, когда частоты ω_α ($\lambda_\alpha(\omega_\alpha) = 0$) и ω_β ($\lambda_\beta(\omega_\beta) = 0$) при некотором n связаны соотношением

$$\omega_\alpha - n\omega_B \approx \omega_\beta, \quad (32)$$

дисперсионное уравнение для пучка малой плотности запишем в следующем виде (см. Приложение 1, формула (П.1.16)):

$$\left| \begin{array}{cc} 1 + \frac{\sum_{i, k} e_i^{*(\alpha)}(\omega_\alpha) \varepsilon_{ik}^b(0, \omega) e_k^\alpha(\omega_\alpha)}{\lambda_\alpha(\omega)} & \frac{\sum_{i, k} e_i^{*\alpha}(\omega_\alpha) \varepsilon_{ik}^{(b)}(n, \omega) e_k^\beta(\omega_\beta)}{\lambda_\alpha(\omega)} \\ \frac{\sum_{i, k} e_i^{*(\beta)}(\omega_\beta) \varepsilon_{ik}^b(-n, \omega - n\omega_B) e_k^\alpha(\omega_\alpha)}{\lambda_\beta(\omega - n\omega_B)} & 1 + \frac{\sum_{i, k} e_i^{*\beta}(\omega_\beta) \varepsilon_{ik}^b(0, \omega - n\omega_B) e_k^\beta(\omega_\beta)}{\lambda_\beta(\omega - n\omega_B)} \end{array} \right| = 0. \quad (33)$$

Если пучковый резонанс отсутствует, т. е. $|\omega_\alpha - n\omega_B - k_z v_{z0}| \gg \omega_\alpha$ при любом s , то, используя (9а) и (9б), имеем $\varepsilon_{ik}^b(-n, \omega_\beta) = \varepsilon_{ki}^{*b}(n, \omega_\alpha)$. Полагая $\varepsilon = \omega - \omega_\alpha$, $\delta = \omega_\alpha - n\omega_B - \omega_\beta$ ($|\varepsilon|, |\delta| \ll \omega_\alpha$), получим

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ -\delta - \frac{a_{\alpha\alpha}(0, \omega_\alpha)}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)} - \frac{a_{\beta\beta}(0, \omega_\beta)}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \pm \left[\left(\delta - \frac{a_{\alpha\alpha}(0, \omega_\alpha)}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)} + \frac{a_{\beta\beta}(0, \omega_\beta)}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right)^2 + 4 \frac{|a_{\alpha\beta}(n, \omega_\alpha)|^2}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) \lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right]^{1/2} \right\}, \quad (34)$$

где $a_{\alpha\beta}(n, \omega) = \sum_{i, k} e_i^{*\alpha}(\omega_\alpha) \varepsilon_{ik}^b(n, \omega) e_k^\beta(\omega_\beta)$.

Из (34) видно, что неустойчивость возникает только при $\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) \lambda'_\beta(\omega_\beta) < 0$, что возможно лишь при разных знаках частот ω_α и ω_β (см. Приложение 2), и максимальный инкремент определяется формулой

$$\text{Im } \varepsilon_{\max} = \left| \frac{\sum_{l, k} e^{*a}(\omega_a) \varepsilon_{ik}^b(n, \omega_a) e_k^b(\omega_\beta)}{[\lambda'_a(\omega_a) \lambda'_\beta(\omega_\beta)]^{1/2}} \right|. \quad (35)$$

Область неустойчивости определяется неравенством

$$\left[\delta - \frac{\alpha_{aa}(0, \omega_a)}{\lambda'_a(\omega_a)} + \frac{\alpha_{\beta\beta}(0, \omega_\beta)}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right]^2 < 4 \frac{|\alpha_{a\beta}(n, \omega_a)|^2}{|\lambda'_a(\omega_a) \lambda'_\beta(\omega_\beta)|}. \quad (36)$$

По порядку величины $\text{Im } \varepsilon \sim |\gamma_n| \frac{n_b}{n_p} \omega_a$, где n_p — плотность плазмы.

Уравнение (33) можно применить и для исследования комбинированных пучково-параметрических резонансов, когда наряду с соотношением $\omega_a - n \omega_B \approx \omega_\beta$ для некоторого S величина Δ_S оказывается малой ($|\omega_a - S \omega_B - k_z v_{z0}| \ll \omega_a$). Считая $k_\perp v_{\perp 0} / \omega_B \gg 1$, будем удерживать в $\varepsilon_{ik}^b(n, \omega)$ только слагаемые $\sim \Delta_S^{-2}$. Тогда из (33) получим

$$\begin{aligned} & \left[\lambda'_a(\omega_a) \varepsilon (\varepsilon + \delta_1)^2 + \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_a^2} \right) W_{a,S} \omega_b^2 \right] \left[\lambda'_\beta(\omega_\beta) (\varepsilon + \delta) \times \right. \\ & \times (\varepsilon + \delta_1)^2 + \left. \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_\beta^2} \right) W_{\beta, S-n} \omega_b^2 \right] - |\gamma_n|^2 \times \\ & \times \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_a \omega_\beta} \right)^2 W_{a,S} W_{\beta, S-n} = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где $W_{a,S}$ определяется формулой (30), $\varepsilon = \omega - \omega_a$, $\delta = \omega_a - n \omega_B - \omega_\beta$, $\delta_1 = \omega_a - S \omega_B - k_z v_{z0}$ и $|\varepsilon|, |\delta|, |\delta_1| \ll \omega_a$.

При $|\delta|, |\delta_1| \ll |\varepsilon|$ из (37) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{\omega_b^{2/3}}{2^{1/3}} \left\{ - \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_a^2} \right) \frac{W_{a,S}}{\lambda'_a(\omega_a)} - \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_\beta^2} \right) \frac{W_{\beta, S-n}}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \pm \right. \\ & \pm \left[\left(\left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_a^2} \right) \frac{W_{a,S}}{\lambda'_a(\omega_a)} - \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_\beta^2} \right) \frac{W_{\beta, S-n}}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. + 4 |\gamma_n|^2 \left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega_a \omega_\beta} \right)^2 \frac{W_{a,S} W_{\beta, S-n}}{\lambda'_a(\omega_a) \lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right]^{1/2} \right\}^{1/3}, \end{aligned} \quad (38)$$

где надо учитывать все три значения кубического корня. В случае пучково-параметрического резонанса инкремент нарастания по порядку величины такой же, как и при обычном пучковом резонансе, $\text{Im } \varepsilon \sim \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3} \omega_a$, хотя численное значение может быть существенно различным.

6. В качестве примера применения полученных выше общих формул рассмотрим частный случай распространения электромагнитных волн поперек внешнего магнитного поля ($\theta = \pi/2$).

Приведем выражения для собственных чисел оператора T :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (2 \varepsilon_1 - N^2 \pm \sqrt{N^4 + 4 \varepsilon_2^2}), \quad (39)$$

$$\lambda_3 = \varepsilon_3 - N^2.$$

Собственные частоты равны

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\omega_e^2 + 2\omega_p^2 + k^2 c^2 \pm ((\omega_e^2 - k^2 c^2)^2 + 4\omega_e^2 \omega_p^2)^{1/2} \right]^{1/2},$$

$$\omega_3 = (\omega_p^2 + k^2 c^2)^{1/2}. \quad (40)$$

На рис. 2 показан качественный ход дисперсионных кривых $\omega = \omega(k)$ при $\theta = \pi/2$.

Векторы поляризации определяются следующими выражениями:

$$e^{(1,2)}(\omega_{1,2}) = \left\{ \frac{\{\varepsilon_2, i\varepsilon_1, 0\}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} \right\} \Big|_{\omega=\omega_{1,2}},$$

$$e^{(3)}(\omega_3) = \{0, 0, 1\}.$$

Для производных $\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)$ получим

$$\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) = \frac{2}{\omega_\alpha} \left| \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_h^2)}{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \right|_{\omega=\omega_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\lambda'_3(\omega_3) = 2/\omega_3.$$

При $a \sim 1$ инкременты в случае точного «пучкового» резонанса $\omega_\alpha = s \omega_B$ согласно (31) равны

$$\text{Im } \varepsilon^{(1,2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{\omega_b^2}{2} \omega_\alpha \beta_\perp^2 \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 \left(\varepsilon_2 \frac{s J_s(a)}{a} - \varepsilon_1 J'_s(a) \right)^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_h^2)} \right|_{\omega=\omega_{1,2}}^{1/3};$$

$$\text{Im } \varepsilon^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left| \omega_b^2 \omega_3 \beta_z^2 J_s^2(a) \right|^{1/3}, \quad (43b)$$

где $\varepsilon^{(\alpha)} = \omega - \omega_\alpha$.

Рассмотрим теперь параметрические резонансы при $\theta = \pi/2$. Если $\omega_\alpha = n \omega_B = -\omega_\alpha$, т. е. $\omega_\alpha = \frac{n \omega_B}{2}$, где n —нечетное, то из свойств тензора диэлектрической проницаемости потока (7) при $\theta = \pi/2$ следует

$$\varepsilon_{11}^b \left(n, n \frac{\omega_B}{2} \right) = \varepsilon_{22}^b \left(n, n \frac{\omega_B}{2} \right) = \varepsilon_{33}^b \left(n, n \frac{\omega_B}{2} \right) = 0,$$

$$\varepsilon_{12}^b \left(n, n \frac{\omega_B}{2} \right) = -\varepsilon_{21}^b \left(n, n \frac{\omega_B}{2} \right). \quad (44)$$

Используя соотношения (44) и (24 а), можно показать, что параметрическое возбуждение полуволновых гармоник гирочастоты потока $\omega_{1(2,3)} = \frac{n \omega_B}{2}$ (см. (35)) в рассматриваемом приближении отсутствует,

т. е. $\text{Im } \varepsilon = 0$.

При условии

$$\omega_1(k) + \omega_2(k) = n \omega_B \quad (45)$$

максимальный инкремент нарастания определяется формулой

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon^{1,2} = & \left| \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2} \omega_p^4}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \left\{ \frac{\omega_e^2}{\omega_1 \omega_2} \varepsilon_{1,1}^b(n, \omega_1) - \frac{(\omega_1^2 - \omega_h^2)(\omega_2^2 - \omega_h^2)}{\omega_p^4} \times \right. \right. \\ & \times \varepsilon_{2,2}^b(n, \omega_1) - i \frac{\omega_e(\omega_2^2 - \omega_h^2)}{\omega_1 \omega_p^2} \varepsilon_{1,2}^b(n, \omega_1) - i \frac{\omega_e}{\omega_2} \times \\ & \left. \left. \times \frac{(\omega_1^2 - \omega_h^2)}{\omega_p^2} \varepsilon_{2,1}^b(n, \omega_1) \right\} \left[\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_h^2)(\omega_2^2 - \omega_h^2)} \right]^{-1} \right|. \end{aligned} \quad (46)$$

Нетрудно установить, что резонанс (45) может наступить при $n \omega_B \geq \sqrt{\omega_e^2 + 4 \omega_p^2}$ для значений волнового вектора k , удовлетворяющих условию

$$k = \frac{1}{c} \{ n^2 \omega_B^2 + \omega_e^2 \pm 2 [n^2 \omega_B^2 (\omega_e^2 + \omega_p^2) - \omega_p^2 \omega_e^2]^{1/2} \}^{1/2}. \quad (47)$$

Если возможен параметрический резонанс

$$\omega_{1,2}(k) + \omega_3(k) = n \omega_B, \quad (48)$$

то максимальный инкремент нарастания $\text{Im } \varepsilon^{(3)}$ равен

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon^{(3)} = & \left| \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_3} \omega_p^2}{2 \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)(\omega_{1,2}^2 - \omega_h^2)}} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\omega_e}{\omega_{1,2}} \varepsilon_{3,1}^b(n, \omega_3) - i \frac{\omega_{1,2}^2 - \omega_h^2}{\omega_p^2} \varepsilon_{3,2}^b(n, \omega_3) \right] \right|. \end{aligned} \quad (49)$$

В случае пучково-параметрического резонанса при $\theta = \pi/2$, когда $\omega_\alpha - n \omega_B = \omega_\beta$ и $\omega_\alpha = s \omega_B$, инкременты нарастания находятся по формуле (см. (38), (28) и (30))

$$\begin{aligned} \text{Im } \varepsilon = & \frac{\omega_b^{2/3}}{2^{1/3}} \left\{ - \frac{W_{\alpha,s}}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)} - \frac{W_{\beta,s-n}}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \pm \right. \\ & \left. \pm \left[\left(\frac{W_{\alpha,s}}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)} - \frac{W_{\beta,s-n}}{\lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right)^2 + 4 |\gamma_n|^2 \frac{W_{\alpha,s} W_{\beta,s-n}}{\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) \lambda'_\beta(\omega_\beta)} \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$W_{\alpha,s} = \left| e_1^\alpha(\omega_\alpha) \beta_\perp \frac{s}{a} J_s(a) + e_2^\alpha(\omega_\alpha) \beta_\perp i \in J'_s(a) + e_3^\alpha(\omega_\alpha) \beta_z J_s(a) \right|^2.$$

При четном n , когда $\omega_\alpha = \frac{n}{2} \omega_B = S \omega_B$, инкременты нарастания, определяемые формулой (50), отличаются лишь множителем $(1 - |\gamma_n|^2)^{1/6}$ от «пучковых» инкрементов, вычисленных по формулам (43 а) и (43 б).

7. Таким образом, при прохождении потока сфазированных осцилляторов через холодную плазму происходит параметрическое возбуждение колебаний, если для собственных частот плазмы выполняется условие $|\omega_\alpha| + |\omega_\beta| = n \omega_B$, и направления фазовых скоростей волн α и β противоположны.

При взаимодействии одноименных ветвей колебаний ($|\omega_\alpha| = |\omega_\beta|$) параметрическое возбуждение имеет место как для целых, так и для

полуцелых гармоник гирочастоты частиц потока. При $\theta = \pi/2$ полуцелые гармоники не возбуждаются. Инкременты нарастания колебаний при параметрической неустойчивости пропорциональны глубине модуляции

$$\text{Im } \omega \sim \frac{n_b}{n_p} \omega_\alpha.$$

В условиях комбинированного пучково-параметрического резонанса инкременты нарастания колебаний порядка $\left(\frac{n_b}{n_p}\right)^{1/3} \omega_\alpha$. Наличие параметрического резонанса существенно влияет на величину инкремента нарастания колебаний при пучковом резонансе. При этом параметрический резонанс оказывает влияние на возбуждение колебаний и при одинаковых направлениях фазовых скоростей волн α и β .

В заключение авторы выражают благодарность К. Н. Степанову за обсуждение работы и ценные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотрим систему уравнений для L неизвестных функций $X_i(t)$, которая после применения преобразования Лапласа

$$X_i(\omega) = \int_0^\infty x_i(t) e^{i\omega t} dt, \quad (\text{П.1.1})$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} X_i(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

приводится к виду

$$\sum_{k=1}^L T_{ik}(\omega) X_k(\omega) = -h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^L d_{ik}(n, \omega) X_k(\omega - n\nu) + Q_i(\omega), \quad (\text{П.1.2})$$

где ν — частота модуляции, параметр h предполагается малым. Величины $Q_i(\omega)$ определяются начальными условиями.

Пусть $e^\alpha(\omega)$ — собственные векторы оператора T_{ik} , т. е.

$$\sum_{k=1}^L T_{ik}(\omega) e_k^\alpha(\omega) = \lambda^\alpha(\omega) e_i^\alpha(\omega), \quad (\text{П.1.3})$$

$\lambda^\alpha(\omega)$ — собственные числа оператора T .

Если набор собственных векторов образует базис в нашем линейном пространстве, то искомый вектор X_k можно разложить по векторам $e^\alpha(\omega)$:

$$X_k(\omega) = \sum_\alpha A_\alpha(\omega) e_k^\alpha(\omega). \quad (\text{П.1.4})$$

Из (П.1.2) получаем следующую систему уравнений для величин $A_\alpha(\omega)$:

$$A_\alpha(\omega) = -\frac{h}{\lambda_\alpha(\omega)} \sum_{n, \beta} a_{\alpha, \beta}(n, \omega) A_\beta(\omega - n\nu) + \frac{P_\alpha(\omega)}{\lambda_\alpha(\omega)}, \quad (\text{П.1.5})$$

где

$$a_{\alpha\beta}(n, \omega) = \sum_{i, k} g_i^{*\alpha}(\omega) d_{ik}(n, \omega) e_k^\beta(\omega - n\nu), \quad (\text{П.1.6})$$

$$P_\alpha(\omega) = \sum_i g_i^{*\alpha}(\omega) Q_i(\omega)$$

и $g^{(\alpha)}(\omega)$ — взаимная система векторов для $e^\alpha(\omega)$,

$$\sum e_i^{(\alpha)}(\omega) g_i^{*(\beta)}(\omega) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{П.1.7})$$

Если положить в первом приближении

$$A_\alpha(\omega) \approx \frac{P_\alpha(\omega)}{\lambda_\alpha(\omega)}, \quad (\text{П.1.8})$$

то спектр частот ω_α определяется дисперсионными уравнениями

$$\lambda_\alpha(\omega) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, L), \quad (\text{П.1.9})$$

число которых равно размерности пространства L .

Легко показать, что использование разложения вида (П.1.8) приводит в интересующем нас случае параметрического резонанса ($\lambda_\alpha(\omega) \approx 0$ и $\lambda_\beta(\omega - n\nu) \approx 0$) к появлению в $x_k(t)$ слагаемых $\propto h\omega_\alpha t \exp(-i\omega_\alpha t)$. Таким образом, асимптотическим разложением вида (П.1.8) удобно пользоваться только при $h\omega_\alpha t \ll 1$.

Для получения асимптотических разложений, пригодных в более широком интервале во времени, приведем (П.1.5) к следующему виду:

$$A_\alpha(\omega) = h^2 \sum'_{n, s, \beta, \gamma} \frac{a_{\alpha, \beta}(n, \omega) a_{\beta\gamma}(s - n, \omega - n\nu)}{\tilde{\lambda}_\alpha(\omega) \lambda_{\beta\gamma}(\omega - n\nu)} A_\gamma(\omega - s\nu) + \frac{P_\alpha(\omega)}{\tilde{\lambda}_\alpha(\omega)} - h \sum_{\substack{n, \beta \\ n \neq 0 (\beta = \alpha)}} \frac{a_{\alpha\beta}(n, \omega)}{\tilde{\lambda}_\alpha(\omega) \lambda_{\beta\gamma}(\omega - n\nu)} P_\beta(\omega - n\nu), \quad (\text{П.1.10})$$

где

$$\lambda_{\beta\gamma}(\omega) = \lambda_\beta(\omega) + ha_{\beta\beta}(0, \omega); \quad (\text{П.1.11})$$

$$\tilde{\lambda}_\alpha(\omega) = \lambda_\alpha(\omega) + ha_{\alpha\alpha}(0, \omega) - h^2 \sum_{\substack{n, \beta \\ n \neq 0 (\beta = \alpha)}} \frac{a_{\alpha\beta}(n, \omega) a_{\beta\alpha}(-n, \omega - n\nu)}{\lambda_{\beta\gamma}(\omega - n\nu)} \quad (\text{П.1.12})$$

и Σ' означает, что при суммировании по n, s, β, γ опускаются слагаемые с $n=0$ при $\beta = \alpha$, $s=n$ при $\gamma = \beta$ и $s=0$ при $\gamma = \alpha$. При выводе (П.1.10) в правой части (П.1.5) выделялось слагаемое с $A_\alpha(\omega)$ и производилось интегрирование полученного уравнения.

Для $A_\alpha(\omega)$ в первом приближении из (П.1.10) находим

$$A_\alpha(\omega) \approx \frac{P_\alpha(\omega)}{\tilde{\lambda}_\alpha(\omega)} - h \sum_{\substack{n, \beta \\ n \neq 0 (\beta = \alpha)}} \frac{a_{\alpha\beta}(n, \omega)}{\tilde{\lambda}_\alpha(\omega) \lambda_{\beta\gamma}(\omega - n\nu)} P_\beta(\omega - n\nu) + \dots \quad (\text{П.1.13})$$

Спектр частот определяется теперь дисперсионными уравнениями

$$\tilde{\lambda}_\alpha(\omega) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, L). \quad (\text{П.1.14})$$

Использование разложения вида (П.1.13) позволяет получить асимптотическое представление для $x_k(t)$, которым, вообще говоря, удобно пользоваться при $h^2\omega_\alpha t \ll 1$. При этом предполагается, что корни $\lambda_\alpha(\omega)$ и $\lambda_\beta(\omega)$ различны при $\beta \neq \alpha$ и однократны.

Уравнением (П.1.14) можно воспользоваться для исследования параметрических резонансов, когда при некоторых n , α и β

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(\omega) &\approx 0, \\ \lambda_\beta(\omega - n\nu) &\approx 0.\end{aligned}\quad (\text{П.1.15})$$

Вблизи частот, удовлетворяющих (П.1.15), уравнение (П.1.14) можно записать приближенно в следующем виде:

$$\begin{aligned}[\lambda_\alpha(\omega) + h\alpha_{\alpha\alpha}(0, \omega)] [\lambda_\beta(\omega - n\nu) + h\alpha_{\beta\beta}(0, \omega - n\nu)] - \\ - h^2 \alpha_{\alpha\beta}(n, \omega) \alpha_{\beta\alpha}(-n, \omega - n\nu) = 0.\end{aligned}\quad (\text{П.1.16})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Покажем, что при вещественных ω и $\theta \sim 1$ собственные числа $\lambda_\alpha(\omega)$ оператора T различны, и если при некотором ω_α обращается в нуль $\lambda_\alpha(\omega_\alpha)$, то два других собственных числа больше или порядка единицы в области частот $\omega \sim \omega_p \sim \omega_e$.

Оператор T при вещественных частотах эрмитов, и его собственные числа вещественны. Пронумеруем собственные числа следующим образом.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \quad (\text{П.2.1})$$

и введем оператор T' :

$$T'_{ik} = T_{ik} - \lambda_2 \delta_{ik}. \quad (\text{П.2.2})$$

Так как одно из собственных чисел $\Delta\lambda_\alpha(\lambda_1 - \lambda_2, 0, \lambda_3 - \lambda_2)$ оператора T' обращается в нуль, то $\det T' = 0$, и для определения $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_3$ имеем уравнение

$$\Delta\lambda^3 - \text{Sp } T' \Delta\lambda + \text{Sp } \psi' = 0. \quad (\text{П.2.3})$$

Воспользовавшись соотношением

$$\psi_{ik} \psi_{mn} - \psi_{mk} \psi_{in} = \det T \sum_{c,l} \varepsilon_{imc} \varepsilon_{knl} T_{cl} \quad (\text{П.2.4})$$

справедливым для любого оператора T , находим

$$\psi'_{ii} \psi'_{nn} = |\psi'_{in}|^2. \quad (\text{П.2.5})$$

Отсюда следует, что отличные от нуля диагональные элементы ψ' всегда имеют одинаковый знак. Так как согласно (5) и (П.2.2)

$$\psi'_{23} = -\varepsilon_{12} N^2 x_1 x_3, \quad (\text{П.2.6})$$

то, используя (П.2.5), получаем следующую оценку:

$$|\text{Sp } \psi'| \geq |\psi'_{22} + \psi'_{33}| \geq 2|\varepsilon_{12} N^2 x_1 x_3|. \quad (\text{П.2.7})$$

Заметим, что

$$\text{Sp } \psi' = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \leq 0. \quad (\text{П.2.8})$$

Учитывая (П.2.8) и (П.2.9), имеем

$$|\lambda_3 - \lambda_1| > |\lambda_{1,2} - \lambda_2| \sim |\text{Sp } T'| + |\text{Sp } \psi'| \quad (\text{П.2.9})$$

или

$$\frac{|\text{Sp } \psi'|}{|\text{Sp } T'| + |\text{Sp } \psi'|}$$

Согласно (П.2.7) и (П.2.9) в интересующей нас области частот $\omega \sim \omega_p \sim \omega_e$ при обращении одного из собственных чисел λ_α в нуль два других собственных числа больше или порядка единицы, если $\frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \sin \theta \times \times \cos \theta \sim 1$. Если же $\frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \sin \theta \cos \theta \ll 1$, то

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ 2 \varepsilon_1 - N^2 (1 + \cos^2 \theta) \pm [N^4 \sin^4 \theta + 4 \varepsilon_2^2]^{1/2} \},$$

$$\lambda_3 = \varepsilon_3 - N^2 \sin^2 \theta. \tag{П.2.10}$$

Из (П.2.10) находим, что $|\lambda_2 - \lambda_1| \sim [N^4 \sin^4 \theta + 4 \varepsilon_2^2]^{1/2} \gg 1$.

Нетрудно также установить, что разность $\lambda_{1,2} - \lambda_3$ может обратиться в нуль только при значении частоты, удовлетворяющем соотношению

$$\omega^2 = \frac{\omega_e^2}{g^2 \cos^2 \theta (2 \cos^2 \theta - 1)} [1 + g (1 - 3 \cos^2 \theta) + g^2 \cos^2 \theta (2 \cos^2 \theta - 1)], \tag{П.2.11}$$

где $g = \frac{k^2 c^2}{\omega_p^2}$. Отсюда можно заключить, что разность $\lambda_{1,2} - \lambda_3$ может быть очень малой в случае $\omega \sim \omega_p \sim \omega_e$ и $g |\sin \theta \cos \theta| \ll 1$ только при $\theta \ll 1$, $g \sim 1$, когда

$$\omega = \pm \frac{\omega_e (1 - g)}{g}. \tag{П.2.12}$$

В области больших частот $\omega \gg \omega_{pe}$, ω_e два собственных числа также могут быть близки друг к другу, как это непосредственно видно из соотношений (18).

Докажем теперь, что появляющиеся в наших вычислениях величины $\lambda'_\alpha(\omega_\alpha)$ ($\lambda_\alpha(\omega_\alpha) = 0$) положительны при $\omega_\alpha > 0$ и отрицательны при $\omega_\alpha < 0$. Дифференцируя (12) по ω , получим

$$\lambda'_\alpha(\omega_\alpha) = \frac{\frac{\partial}{\partial \omega} \det T}{\text{Sp } \psi} \Big|_{\omega = \omega_\alpha}. \tag{П.2.13}$$

В случае холодной плазмы

$$\det T = \frac{(\omega^2 - \omega_I^2(k)) (\omega^2 - \omega_{II}^2(k)) (\omega^2 - \omega_{III}^2(k)) (\omega^2 - \omega_{IV}^2(k))}{\omega^6 (\omega^2 - \omega_e^2)}, \tag{П.2.14}$$

где для определенности $|\omega_I| > |\omega_{II}| > |\omega_{III}| > |\omega_{IV}|$.

Приписывая определенной ветви колебаний $\omega_{I(II-IV)}(k)$ фиксированный номер α , убеждаемся, что на рассматриваемой ветви знак $\frac{\partial \det T}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_\alpha}$ меняется только при прохождении через частоту ω_e . Из приведенного ранее рассмотрения следует, что при $\theta \neq 0$ два других собственных числа λ_β и λ_γ ($\beta \neq \gamma$) не обращаются в нуль. Знак $\text{Sp } \psi = \lambda_\beta \lambda_\gamma$ в окрестности определенной ветви дисперсионной кривой не может измениться вследствие прохождения λ_β или λ_γ через нуль. Вблизи $\omega = \pm \omega_e$ одно из $\lambda_\beta, \lambda_\gamma$ имеет особенность

$$\lambda_{\beta}(\gamma) \approx -2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_e^2} \quad (\text{П.2.15})$$

и, следовательно, $\text{Sp } \psi$ меняет знак при переходе через частоты $\pm \omega_e$. Изменение знака $\left. \frac{\partial \det T}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_e}$ при переходе через частоту $\pm \omega_e$ компенсируется изменением знака $\text{Sp } \psi \big|_{\omega=\omega_e}$, и, таким образом, знак $\lambda'_\alpha(\omega_e)$ на всей ветви одинаков. Воспользовавшись выражениями для λ при больших k (см. (16) и (17)) и вычисляя $\lambda'_\alpha(\omega_e)$ (для $\lambda \approx A$ и $\lambda \approx -N^2 + 1$), убеждаемся в справедливости доказываемого нами утверждения

$$\text{sgn } \omega_e \lambda'_\alpha(\omega_e) = 1. \quad (\text{П.2.16})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 1, 57; 3, № 2, 180 (1960).
2. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 619; 4, № 5, 849 (1961).
3. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, УФЖ, 6, № 3, 297 (1961).
4. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, № 2, 326 (1960).
5. М. Ф. Горбатенко, К. Н. Степанов, ЖТФ, 37, № 10, 1768 (1967).
6. К. Е. Zayed, А. В. Kitsenko, Plasma Phys., 10, 147 (1968).
7. В. И. Шевченко, сб. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, вып. 3, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 156.
8. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 455 (1961).
9. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, УФЖ, 12, № 4, 535 (1967).
10. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 31, № 4, 642 (1956).
11. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
12. Ю. А. Кирочкин, Диссертация, ХГУ, М., 1964.
13. В. П. Индыкул, В. И. Шевченко, ЖТФ, 40, № 4, 728 (1970).

Поступила в редакцию
25 июня 1971 г.

ELECTROMAGNETIC WAVE EXCITATION IN PLASMA BY THE BFAM OF PHASED OSCILLATORS

A. B. Kitsenko, V. I. Panchenko

The interaction of a phased-oscillator beam with a cold plasma in the constant magnetic field is investigated. The beam modulation over the momentum azimuth angle is shown to lead to the appearance of parametric instabilities if for the natural plasma frequencies ω_α and ω_β the decay type condition $|\omega_\alpha| + |\omega_\beta| = n \omega_B$ ($n = 2, 3, \dots$) is valid and phase velocities of waves α and β have opposite direction. The parametric excitation takes place under the conditions when the density and beam velocity modulation is absent.

At the interaction of the oscillation branches when $|\omega_\alpha| = |\omega_\beta|$, the parametric excitation takes place for the integer and half-integer harmonics of the beam particle gyro-frequency. If the angle between the direction of the magnetic field and the wave vector is equal to $\pi/2$, then the half-integer harmonics are not excited. The growth rates of the oscillations at the parametric instability are proportional to the depth of modulation $\text{Im } \omega \sim \frac{n_b}{n_p} \omega_\alpha$ (n_b and n_p are the beam and plasma densities, respectively).

Under the conditions of combined beam-parametric resonance the growth rates of the oscillations are of the order of $\left(\frac{n_b}{n_p}\right)^{1/3} \omega_\alpha$. The presence of the parametric resonance influences essentially on the growth rates at the beam resonance.

УДК 621.371.123

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЧКОВ ВСТРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОЗРАЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ*

А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман

На основе формализма описания электромагнитного поля с помощью функции Лагранжа исследуется взаимодействие пучков встречных электромагнитных волн в прозрачной нелинейной среде. Получены уравнения безаберрационного приближения для ширины пучков с гауссовым профилем интенсивности и определены критические параметры самофокусировки. Проанализированы особенности неустойчивости встречных плоских волн относительно малых возмущений пространственной структуры и дана их интерпретация.

Работа посвящена рассмотрению некоторых вопросов теории взаимодействия встречных пучков монохроматических электромагнитных волн в изотропной нелинейной среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \epsilon' f(|E|^2)) \quad (\epsilon' \ll 1). \quad (1)$$

Для решения задачи воспользуемся формализмом описания электромагнитного поля с помощью функции Лагранжа. «Возрожденный» Уингетом [1] этот способ обладает не только методическим удобством (например, с точки зрения нахождения законов сохранения), но и позволяет с помощью различных приближенных методов получать решения вариационной задачи, для которых законы сохранения остаются справедливыми.

Для стационарных ($e^{i\omega t}$) полей плотность функции Лагранжа имеет вид

$$\tilde{L} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon (|E|^2) d|E|^2 - |\text{rot } E|^2. \quad (2)$$

Будем рассматривать взаимодействие широких и плавных (в масштабе длины волны) пучков. В слабонелинейной среде (1) суммарное поле можно представить в виде суперпозиции двух бегущих волн с медленно меняющимися амплитудами и фазами:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} e_1 \exp(-ik_0 z - ik_0 \varphi_1) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} e_2 \exp(ik_0 z + ik_0 \varphi_2). \quad (3)$$

Здесь $e_1, e_2, \varphi_1, \varphi_2$ — действительные функции, множители $(\epsilon')^{-1/2}$ введены для удобства перехода к безразмерным переменным.

Считая выполненными обычные условия квазиоптики

$$k_0 \Lambda_{\parallel} \gg 1, \quad k_0 \Lambda_{\perp} \gg 1, \quad (4)$$

* Работа содержит изложение доклада [15] на V Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (г. Ленинград, июнь 1970 г.).

где Λ_{\parallel} и Λ_{\perp} — характерные масштабы изменения поля в продольном и поперечном сечениях пучков, произведем в лагранжиане (2) усреднение по быстрым пространственным осцилляциям. В результате, опуская малые члены ($\sim (k_0 \Lambda_{\parallel})^{-2}$) и предполагая для простоты, что взаимодействующие волны имеют одинаковые или ортогональные поляризации векторов электрического поля, получим выражение для усредненной плотности функции Лагранжа:

$$L = \sum_{n=1}^2 \left\{ (\nabla_{\perp} e_n)^2 + e_n^2 \left[(\nabla_{\perp} \varphi_n)^2 + 2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right] \right\} - K(e_1, e_2); \quad (5)$$

$$K(e_1, e_2) = \langle \int f(|E|^2) d|E|^2 \rangle. \quad (6)$$

Здесь z, r_{\perp} — безразмерные координаты, а знак $\langle \rangle$ обозначает усреднение по быстрым осцилляциям вдоль координаты z .

Потенциальная функция $K(e_1, e_2)$ была введена в [2], там же подробно рассмотрены ее свойства, в частности, показано, что вид K зависит от соотношения поляризаций взаимодействующих волн. Так, если волны имеют одинаковые поляризации, функция K содержит интерференционные члены. Например, для линейно поляризованных волн в кубичной среде ($f(|E|^2) = |E|^2$)

$$K_{\parallel} = \frac{(e_1^2 + e_2^2)^2}{2} + e_1^2 e_2^2. \quad (7)$$

Для волн с ортогональными поляризациями интерференционные члены отсутствуют в кубичной среде

$$K_{\perp} = \frac{(e_1^2 + e_2^2)^2}{2}. \quad (8)$$

Хотя мы, в основном, ограничились исследованием взаимодействия встречных пучков, все выводы легко обобщаются на случай самовоздействия эллиптически поляризованного света в нелинейной среде*. Для этого необходимо изменить знак $+$ на $-$ в показателе экспоненты второго слагаемого в выражении (3) и написать соответствующее выражение функции K . В частности, в случае эллиптически поляризованного света в изотропной кубичной среде функция K совпадает с выражением (8) для волн с ортогональными поляризациями. В среде с нелинейностью из-за эффекта Керра в качестве нормальных волн удобно выбрать циркулярно поляризованные волны [4], а потенциальную функцию можно представить в виде

$$K_{\text{керр}} = \frac{(e_1^2 + e_2^2)^2}{2} + \frac{3}{2} e_1^2 e_2^2.$$

Как и в случае одиночного пучка [4, 5], для полей встречных пучков, локализованных в поперечном сечении, существует ряд инвариантов, являющихся следствием законов сохранения энергии и импульса электромагнитного поля:

$$\int e_1^2 ds_{\perp} = P_1, \quad \int e_2^2 ds_{\perp} = P_2; \quad (9)$$

$$\int (e_1^2 \nabla_{\perp} \varphi_1 + e_2^2 \nabla_{\perp} \varphi_2) ds_{\perp} = D; \quad (10)$$

* Некоторые вопросы теории самофокусировки эллиптически поляризованного света обсуждались в [3].

$$\int \left\{ \sum_{n=1}^2 [(\nabla_{\perp} e_n)^2 + e_n^2 (\nabla_{\perp} \varphi_n)^2] - K \right\} ds_{\perp} = C. \quad (11)$$

В работе [4] для усредненных характеристик описания волнового пучка в нелинейной среде был применен метод моментов. С помощью интегралов (9) — (11) эту процедуру можно обобщить на случай взаимодействия двух пучков. На основе соотношения (10) можно показать, что энергетический центр суммарного поля расположен на прямой

$$r_{цэ} = \frac{P_1 r_0^{(1)} + P_2 r_0^{(2)}}{P_1 + P_2} = \frac{2D}{P_1 + P_2} + r_0, \quad (12)$$

где $r_0^{(n)} = \frac{1}{P_n} \int e_n^2 r ds_{\perp}$ — поперечная координата энергетического центра n -го пучка, r_0 — положение центра энергии системы в сечении $z = 0$. Аналогично для квадрата эффективной ширины суммарного поля

$$a^2 = \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{P_1 + P_2}, \quad a_n^2 = \frac{\int r_{\perp}^2 e_n^2 ds_{\perp}}{P_n} \quad (13)$$

получаем соотношение

$$\frac{d^2 a^2}{dz^2} = \frac{1}{P_1 + P_2} \left\{ C - \int \left(e_1^2 \frac{\partial K}{\partial e_1^2} + e_2^2 \frac{\partial K}{\partial e_2^2} - 2K \right) ds_{\perp} \right\}. \quad (14)$$

Для сред с кубической нелинейностью, в которых K является квадратичной формой по переменным e_1^2, e_2^2 , интеграл в (14) равен нулю и, следовательно, a^2 изменяется по закону

$$a^2 = a_0^2 + Bz + \tilde{C}z^2. \quad (15)$$

Здесь $\tilde{C} = C/(P_1 + P_2)$, $B = \frac{2}{P_1 + P_2} \int \left[\sum_{n=1}^2 e_n^2 (r \nabla_{\perp} \varphi_n) \right] ds_n$ — постоянные для данных пучков величины, определяемые параметрами пучков в сечении $z = 0$, а a_0 — эффективная ширина суммарного поля в этом сечении.

Соотношение (15) позволяет определить характер распространения волн в кубичной среде, если в каком-либо сечении известны распределения амплитуд и фаз пучков. Поэтому для лучка света с эллиптической поляризацией, у которого эти параметры заданы на входе в нелинейную среду, можно найти критические параметры самофокусировки. Например, необходимое условие самофокусировки пучка эллиптически поляризованного света, состоящего из двух линейно поляризованных пучков гауссовой формы

$$e_1 = e_{10} \exp(-r^2/2a^2), \quad e_2 = e_{20} \exp(-r^2/2b^2)$$

с плоскими фазовыми фронтами $\nabla_{\perp} \varphi_{1,2} = 0$ в сечении $z = 0$, в изотропной кубичной среде имеет вид

$$C = \frac{1}{P_1 + P_2} \left[\frac{P_1}{a^2} + \frac{P_2}{b^2} - \frac{P_1^2}{4\pi a^2} - \frac{P_2^2}{4\pi b^2} - \frac{P_1 P_2}{\pi(a^2 + b^2)} \right] < 0. \quad (16)$$

Можно также показать, аналогично случаю одного пучка, что при заданных начальных размерах пучков [6] минимальными мощностями, необходимыми для самофокусировки, обладают однородные пучки*. Ис-

* Структура двумерных однородных пучков исследовалась в [3, 7].

пользуя соотношения (15), (16), можно рассмотреть задачу о «внешней» самофокусировке эллиптически поляризованного света в слое нелинейного вещества.

Применить соотношение (15) для определения характеристик встречных пучков не удается, поскольку в этом случае задача формулируется как краевая (начальные параметры пучков задаются в разных сечениях $z = \text{const}$). Поэтому из-за отсутствия аналогичных соотношений для парциальных пучков приходится прибегать к различным приближениям. В теории самофокусировки простейшим приближением является решение уравнений поля в предположении неизменности профиля пучка [8, 9].

Прием аппроксимации зависимости $E^2(r_{\perp})$ и $\varepsilon(r_{\perp})$ параболой, обычно используемой в безабберационном приближении для одного пучка, неприменим в общем случае взаимодействия встречных пучков даже в приближении геометрической оптики, если их ширины в некоторой области заметно различаются, так как в этом случае может оказаться, что в интересующей нас области r_{\perp} интенсивность одного из пучков (более узкого) из-за аппроксимации становится отрицательной. Кроме того, при такой аппроксимации получаются уравнения для ширины пучков, не удовлетворяющие в кубичной среде точному интегралу для эффективной ширины суммарного поля. Поэтому мы получим уравнения для ширины пучков с помощью лагранжева формализма, при котором соотношение (15) автоматически оказывается первым интегралом системы уравнений безабберационного приближения. Аналогичный метод применялся также в [10] при исследовании самофокусировки пучков без осевой симметрии.

В качестве примера рассмотрим в безабберационном приближении взаимодействие встречных аксиально-симметричных пучков с параллельными поляризациями в кубичной среде. Будем полагать, что при распространении пучков распределение их амплитуд изменяется подобно

$$e_1(r, z) = \mathcal{E}_1(z) f_1(r/a_1(z)), \quad e_2(r, z) = \mathcal{E}_2(z) f_2(r/a_2(z)). \quad (17)$$

Нетрудно показать, что таким пучкам соответствуют параболические фазовые фронты*

$$\nabla_{\perp} \varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}_1}{a_1} r, \quad \nabla_{\perp} \varphi_2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}_2}{a_2} r. \quad (18)$$

Подставляя выражения (18), (19) в лагранжиан, задавая явный вид функций f_1 и f_2 , после интегрирования по поперечному сечению и варьирования по z получим искомого систему уравнений. Например, для пучков гауссовой формы имеем

$$\frac{\ddot{a}_1}{a_1} = \frac{1 - P_1/P_{\text{кр}}}{a_1^4} - \frac{8P_2/P_{\text{кр}}}{(a_1^2 + a_2^2)^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\ddot{a}_2}{a_1} = \frac{1 - P_2/P_{\text{кр}}}{a_2^4} - \frac{8P_1/P_{\text{кр}}}{(a_1^2 + a_2^2)^2}.$$

Здесь $P_{\text{кр}} = 4\pi$ — критическая мощность самофокусировки одиночного

* Можно показать, что, как и в случае одного пучка [11], существуют точные решения уравнений квазиоптики в виде автомодельных встречных пучков с параболическими фазовыми фронтами. Характерные масштабы таких пучков a_1 и a_2 остаются подобными вдоль z , а поперечные структуры (функции f_1 и f_2) могут существенно различаться.

пучка, измеренная в единицах $P=c^3/8\pi\omega^2\epsilon'\sqrt{\epsilon_0}$ (в параксиальном приближении $P_{кр} = 2\pi$).

Интеграл (11) в этом случае принимает вид

$$P_1 \dot{a}_1^2 + P_2 \dot{a}_2^2 + \frac{P_1}{a_1^2} \left(1 - \frac{P_1}{P_{кр}}\right) + \frac{P_2}{a_2^2} \left(1 - \frac{P_2}{P_{кр}}\right) - \frac{8P_1 P_2}{P_{кр}(a_1^2 + a_2^2)} = C. \quad (20)$$

Условие $C = 0$ определяет область критических параметров самофокусировки (т. е. параметров, однородных в смысле среднеквадратичной ширины пучков). В частности, из (20) следует, что однородные встречные пучки с равными ширинами и мощностями обладают минимальной критической мощностью, равной $(1/3)P_{кр}$.

Если интересоваться поведением парциальных пучков эллиптически поляризованного света, можно написать аналогичную систему уравнений для ширины, отличающуюся от уравнений безабберационного приближения параксиальной оптики, полученных в [12].

Разумеется, вопрос о точности и условиях применимости безабберационного приближения можно выяснить только на основе сравнения решения (20) с результатами численного интегрирования системы уравнений в частных производных. Однако их применение, на наш взгляд, оправдано тем, что они позволяют получить качественную информацию в большем числе задач, например, при исследовании взаимодействия пучков встречных волн, при решении задачи о прохождении пучка электромагнитных волн через слой нелинейного вещества, при определении структуры собственных типов волн в резонаторе с нелинейным заполнением и исследовании их устойчивости и т. д. В каждом из этих случаев приходится решать систему уравнений (20) с конкретными для данной задачи краевыми условиями. Решение же краевой задачи для системы параболических уравнений сталкивается с практически непреодолимыми вычислительными трудностями.

В качестве иллюстрации характера взаимодействия встречных пучков рассмотрим задачу об отражении пучка электромагнитных волн от плоского слоя нелинейного вещества, одна из границ которого ($z = d$) является идеально отражающей: $P_1 = P_2 = P$. Соответствующие этой задаче краевые условия имеют вид

$$z = 0: \quad a_1 = a_{10}, \quad \dot{a}_1 = \dot{a}_{10},$$

$$z = d: \quad a_2 = a_1, \quad \dot{a}_2 = \dot{a}_1.$$

Система уравнений (19) была дополнена членами, учитывающими малое насыщение нелинейности ($f(|E|^2) = |E|^2 - \alpha|E|^4$), влияние которого, как и в случае одного пучка, оказывалось существенным лишь вблизи фокуса. Решение задачи проводилось с помощью численного интегрирования модифицированных уравнений (19) по P от $P=0$ (пучки в линейной среде) до $P = 1$.

На рис. 1, 2 приведены результаты интегрирования (19) с начальными условиями $a_{10} = 1, \dot{a}_{10} = 0$ при $d = 2$. На рис. 1 а, б представлена зависимость от мощности P параметров отраженного пучка a_2 и \dot{a}_2 в сечении $z = 0$. В областях $0,33 < P \leq 0,44$ и $0,57 < P < 0,92$ решение является неоднозначным*. На рис. 2 показана зависимость ширины пучков a_1

* Вопрос о том, какое распределение реализуется при заданном значении мощности падающего пучка в области, где решение неоднозначно, как обычно, может быть решен лишь при рассмотрении временной предстории задачи (при учете зависимости мощности от времени). Можно полагать при этом, что нижняя ветвь решения (рис. 1) является неустойчивой.

и a_2 (пунктиром) от z при $P=0,7$ в области, где существует три различных решения*. По-видимому, при $P > 1$ и при учете частичной прозрачности слоя решение краевой задачи также неоднозначно.

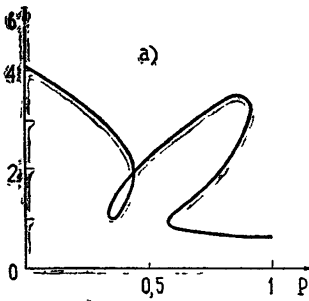


Рис. 1.

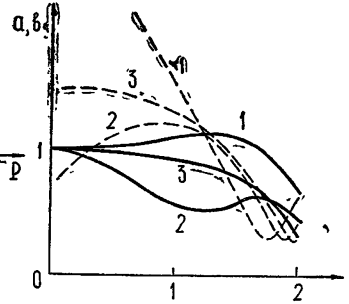
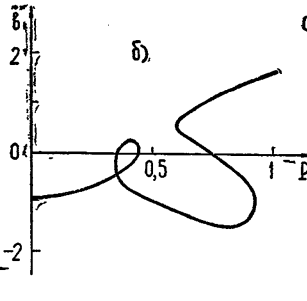


Рис. 2.

Устойчивость встречных плоских однородных волн относительно малых возмущений их поперечной пространственной структуры уже рассматривалась в [13] для случая среды с кубичной керровской нелинейностью. Мы проведем здесь тривиальное обобщение формул [13] на случай произвольного закона $\epsilon(|E|^2)$ и остановимся на неустойчивости в среде с $\frac{\partial \epsilon}{\partial |E|^2} < 0$, не обсуждавшейся ранее.

Действуя аналогично случаю одного пучка [2], представим полное поле в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= [\mathcal{E}_{10} + e_1(r, z)] \exp(-i\gamma_1 z), \\ E_2 &= [\mathcal{E}_{20} + e_2(r, z)] \exp(i\gamma_2 z), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial \mathcal{E}_{10}^2}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial \mathcal{E}_{20}^2}$, и, полагая возмущения малыми, произведем линеаризацию уравнений. Отыскивая общее решение линеаризованных уравнений в виде

$$e_{1,2} = u_{1,2} \exp(-i\mathbf{x}r - ihz) + v_{1,2}^* \exp(i\mathbf{x}r + ihz), \quad (22)$$

получим две дисперсионные ветви для добавки к постоянной распространения h :

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \frac{x^2}{4} (x^2 - x_{\text{гр}1}^2), \quad h_2^2 = \frac{x^2}{4} (x^2 - x_{\text{гр}2}^2), \\ x_{\text{гр}1,2}^2 &= \left[\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right)^2 + x_{12}^2 - x_1^2 x_2^2 \right]^{1/2} \pm \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \\ x_1^2 &= 2\alpha_1 \mathcal{E}_{10}^2, \quad x_2^2 = 2\alpha_2 \mathcal{E}_{20}^2, \quad x_{12}^2 = 4\beta \mathcal{E}_{10} \mathcal{E}_{20}, \\ \alpha_1 &= \frac{\partial^2 K}{\partial (\mathcal{E}_{10}^2)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial^2 K}{\partial (\mathcal{E}_{20}^2)^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \mathcal{E}_{10}^2 \partial \mathcal{E}_{20}^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

* Для получения всех ветвей многозначного решения при интегрировании уравнений вводилось обратное движение по параметру P в точках, где производная $\frac{db_0}{dP} = \infty$.

Для среды с «фокусирующей» кубической нелинейностью $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial |E|^2} > 0\right)$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а $\beta = 1$ в случае одинаковых поляризаций и $\beta = 1/2$ в случае ортогональных поляризаций волн. В среде с «расфокусирующей» нелинейностью коэффициенты α и β меняют знак.

Легко показать, что в среде с $\frac{\partial \varepsilon}{\partial |E|^2} > 0$ всегда в определенной области пространственных частот возмущения неустойчивы, $h^2 < 0$, причем, если выполнено условие $x_{12}^4 < x_1^2 x_2^2$, неустойчивы обе ветви колебаний ($x_{гр 2}^2 < 0$). Если же $\frac{\partial \varepsilon}{\partial |E|^2} < 0$, неустойчивой является только первая ветвь и то лишь при условии $x_{12}^4 > x_1^2 x_2^2$. В кубической среде для волн с ортогональными поляризациями ($\vec{\mathcal{E}}_{10} \perp \vec{\mathcal{E}}_{20}$, $\beta = \pm 1/2$) выполнено условие $x_{12}^4 = x_1^2 x_2^2$, и, следовательно, в кубической среде с дефокусирующей нелинейностью встречные волны с ортогональными поляризациями устойчивы относительно малых возмущений. Для волн с $\vec{\mathcal{E}}_{10} \parallel \vec{\mathcal{E}}_{20}$ в кубической среде $\beta = \pm 1$ и $x_{12}^4 > x_1^2 x_2^2$, т. е. пространственная неустойчивость реализуется при любом знаке нелинейности*. Неустойчивыми в кубической среде являются возмущения с пространственными частотами, лежащими в полосе

$$0 < x^2 < x_{гр}^2 = \pm (\mathcal{E}_{10}^2 + \mathcal{E}_{20}^2) + [(\mathcal{E}_{10}^2 + \mathcal{E}_{20}^2)^2 + 12 \mathcal{E}_{10}^2 \mathcal{E}_{20}^2]^{1/2};$$

знак + соответствует среде с $\varepsilon' > 0$, знак — среде с $\varepsilon' < 0$. Наибольший инкремент, равный $\Gamma = 1/4 x_{гр}^2$, имеют возмущения с $x^2 = 1/2 x_{гр}^2$. Присутствие встречной волны приводит к расширению области неустойчивых частот и к увеличению инкрементов; например, в поле стоячей волны инкремент в 3 раза больше, чем в бегущей волне той же амплитуды [13].

Эффект пространственной неустойчивости встречных волн в «дефокусирующей» среде не удается объяснить с помощью обычных геометрикооптических лучевых представлений, и эта неустойчивость не приводит к образованию уединенных самофокусирующихся пучков. В то же время эту неустойчивость можно легко интерпретировать на языке четырехфотонного взаимодействия. Неустойчивость в любой среде возможна только, если выполнены условия синхронизма для волн накачки и усиливаемых волн:

$$k_{z1}(\omega, x) + k_{z2}(\omega, x) = k_{n1}(\omega) + k_{n2}(\omega). \quad (24)$$

В среде с $\frac{\partial \varepsilon}{\partial |E|^2} > 0$ волновой вектор слабой волны (возмущения) больше, чем волновой вектор волны накачки, поэтому возможен синхронизм с одной бегущей волной накачки. При дефокусирующей нелинейности синхронизма можно добиться только на сдвинутых частотах при определенном знаке временной дисперсии среды, так как $k_c < k_n$. В случае встречных волн возможно и вырожденное параметрическое взаимодействие, при котором в синхронизме находятся два встречных кванта возмущения с двумя встречными квантами накачки:

$$k_{z+}(\omega, x) + k_{z-}(\omega, x) = k_{n+}(\omega) + k_{n-}(\omega). \quad (25)$$

* Одним из примеров среды с $\frac{\partial \varepsilon}{\partial |E|^2} < 0$ является активная среда.

Разумеется, такое взаимодействие возможно только, если кванты накачки имеют одинаковую поляризацию электрического поля.

Аналогично можно объяснить и рассмотренную в [3] неустойчивость пространственной структуры однородных плоских эллиптически поляризованных волн.

Авторы благодарны В. Н. Гольдбергу, И. Г. Зарницыной и Т. Н. Федосеевой за разработку метода решения краевой задачи и проведение вычислений на ЭВМ и М. А. Миллеру за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. V. Witham, *J. Fluid Mech.*, **22**, part 2, 273 (1965); Г. В. Витхам, сб. *Нелинейная теория распространения волн*, изд. Мир, М., 1970, стр. 12.
2. Е. И. Якубович, *ЖЭТФ*, **56**, 676 (1969).
3. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **58**, 903 (1970).
4. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, *Письма в ЖЭТФ*, **3**, 471 (1966).
5. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **14**, № 9, 1353 (1971).
6. В. Е. Захаров, В. В. Соколов, В. С. Сынах, *ЖЭТФ*, **60**, 137 (1971).
7. Е. И. Якубович, Тезисы доклада на V Всесоюзном симпозиуме на нелинейной оптике, г. Кишинев, 1970 г.
8. В. И. Таланов, *Письма в ЖЭТФ*, **2**, 222 (1965).
9. P. L. Kelley, *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 1005 (1965).
10. В. В. Воробьев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **8**, № 12, 1905 (1970).
11. В. И. Таланов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **9**, № 2, 410 (1966).
12. W. G. Wagner, H. A. Haus, J. H. Margburger, *Phys. Rev.*, **175**, 256 (1968).
13. В. И. Таланов, Доклад на III Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, г. Ереван, 1967.
14. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. *Нелинейная оптика*, изд. Наука, Новосибирск 1968, стр. 428.
15. А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман, Аннотации докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, изд. ЛГУ, г. Ленинград, 1970, стр. 79.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 декабря 1971 г.

INTERACTION OF OPPOSITE ELECTROMAGNETIC WAVE BEAMS IN A TRANSPARENT NONLINEAR MEDIUM

A. G. Litvak, G. M. Fraiman

The interaction of opposite electromagnetic wave beams in a transparent nonlinear medium is investigated on the basis of the formalism of describing the electromagnetic field by means of Lagrange functions. The equations of the aberrationless approximation have been derived for the beamwidth with Gaussian profile of the intensity. Critical parameters of self-focusing have been determined. The peculiarities of the opposite plane wave instability relative to small perturbations of the spatial structure are analysed and interpreted.

УДК 538.576.2

**О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ
МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН**

В. В. Васьков

Рассмотрен процесс насыщения при индуцированном рассеянии монохроматических ленгмюровских волн.

1. Известно, что индуцированное рассеяние волн малой интенсивности происходит благодаря взаимодействию с резонансными частицами, скорость которых близка к фазовой скорости биения [1]:

$$\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)v. \tag{1}$$

Здесь $\omega_{1,2}$, $\mathbf{k}_{1,2}$ — частота и волновой вектор первой и второй волн соответственно. Было показано [2], что изменение полной энергии двух взаимодействующих волн равно работе, совершаемой над частицами плазмы некоторой эффективной силой, которая складывается из электрического поля биения и низкочастотной составляющей давления взаимодействующих волн. Насыщение наступает вследствие медленных осцилляций резонансных электронов (ионов) в поле этой силы. В данной работе рассмотрен процесс насыщения в наиболее простом случае взаимодействия ленгмюровских волн, распространяющихся в плазме без магнитного поля при неподвижных ионах (фазовая скорость биения больше тепловой скорости ионов). При этом, вследствие компенсации нелинейного и комптоновского рассеяния на электронах [3], взаимодействие волн является слабым и насыщение наступает настолько быстро, что амплитуды взаимодействующих волн (и порождаемого ими биения) не успевают существенно измениться. Однако изменение фазы биения в процессе насыщения должно учитываться.

2. Пусть в плазме распространяются две потенциальные волны

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 \cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega_1 t + \psi_1), \\ \varphi_2 &= a_2 \cos(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega_2 t + \psi_2), \\ \psi_1 &= \psi_2, \end{aligned} \tag{2}$$

обладающие плотностью энергии

$$W_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{k}_1 a_1}{2} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon \omega_1}{\partial \omega_1}, \quad W_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{k}_2 a_2}{2} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon \omega_2}{\partial \omega_2}, \tag{3}$$

где $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ — диэлектрическая проницаемость плазмы. Эти волны порождают биение

$$\begin{aligned} \varphi &= a \cos(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t + \psi), \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

амплитуду a и фазу ψ которого можно найти из уравнения Пуассона:

$$\begin{aligned} a \cos \psi &= 2 \frac{4\pi}{V_n} \int \rho \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) d^3r, \\ a \sin \psi &= -2 \frac{4\pi}{V_n} \int \rho \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) d^3r, \\ \rho &= -e \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v + eN_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $V_n = \int d^3r$ — нормировочный объем, $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения электронов по скоростям, N_0 — невозмущенное значение ионной (электронной) концентрации, а черта обозначает усреднение по быстрым осцилляциям во времени.

Для получения полной системы уравнений, описывающих медленное изменение во времени амплитуд a_1, a_2, a и фазы ψ^* , следует выделить в уравнении сохранения энергии

$$\frac{dW_{1,2}}{dt} = -\frac{1}{V_n} \int \rho \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} d^3r \quad (6)$$

и в уравнении Пуассона (5) вклад нерезонансных частиц, вычислив его по теории возмущений**, а смещение резонансных электронов разбить на быстро осциллирующую часть ξ и медленно зависящую от времени компоненту R [2, 4]:

$$\mathbf{r} - V_{\phi}t = \xi + R, \quad \mathbf{v} - V_{\phi} = \frac{d\xi}{dt} + V, \quad V_{\phi} = \frac{\omega}{k^2}. \quad (7)$$

Переходя в интегралах (5), (6) к новым переменным R, V , получим

$$\frac{dW_1}{dt} = \frac{\omega_1}{\omega} \frac{dW}{dt}, \quad \frac{dW_2}{dt} = -\frac{\omega_2}{\omega} \frac{dW}{dt}, \quad W = W_1 + W_2; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\omega}{L_n} \int e f'_0(V_{\perp}) V_{0\parallel} \left[a \sin(kR_{\parallel} + \psi) - \frac{e(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2)}{2m(\omega' - \mathbf{k}'_{\perp} V_{\perp})^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times a_1 a_2 \sin kR_{\parallel} \right] dR_{\parallel} dV_{\parallel} d^2V_{\perp}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$k^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) a \sin \psi = 2 \frac{4\pi}{L_n} \int e f'_0(V_{\perp}) V_{0\parallel} \sin kR_{\parallel} dR_{\parallel} dV_{\parallel} d^2V_{\perp}; \quad (10)$$

$$k^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) a \cos \psi = \quad (11)$$

$$= -2 \frac{4\pi}{L_n} \int e f'_0(V_{\perp}) V_{0\parallel} \cos kR_{\parallel} dR_{\parallel} dV_{\parallel} d^2V_{\perp} + \operatorname{Re} \mu^{(2)} \frac{a_1 a_2}{2};$$

$$L_n = \int dR_{\parallel}, \quad f'_0(V_{\perp}) = \left. \frac{\partial f_0(V_{\perp}, V_{\parallel})}{\partial V_{\parallel}} \right|_{V_{\parallel} = V_{\phi}}; \quad (12)$$

* Нелинейное изменение фаз ψ_1, ψ_2 не связано с резонансными частицами и эквивалентно малому изменению частот ω_1, ω_2 соответственно.

** Вклад резонансных частиц в плазменные отклики связан с полувычетами на комбинационной частоте [1].

где

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega_1 - k_1 V_\Phi = \omega_2 - k_2 V_\Phi, \\ k'_\perp &= k_{1\perp} = k_{2\perp}\end{aligned}\quad (13)$$

и введены обозначения: b_\parallel , b_\perp — параллельная и перпендикулярная вектору k составляющие некоторого вектора b ; $f_0(V_\perp, V_\parallel)$ — начальная функция распределения электронов по скоростям; $\mu^{(2)}$ — нелинейный отклик второго порядка, определенный в теории возмущений согласно [1]:

$$\rho^{(2)}(\omega, k) = \mu^{(2)} \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2}. \quad (14)$$

Входящая в (9) — (11) начальная скорость электрона $V_{0\parallel} = V_\parallel(t=0)$ как функция текущих значений R , V , t находится из уравнения движения

$$\begin{aligned}\frac{d^2 R_\parallel}{dt^2} &= \frac{dV_\parallel}{dt} = \frac{e}{m} \frac{d}{dR_\parallel} \Phi, \\ \Phi &= a \cos(kR_\parallel + \psi) - \frac{e(k_1 k_2)}{2m(\omega' - k'_\perp V_\perp)^2} a_1 a_2 \cos kR_\parallel.\end{aligned}\quad (15)$$

Решая уравнения движения (15) методами теории возмущений, нетрудно получить известные результаты этой теории (см. (25)). Точное решение уравнения (15), а следовательно, и системы (8) — (11), возможно при малом изменении в течение всего процесса взаимодействия амплитуд a_1 , a_2 , a и

$$\psi \ll 1. \quad (16)$$

(Условие (16) выполняется для ленгмюровских волн). В этом случае, пользуясь результатами работы [5], запишем решение системы в виде

$$a = \frac{\text{Re } \mu^{(2)}}{k^2 \text{Re } \epsilon(\omega, k)} \frac{a_1 a_2}{2}; \quad (17)$$

$$a \sin \psi = \frac{\pi \omega_0^2}{k^2 \text{Re } \epsilon(\omega, k)} \int \frac{f'_0(V_\perp)}{N_0} A D(t/\tau) d^2 V_\perp; \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{\omega}{4\pi} \frac{\pi \omega_0^2}{2} \int \frac{f'_0(V_\perp)}{N_0} A^2 D(t/\tau) d^2 V_\perp, \\ \omega_0^2 &= \frac{4\pi e^2 N_0}{m},\end{aligned}\quad (19)$$

где A — амплитуда эффективного потенциала (15):

$$A = \left[\frac{\text{Re } \mu^{(2)}}{k^2 \text{Re } \epsilon(\omega, k)} - \frac{e(k_1 k_2)}{m(\omega' - k'_\perp V_\perp)^2} \right] \frac{a_1 a_2}{2}, \quad (20)$$

а коэффициент $D(t/\tau)$ равен

$$D(t/\tau) = 64\pi \int_0^1 \frac{dx}{K^2(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n \sin[(\pi n t)/(\pi K(x)\tau)]}{(1+q^{2n})(1+q^{-2n})} \frac{1}{x^5} + \right. \quad (21)$$

$$+ \frac{(2n+1) \sin[(\pi(2n+1)t]/(2K(x)\tau)]}{(1+q^{2n+1})(1+q^{-2n-1})} x \Big\},$$

$$q = \exp \left\{ -\pi K(\sqrt{1-x^2})/K(x) \right\}.$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Входящее в (21) время τ равно обратной частоте осцилляций электрона на дне эффективной потенциальной ямы:

$$\tau^{-1} = \left\{ \frac{e |A| k^2}{m} \right\}^{1/2}. \quad (22)$$

3. Будем далее считать распределение электронов по скоростям максвелловским. Поскольку в рассматриваемом случае низкочастотная составляющая давления (второй член в правой части (20)) почти полностью компенсируется электрическим полем биекции (первый член в уравнении (20)), амплитуда A оказывается зависящей от скорости электрона V_{\perp} :

$$A = \frac{a_1 a_2}{2} \frac{e}{m \omega_0^2} \left\{ -2 \frac{k'_{\perp} V_{\perp}}{\omega_0} (k_1 k_2) + d^2 [3(k_1 k_2)^2 - [k_1 k_2]^2] \right\}, \quad (23)$$

$$kd \ll 1.$$

Здесь $d = (T/4\pi e^2 N_0)^{1/2}$ — дебаевский радиус плазмы.

Введем эффективное время $\tau_{\text{эфф}}$:

$$\tau_{\text{эфф}}^{-1} = \tau^{-1} |_{V_{\perp} = v_T} = \omega_0 \frac{(W_1 W_2)^{1/4}}{\sqrt{N_0 T}} \begin{cases} \sqrt{k_1 k_2 k d^3} |\sqrt{2} \sin 2\theta|^{1/2} & (kd \ll |\sin 2\theta|) \\ kd \sqrt{k_1 k_2 d^2} |3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta|^{1/2} & (kd \gg |\sin 2\theta|) \end{cases} \quad (24)$$

где $v_T = \sqrt{2T/m}$ — тепловая скорость электронов, θ — угол между векторами k_1 и k_2 .

Тогда при $t \ll \tau_{\text{эфф}}$ и $D(t/\tau) = 1$ (см. [5]) получим известный результат теории возмущений [6]:

$$\left(\frac{dW_1}{dt} \right)_0 = - \left(\frac{dW_2}{dt} \right)_0 = \omega_0^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} d^3 \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_1^2 k_2^2 k} \left\{ (k_1 k_2)^2 \frac{[k_1 k_2]^2}{k^2} + \right. \\ \left. + \frac{d^2}{4} [9(k_1 k_2)^4 + [k_1 k_2]^4] \right\} \frac{W_1 W_2}{N_0 T}; \quad (25)$$

$$(\sin \psi)_0 \sim \begin{cases} (kd)^3 & (|\cos \theta| \gg k^2 d^2) \\ kd & (|\cos \theta| \ll k^2 d^2) \end{cases}. \quad (26)$$

В противоположном случае (см. [5])

$$t \gg \tau_{\text{эфф}}, \\ D(t/\tau) \rightarrow 0, \quad (27)$$

величины $\frac{dW}{dt}$, $\sin \psi$ в уравнениях (18), (19) обращаются в нуль, что соответствует насыщению, т. е. прекращению взаимодействия между волнами. При этом полное изменение плотности энергии первой (второй) волны

$$\begin{aligned} \Delta W_{1,2} &= \int_0^{\infty} \frac{dW_{1,2}}{dt} dt = \\ &= \pm \frac{\omega_{1,2}}{4\pi} \frac{\pi\omega_0^2}{2} \tilde{D} \int \frac{f'_0(V_{\perp})}{N_0} A^2 \tau d^2V_{\perp}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\tilde{D} = \int_0^{\infty} D(x) dx$$

дается выражением

$$\Delta W_1 = -\Delta W_2 = \left(\frac{dW_1}{dt} \right)_0 \tilde{D} \tau_{\text{эфф}} \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(5/4) & (kd \ll |\sin 2\theta|) \\ 1 & (kd \gg |\sin 2\theta|) \end{cases}. \quad (29)$$

Здесь $\Gamma(5/4)$ — гамма-функция Эйлера, а константа \tilde{D} имеет простое интегральное представление, приведенное в [5].

Из (29) следует, что условие малости относительного изменения амплитуд a_1, a_2, a , использованное при выводе (17)–(19), принимает вид

$$\left(\frac{W_1}{N_0 T} \right)^{1/4} \gg \left(\frac{W_2}{N_0 T} \right)^{3/4} \begin{cases} (kd)^{3/2} & (kd \ll |\sin 2\theta|) \\ (kd)^3 & (kd \gg |\sin 2\theta|) \end{cases}, \quad (30)$$

$$W_1 < W_2 < N_0 T.$$

Критерий квазимонохроматичности ленгмюровских волн

$$\Delta V_{\phi} \ll \frac{1}{k \tau_{\text{эфф}}} \quad (31)$$

при учете (24) записывается в форме

$$\frac{\Delta k}{k} \ll \frac{(W_1 W_2)^{1/4}}{\sqrt{N_0 T}} \begin{cases} (kd)^{-1/2} & (kd \ll |\sin 2\theta|) \\ 1 & (kd \gg |\sin 2\theta|) \end{cases}, \quad (32)$$

$$k_1 \sim k_2 \sim k.$$

Легко видеть, что неравенства (30), (32) выполняются в широком интервале изменения параметров W_1, W_2, kd .

Таким образом, индуцированное рассеяние монохроматических ленгмюровских волн конечной амплитуды не приводит к существенному изменению их амплитуд, если скорость резонансных частиц превышает тепловую скорость ионов. Этим оно отличается от нелинейного взаимодействия достаточно широких волновых пакетов со случайными фазами, которое всегда протекает значительно быстрее, чем релаксация функции распределения в области резонансных скоростей [1].

Благодарю В. И. Карпмана за обсуждение и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 5, 20 (1965).
2. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 60, вып. 5, 1702 (1971).
3. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
4. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1958).

5. Thomas O'Neil, Phys. Fluid., 8, № 12, 2255 (1965); Н. И. Будько, В. И. Карпман, Д. Р. Шкляр, ЖЭТФ, 61, 1463 (1971).
6. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, вып. 1, 200 (1964).

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
10 января 1972 г.

ON NONLINEAR INTERACTION OF TWO MONOCHROMATIC LANGMUIR WAVES

V. V. Vas'kov

The saturation process at induced scattering of monochromatic Langmuir waves has been considered.

УДК 538.311 : 533.95

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАЗМЕННОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ж. Д. Генчев, С. С. Калмыкова

При учете эффектов пространственной дисперсии рассматриваются флуктуации электромагнитного поля в полуограниченной однородной бесстолкновительной плазме с зеркально отражающей электроны поверхностью. Перпендикулярное границе раздела плазма — вакуум внешнее магнитное поле предполагается бесконечно сильным, $\omega_{ce}^2 \gg \omega^2 \sim \omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce} \omega_{ci}$. Получен коррелятор фурье-компонент случайных индукций, с помощью которого вычислена и исследована корреляционная функция напряженности электрического поля в плазме

Рассмотрим полупространство $z > 0$, заполненное равновесной однородной бесстолкновительной плазмой, помещенной в магнитное поле, направленное по нормали \mathbf{n} к границе плазмы. Область $z < 0$ занята вакуумом ($\varepsilon_v = 1 + i0$). Предположим, что участвующие в высокочастотных колебаниях электроны отражаются поверхностью плазмы зеркально, а роль ионов сводится к компенсации кулоновского заряда. Вычислим энергетические характеристики флуктуационного поля в плазме.

В общем случае произвольного внешнего магнитного поля дисперсионные характеристики волн в плазме оказываются сложными. В результате вычисление явного вида корреляционных функций затруднено даже в безграничной плазме [1, 2]. Поэтому ниже мы остановимся на исследовании флуктуирующей электромагнитных полей в анизотропном плазменном полупространстве в области частот $\omega_{ce}^2 \gg \omega^2 \sim \omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce} \omega_{ci}$ в предположении, что случайные источники равномерно распределены в плазме и отсутствуют в вакууме.

Исходными уравнениями задачи являются уравнения Максвелла со введенной в них спонтанной («сторонней») индукцией $\tilde{D}_\omega(\mathbf{r})$ и кинетическое уравнение для высокочастотной добавки \tilde{f}_ω к максвелловской функции распределения

$$f_0(v) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_T} \exp\left\{-\frac{v^2}{v_T^2}\right\}, \quad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}}.$$

Граничные условия для полей состоят в требовании непрерывности тангенциальных компонент полного поля на границе плазма — вакуум.

Граничные условия для \tilde{f}_ω соответствуют зеркальному отражению частиц поверхностью плазмы.

Учитывая, что в бесконечно сильном магнитном поле имеется единственная составляющая тока, которая легко может быть найдена из решения кинетического уравнения с соответствующими граничными условиями, применим флуктуационно-диссипативную теорему в форме [3] для негиротропной среды с пространственной дисперсией. Формулиров-

ка этой теоремы в k -пространстве для анизотропной полуограниченной плазмы имеет вид

$$\langle D_3(\mathbf{k}) D_3^*(\mathbf{k}') \rangle_\omega = \frac{\theta}{4\pi^3} \operatorname{Im} \varepsilon_{33}(\omega, k_3) [\delta(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}'_3) - \delta(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}'_3)] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$D_3(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_0^{\infty} dz \tilde{D}_{3\omega}(\mathbf{r}) \sin k_3 z e^{-i\mathbf{x}\rho},$$

$$\mathbf{r} = (\rho, z\mathbf{n}), \quad \mathbf{k} = (\mathbf{x}, k_3), \quad \theta = \hbar \omega \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T},$$

T — температура плазмы, $\varepsilon_{33}(\omega, k_3)$ — соответствующая компонента тензора неограниченной плазмы в магнитном поле в предположении $\mathbf{x} \mathbf{v}_T / \omega_{ce} \ll 1$.

С помощью (1) вычислим среднеквадратичное напряженности электрического поля $\langle E(\mathbf{r}) E^*(\mathbf{r}') \rangle_\omega \equiv \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\theta}{\pi^2} \int_0^{\infty} x dx J_0(x R_\perp) \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_3}{\Delta} |\operatorname{Im} \varepsilon_{33}(\omega, k_3)| \times \right.$$

$$\times [\exp(ik_3(z - z')) [x^2 k_3^2 + (k_3^2 - k_0^2)^2] + \exp(ik_3(z + z')) [x^2 k_3^2 - (k_3^2 - k_0^2)^2]] - \frac{\operatorname{Im} P(0)}{N} [\zeta_p(z) \zeta_p^*(z') +$$

$$+ x^2 \zeta_1(z) \zeta_1(z')] + \operatorname{Im} [x^2 \zeta_1(z) \zeta_1(z') - \zeta_p(z) \zeta_p(z')] \frac{1}{N} \Big\}, \quad (2)$$

$$R_\perp \equiv |\rho - \rho'|, \quad k_0 \equiv \frac{\omega}{c}, \quad \Delta \equiv \varepsilon_{33}(\omega, k_3) (k_0^2 - k_3^2) - x^2,$$

$$\zeta_1(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_3 z)}{\Delta} dk_3, \quad \zeta_p(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_3 z)}{\Delta} [x^2 - k_0^2 \varepsilon_{33}(\omega, k_3)] dk_3,$$

$$P(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_3 z) (k_0^2 \varepsilon_B - x^2)}{\varepsilon_B (k^2 - k_0^2 \varepsilon_B)} dk_3, \quad N \equiv \zeta_p(+0) + P(-0).$$

1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В пренебрежении пространственной дисперсией, $\varepsilon_{33}(\omega, k_3) = \varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon(0) + i\varepsilon''$, $\varepsilon(0) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$, интегралы по k_3 легко могут быть вычислены, что позволит получить относительно простое выражение для корреляционной функции (2). Представляет интерес та часть коррелятора $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которая отлична от нуля при $\varepsilon'' \rightarrow 0$. При этом области частот $\omega > \omega_{pe}$ и $\omega < \omega_{pe}$ требуют отдельного рассмотрения.

Физически различие в флуктуационных характеристиках плазмы на частотах выше и ниже плазменной (ω_{pe}) объясняется различием в электродинамических свойствах плазмы в этих областях частот. Действительно, из дисперсионного уравнения для собственных волн анизотропной плазмы [4] следует, что на частотах $\omega > \omega_{pe}$ в безграничной

бесстолкновительной плазме распространяются только электромагнитные волны, а продольные колебания не могут существовать. В области частот ниже плазменной ($\omega < \omega_{pe}$) возможно распространение не только электромагнитных волн, но и продольных колебаний, которые при конечной температуре плазмы переходят в продольные волны.

Из общего выражения для корреляционной функции (2) в области $\omega > \omega_{pe}$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = & \frac{\theta k_0^3}{2\pi} \left\{ \left[\varepsilon(0) \frac{d^2}{d\xi_-^2} + \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} \left(\beta \frac{d}{d\beta} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left[\Phi(\xi_-, \beta) + 2 \int_0^1 \frac{dt J_0(t\beta) t \sqrt{1 - \varepsilon(0)t^2}}{(\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1 - \varepsilon(0)t^2})^2} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ -i\sqrt{1-t^2}\xi_- - \frac{\varepsilon'' t \xi_+}{2\varepsilon(0)} \right\} + \left[\varepsilon(0) \frac{d^2}{d\xi_+^2} - \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} \times \right. \\ & \times \left. \left(\beta \frac{d}{d\beta} \right) \right] \left[\Phi(\xi_+, \beta) + 2 \int_0^1 \frac{dt J_0(t\beta) t \cos(\sqrt{1-t^2}\xi_+)}{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{1 - \varepsilon(0)t^2}} \right] \Bigg\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Phi(\xi, \beta) \equiv - \frac{\sin \sqrt{\xi^2 + \beta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \beta^2}}.$$

Здесь $\xi_{\mp} = k_0 |z \mp z'|$, $\beta = k_0 R_{\perp} \sqrt{\varepsilon(0)}$.

Зависящий от $\Phi(\xi_{\pm}, \beta)$ член в фигурных скобках формулы (3) описывает флуктуаций в бесконечном анизотропном плазменном объеме и может быть получен соответствующим предельным переходом ($\omega_{ce} \rightarrow \infty$) из формулы (1.1) работы [2]. Появление в корреляционной функции (3) остальных слагаемых связано с наличием границы* и отражает тот физический факт, что взаимодействие флуктуационных источников в ограниченной плазме осуществляется не только путем прямой передачи возмущения от точки \mathbf{r} к точке \mathbf{r}' , но также и посредством поперечных волн, отраженных от поверхности плазмы.

При достаточной удаленности областей возникновения и наблюдения флуктуационного поля $k_0 [(z \mp z')^2 + \varepsilon(0) R_{\perp}^2]^{1/2} \gg 1$ корреляционная функция опадает обратно пропорционально первой степени «расстояния» между ними (с характерным для анизотропных сред искажением масштабов):

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \frac{\theta}{2\pi} k_0^3 \left\{ \frac{\varepsilon(0)\xi_-^2 + \beta^2}{R_-^3} \sin R_- + \frac{\varepsilon(0)\xi_+^2 - \beta^2}{R_+^3} \sin R_+ \right\}, \quad (4)$$

$$R_{\mp}^2 \equiv \xi_{\mp}^2 + \beta^2.$$

Из (3) и (4) видно, что обусловленный границей вклад в корреляционную функцию оказывается сравнимым с той частью корреляционной функции, которая описывает непосредственное распространение волн между \mathbf{r} и \mathbf{r}' на расстояниях $R_{\pm} \sim 1$.

Перейдем к анализу координатной и частотной зависимостей гидро-

* Хотя глубина осцилляций первого интеграла в формуле (3) зависит от разности координат точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' , затухание имеет «поверхностный» характер — спадание определяется абсолютным удалением \mathbf{r} и \mathbf{r}' от границы.

динамической корреляционной функции в области $\omega < \omega_{pe}$. При малых частотах парных соударений $\varepsilon'' \rightarrow 0$ коррелятор (2) в области частот $\omega < \omega_{pe}$ может быть преобразован к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Psi(r, r') = & \frac{\theta}{2\pi} k_0^3 \left\{ \left[|\varepsilon(0)| \frac{d^2}{d\xi_-^2} + \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} \left(\beta \frac{d}{d\beta} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left[F(\xi_-, \beta) + 2 \int_0^{1/\sqrt{|\varepsilon(0)|}} \frac{dt J_0(t\beta) t \sqrt{1 - |\varepsilon(0)| t^2}}{(\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1 - |\varepsilon(0)| t^2})^2} \exp \{i \sqrt{1+t^2} \xi_-\} + \right. \\ & + \left. \left[|\varepsilon(0)| \frac{d^2}{d\xi_+^2} - \frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} \left(\beta \frac{d}{d\beta} \right) \right] \left[F(\xi_+, \beta) + \frac{1}{|\varepsilon(0)|+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} J_0(t\beta) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\sqrt{|\varepsilon(0)| t^2 - 1} \sin(\sqrt{1+t^2} \xi_+) + \sqrt{1+t^2} \cos(\sqrt{1+t^2} \xi_+)) \right] \right\}, \\ F(\xi, \beta) = & \begin{cases} \sin \frac{\sqrt{\xi^2 - \beta^2}}{\sqrt{\xi^2 - \beta^2}} & (\xi > \beta) \\ -\frac{\exp \{ \sqrt{\beta^2 - \xi^2} \}}{\sqrt{\beta^2 - \xi^2}} & (\xi < \beta) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Как и в случае $\omega > \omega_{pe}$, первый член в (5), зависящий от $F(\xi_-, \beta)$, соответствует коррелятору безграничной плазмы, а остальные учитывают эффекты, вызванные границей. Отличие (5) от соответствующего выражения (3) для области $\omega > \omega_{pe}$ обусловлено наличием в анизотропной плазме с отрицательной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon_{33} < 0$) целой области направлений, вдоль которых распространение поперечных волн невозможно. Поэтому зависящие от функций $F(\xi, \beta)$ основные слагаемые в (5), которые соответствуют корреляции электромагнитных волн, распространяющихся в бесконечной анизотропной плазме, спадают по экспоненциальному закону с увеличением эффективных расстояний $\sqrt{\beta^2 - \xi^2}$ в области нераспространения даже при равной нулю мнимой части диэлектрической проницаемости.

Наиболее существенным в данном случае является наличие особенностей у корреляционной функции (5) на фиксированной частоте и в направлениях, разграничивающих области распространения и затухания электромагнитных волн (так называемые каустики). Вдоль каустик частота флуктуационного поля равна собственной частоте продольных колебаний магнитоактивной плазмы [5, 6]. Так как в анизотропной плазменном полупространстве появляются два таких направления*, разграничивающих области прозрачности, то в гидродинамическом приближении для фиксированных положений точек r и r' в частотном спектре корреляционной функции появляются две особенности на частотах

$$\omega_- = \omega_{pe} \frac{R_{\perp}}{R_-}; \quad (6a)$$

$$\omega_+ = \omega_{pe} \frac{R_{\perp}}{R_+}; \quad (6b)$$

* Точнее, речь идет о конических поверхностях с осью вращения, параллельной магнитному полю. При написании (2) мы воспользовались аксиальной симметрией задачи.

$$R_{\mp}^2 = R_{\perp}^2 + |z \mp z'|^2.$$

Поскольку гидродинамические выражения $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ вблизи каустик стремятся к бесконечности пропорционально $\sim |\varepsilon''|^{-5/2}$, то для описания корреляционных характеристик поля бесстолкновительной плазмы вдоль этих направлений необходим учет пространственной дисперсии [5, 6].

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В анизотропной плазме конечной температуры вдоль каустических поверхностей распространяются продольные волны, которые и обеспечивают корреляцию полей между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' , лежащими на этих поверхностях [6]. Ниже мы исследуем корреляционную функцию (2) именно для таких точек с учетом пространственной дисперсии.

Выясним сначала вопрос о влиянии пространственной дисперсии на «объемную» часть $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{06}$, не зависящую явно от N . Произведя замену переменных

$$x = \frac{x v_T}{\omega}, \quad q = \frac{k_3 v_T}{\omega}, \quad \xi_{\mp} = \frac{|z \mp z'| \omega}{v_T}, \quad r_{\perp} = R_{\perp} \frac{\omega}{v_T}$$

и интегрируя по x , получим

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{06} = & \frac{\theta}{2\pi^2 i} \left(\frac{\omega}{v_T} \right)^3 \int_{\beta_T}^{\infty} dq \{ \cos(q \xi_{-}) [q^2 \operatorname{Re} \varepsilon(q) + \\ & + (q^2 - \beta_T^2)] + \cos(q \xi_{+}) [q^2 \operatorname{Re} \varepsilon(q) - (q^2 - \beta_T^2)] \} \times \\ & \times \{ K_0 [r_{\perp} \sqrt{(q^2 - \beta_T^2) \varepsilon(q)}] - K_0 [r_{\perp} \sqrt{(q^2 - \beta_T^2) \varepsilon^*(q)}] \}. \end{aligned} \quad (7)$$

При написании (7) пренебрегли слагаемыми, вклад которых экспоненциально мал на расстояниях, значительно превышающих дебаевский радиус ($r_{\perp}, \xi_{\mp} \gg 1$). Для таких макроскопических корреляционных расстояний не экспоненциально малый вклад в интеграл (7) дает область переменной q , в которой $\operatorname{Re} \varepsilon(q) < 0$. При конечных значениях $|\varepsilon(0)| \sim 1$ этот интервал определяется неравенствами $\beta_T \leq q \leq q_0$, где константой q_0 (порядка единицы) обозначен корень трансцендентного уравнения $\operatorname{Re} \varepsilon(q) = 0$:

$$1 + \frac{2\Omega_{pe}^2}{q_0^2} = \frac{4\Omega_{pe}^2}{q_0^3} \exp(-q_0^{-2}) \int_0^{q_0^{-1}} \exp(t^2) dt, \quad \Omega_{pe}^2 \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}.$$

Учитывая также, что наибольший вклад в (7) дают малые q , но значительно превышающие β_T ($\beta_T \ll q \ll 1$), получим для $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{06}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{06} = & \frac{\theta}{2\pi^2} \left(\frac{\omega}{v_T} \right)^3 \sum_{\xi_{-}, \xi_{+}} (|\varepsilon(0)| - \operatorname{sgn} \operatorname{index} \xi) \times \\ & \times \left\{ \frac{A^{5/6}}{\xi^{4/3}} \left[\frac{3}{5} 2^{5/6} \Gamma\left(\frac{7}{12}\right) - \sin\left(\frac{5}{12} \pi\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{q_0}{\xi} \right)^{3/2} [\sin 2q_0 \xi - \cos 2q_0 \xi] \right\} \left[1 + O\left(\frac{q_0^3}{\xi}\right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$A \equiv \frac{4 |\varepsilon(0)|}{3 \Omega_{pe}^2}.$$

Как видно из (8), учет волнового характера передачи информации между точками r и r' в анизотропной плазме с пространственной дисперсией приводит к конечной величине корреляционной функции в максимуме.

Таким образом, для точек r и r' , координаты которых удовлетворяют условию

$$R_{\perp} \sqrt{|\varepsilon(0)|} = |z - z'| \quad (9a)$$

или

$$R_{\perp} \sqrt{|\varepsilon(0)|} = |z + z'|, \quad (9b)$$

корреляция осуществляется продольными волнами, причем в направлении (9 б) — в результате отражения этих волн от поверхности плазмы. Зависимость корреляционной функции от расстояния $|z \mp z'|$ и температуры плазмы в наибольшем по порядку величины члене (8) оказывается следующей:

$$\Psi(r, r') \sim \left(\frac{\omega}{v_T}\right)^{5/3} \frac{(|\varepsilon(0)| \mp 1) |\varepsilon(0)|^{5/6}}{\Omega_{pe}^{5/3} |z \pm z'|^{4/3}}. \quad (10)$$

Учет теплового движения частиц необходим также и при оценке вклада той части корреляционной функции, которая зависит явно от свойств среды, граничащей с плазмой (от N). Ниже мы ограничимся исследованием слагаемого, которое дает в гидродинамическом приближении ту же степень расходимости при $\varepsilon'' \rightarrow 0$, что и «объемный» член ($\sim |\varepsilon''|^{-5/2}$),

$$\Psi(r, r')_{\text{пов}} \equiv \frac{\theta}{\pi^2} \left(\frac{\omega}{v_T}\right)^3 \text{Im} \int_0^{\infty} \frac{dx}{N} J_0(xr_{\perp}) [x^2 \zeta_1(z) \zeta_1(z') - \zeta_p(z) \zeta_p(z')]. \quad (11)$$

При выделении из (2) «поверхностной» части коррелятора мы пренебрегли слагаемым, содержащим множитель $\text{Im} P(-0)$, который в формуле (3) гидродинамического приближения имеет на каустической поверхности более слабую особенность, чем (11), а именно, пропорционален $\sim |\varepsilon''|^{-1/2}$.

Пространственная дисперсия в (11) искажается, в основном, в проявлении предельной величины поперечного волнового числа x_{max} , для которого поля осуществляющих корреляцию волн простираются от поверхности плазмы на расстояния, значительно большие v_T/ω . Как видно из определения функций $\zeta_p(z)$ и $\zeta_1(z)$, основной вклад в которые вносят вычеты в точках $q(x)$,

$$\varepsilon [q(x)] [\beta_T^2 - q^2(x)] = x^2 \quad (x > 0),$$

x_{max} находим из следующего уравнения:

$$2 x_{\text{max}} = \frac{d}{dx} \{ \varepsilon [q(x)] [\beta_T^2 - q^2(x)] \} |_{x=x_{\text{max}}} > 0.$$

Для оценки $\Psi(r, r')_{\text{пов}}$ достаточно подставить в подынтегральное выражение значения функций $\zeta_1(z)$, $\zeta_p(z)$, N в гидродинамическом приближении, а в качестве верхнего предела при интегрировании по x взять x_{max} . Тогда для корреляционных расстояний, существенно превышающих дебаевский радиус, получим

$$\Psi(r, r')_{\text{пов}} = \frac{\theta (\sqrt{|\varepsilon(0)|} + 1)}{5 \sqrt{2\pi} |\varepsilon(0)|^{5/4}} (x_{\text{max}})^{5/2} \left(\frac{\omega}{v_T}\right)^{5/2} \frac{1}{|z + z'|^{1/2}}. \quad (12)$$

Сравнение (12) с (10) показывает, что для координат точек наблюдения, удовлетворяющих условию

$$\frac{[(z + z') + R_{\perp}]^{6/5} R_{\perp}^6 R_{\perp}^{4/5}}{|z - z'|^{2/5} |z + z'|^{13/5} R_{\perp}^3} \gg a,$$

поверхностные эффекты в корреляциях электромагнитных полей в анизотропной плазме оказываются более существенными, чем объемные.

Таким образом, мы показали, что три фиксированных точки наблюдения флуктуационного поля в анизотропном плазменном полупространстве, r и r' , максимумы корреляционной функции расположены на частотах, соответствующих продольным волнам, непосредственно распространяющимся между этими точками (6 а) и попадающими из r в r' в результате отражения от поверхности плазмы (6 б). Обусловленный наличием границы результирующий вклад продольных волн в корреляционную функцию поля оказывается существенным на расстояниях, значительно больших дебаевского радиуса.

В заключение авторы благодарят В. И. Курилко за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965.
2. В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, № 2, 297 (1963); **6**, № 3, 480 (1963).
3. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
4. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
5. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
6. В. Ф. Алексин, В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 6, 1135 (1965).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
8 октября 1971 г.

THE KINETIC THEORY OF ELECTROMAGNETIC FLUCTUATIONS IN ANISOTROPIC PLASMA HALF-SPACE

Zh. D. Genchev, S. S. Kalmykova

The electromagnetic field fluctuations in a semi-bounded homogeneous collisionless plasma with a surface of mirror reflection are considered with taking into account the defects of spatial dispersion. The external magnetic field perpendicular to the plasma-vacuum interface is assumed to be infinitely strong, $\omega_{ce}^2 \gg \omega^2 \sim \omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce} \omega_{ci}$. The correlator of Fourier-components of random inductions is obtained. The correlation function of the electric field intensity in plasma is calculated by means of the correlator and investigated.

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ ФЛУКТУИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Фрайман

Рассмотрена задача о дифракции флуктуирующего в пространстве излучения на рассеивающем объекте. Определено влияние флуктуаций падающей волны на дифракционную картину, образующуюся при рассеянии ее на идеально отражающей сфере большого радиуса.

В большинстве работ по дифракции волн на различных объектах падающая волна предполагается плоской. Однако в ряде случаев нельзя игнорировать хаотические изменения свойств среды, разделяющей излучатель и рассеивающий объект. Эти изменения приводят к хаотической пространственной амплитудной и фазовой модуляции падающей волны, в связи с чем возникает необходимость в рассмотрении задачи о дифракции флуктуирующего излучения. В работе [1] рассмотрена одна из таких задач, а именно определены характеристики обратного рассеяния идеально отражающего цилиндра, расположенного за сферой со случайными неоднородностями. Вместе с тем, представляет интерес рассмотреть аналогичную задачу для рассеивающего объекта, характеризующегося двумя конечными радиусами кривизны отражающей поверхности. Этому и посвящена настоящая работа. Для простоты рассматривается скалярная задача, однако обобщение на электромагнитный случай проводится очевидным образом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Пусть в плоскости $z = z_0 < 0$ (см. рис. 1) задано флуктуирующее в пространстве поле падающей на объект S волны $U_{\text{пад}}(\mathbf{r}, z_0)$. На поверхности S считаем выполняющимися граничные условия $\hat{L}[U]_S = 0$. Случайное поле $U_{\text{пад}}(\mathbf{r}, z_0)$ будем считать статистически однородным и изотропным. Нас будет интересовать поле рассеянной телом S волны.

Поле падающей волны за плоскостью $z = z_0$, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца и имеющее заданную величину в плоскости $z = z_0$, можно представить в виде

$$U_{\text{пад}}(\mathbf{r}, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, z_0) \exp [i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} + i \sqrt{k^2 - x^2} (z - z_0)] d^2 \mathbf{x}, \quad (1)$$

где

$$f(\mathbf{x}, z_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} U_{\text{пад}}(\mathbf{r}, z_0) e^{-i \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r},$$

$\mathbf{r} = \{x, y, 0\}$; $k = \omega/c$ — волновое число свободного пространства. Выражение (1) представляет собой разложение падающей волны по плоским волнам с амплитудами $f(\mathbf{x}, z_0)$, распространяющимся под углом $\vartheta = \arcsin \frac{|\mathbf{x}|}{k}$ к оси z .

Обозначим через $K(R, q)$ рассеянное поле в точке наблюдения, обусловленное падающей плоской волной единичной амплитуды с волновым вектором:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\text{пад}} &= \{ \mathbf{x}_{\text{пад}}; \sqrt{k^2 - \mathbf{x}_{\text{пад}}^2} \}, \\ q &= \mathbf{k}_{\text{пад}} - \mathbf{k}_{\text{расс}}, \quad \mathbf{k}_{\text{расс}} = \{ \mathbf{x}_{\text{расс}}; \pm \sqrt{k^2 - \mathbf{x}_{\text{расс}}^2} \}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если рассеивающий объект рассматривать как преобразователь пространственных частот, то $K(R, q)$ можно назвать его коэффициентом преобразования.

Результирующее рассеянное поле в точке наблюдения можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_{\text{расс}}(R, \mathbf{k}_{\text{расс}}) &= \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} K(R, q) f(\mathbf{x}_{\text{пад}}, z_0) d^2 \mathbf{x}_{\text{пад}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что для статистически однородного случайного поля имеет место соотношение*

$$\overline{f(\mathbf{x}, z_0) f^*(\mathbf{x}', z_0)} = F(\mathbf{x}, 0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

для среднего квадрата рассеянного поля $|\overline{U_{\text{расс}}}|^2$ из (3) будем иметь

$$|\overline{U_{\text{расс}}(R, \mathbf{k}_{\text{расс}})}|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |K(R, q)|^2 F(\mathbf{x}_{\text{пад}}, 0) d^2 \mathbf{x}_{\text{пад}}, \quad (4)$$

где $F(\mathbf{x}_{\text{пад}}, 0)$ — угловой спектр мощности падающего поля.

Формула (4) показывает, что для расчета средней плотности энергии рассеянного поля достаточно знать лишь энергетические характеристики рассеивающего объекта, т. е. пространственное распределение квадрата амплитуды рассеянной волны, обусловленной падающей плоской волной. Отметим еще одно следствие (4). Предположим, что флуктуации в падающей волне вызваны хаотическим фазовым экраном, расположенным в плоскости $z = z_0$. Тогда, как известно [2], на расстояниях за экраном $z - z_0 \leq kl^2$ в волне присутствуют лишь фазовые флуктуации, а при $z - z_0 > kl^2$ появляются и амплитудные. С другой стороны, угловой спектр мощности $F(\mathbf{x}, 0)$ полностью определяется корреляционными свойствами поля в плоскости $z = z_0$ и сохраняется при удалении от экрана. Отсюда следует, что величина $|\overline{U_{\text{расс}}}|^2$ не зависит от того, представлены ли в падающей волне и фазовые и амплитудные флуктуации или лишь фазовые.

В качестве примера рассмотрим рассеяние на идеально отражающей ($U_S = 0$) сфере большого радиуса a ($\beta^{1/3} \equiv (ka)^{1/3} \gg 1$). Подробный обзор асимптотических решений задачи дифракции плоской волны на такой сфере дается в работе [3]. К сожалению, не существует равномерной высокочастотной асимптотики в решении этой задачи, что застав-

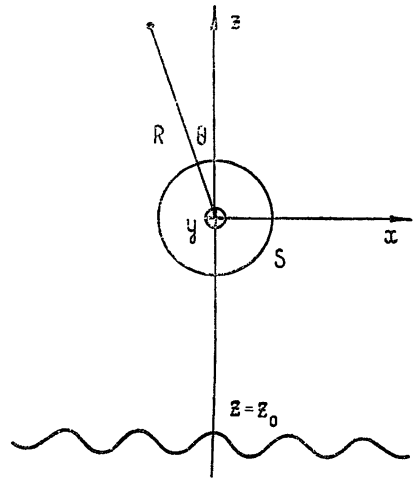


Рис. 1.

* Черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций. Неоднородности поля предполагаются крупномасштабными.

ляет заново проводить вычисления среднего квадрата поля при перемещении точки наблюдения из одной характерной области пространства в другую. Мы рассмотрим здесь два случая расположения точки наблюдения. В разд. 2 будет рассмотрено рассеяние вперед во френелевской области, т. е. там, где в задаче о дифракции плоской волны существует пятно Пуассона. В разд. 3 будет определено влияние флуктуаций в падающей волне на распределение амплитуды рассеянного поля в зоне Фраунгофера.

2. ФРЕНЕЛЕВСКАЯ ОБЛАСТЬ. ПЯТНО ПУАССОНА

Итак, пусть точка наблюдения имеет координаты $(r, z > 0)$, причем $|r| \leq a$, $\beta^{1/3} a \ll z \ll \beta a$. Если угол между осью z и направлением на точку наблюдения удовлетворяет условию $\theta \ll a/z$, выражение для $K(R, q)$ имеет вид [3]

$$K(z, \vartheta) = \exp\left(ikz + i\frac{ka^2}{2z}\right) \left[1 + iM\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/3} \frac{a}{z}\right] J_0(\beta\vartheta) + O\left(\frac{z\vartheta}{a}\right), \quad (5)$$

где $M = 1,26 e^{i(\pi/3)}$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $\cos \vartheta = (1/k^2)(k_{\text{пад}} k_{\text{расс}})$. Из выражения (5) следует

$$|K(R, q)|^2 = \left[1 - 2,2 \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/3} \frac{a}{z}\right] J_0^2(a|k_{\text{пад}} - k_{\text{расс}}|). \quad (6)$$

Зададим угловой спектр мощности падающего поля в виде

$$F(k_{\text{пад}}, 0) = \frac{l^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{k_{\text{пад}}^2 l^2}{4}\right), \quad (7)$$

что соответствует гауссовой поперечной корреляционной функции поля с радиусом корреляции l . Подставляя (6) и (7) в (4) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \overline{|U_{\text{расс}}|^2} &= \left[1 - 2,2 \left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/3} \frac{a}{z}\right] \exp\left(-\frac{2a^2}{l^2}\right) \left\{ J_0^2(a\rho) I_0\left(\frac{2a^2}{l^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(a\rho) I_m\left(\frac{2a^2}{l^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\rho = |k_{\text{расс}}|$.

Формула (8) верна, если ширина углового спектра падающего поля не превосходит границы применимости асимптотического выражения (5), т. е.

$$\frac{1}{kl} \ll \frac{a}{z}. \quad (9)$$

Падающей плоской волне соответствует предельный переход $2a^2/l^2 \rightarrow 0$. При этом интенсивность рассеянного поля вблизи оси z зависит от угла рассеяния θ как $\overline{|U_{\text{расс}}|^2} \sim J_0^2(\beta\theta)$. Наличие флуктуаций в падающей волне приводит к изменению средней дифракционной картины. При достаточно малой ширине углового спектра падающего поля ($2a^2/l^2 \ll 1$) можно ограничиться учетом только первого члена в бесконечной сумме в (8), что дает

$$\overline{|U_{\text{расс}}|^2} \approx J_0^2(\beta\theta) + \frac{2a^2}{l^2} J_1^2(\beta\theta). \quad (10)$$

Как следует из выражения (10), наличие флуктуаций приводит к замыванию нулей дифракционной картины. Дальнейшее увеличение ширины углового спектра падающего поля полностью изменяет дифракционную картину. Распределение средней интенсивности оказывается вообще не осциллирующей функцией угла, а монотонно спадает от значения на оси к периферии. Для определения значения на оси положим в формуле (8) $\rho = 0$. Получим

$$|\overline{U_{\text{расс}}(z, 0)}|^2 = \left[1 - 2,2 \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/3} \frac{a}{z} \right] \exp \left(- \frac{2a^2}{l^2} \right) I_0 \left(\frac{2a^2}{l^2} \right). \quad (11)$$

Отсюда видно, что при $2a^2/l^2 \gg 1$ интенсивность на оси в $2\sqrt{\pi}a/l$ раз меньше, чем в регулярной задаче. Во столько же раз увеличатся размеры пятна Пуассона.

3. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

В зоне Фраунгофера ($R \gg \beta a$) коэффициент преобразования $K(R, q)$ просто выражается через дифференциальное сечение рассеяния:

$$|K(R, q)|^2 = \frac{1}{R^2} \sigma(|q|). \quad (12)$$

Рассмотрим сначала случай, когда точка наблюдения расположена за сферой вблизи оси z . При этом, если $\theta \ll \beta^{-1/3}$, то [3]

$$\sigma(\vartheta) = k^2 a^4 \frac{J_1^2(\beta\vartheta)}{(\beta\vartheta)^2}. \quad (13)$$

Относительно влияния флуктуаций в падающей волне на угловое распределение рассеянного поля можно сделать те же заключения, что и в разд. 2. Значение среднего квадрата рассеянного поля на оси z дается формулой

$$|\overline{U_{\text{расс}}}|^2 = \frac{1}{z^2} \frac{k^2 a^2 l^2}{2} \int_0^\infty \frac{J_1^2(x)}{x} \exp \left(- \frac{x^2 l^2}{4a^2} \right) dx. \quad (14)$$

Если $4a^2 \gg l^2$, то для оценки входящего в (14) интеграла экспоненту можно приближенно заменить единицей, что дает

$$|\overline{U_{\text{расс}}}|^2 = \frac{1}{z^2} - \frac{k^2 a^2 l^2}{4}, \quad (15)$$

т. е. в этом случае происходит резкое (в a^2/l^2 раз) уменьшение рассеянной вперед волны.

При выполнении условия $4a^2 \ll l^2$ в выражении (14) можно разложить функцию Бесселя в ряд и ограничиться первым членом разложения. В результате получим

$$|\overline{U_{\text{расс}}}|^2 \approx \frac{1}{z^2} \frac{k^2 a^4}{4}, \quad (16)$$

что совпадает с результатом решения регулярной задачи.

Если точка наблюдения находится далеко от оси z ($\theta \gg \beta^{-1/3}$), тем более, если мы интересуемся обратным рассеянием, то легко показать, что поправки, связанные с учетом флуктуаций падающей волны, всегда малы по сравнению с регулярным значением.

$$|U_{\text{расс}}|^2 \approx \frac{1}{R^2} \frac{a^2}{4}. \quad (17)$$

Аналогичным образом может быть рассчитано среднее распределение интенсивности рассеянного поля и в других характерных областях пространства, например, вблизи границы геометрической тени.

В заключение заметим, что основные выводы настоящей работы остаются в силе и при дифракции флуктуирующего излучения на произвольном теле. При достаточной ширине углового спектра падающего поля, а точнее, при ширине, большей характерной ширины распределения поля в интересующей нас области пространства в регулярной задаче, происходит полное замывание дифракционной картины. И, наоборот, при достаточно малой ширине углового спектра падающего поля флуктуации практически не сказываются на распределении средней интенсивности рассеянной волны*. При дифракции плоской волны на плавно искривленном теле больших размеров в зоне Фраунгофера характерные угловые размеры дифракционной картины зависят от расположения точки наблюдения.

При рассеянии вперед характерная угловая ширина $\Delta\theta_{\text{дифр}} \approx (ka)^{-1}$, где a — поперечный размер объекта. При этом учет флуктуаций существен, если ширина углового спектра падающего излучения $\Delta\theta_{\text{фл}} > \Delta\theta_{\text{дифр}}$, причем в этом случае происходит уменьшение средней рассеянной вперед энергии в $\left(\frac{\Delta\theta_{\text{фл}}}{\Delta\theta_{\text{дифр}}}\right)^2$ раз. Если интересоваться рассеянием на большие углы, то здесь, как правило, характерная ширина дифракционной картины в регулярной задаче не зависит от длины волны и определяется «скоростью» изменения кривизны границы. При этом в большинстве случаев эта ширина превосходит ширину углового спектра падающего излучения, так что флуктуации практически не сказываются на распределении средней рассеянной энергии в этой области пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1124 (1966).
2. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).
3. H. M. Nussenzweig, Ann. Phys., 34, № 1, 23 (1965).
4. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 3, 488 (1963).
5. Н. Г. Денисов, Геомagnetизм и аэрономия, 4, 657 (1964)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
6 января 1972 г.

DIFFRACTION OF FLUCTUATING RADIATION

A. A. Fraiman

The diffraction of space-fluctuating radiation on a scattering object has been considered. The influence of the incident wave fluctuations on the diffraction pattern formed at the wave scattering on a perfectly reflecting sphere of a large radius is determined.

* Аналогичные эффекты имеют место в задачах о прохождении флуктуирующего излучения через линзы [4], отверстия в экранах [5] и т. д.

УДК 621.391.82

ВЛИЯНИЕ АДДИТИВНОЙ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХ НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Г. А. Андреев, Б. П. Левенец, Р. М. Магид, Г. И. Хохлов

Получены теоретические соотношения для среднеквадратичной ошибки измерения углового положения источника излучения время-импульсным методом при действии аддитивной и мультипликативной помех. Показано, что реализованная система обеспечивает точность измерения в $\sqrt{2}$ раз меньше предельной (потенциальной).

Известно, что время-импульсный способ определения углового положения излучающего объекта широко используется в разнообразных оптико-электронных системах [1, 2]. Приемная оптическая система с фокусом f формирует точечное изображение удаленного источника излучения, которое в плоскости анализатора изображения, совмещенного с приемником лучистой энергии (ПЛЭ), описывает окружность радиуса ρ_c (например, с помощью вращающегося зеркала [1]).

Для уменьшения влияния медленно меняющихся фоновых и других оптических излучений, а также собственных шумов фотоприемника, применяют амплитудную модуляцию на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0$. В связи с этим фотопреобразователь содержит избирательно по частоте линейную систему (резонансный усилитель). Информация об угловом положении источника излучения содержится в импульсной модуляции, которая на выходе ПЛЭ преобразуется в электрическое напряжение, существующее в течение времени τ_1 и τ_3 . В течение времени τ_2 и τ_4 напряжение на выходе ПЛЭ отсутствует [1, 2]. При смещении источника относительно оси оптической системы (линии визирования) на угол $\vartheta \ll 1$ изменится величина длительностей импульсов (τ_1 и τ_3) и пауз между ними (τ_2 и τ_4), т. е. будет широтно-импульсная модуляция.

Следуя [1], можно показать, что при малых углах ϑ между длительностями импульсов τ_i и углами β и γ , которые являются составляющими угла ϑ по азимуту и углу места, существуют зависимости:

$$\frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 + \tau_3} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{f}{\rho_c} \beta; \quad (1)$$

$$\frac{\tau_2 - \tau_4}{\tau_2 + \tau_4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{f}{\rho_c} \gamma. \quad (2)$$

Таким образом, напряжения U_β и U_γ , пропорциональные относительным длительностям $\tau_\beta = \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 + \tau_3}$ и $\tau_\gamma = \frac{\tau_2 - \tau_4}{\tau_2 + \tau_4}$, пропорциональны составляющим углового положения источника излучения. На функциональной схеме [1, 2] после детектора выделяются импульсы длитель-

ностью τ_1 , а затем с помощью порогового устройства, обычных коммутационных схем и интеграторов формируются выходные напряжения U_β и U_γ .

Действие многообразных помех сводится к двум видам: аддитивной и мультипликативной. Рассмотрим сначала влияние аддитивной помехи на точность измерения τ_β , которая обусловлена как внешними условиями (фоновая и другие), так и внутренними (собственными шумами фотоприемника и усилителя) и представляет собой широкополосный нормальный шум. Поскольку фотопреобразователь содержит резонансный усилитель, то на выходе его аддитивная помеха представляет собой уже квазигармонические флуктуации с центральной частотой ω_0 . Таким образом, согласно [3], совокупность гармонического сигнала $S(t)$ и аддитивной помехи $\zeta(t)$ на входе детектора представляется как

$$\xi(t) = S(t) + \zeta(t) = U(t) \cos[\omega_0 t - \varphi_\xi(t)]. \quad (3)$$

Полагая коэффициент преобразования детектора огибающей [3] равным единице, можно считать, что на выходе ФНЧ огибающая сигнала $U(t)$ записывается в виде [3]

$$U(t) = \{[S_0(t) + A_c(t)]^2 + A_s^2(t)\}^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь $A_{c,s}$ — квадратурные составляющие аддитивной помехи с дисперсией σ^2 в полосе пропускания Δf , обусловленной селективными свойствами резонансного усилителя; $S_0(t) = S_+ g(t)$ — огибающая импульса с максимальной величиной S_+ и формой $g(t) \leq 1$, определяемой временными свойствами фильтров. При отношении сигнала S_+ к шуму σ ($q = S_+/\sigma$), превышающем единицу, из разложения в ряд по степеням $\frac{A_s}{S_0 + A_c}$ следует, что

$$U(t) \approx S_0(t) + A_c(t).$$

Можно показать, что в приближении $\sigma_\xi \ll \dot{S}_0(t_0)$ флуктуации длительности составляют $\Delta\tau = \frac{A_c(t)}{\dot{S}_0(t_0)}$, и следовательно,

$$\langle (\Delta\tau)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{\dot{S}_0^2(t_0)}. \quad (5)$$

В соотношении (5) $\dot{S}_0(t_0)$ — крутизна сигнала в момент t_0 на уровне C — срабатывания порогового устройства.

Известно [4], что при прохождении прямоугольного импульса с амплитудой A_0 через резонансный усилитель, крутизна переднего фронта в момент пересечения порогового уровня равна

$$\dot{S}_1(t_{01}) = \frac{S_+}{\tau} \left(1 - \frac{C}{S_+}\right),$$

а заднего —

$$\dot{S}_2(t_{01}) = \frac{S_+}{\tau} \frac{C}{S_+},$$

где $S_+ = A_0 Q$, Q — добротность резонансного усилителя, τ_c — постоянная времени, равная задержке сигнала резонансным контуром.

Подставляя эти выражения в (5), получим

$$\langle (\Delta\tau)_1^2 \rangle = \frac{\tau_c^2}{q^2(1 - C_*)^2},$$

$$\langle (\Delta\tau)_2^2 \rangle = \frac{\tau_c^2}{q^2 C_*^2},$$

$$q = \frac{S_+}{\sigma}, \quad C_* = \frac{C}{S_+}.$$

При условии, что интервал корреляции помехи меньше длительностей импульсов τ_i , для определения дисперсии $D\{\tau_\beta\}$ достаточно сложить величины $\langle (\Delta\tau)^2 \rangle$ для переднего и заднего фронтов, разделить на $(\tau_1 + \tau_3)^2 = T_0^2/4$ и удвоить. Тогда для дисперсии $D\{\tau_\beta\}$ получается выражение

$$\sigma_\tau^2 = \frac{2\tau_c^2}{q^2} \left[\frac{1}{(1 - C_*)^2} + \frac{1}{C_*^2} \right], \quad (6)$$

где $\tau_* = \frac{2\tau_c}{T_0} = \frac{1}{\Delta f_s T_0}$, Δf_s — энергетическая полоса пропускания резонансного усилителя.

Из соотношения (1) следует, что среднеквадратичному значению σ_τ соответствует среднеквадратичная ошибка в определении угла β , определяемая по соотношению $\sigma_\beta = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\rho_c}{f} \sigma_\tau$, или, после подстановки (6),

$$\sigma_\beta = \frac{\pi}{2} \frac{\rho_c}{f} \frac{\tau_*}{q} \left[\frac{1}{(1 - C_*)^2} + \frac{1}{C_*^2} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

Из анализа полученной формулы следует, что минимальная ошибка получается при $C_* = \frac{1}{2}$. В этом случае

$$\sigma_\beta = \sigma_a = \sqrt{2} \pi \frac{\rho_c}{f} \frac{\tau_*}{q}. \quad (8)$$

Заметим, что максимально измеряемый угол равен $\beta_+ = \rho_c/f$, так что относительная среднеквадратичная ошибка $\sigma_* = \sigma_\beta/\beta_+$, обусловленная аддитивной помехой, описывается выражением

$$\sigma_* = \frac{\sqrt{2} \pi}{\Delta f_s T_0 q}. \quad (9)$$

Наличие интегратора с временем усреднения $T = 1/\Delta\Omega$ приводит к накоплению разностных импульсов, число которых равно $n = T/T_0$. Как известно, в этом случае отношение сигнала к шуму по мощности на выходе интегратора q_2^2 увеличивается по сравнению с входным q_1^2 в n раз. Увеличение q^2 в n раз при накоплении, очевидно, уменьшает во столько же раз ошибку измерения σ_β^2 углового положения источника излучения. В системе с параметрами $\frac{\pi}{2} \frac{\rho_c}{f} = 2,5 \cdot 10^{-2}$, $\tau_* = 3,2 \cdot 10^{-2}$, $n = 9$ при $q = 6$ теоретически ожидаемая величина $\sigma_a = 18''$. На рис. 1 а представлена осциллограмма выходного сигнала $U_\beta(t)$ в этих условиях.

Экспериментальное значение $\sigma_a = 20''$, т. е. в пределах ошибок измерения (10%) экспериментальный результат согласуется с теоретическим. На рис. 1 б, в приведены осциллограммы соответственно для $q = 12$; 24 при измеренных значениях $\sigma_a = 9''$; $4''$, 6. Относительная среднеквадратичная ошибка при $q = 6$ равна $\sigma_* = 0,8\%$.

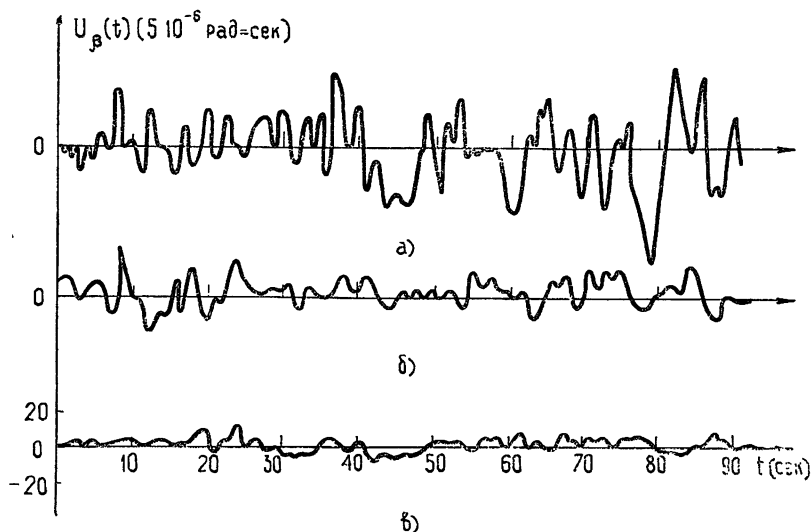


Рис. 1. Осциллограммы выходных напряжений при различных отношениях сигнала к шуму:

а) $q = 6$, б) $q = 12$, в) $q = 24$.

Для оценки потенциальной (предельной) точности измерения по критерию максимального отношения правдоподобия при наличии аддитивной помехи целесообразно воспользоваться выражением для минимальной дисперсии измерения времени смещения фронта радиопимпульса [3], которая записывается в виде

$$\sigma_t = \frac{1}{\omega_1 q_0},$$

где ω_1 — среднеквадратичная частота сигнала, определяемая по соотношению

$$\omega_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(i\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(i\omega)|^2 d\omega}.$$

Здесь $S(i\omega)$ — комплексный спектр сигнала $S(t)$, а $q_0^2 = \mathcal{E}/G_0$ — отношение сигнала к помехе по мощности на выходе оптимальной системы обработки сигнала, \mathcal{E} — энергия сигнала.

Для рассматриваемой системы измерения в случае прямоугольного радиопимпульса с амплитудой A_0 и длительностью $T_0/4$ величина энергии $\mathcal{E} = \frac{A_0^2 T_0}{8}$.

Как известно [3], для оценок q^2 целесообразно использовать энерге-

тическую полосу Δf_s . Для введенной нами величины q по определению получается выражение

$$q^2 = \frac{S_+^2}{\sigma^2} = \frac{A_0^2 Q^2}{2G_0 Q^2 \Delta f_s} = \frac{4\Theta}{G_0 \Delta f_s T_0} = \frac{4q_0^2}{\Delta f_s T_0}.$$

Как показано в [3], для прямоугольного радиопульса длительностью $T_0/4$, прошедшего через фильтр с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой в полосе Δf_s , величина $\omega_1^2 = \frac{8\Delta f_s}{T_0}$. Переходя от σ_t к σ_β и используя ранее введенные обозначения, для минимально возможной ошибки измерения σ_0^2 углового положения источника излучения при наличии аддитивной помехи получается выражение

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{\Delta f_s T_0 q}. \quad (10)$$

Из соотношений (10) и (9) следует, что используемая схема обработки реализует точность измерения в $\sqrt{2}$ раз меньше потенциальной.

Рассмотрим теперь влияние турбулентности атмосферы, обусловливающей флуктуации амплитуды огибающей (мультипликативная помеха). Математическое описание флуктуаций огибающей световой волны основывается на использовании уравнения распространения волн в турбулентной среде. При решении уравнения методом плавных возмущений используют представление поля в точке приема через комплексную фазу $\theta = \chi + i\varphi$ как $E = A_0 e^\theta$. Очевидно, что электрический сигнал $U(t)$ на выходе фотоприемника пропорционален квадрату огибающей поля:

$$U(t) = k A_0^2 e^{2\chi(t)}.$$

При нормальной плотности вероятности уровня $\chi(t)$ процесс $\xi(t) = \frac{U(t)}{\langle U(t) \rangle} = e^{2\chi(t)}$, где $\langle U(t) \rangle = k A_0^2$, описывается логарифмически-нормальным распределением $f(\xi)$.

Если интервал корреляции амплитудных флуктуаций меньше длительности импульса, то мультипликативную помеху удобно представить в виде

$$U(t) = \langle U(t) \rangle + \Delta U(t).$$

При такой форме записи мультипликативная помеха по дисперсии эквивалентна аддитивной, рассмотренной выше. Поэтому, по аналогии с приведенными выше рассуждениями, выражение для среднеквадратичной ошибки определения углового положения источника излучения, обусловленной турбулентностью атмосферы, запишется как

$$\sigma_\beta = \frac{\pi}{2} \frac{\rho_c}{f} \tau_* m_u \left[\frac{1}{(1 - C_*)^2} + \frac{1}{C_*^2} \right]^{1/2},$$

где $m_u = \frac{\sigma_u}{\langle U(t) \rangle}$ — глубина хаотической амплитудной модуляции. Минимальная ошибка получается при $C_* = 1/2$ и равна

$$\sigma_{*m} = \sqrt{2} \pi m_u \tau_*. \quad (11)$$

Из сопоставления (11) и (9) следует, что величина, обратная глубине хаотической амплитудной модуляции, эквивалентна отношению сигнала к шуму q при действии аддитивной помехи.

В случае, когда спектр импульса шире спектра амплитудных флуктуаций, т. е. интервал между выбросами на пороговом уровне больше длительности импульса (эта ситуация более типична), после порогового устройства будут случайные пропуски равноспных импульсов, что приведет к флуктуациям напряжения на выходе интегратора. При этом глубина хаотической амплитудной модуляции выходного напряжения интегратора и будет определять относительную точность измерения углового положения источника излучения из-за мультипликативной помехи.

Обозначим ϑ_T суммарный интервал между выбросами логарифмически-нормального процесса $\xi(t)$ на пороговом уровне C . При времени интегрирования T и случайном ϑ_T хаотическое напряжение на выходе интегратора \tilde{U} можно представить как $\tilde{U} = \frac{T - \vartheta_T}{T} U_\beta$, где U_β — напряжение в отсутствие помех. Среднеквадратичное значение, очевидно, будет равно

$$\sigma_u = \frac{\sigma_T}{T} U_\beta.$$

Здесь σ_T — среднеквадратичное значение суммарного интервала между выбросами реализации длительностью T .

Из приведенных соотношений следует, что из-за пропусков равноспных импульсов относительное среднеквадратичное значение флуктуаций угла равно $\frac{\sigma_\beta}{\beta} = \frac{\sigma_T}{T}$. Поэтому для определения относительной ошибки в измерении углового положения необходимо вычислить среднеквадратичное значение суммарного интервала ϑ_T , который в общем случае представляет случайную сумму \tilde{N} случайных интервалов ϑ_k .

Из общей теории вероятностей сумм случайных величин [5] следует, что дисперсия σ_T^2 суммы \tilde{N} случайных величин ($\vartheta_T = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \vartheta_k$) с одинаковым средним значением $\langle \vartheta \rangle$ и среднеквадратичным значением σ_ϑ описывается выражением

$$\sigma_T^2 = \sigma_\vartheta^2 N + \langle \vartheta \rangle^2 \sigma_N^2,$$

где $N = N_1(C_*) T$ — среднее число выбросов на длительности реализации T , $N_1(C_*)$ — среднее число выбросов процесса в единицу времени, σ_N — среднеквадратичное значение числа выбросов. Точное выражение $\langle \vartheta \rangle$ для логарифмически-нормального распределения имеет вид

$$\langle \vartheta(C_*) \rangle = \frac{1}{N_1(C_*)} F(C_u),$$

где

$$F(C_u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{C_u} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad C_u = \frac{\ln C_* + 2\sigma_\chi}{2\sigma_\chi}, \quad C_* = \frac{C}{\langle U(t) \rangle}.$$

Для определения σ_ϑ необходимо знать плотность вероятности распределения интервалов между выбросами. Однако, как известно, общее выражение $f(\vartheta)$ даже для гауссова процесса получается в виде бесконечного ряда интегралов с возрастающей кратностью и мало пригодно для аналитического вычисления σ_ϑ . Поэтому для логарифмически-нор-

мального процесса, как и для пауссова, целесообразно воспользоваться параболическим приближением [6]. После некоторых вычислений для $f(\vartheta)$ получается громоздкое выражение, которое очень неудобно для практических применений. Поэтому для различных параметров C_* и m_u на ЭВМ было получено семейство кривых $f(\vartheta)$ и аппроксимировано распределением χ^2 с тремя степенями свободы:

$$f(\vartheta_*) = \frac{1}{2\Gamma(3/2)} \left(\frac{\vartheta_*}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\vartheta_*}{2}\right),$$

где $\vartheta_* = 3\vartheta/\langle\vartheta\rangle$.

Для распределения χ^2 с тремя степенями свободы ($n = 3$) величина $\sigma_\vartheta^2 = \langle\vartheta^2\rangle - \langle\vartheta\rangle^2$ представляется выражением

$$\sigma_\vartheta^2 = \frac{2}{3} \langle\vartheta\rangle^2.$$

Из общей теории вероятностей известно, что при многих независимых последовательных случайных событиях вероятность появления \tilde{N} событий описывается биномиальным распределением. При этом, как в случае $N \gg 1$ (асимптотика Муавра—Лапласа), так и в случае $N \ll 1$, когда имеет место асимптотика Пуассона, среднеквадратичное значение $\sigma_N = \sqrt{N}$.

С использованием выражений для σ_N и σ_ϑ соотношение для σ_T^2 записывается в виде

$$\sigma_T^2 = \frac{2}{3} \langle\vartheta\rangle^2 N + \langle\vartheta\rangle^2 N = \frac{5}{3} \langle\vartheta\rangle^2 N.$$

На основании этого выражение для относительной ошибки измерения угла $\beta \neq 0$ представляется как

$$\frac{\sigma_\beta}{\beta} = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \frac{\langle\vartheta\rangle}{T} \sqrt{N}. \quad (12)$$

При $\beta = 0$ соотношением (12) нельзя пользоваться. В этом случае разностная длительность $\tau_- = 0$. Это означает, что пропущенные пары (разностные) импульсов не влияют на флуктуации и на постоянный сдвиг. Флуктуации будут обусловлены лишь пропуском одного импульса на интервале выброса. Следовательно, наибольшие флуктуации будут в случае, если на каждом интервале будет один пропускаемый импульс длительностью $\tau_1 = \tau_3$. Среднеквадратичное число пропущенных импульсов в этом случае будет $\sigma_N = \sqrt{N_1 T}$, а среднеквадратичное значение нормированного напряжения, очевидно, равно

$$\sigma_{u\beta} = \frac{\sqrt{N_1 T} T_0}{2T}.$$

По аналогии с предыдущими вычислениями относительная среднеквадратичная ошибка измерения описывается при этом выражением

$$\sigma_* = \frac{\sigma_\beta}{\beta_e} = \frac{\pi T_0}{8} \sqrt{\frac{N_1}{2T}}. \quad (13)$$

Используя общее выражение для среднего числа выбросов в единицу времени

$$N_1(C_*) = \int_0^{\infty} \xi f(C_*, \xi) d\xi,$$

после простых, но громоздких вычислений для логарифмически-нормального распределения получаем

$$N_1(C_*) = \frac{\omega_1}{2\pi} \exp\left(-\frac{C_u^2}{2}\right).$$

В этом выражении величина $\omega_1 = \sqrt{-\ddot{R}_u(0)}$ представляет среднеквадратичную частоту спектра амплитудных временных флуктуаций сигнала $U(t)$, а $\ddot{R}_u(0)$ — вторую производную коэффициента корреляции временных флуктуаций $U(t)$ при $\tau = 0$.

Из теории распространения волн в турбулентной атмосфере известен вид коэффициента корреляции пространственных флуктуаций уровня волны $R_r(\rho)$, с использованием которого получаем значение коэффициента корреляции пространственных флуктуаций сигнала $R_u(\rho)$, удовлетворительно совпадающее с экспериментальным [7]. Следуя гипотезе замороженной турбулентности, коэффициент корреляции временных флуктуаций $R_u(\tau)$ можно найти из $R_u(\rho)$ подстановкой $\rho = V_{\perp}\tau$, где V_{\perp} — поперечная составляющая скорости переноса неоднородностей среды (скорости ветра). Руководствуясь соображениями простоты и исходя из условия существования второй производной, аппроксимируем кривую коэффициента корреляции флуктуаций интенсивности сферической волны аналитическим выражением

$$R_u(\tau_*) = \exp(-\alpha_* |\tau_*|)(1 + \alpha_* |\tau_*|),$$

где $\alpha_* = 4,5$, $\tau_* = \tau/\tau_0$, $\tau_0 = \sqrt{\lambda L}/V_{\perp}$. При $V_{\perp} = 0$ $\tau_* = \tau/\tau_{01}$. Здесь $\tau_{01} = (0,27/\sqrt{2\pi})(\sqrt{\lambda L}/\sigma_{\perp})$ и $\alpha_{1*} = 6$.

Из приведенного соотношения после двукратного дифференцирования следует, что $\omega_{1*} = \omega_1 \tau_0 = \alpha_*$. В приземном слое атмосферы для диапазона значений $V_{\perp} = 0,5 - 3$ м/сек в пределах видимости $L = 4$ км и $\sqrt{\lambda L} = 5,7$ см диапазон $\omega_1 = \alpha_*/\tau_0 = \frac{4,5V_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}} = 40 - 240$ сек⁻¹.

Для сферической волны в приземном слое атмосферы максимально наблюдаемая величина $2\sigma_{\chi} = 1$ [8]. При отношении радиуса входной апертуры приемной оптической системы ρ_0 к радиусу первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$, равном 0,48, из-за усреднения флуктуаций сферической волны по приемной апертуре, как следует из результатов работы [9], величина $4\sigma_{\chi}^2$ уменьшается в 2 раза. Следовательно, максимально возможная величина $2\sigma_{\chi} = 0,7$. При значениях $V_{\perp} = 1,5$ м/сек, $2\sigma_{\chi} = 0,5$, $\omega_1 = 118$ сек⁻¹, $\sqrt{\lambda L} = 5,7$ см, $C_* = 0,5$, $T = 10^{-1}$ сек средний интервал между выбросами $\langle \Phi \rangle = 10^{-2}$ сек, тогда как наибольшая длительность импульса равна $2,5 \cdot 10^{-3}$ сек. Величина $N_1(0,5) = 9$ сек⁻¹.

Для приведенных значений параметров величина $\sigma_* = 2,6\%$, что существенно превышает относительную погрешность, обусловленную аддитивной помехой при $q = 6$. Это объясняется тем, что мультипликативная помеха не эквивалентна аддитивной по параметрам спектра. Это должно учитываться при выборе метода подавления мультипликативной помехи. Уменьшение мультипликативной помехи возможно понижением порога срабатывания, увеличением времени интегрирования по сравнению с временем корреляции τ_0 , или ослаблением глубины хаотической модуляции принятого сигнала (например, АРУ). В зависимости

от назначения системы измерения углового положения источника излучения можно прибегнуть к одному из упомянутых способов подавления мультипликативной помехи.

Авторы благодарят В. А. Голунова за помощь, оказанную при проведении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Криксунов, И. Ф. Усольцев, Инфракрасные системы, изд. Сов радио, М., 1968
2. Н. В. Кравцов, Ю. В. Стрельников, Позиционно-чувствительные датчики оптических следящих систем, изд. Наука, М., 1969
3. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М, 1966.
4. И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, ч. I и II, изд. Сов. радио, М, 1966—67
5. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, ч. I, изд. Сов. радио, М., 1969.
6. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, изд. Наука, М., 1970.
7. Г. А. Андреев, Э. И. Гельфер, В. А. Зверев, В. Э. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 276 (1970)
8. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 1, 56 (1970).
9. Г. А. Андреев, Р. М. Магид, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 1, 55 (1972).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
21 октября 1971 г.

INFLUENCE OF ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE NOISES ON MEASUREMENT ACCURACY OF ANGULAR POSITION OF RADIATION SOURCE WITH PULSE-DURATION MODULATION SYSTEMS

G. A. Andreev, B. P. Levenets, R. M. Magid, G. I. Khokhlov

Theoretical relations have been derived for the root mean square measurement error of the angular position of the radiation source by the time-pulse method under the action of additive and multiplicative noises. It is shown that the realized system provides the measurement accuracy of $\sqrt{2}$ times smaller than the limit (potential) one.

УДК 522.4 : 523.164

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ОБРАБОТКА РАДИОТЕПЛОВЫХ СИГНАЛОВ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ, ДВИЖУЩИХСЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРА

Ю. А. Мельник

Рассматриваются особенности интерферометрических систем с пространственно-временной обработкой сигналов, связанные с наблюдением движущихся источников на расстояниях, соизмеримых с размером базы. Система обладает двумерной пространственной избирательностью, которая может быть охарактеризована функцией неопределенности. Приведен пример этой функции для конкретных условий наблюдения.

Современная теория пространственно-временной обработки радиотепловых сигналов в совершенстве развита применительно к астрономическим радиоинтерферометрам. Однако ее результаты пока что не распространены на случай наблюдения небесных тел на расстояниях, соизмеримых с размерами базы интерферометра. В то же время этот случай представляет интерес для целого ряда задач.

Принцип пространственно-временной обработки радиотепловых сигналов для источников, находящихся в ближней зоне интерферометра, состоит в следующем [2]. Два разнесенные приемные пункта, перемещающиеся по заданным траекториям, имеют антенны (I, II), диаграммы направленности которых пересекаются в зоне обзора (эллиптическая кривая в плоскости x, y на рис. 1).

Точечный источник i излучает шумового вида сигнал. В полосе частот приемных пунктов сигнал со средним значением частоты ω может быть представлен выражением

$$u_i(t) = U_i(t) \cos [\omega t + \varphi_i(t)], \quad (1)$$

где $U_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ — случайные независимые амплитуда и фаза сигнала. Этот сигнал принимается приемными пунктами I и II с задержками $\tau_{iI} = R_{iI}(t)/c$ и $\tau_{iII} = R_{iII}(t)/c$, соответствующими расстояниям R_{iI} и R_{iII} между целью и приемными пунктами, т. е.

$$u_{iI}(t) = U_i(t - \tau_{iI}) \cos [\omega(t - \tau_{iI}) + \varphi_i(t - \tau_{iI})], \quad (2)$$

$$u_{iII}(t) = U_i(t - \tau_{iII}) \cos [\omega(t - \tau_{iII}) + \varphi_i(t - \tau_{iII})].$$

Суммарные сигналы, обусловленные множеством N целей, будут

$$u_I = \sum_{i=1}^N u_{iI}(t) \quad \text{и} \quad u_{II} = \sum_{i=1}^N u_{iII}(t). \quad (3)$$

Полагаем, что система обработки должна определить энергию излучения k -й точки. Для этого сигналы u_I и u_{II} подвергаются корреляционной обработке, причем одному из них придается временной

сдвиг $\Delta\tau_k = \tau_{kII} - \tau_{kI}$, при котором k -е составляющие совпадают во всем интервале накопления T :

$$Q = \int_0^T u_{II}(t) u_I(t - \Delta\tau) dt. \quad (4)$$

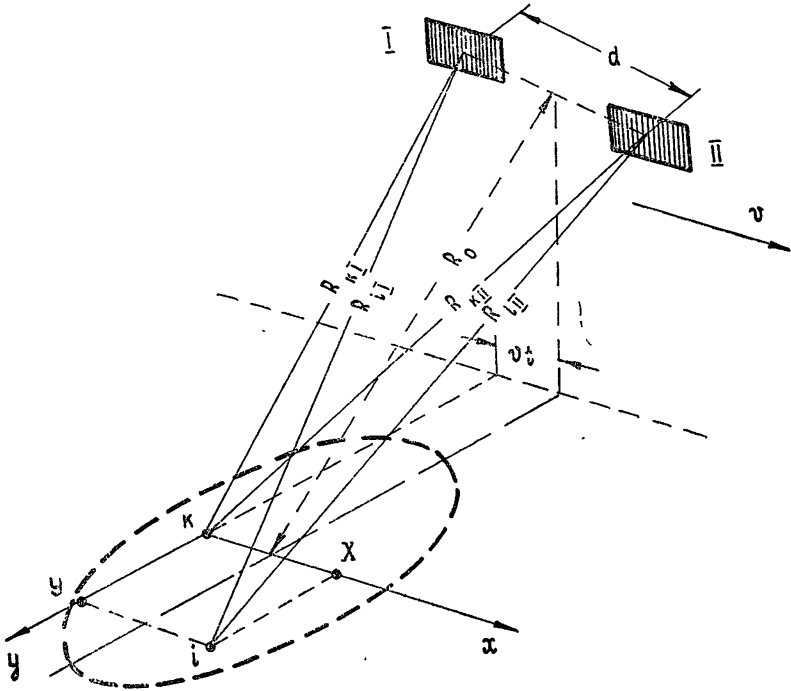


Рис. 1.

Принимаемый сигнал представляет собой случайный процесс, сопровождаемый шумами, и результат обработки является некоторой реализацией случайной величины. Среднее значение величины Q после ряда преобразований может быть представлено формулой

$$\bar{Q} = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \int_0^T \rho[\Delta\tau_{ik}(t)] \cos \omega \Delta\tau_{ik}(t) dt, \quad (5)$$

где $\rho[\Delta\tau_{ik}(t)]$ — коэффициент автокорреляции огибающей принимаемого сигнала, $\Delta\tau_{ik} = \tau_{iI} - \tau_{iII} + \Delta\tau_k$ — его аргумент, σ_i^2 — дисперсия — мощность принимаемого сигнала i -го источника.

Такой же выходной эффект может быть получен в эквивалентной синтезированной системе, в которой антенны интерферометра неподвижны, но их протяженность равна перемещению за время накопления сигнала T .

Выходной сигнал системы обработки содержит полезную составляющую $\sigma_k^2 T$, обусловленную k -й целью. Составляющая от воздействия i -го излучателя

$$\bar{Q}_i = \sigma_i^2 \int_0^T \rho[\Delta\tau_{ik}(t)] \cos \Delta\tau_{ik}(t) dt \quad (6)$$

соответствует сигнальной функции, используемой в теории активных радиолокационных систем.

Формула (6) известна для радиоастрономических однобазовых интерферометров [3, 4]. Особенность нашего случая состоит в том, что меняющийся временной сдвиг $\Delta\tau_{ik}(t)$ зависит не только от направления на источник излучения, но и от его удаления от интерферометра. Эту зависимость непросто определить из геометрических соотношений, иллюстрируемых рис. 1. Скорость движения интерферометра и координаты наблюдаемой точки считаются заданными. Тогда расстояния R_{kI} , R_{kII} , R_{II} и временной сдвиг $\Delta\tau_{ik}$ легко выразить через текущее время t и смещение X , Y излучателя (i) относительно его расчетного положения (k).

Таким образом, выходной эффект $\bar{Q}_i(X, Y)$ системы обработки рассматривается нами в функции координат излучающей точки, причем одной из этих координат является дальность Y . Для оценки ряда параметров используется также квадрат нормированного значения этой величины — функция неопределенности $q^2(X, Y) = [\bar{Q}_i(X, Y)/\sigma_i^2 T]^2$.

Размер синтезированной антенны может быть очень велик. Предполагается, что источник находится на расстоянии, соизмеримом с этим размером, т. е. в ближней зоне интерферометра. При этом синтезированную антенну можно сфокусировать по дальности, и интерферометр превращается из одномерной системы в двумерную.

В этом плане нормированные функции

$$q(X, Y) = \frac{\bar{Q}_i(X, Y)}{\sigma_i^2 T} \quad \text{и} \quad q^2(X, Y) = \left[\frac{\bar{Q}_i(X, Y)}{\sigma_i^2 T} \right]^2,$$

являющиеся некоторым обобщением понятия характеристики направленности системы по напряженности поля и по мощности соответственно, можно назвать характеристикой пространственной избирательности.

Расчеты с использованием формулы (6) не представляют принципиальных трудностей, однако довольно громоздки. Необходимо, чтобы ошибка в определении расстояний была много меньше длины волны.

Удобно пользоваться относительными параметрами системы: относительным перемещением интерферометра за время наблюдения l/R_0 (ширина антенных лучей), размером базы, выраженным в длинах волн d/λ , относительной полосой частот принимаемых сигналов $\Delta f/f$ (определяет ширину функции автокорреляции). Необходимо, кроме того, задать расстояние до источника R_0 .

Приведем пример характеристики пространственной избирательности для системы, имеющей следующие параметры:

$$\frac{l}{R_0} = 0,06, \quad \frac{d}{\lambda} = 10^7, \quad \frac{\Delta f}{f} = 5\%.$$

База интерферометра ориентирована вдоль направления движения. Наблюдение ведется на поверхности Луны, и расстояние R_0 составляет $388 \cdot 10^3$ км.

Результаты расчетов представлены в виде графиков сечения тела неопределенности в трех плоскостях (рис. 2). Как следует из рассмотрения кривых, разрешающая способность системы составляет величину порядка 50 м.

Следует отметить, что множители подынтегральной функции выражения (6) по-разному влияют на пространственную избирательность. Первый множитель $\rho(\Delta\tau)$ определяет влияние закона измене-

ния амплитуды, второй ($\cos \omega \Delta \tau$) — влияние фазы высокочастотного заполнения сигнала.

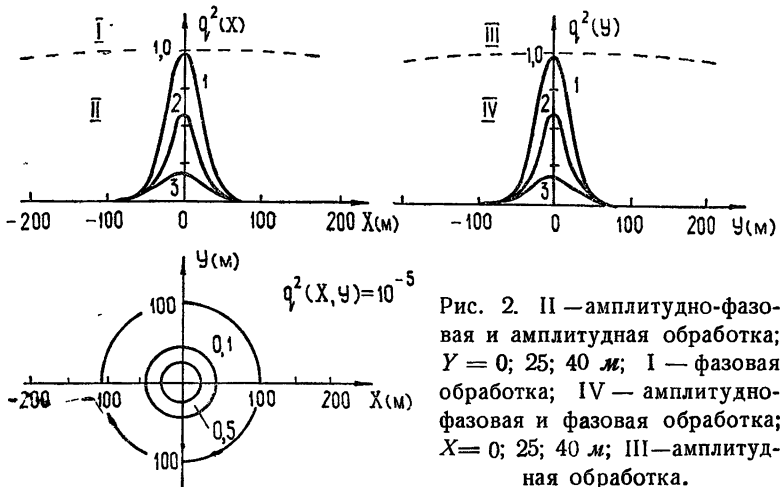


Рис. 2. II — амплитудно-фазовая и амплитудная обработка; $Y = 0; 25; 40$ м; I — фазовая обработка; IV — амплитудно-фазовая и фазовая обработка; $X = 0; 25; 40$ м; III — амплитудная обработка.

Эффект амплитудной обработки без учета фазы ($\cos \omega \Delta \tau = 1$) соответствует системе, в приемные тракты которой включены амплитудные детекторы. Такой интерферометр характеризуется низкой разрешающей способностью по дальности (пунктирная кривая $q^2(Y)$).

Обработка сигналов только по фазе соответствует гипотетическому случаю, когда источник излучает гармоническое колебание ($\rho(\Delta \tau) = 1$). При этом для выбранных параметров системы оказывается низкой разрешающая способность вдоль направления движения.

Таким образом, разрешение системы в разных направлениях определяется различными факторами: вдоль пути — полосой пропускания приемных трактов, в перпендикулярном направлении (по дальности) — длиной волны и углом, в пределах которого перемещается источник за время наблюдения. Заметим, что когерентная обработка сигналов (с учетом фазы) связана с появлением интерференционных лепестков в диаграмме неопределенности; соответствующие кривые для оси X на рис. 2 представляют собой их огибающую.

Не останавливаясь на возможных способах реализации процедуры обработки, выражаемой формулой (6), укажем, что для получения радиотеплового изображения объектов в виде распределения энергии излучения в зоне обзора последняя разбивается на разрешаемые элементы и операция (6) должна выполняться для каждого такого элемента отдельно.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что, в отличие от известных радиоастрономических систем, интерферометр скогерентной пространственно-временной обработкой сигналов излучателей, наблюдаемых в ближней зоне, является двумерной системой. Подобно тому, как обычную антенну можно сфокусировать для наблюдения определенной точки в ближней зоне, интерферометр может быть настроен на прием излучения источника, движущегося по определенному закону. Изменение траектории движения по направлению и дальности влечет за собой ослабление эффекта фокусировки. С этой точки зрения поставленная выше задача приближается к проблеме голографии на радиотепловом излучении с использованием искусственной апертуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Николаев, С. В. Перцов, Радиотеплолокация, Воениздат, 1970.
2. Ю. А. Мельник, Оценка разрешающей способности когерентной радиометрической системы, Радиотехника, вып. 13, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
3. Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, 15, вып. 3 (1970).
4. G. W. Swenson, N. C. Mathur, Proc. IEEE, 56, № 12 (1968).

Поступила в редакцию
23 июля 1970 г.,
после доработки
28 сентября 1971 г.

A SPATIAL-TIME PROCESSING OF RADIO THERMAL SIGNALS FROM
EMITTERS MOVING IN THE NEAR ZONE OF INTERFEROMETER

Yu. A. Mel'nik

The peculiarities of interferometric system operation with a spatial-time signal processing are considered for the cases when the sources are observed at the distances comparable with the base size. The system has a two-dimensional spatial selectivity which may be described by the uncertainly function. Examples of the function for concrete observational conditions are given.

УДК 621.371 : 535

О СМЕЩЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ МАРКОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В. И. Кляцкин, А. И. Кон

В приближении марковского случайного процесса исследуется вопрос о флуктуациях положения центра тяжести светового пучка в случайно неоднородной среде. Для турбулентной модели среды и гауссова пучка определен средний квадрат смещения центра тяжести. Показано, что в дальней зоне эти формулы существенно отличаются от полученных в приближении метода плавных возмущений.

Вопрос о смещениях центра тяжести пространственно-ограниченных световых пучков привлекает к себе внимание в связи с его важностью для ряда практических задач (связь, геодезические измерения, оптическая локация и т. д.).

Впервые дрожание пространственно-ограниченного пучка в турбулентной среде рассматривалось применительно к проблеме дрожания изображений астрономических объектов в фокальной плоскости телескопа (ограниченность световых пучков в этом случае связана с конечностью размеров приемной апертуры). Оценки среднеквадратичного угла дрожания, произведенные в [1], были получены из расчета флуктуаций угла прихода в бесконечной плоской волне.

Флуктуации центра тяжести пространственно-ограниченного пучка исследовались в [2] для количественных оценок расширения пучка при распространении в случайно неоднородной среде. При этом вектор положения центра тяжести определялся следующим естественным образом:

$$\rho_c = \frac{\iint \rho I(\rho) d^2 \rho}{\iint I(\rho) d^2 \rho}, \quad (1)$$

где $I(\rho)$ — интенсивность в точке ρ , и интегрирование производится по плоскости наблюдения. Авторы [2] встречались с трудностями при вычислении величины $\langle \rho_c^2 \rangle$, необходимой для расчета пространственного уширения пучка, и нашли лишь ее асимптотику для случая очень узких пучков с шириной a , значительно меньшей внутреннего масштаба турбулентности l_0 .

В работе [3] в приближении метода плавных возмущений (МПВ) был рассчитан средний квадрат смещения центра тяжести дифракционной картины в фокальной плоскости линзы в том случае, когда на линзу падает прошедшая турбулентный слой плоская волна. Этот расчет позволял качественно оценивать величину $\langle \rho_c^2 \rangle$ для случая фокусировки света в турбулентной среде.

Расчет смещений центра тяжести дифракционной картины при фокусировке света непосредственно в турбулентной среде был выполнен

в [4] с использованием комбинации МПВ с принципом Гюйгенса—Кирхгофа для плавно неоднородной среды [5]. Для среднего квадрата углового смещения центра тяжести дифракционной картины в фокальной плоскости в [4] получена формула

$$\sigma_a^2 = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{3\sqrt{2}} C_e^2 F(2a)^{-1/3} \left[1 + \frac{16}{17} \operatorname{Re} \frac{F\left(\frac{1}{6}, 1; \frac{23}{6}; \frac{1}{1+ig}\right)}{(1+ig)^{1/6}} \right] \quad (2)$$

$$(A_0 = 0,033),$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция, $g = 2F/ka^2$, C_e^2 — структурная постоянная флуктуаций диэлектрической проницаемости, F — расстояние, на котором фокусируется световой пучок с распределением поля на входе в турбулентную среду в виде

$$u_0(\rho) = u_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} - \frac{ik\rho^2}{2F}\right) \quad (3)$$

($k = 2\pi/\lambda$ — волновое число). Границы применимости формулы (2) остались не вполне выясненными, так как в ходе вычислений делались некоторые дополнительные предположения.

В появившейся затем работе [6] в приближении марковского случайного процесса было получено точное уравнение для величины $\langle \rho_c^2 \rangle$, решить которое аналитически не удается.

В данной работе для расчета смещений центра тяжести световых пучков мы будем использовать в основном аппарат, развитый в [7].

Будем описывать распространение световых пучков в приближении скалярного параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} + \Delta_{\perp} u(x, \rho) + k^2 \varepsilon_1(x, \rho) u(x, \rho) = 0, \quad (4)$$

$$u(0, \rho) = u_0(\rho),$$

где ось x выбрана по направлению распространения исходного пучка, $\rho = \{y, z\}$, $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\varepsilon_1(x, \rho)$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости, причем $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$.

Исходя из (1), можно написать уравнение для величины $\Psi(x; \rho_1, \rho_2) = u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2)$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \rho_1, \rho_2) = \frac{i}{2k} (\Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2}) \Psi(x, \rho_1, \rho_2) + \frac{ik}{2} [\varepsilon_1(x, \rho_1) - \varepsilon_1(x, \rho_2)] \Psi, \quad (5)$$

$$\Psi(0, \rho_1, \rho_2) = u_0(\rho_1) u_0^*(\rho_2).$$

Перейдем к новым координатам

$$\rho_1 - \rho_2 = \rho, \quad \rho_1 + \rho_2 = 2R.$$

В этих переменных уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, R, \rho) = \frac{i}{k} \nabla_{\rho} \nabla_R \Psi + \frac{ik}{2} \left[\varepsilon_1\left(x, R + \frac{1}{2} \rho\right) - \varepsilon_1\left(x, R - \frac{1}{2} \rho\right) \right] \Psi, \quad (5a)$$

$$\Psi(0, R, \rho) = u_0\left(R + \frac{1}{2} \rho\right) u_0^*\left(R - \frac{1}{2} \rho\right),$$

и интенсивность пучка равна

$$I(x, \mathbf{R}) = \Psi(x, \mathbf{R}, 0).$$

Умножая (5 а) на $\frac{1}{P_0} \mathbf{R}$ ($P_0 = \iint I(\mathbf{R}) d^2 R$), интегрируя по \mathbf{R} , полагая $\rho=0$, с учетом (1) получим уравнение для вектора смещения центра тяжести пучка ρ_c :

$$\frac{d}{dx} \rho_c(x) = -\frac{i}{kP_0} \iint d^2 R \nabla_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) \Big|_{\rho=0}. \quad (6)$$

Для вычисления величины, стоящей в правой части (6), подействуем на уравнение (5 а) оператором $-\frac{i}{kP_0} \nabla_\rho$ и положим затем $\rho=0$. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{i}{kP_0} \nabla_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) \right] \Big|_{\rho=0} &= -\frac{1}{k^2 P_0} \nabla_R \Delta_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) \Big|_{\rho=0} + \\ &+ \frac{1}{2P_0} \nabla_R \varepsilon_1(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя (7) по \mathbf{R} , приходим к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{i}{kP_0} \iint d^2 R \nabla_\rho \Psi(x, \mathbf{R}, \rho) \right] \Big|_{\rho=0} &= \frac{1}{2P_0} \times \\ &\times \iint d^2 R I(x, \mathbf{R}) \nabla_R \varepsilon_1(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (8)$$

с помощью которого уравнение (6) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \rho_c(x) = \frac{1}{2P_0} \iint d^2 R I(x, \mathbf{R}) \nabla_R \varepsilon_1(x, \mathbf{R}). \quad (9)$$

Интегрируя (9) с граничными условиями (для симметричных пучков, распространяющихся вдоль оси x)

$$\rho_c(0) = 0, \quad \frac{d \rho_c(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0,$$

получаем выражение

$$\rho_c(x) = \frac{1}{2P_0} \int_0^x d\xi (x - \xi) \iint d^2 R I(\xi, \mathbf{R}) \nabla_R \varepsilon_1(\xi, \mathbf{R}). \quad (10)$$

Для среднего квадрата положения центра тяжести имеем

$$\begin{aligned} \langle \rho_c^2 \rangle &= \frac{1}{4P_0^2} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \iint d^2 R_1 \iint d^2 R_2 \times \\ &\times \langle I(\xi_1, \mathbf{R}_1) I(\xi_2, \mathbf{R}_2) \nabla_{R_1} \varepsilon_1(\xi_1, \mathbf{R}_1) \nabla_{R_2} \varepsilon_1(\xi_2, \mathbf{R}_2) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Будем описывать процесс распространения светового пучка в приближении марковского случайного процесса. Кроме того, будем считать поле ε_1 гауссовым однородным случайным полем.

В «марковском» приближении корреляционная функция поля ε_1 аппроксимируется функцией

$$B_\varepsilon(x, \rho; x', \rho') = \delta(x - x')A(\rho - \rho'), \quad (12)$$

$$A(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \langle \varepsilon_1(x, \rho') \varepsilon_1(x + \xi, \rho' + \rho) \rangle = 2\pi \iint d^2x e^{ix\rho} \Phi_\varepsilon(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а $\Phi_\varepsilon(x)$ — трехмерный спектр поля ε_1 от двумерного вектора x .

Для вычисления корреляции, стоящей в правой части (11), воспользуемся формулой Фурутцу—Новикова [7], определяющей среднее от произведения гауссова случайного поля на некоторый функционал от него:

$$\langle \varepsilon_1(x, \rho) R[\varepsilon_1] \rangle = \int_0^x d\xi \iint d^2\rho' \langle \varepsilon_1(x, \rho) \varepsilon_1(\xi, \rho') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\varepsilon_1]}{\delta \varepsilon_1(\xi, \rho')} \right\rangle. \quad (13)$$

При вычислении вариаций интенсивности по полю ε_1 у нас появятся члены, связанные с величинами

$$\frac{\delta I(\xi_1, R_1)}{\delta \varepsilon_1(\xi_1, \rho')} = 0, \quad \frac{\delta I(\xi_1, R_1)}{\delta \varepsilon_1(\xi_2, \rho')} \frac{\delta I(\xi_2, R_2)}{\delta \varepsilon_1(\xi_1, \rho'')} \sim \\ \sim \theta(\xi_1 - \xi_2) \theta(\xi_2 - \xi_1) = 0.$$

Поэтому в приближении марковского случайного процесса формулу (11) можно переписать в виде

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{1}{4P_0^2} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \iint d^2R_1 \iint d^2R_2 \times \\ \times \langle I(\xi_1, R_1) I(\xi_2, R_2) \rangle \langle \nabla_{R_1} \varepsilon_1(\xi_1, R_1) \nabla_{R_2} \varepsilon_1(\xi_2, R_2) \rangle. \quad (14)$$

Такое «расщепление» корреляций ε_1 и I очевидно и из качественных соображений, ибо в этом случае мы пренебрегаем корреляциями интегральных величин с локальными.

После подстановки корреляционной функции (12) легко получить следующую формулу:

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{\pi}{2P_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \iint d^2x \Phi_\varepsilon(x) x^2 \iint d^2R_1 \iint d^2R_2 \times \\ \times \exp[ix(R_1 - R_2)] \langle I(\xi, R_1) I(\xi, R_2) \rangle. \quad (15)$$

Воспользовавшись теперь фурье-представлением

$$J(x, x) = \frac{1}{2\pi^2} \iint I(x, R) e^{-ixR} d^2R \\ (J^*(x, x) = J(x, -x)), \quad (16)$$

найдем средний квадрат смещения центра тяжести:

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{8\pi^5}{P_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \iint d^2x \Phi_\varepsilon(x) x^2 \langle |J(\xi, x)|^2 \rangle. \quad (17)$$

Величина $\langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle$ описывается функцией когерентности четвертого порядка, аналитическое выражение для которой неизвестно. Поэтому при получении дальнейших результатов приходится использовать приближенные выражения для $\langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle$.

Первым приближением может служить замена величины $J(\xi, \kappa)$ на ее значение в начальной плоскости $J(0, \kappa)$. Очевидно, что полученные в этом случае результаты расчетов для $\langle \rho_c^2 \rangle$ будут завышенными, однако ими можно пользоваться для не слишком больших расстояний.

Будем рассматривать в дальнейшем гауссов фокусируемый пучок вида (3) на расстояниях x , вообще говоря, не совпадающих с фокусным F . Для такого пучка в предложенном выше приближении

$$\langle |J(\xi, \kappa)|^2 \rangle = \frac{a^4 u_0^4}{16\pi^2} \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right), \quad (18)$$

и для интересующей нас величины среднего квадрата углового смещения $\sigma_\alpha^2 = \langle \rho_c^2 \rangle / x^2$ получаем следующую формулу:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\pi^2 x}{3} \int_0^\infty x^3 \Phi_\varepsilon(x) \exp\left(-\frac{\kappa^2 a^2}{2}\right) dx. \quad (19)$$

Для турбулентного спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости, соответствующего «закону 2/3»,

$$\Phi_\varepsilon(x) = A_0 C_\varepsilon^2 x^{-11/3}, \quad (20)$$

получаем

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{A_0 \pi^2 \Gamma(1/6)}{3\sqrt{2}} C_\varepsilon^2 x(2a)^{-1/3}. \quad (21)$$

Сравнивая (21) с (2), убеждаемся, что эти формулы отличаются друг от друга наличием в (2) некоего дифракционного множителя. Следует отметить, однако, что этот дифракционный множитель возникал в (2) в связи со сделанным в [4] предположением о незначительности флуктуаций амплитуды по сравнению с флуктуациями фазы, что фактически привело к замене структурной функции флуктуаций комплексной фазы $D_{\psi\psi^*} = D_\chi + D_S$ на D_S . На промежуточном этапе вычислений в [4] это упростило выкладки, но привело к усложнению конечного результата (2), усложнению, не имеющему, по-видимому, физического смысла. Таким образом, расчет, выполненный в [4], эквивалентен замене в (17) $J(\xi, \kappa)$ на $J(0, \kappa)$ с одновременным пренебрежением амплитудными флуктуациями, причем от последнего требования можно избавиться, заменяя окончательную формулу (2) на (21).

Приближение $J(\xi, \kappa) \rightarrow J(0, \kappa)$ является, однако, довольно грубым. В самом деле, по мере распространения в случайно неоднородной среде начальное распределение интенсивности «расплывается» [4, 6]. Флуктуации положения центра тяжести определяются, таким образом, двумя эффектами: средним уширением пучка и флуктуациями интенсивности относительно этого уже уширенного среднего профиля. Представляется, однако, что первый эффект является основным. Для учета его следует заменить $J(\xi, \kappa)$ на $\langle J(\xi, \kappa) \rangle$, и формула (17) в этом случае дает

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{8\pi^5}{x^2 P_0^2} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \iint d^2 \kappa \Phi_\varepsilon(x) \kappa^2 \langle J(\xi, \kappa) \rangle \langle J(\xi, -\kappa) \rangle. \quad (22)$$

В работе [6] для распределения средней интенсивности в турбулентной среде получено выражение

$$\langle I(\mathbf{x}, R) \rangle = \iint d^2p \gamma_0\left(-\frac{p\mathbf{x}}{k}, p\right) \exp\left[ipR - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x d\eta D\left(p \frac{\eta}{k}\right)\right], \quad (23)$$

где

$$\gamma_0\left(-\frac{p\mathbf{x}}{k}, p\right) = \frac{u_0^2 a^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{p^2 x^2 g^2(x)}{4k^2 a^2}\right), \quad g(x) = \left[1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{F}\right)^2\right]^{1/2},$$

а $D(p) = A(0) - A(p)$. Используя (23), для $\langle J(\xi, \kappa) \rangle$ имеем

$$\langle J(\xi, \kappa) \rangle = \gamma_0\left(-\frac{\kappa\xi}{k}, \kappa\right) \exp\left[-\frac{\pi k^2 \kappa}{4} \int_0^\xi d\eta D\left(\frac{\kappa\eta}{k}\right)\right]. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \pi^2 x \int_0^1 d\xi (1-\xi)^2 \int_0^\infty x^3 \Phi_\varepsilon(x) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{x^2 x^2 q^2(\xi)}{2k^2 a^2} - \frac{\pi k^2 x}{2} \int_0^\xi d\eta D\left(\frac{x\eta}{k}\right)\right], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$q^2(\xi) = \xi^2 \left[1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x\xi} - \frac{1}{F}\right)^2\right]. \quad (26)$$

Как видно из (25), (26), в этом приближении уже появляется зависимость от радиуса кривизны волнового фронта F , выпадавшая в рассмотренном ранее приближении. В случае коллимированного пучка ($F \rightarrow \infty$)

$$q^2(\xi) = \xi^2 + \frac{k^2 a^4}{x^2}, \quad (26a)$$

а в случае фокусировки ($x = F$)

$$q^2(\xi) = \xi^2 + \frac{k^2 a^4}{x^2} (1-\xi)^2 \quad (26b)$$

и возникают различные режимы в зависимости от величины параметра $k^2 a^4 / x^2$.

Рассмотрим сначала ближнюю зону

$$\frac{k^2 a^4}{x^2} \gg 1. \quad (27a)$$

Для турбулентного спектра флуктуаций диэлектрической проницаемости (20) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= A_0 \pi^2 C_\varepsilon^2 x a^{-1/3} \int_0^1 \xi^2 d\xi \int_0^\infty t^{-2/3} \exp\left[-\frac{t^2 \xi^2}{2} - \beta(1-\xi)^{8/3} t^{5/3}\right] dt, \\ \beta &= \alpha C_\varepsilon^2 k^{1/3} x^{8/3} a^{-5/3} \quad (\alpha = 0,27). \end{aligned} \quad (28)$$

Формулу (28) можно переписать в виде

$$\sigma_a^2 = (\sigma_a^2)_0 f(\beta),$$

где $(\sigma_a^2)_0$ — первое приближение, определяемое формулой (21). График функции $f(\beta)$, полученной в результате численного интегрирования, представлен на рис. 1.

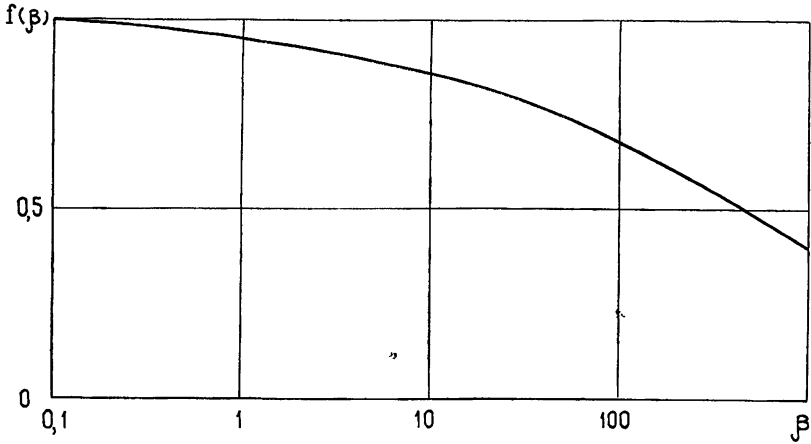


Рис. 1.

Для случая дальней зоны

$$\frac{k^2 a^4}{x^2} \ll 1 \tag{276}$$

выражение для σ_a^2 существенно меняет свою структуру:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 = & A_0 \pi^2 C_\xi^2 k^{1/3} a^{1/3} x^{2/3} \int_0^1 d\xi (1 - \xi)^2 \times \\ & \times \int_0^\infty t^{-2/3} \exp\left(-\frac{t^2 \xi^2}{2} - \mu \xi^{8/3} t^{5/3}\right) dt, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\mu = \alpha C_\xi^2 k^2 x a^{5/3}$.

При малых значениях параметра μ имеем

$$\sigma_a^2 \approx \frac{27 A_0 \pi^2 \Gamma(1/6)}{40 \cdot 2^{5/6}} C_\xi^2 k^{1/3} a^{1/3} x^{2/3}. \tag{30}$$

При больших μ асимптотика (29) имеет вид

$$\sigma_a^2 = \text{const } C_\xi^{8/5} k^{-1/15} x^{7/15}. \tag{31}$$

Интересно отметить, что в (31) выпадает зависимость от начального размера пучка a . Значения σ_a^2 для промежуточных значений параметра μ могут быть получены численным интегрированием формулы (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
 2. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967)

- 3 В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
- 4 А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970)
- 5 Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 886 (1969).
- 6 В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
- 7 В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, АН СССР, Отделение океанологии, физики атмосферы и географии, Препринт, 1970.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
3 декабря 1971 г.

DISPLACEMENTS OF SPATIALLY-LIMITED LIGHT BEAMS IN A TURBULENT MEDIUM IN THE APPROXIMATION OF MARKOV'S RANDOM PROCESS

V. I. Klyatskin, A. I. Kon

In the approximation of Markov's random process the fluctuations of the gravity center position of a light beam in a randomly inhomogeneous medium are investigated. For a turbulent model of the medium and Gaussian beam concrete formulas have been obtained for the mean square of the gravity center displacement. It is shown that in a far zone these formulas are essentially different from those obtained in the approximation of the smooth perturbation method.

УДК 519.217

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МАРКОВСКИХ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ В АДДИТИВНОМ ФЛУКТУАЦИОННОМ ШУМЕ

С. Д. Свет

Рассмотрена задача фильтрации телеграфных случайных сигналов в аддитивном белом шуме. На основе теории условных марковских процессов получены алгоритмы оптимальной оценки и приведены экспериментальные результаты фильтрации фототелеграфного сигнала изображения газетных полос.

В настоящей статье рассматривается практическое применение теории условных марковских процессов, развитой Стратоновичем [1, 2], к решению задач фильтрации некоторых телеграфных сигналов.

Для того, чтобы применить аппарат этой теории, необходимо представить телеграфные сообщения в виде марковских процессов. Во многих случаях подобное представление может быть выполнено.

Рассмотрим один из часто встречающихся в цифровой связи трехпозиционный код с детерминированным тактовым интервалом. Сигнал может принимать три возможных состояния: 1; -1; 0. Такая кодовая последовательность образует простую марковскую последовательность, если условная вероятность символа x_i в i -м тактовом интервале зависит только от символа x_{i-1} в $i-1$ -м тактовом интервале. Тактовый интервал T_0 в любой кодовой последовательности соответствует шагу марковской последовательности, если в тактовом интервале передается только один символ.

Тогда трехпозиционный код аппроксимируется марковской последовательностью на три состояния с матрицей перехода $P(x_i/x_{i-1})$, равной

$$P(x_i/x_{i-1}) = \begin{vmatrix} P(0/0) = \gamma & P(1/1) = 0 & P(1/-1) = \rho \\ P(1/0) = \alpha & P(0/1) = \beta & P(0/-1) = 1 - \rho \\ P(-1/0) = 1 - \alpha - \gamma & P(-1/1) = 1 - \beta & P(-1/-1) = 0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

В [5] показано, что при соответствующем выборе α , β , γ , ρ характеристики кода и аппроксимирующей марковской последовательности совпадают, при этом $P(1) = P(0) = P(-1)$.

Простой марковской последовательностью на два состояния можно представить сигнал телеграфного изображения газетных полос (ИГП) [4]. При поступочном считывании ИГП оптической апертурой с высокой разрешающей способностью видеосигнал ИГП будет представлять собой длинные серии единиц (передача черного) и нулей и может быть заменен эквивалентной стационарной марковской двоичной последовательностью с матрицей перехода

$$P(x_i/x_{i-1}) = \begin{vmatrix} P(0/0) = 1 - \alpha & P(0/1) = \beta \\ P(1/0) = \alpha & P(1/1) = 1 - \beta \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,03$, а априорные вероятности $P(1)$ и $P(0)$ равны.

Перейдем теперь к постановке и решению задач фильтрации рассмотренных сигналов в аддитивном шуме. Как правило, помеха n_t , действующая в канале передачи, является белым гауссовым шумом с нулевым средним и дисперсией D_n .

Будем интересоваться оптимальной оценкой сигнала, полученной по всей наблюдаемой фиксированной выборке, т. е. \hat{x}_t (оценка сигнала x_t) равна $f(y_0, \dots, y_T)$, где $y_t = x_t + n_t$, $t \in [0, T]$. В такой постановке эта задача соответствует задаче обратной интерполяции, решение которой было впервые дано в [2], где для апостериорной вероятности $P(x_t/y_0, \dots, y_T) = P(x_t/y_0^T)$ получено следующее соотношение:

$$P(x_t/y_0^T) = \frac{\vec{P}(x_t/y_0^t) \bar{P}(x_t/y_T^t)}{P_n(y_t/x_t) P(x_t)} \text{const}, \quad (3)$$

$\vec{P}(x_t/y_0^t)$, $\bar{P}(x_t/y_T^t)$ — апостериорные вероятности в прямом и обратном времени, $P_n(\dots)$ — плотность распределения помехи n_t .

Рассмотрим случай, когда сигнал x_t описывается матрицей (1). Тогда, применяя в качестве оптимального критерия максимума апостериорной вероятности, нужно вычислить $P(x_t = 1/y_0^T)$, $P(x_t = -1/y_0^T)$, $P(x_t = 0/y_0^T)$. Учитывая (3), получаем

$$P(x_t = 1/y_0^T) = \frac{\vec{P}(x_t = 1/y_0^t) \bar{P}(x_t = 1/y_T^t)}{P_n(y_t/x_t = 1) P(x_t = 1)} \text{const}; \quad (4)$$

$$P(x_t = -1/y_0^T) = \frac{\vec{P}(x_t = -1/y_0^t) \bar{P}(x_t = -1/y_T^t)}{P_n(y_t/x_t = -1) P(x_t = -1)} \text{const}; \quad (5)$$

$$P(x_t = 0/y_0^T) = \frac{\vec{P}(x_t = 0/y_0^t) \bar{P}(x_t = 0/y_T^t)}{P_n(y_t/x_t = 0) P(x_t = 0)} \text{const}. \quad (6)$$

Апостериорные вероятности, стоящие в числителях выражений (4) — (6), находятся по известным формулам условных вероятностей. Используя (1), имеем

$$\vec{P}(x_t = 1/y_0^t) = P_n(y_t/x_t = 1) [\alpha \vec{P}(x_{t-1} = 0/y_0^{t-1}) + \rho \vec{P}(x_{t-1} = -1/y_0^{t-1})]; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}(x_t = -1/y_0^t) = P_n(y_t/x_t = -1) [(1-\beta) \vec{P}(x_{t-1} = 1/y_0^{t-1}) + \\ + (1-\alpha-\gamma) \vec{P}(x_{t-1} = 0/y_0^{t-1})]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}(x_t = 0/y_0^t) = P_n(y_t/x_t = 0) [\gamma \vec{P}(x_{t-1} = 0/y_0^{t-1}) + \\ + \beta \vec{P}(x_{t-1} = 1/y_0^{t-1}) + (1-\rho) \vec{P}(x_{t-1} = -1/y_0^{t-1})]. \end{aligned} \quad (9)$$

Апостериорные вероятности в обратном времени с учетом равенства априорных вероятностей вычисляются из аналогичных рекуррентных соотношений. Таким образом, оптимальный алгоритм оценки препозиционного кода определяется решением уравнений (7) — (9) и соотношениями (4) — (6). Решение о значении сигнала выносится по наибольшей из сравниваемых апостериорных вероятностей.

Получим алгоритм оптимальной оценки фототелеграфного сигнала*.

* Эту задачу можно решить как частный случай рассмотренной выше задачи, если «запретить» сигналу находиться в состоянии -1 .

Эту задачу в целях дальнейшего экспериментального исследования удобнее интерпретировать как задачу проверки гипотез. А именно:

гипотеза H_1 состоит в том, что в наблюдении $y_0^T, x_t = 1$,

гипотеза H_0 о том, что в наблюдении $y_0^T, x_t = 0$.

Тогда отношение правдоподобия

$$L_t = \frac{P(x_t = 1/y_0^T)}{P(x_t = 0/y_0^T)}, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

и $\hat{x}_t = 1, L_t \geq 1; \hat{x}_t = 0, L_t < 1$.

Используя (3), можно показать, что

$$L_t = \exp \left\{ -\frac{2y_t - 1}{D_n} \right\} \vec{L}_t \bar{L}_t, \quad (11)$$

где \vec{L}_t, \bar{L}_t — отношения правдоподобия для задач проверки гипотез в прямом и обратном времени, определяемые из рекуррентных соотношений теории фильтрации на основе условных марковских процессов [1].

$$\vec{L}_t = \exp \left\{ \frac{2y_t - 1}{D_n} \right\} \frac{\alpha + (1 - \beta) \vec{L}_{t-1}}{1 - \alpha + \beta \vec{L}_{t-1}}; \quad (12)$$

$$\bar{L}_t = \exp \left\{ \frac{2y_t - 1}{D_n} \right\} \frac{\alpha + (1 - \beta) \bar{L}_{t+1}}{1 - \alpha + \beta \bar{L}_{t+1}}. \quad (13)$$

Из формул (12) и (13) видно, что \vec{L}_t и \bar{L}_t одинаковы, и это обстоятельство значительно облегчает реализацию рассмотренного выше алгоритма по сравнению с алгоритмами интерполяции [3].

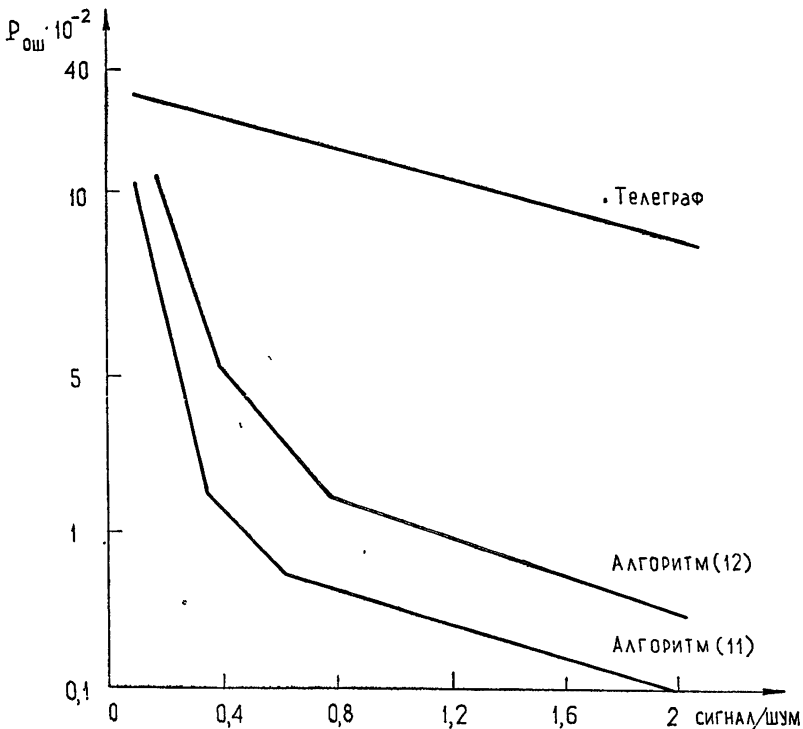


Рис. 1.

Алгоритмы (11)—(13) экспериментально исследовались при решении задачи воспроизведения видеосигнала ИГП. В качестве исходного изображения был взят фрагмент газетного текста, который с учетом типа полиграфического шрифта и параметров используемой ЭВМ занимал массив в 1540 элементов. Каждая строка изображения (наблюдаемая выборка) занимала 22 элемента. Шум создавался программным путем. Программа эксперимента позволяла также вычислять вероятности ошибок.

Приведем основные экспериментальные результаты. При больших вероятностях ошибок в канале связи, $P_{\text{ош}} = 0,1 \div 0,25$ (сигнал/шум равно $1 \div 3$)*, изображение, принятое непосредственно на телеграф, практически нечитаемо. В то же время, изображение, полученное с помощью алгоритма (11), читается безо всякого труда. Для визуального сравнения был исследован алгоритм рекуррентной фильтрации (12). При использовании этого алгоритма изображение также читаемо, однако оно содержит значительно больше искажений, чем при использовании интерполяционного алгоритма (в частности, больше одиночных ошибочных символов, и границы букв выражены менее отчетливо).

На рис. 1 приведены экспериментальные вероятности ошибок при использовании различных алгоритмов обработки, откуда следует, что даже в области больших помех методы теории условных марковских процессов дают существенный выигрыш в качестве фильтрации принимаемого газетного изображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, изд. МГУ, 1966.
2. Р. Л. Стратонович, Теория вероятностей и ее применения, № 2, 172 (1960).
3. О. А. Глонти, Сообщения АН Груз. ССР, 52, № 3, 589 (1968).
4. И. К. Сафонов, Диссертация, Центральный научно-исследовательский институт связи, Москва, 1970.
5. Г. В. Безяев, Радиотехника и электроника, 14, вып. 11, 2047 (1969).

Всесоюзный заочный электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
5 марта 1971 г.

OPTIMAL ESTIMATION OF MARKOV'S BINARY SIGNALS IN ADDITIVE FLUCTUATION NOISE

S. D. Svet

The telegraph random signal filtration in the additive white noise has been considered. On the basis of the conditional Markov's process theory the algorithms of the optimal estimation have been obtained and experimental results of the phototelegraph signal filtration of the newspaper strip image are given.

* За отношение сигнал/шум принималось отношение их дисперсий.

УДК 621 317.78 : 621.385.6

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭФФЕКТА МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОХОДЯЩЕЙ МОЩНОСТИ СВЧ

*В. А. Антропов, Л. Х. Антропова, Г. А. Моргачева, Н. В. Котосонов,
А. Г. Шуваев*

Обсуждается возможность использования датчиков магнитосопротивления для измерения проходящей мощности СВЧ диапазона. Приводятся экспериментальные результаты зависимости напряжения, обусловленного эффектом магнитосопротивления, от величины проходящей мощности на частоте 9870 Мгц.

В последнее время внимание исследователей привлекается к методам измерения мощности СВЧ, основанным на взаимодействии составляющих электромагнитного поля с движущимися носителями заряда в полупроводнике. Кроме эффекта Холла, к таким методам относится и эффект изменения сопротивления в магнитном поле.

Возможность применения эффекта магнитосопротивления к измерению мощности СВЧ основывается на так называемом «умножающем» действии его.

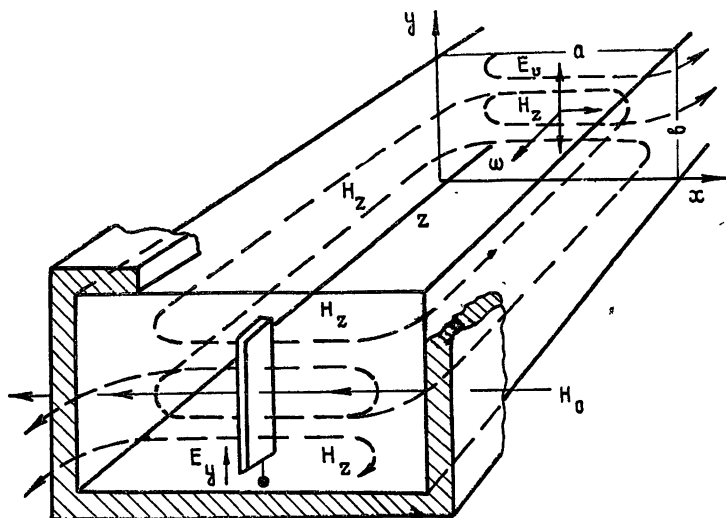


Рис. 1. Расположение датчика магнитосопротивления в волноводе.

Действительно, если датчик магнитосопротивления разместить в волноводе с волной типа H_{10} так, как показано на рис. 1, а постоянное магнитное поле приложить перпендикулярно плоскости датчика, то мгновенное значение тока, наводимого в датчике, будет пропорционально компоненте волны [1]:

$$i = kE_y \cos(\omega t - \beta z + \varphi), \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности ($1/\text{ом} \cdot \text{м}$), E_y — амплитуда электрического поля по оси y (в/м), ω — круговая частота ($1/\text{сек}$), β — волновое число ($1/\text{м}$), z — координата данной точки, отсчитанная от произвольного начала (м), φ — сдвиг фазы между током и электрическим полем.

Если эффект магнитосопротивления существует на СВЧ, то сопротивление датчика равно

$$R = R_0 + m \mu H_x \cos(\omega t - \beta z). \quad (2)$$

Здесь R_0 — начальное сопротивление (ом), зависящее от величины внешнего магнитного поля H_0 , направленного по оси x и смещающего рабочую точку; μ — магнитная проницаемость полупроводника (гн/м); H_x — амплитудное значение x -компоненты магнитного поля волны в волноводе (ав/м); $m = \left(\frac{1}{\mu} \frac{dR}{dH} \right)_{H_0}$ — коэффициент ($\text{ом} \cdot \text{м}^2/\text{вб}$), характеризующий крутизну зависимости $R(H)$ при данном постоянном магнитном поле H_0 .

Если электропроводность полупроводника на СВЧ мало отличается от электропроводности на постоянном токе, а током смещения в образце можно пренебречь по сравнению с компонентой тока, связанной с падением напряжения на сопротивлении, то, перемножая (1) и (2), можно записать:

$$iR = kE_y R_0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi) + \frac{1}{2} kE_y H_x m \mu \times \\ \times \cos(2\omega t - 2\beta z + \varphi) + \frac{1}{2} k m \mu E_y H_x \cos \varphi. \quad (3)$$

Средняя по времени величина напряжения, обусловленная эффектом магнитосопротивления, равна

$$U \sim \frac{1}{2} m \mu k E_y H_x \cos \varphi.$$

Если ток находится в фазе с H_x , то $\cos \varphi = 1$, тогда

$$U = \frac{1}{2} m \mu k E_y H_x = \frac{1}{2} m \mu k P$$

будет представлять ту постоянную составляющую напряжения, снимаемую с образца, которая пропорциональна проходящей мощности электромагнитной волны.

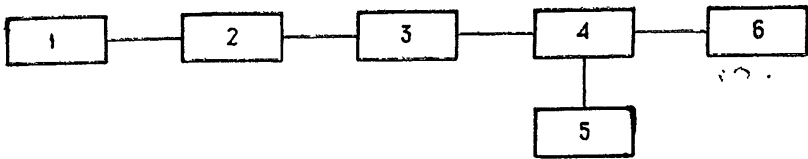


Рис. 2. Блок-схема экспериментального исследования эффекта магнитосопротивления на частоте 9870 Мгц.

Экспериментальное исследование эффекта магнитосопротивления в диапазоне СВЧ проводилось по блок-схеме, представленной на рис. 2,

где 1 — клистронный генератор с $f = 9870$ Мгц с максимальной мощностью 800 мвт в непрерывном режиме, 2 — аттенюатор типа Д5-5, 3 — индикатор уровня мощности, 4 — секция с датчиком магнитосопротивления, 5 — индикатор напряжения Ф-116/1, 6 — поглощающая нагрузка.

Размещение образца в волноводе показано на рис. 1. Секция с датчиком магнитосопротивления располагалась между полюсами электромагнита, напряженность поля которого равнялась 4300 эрст. Такая напряженность магнитного поля соответствует рабочей точке на линейном участке характеристики датчика на постоянном токе (рис. 3). Для исследования в диапазоне СВЧ были отобраны образцы, на которых наблюдался максимальный эффект на постоянном токе, образцы № 1—4.

Для указанных образцов была измерена зависимость выходного напряжения, обусловленного эффектом магнитосопротивления, от величины проходящей мощности на $f = 9870$ Мгц. Результаты измерений приведены на рис. 4, из которого видно, что для всех исследуемых образцов эта зависимость носит линейный характер. Разный наклон характеристик свидетельствует о различной чувствительности датчиков.

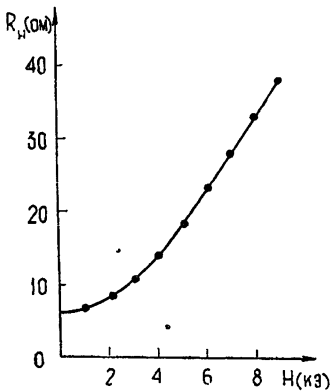


Рис. 3. Зависимость сопротивления датчика магнитосопротивления от напряженности постоянного магнитного поля (обр. № 1).

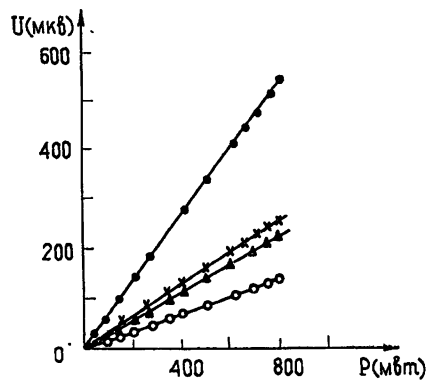


Рис. 4. Зависимость напряжения, обусловленного эффектом магнитосопротивления, от величины проходящей мощности при $H_0 = 4300$ эрст:
 ●●● — № 1, ××× — № 2,
 ▲▲▲ — № 3, ○○○ — № 4.

Необходимо отметить, что при исследовании некоторых образцов наблюдался эффект частичного выпрямления, в частности, он имел место при снятии вольт-амперной характеристики образца на характеристикографе. Эффект выпрямления исключался отбором образцов. Для измерений применялись лишь образцы, имеющие линейную вольт-амперную характеристику (рис. 5).

Кроме того, эффект выпрямления, а также и болометрический эффект можно выявить, измеряя постоянное напряжение на образце в поле СВЧ при нулевом постоянном магнитном поле. Как видно из рис. 3, при $H_0 = 0$ $m = 0$ и эффект магнитосопротивления отсутствует. Если в этом случае напряжение на образце не равно нулю, то имеем эффект выпрямления. В противном случае выпрямление отсутствует.

Была предпринята попытка исследования распределения плотности потока мощности в волноводе с помощью датчика магнитосопротивления, для чего образец размещался в разных местах по сечению волновода. Результаты экспериментального исследования приведены на рис. 6,

где сплошная линия — теоретическое распределение плотности потока мощности СВЧ, пунктирная — экспериментальное распределение.

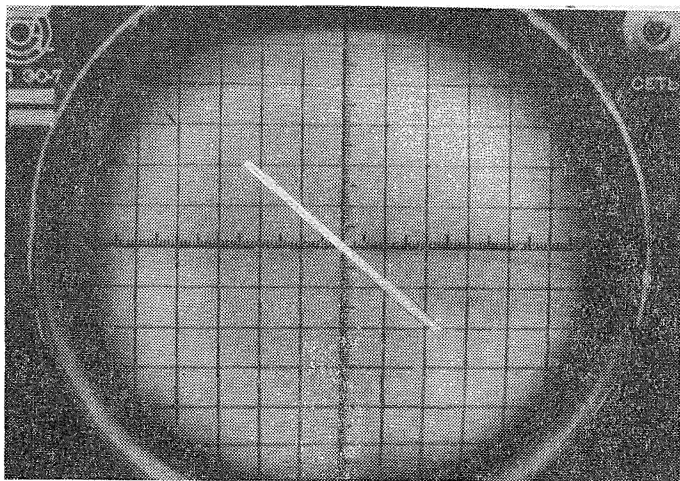


Рис. 5. Вольтамперная характеристика датчиков магнитосопротивления.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что датчик магнитосопротивления, как и датчик Холла, является индикатором плотности потока мощности СВЧ и является измерителем проходящей мощности.

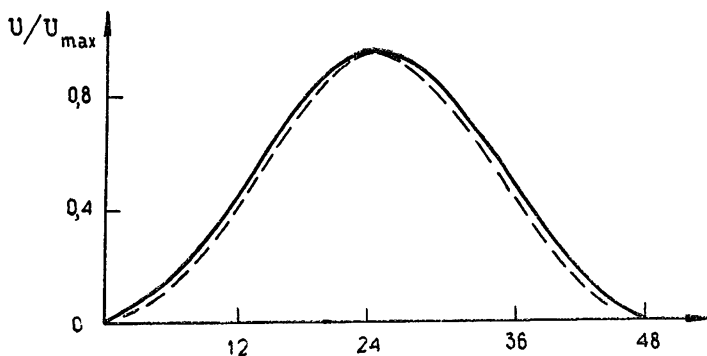


Рис. 6. Распределение плотности потока мощности СВЧ в волноводе на частоте 9870 МГц.

Экспериментальные результаты показали:

а) хорошую линейную зависимость выходного напряжения, снимаемого с датчика, от величины проходящей мощности;

б) зависимость показаний образца от расположения его относительно открытого конца волновода, что определяет точность образца, т. е. характеризует зависимость его показаний от распределения СВЧ мощности, и малое искажение, вносимое образцом в распределение СВЧ мощности.

Исходя из теоретического и экспериментального рассмотрения эффекта, можно сделать вывод о возможности создания ваттметров на основе датчиков магнитосопротивления и отметить их наиболее важные преимущества перед используемыми в настоящее время измерителями мощности, а именно:

1) малую инерционность, связанную с тем, что время релаксации носителей тока составляет $\sim 10^{-12}$ сек: в результате чего можно использовать эти приборы для измерения импульсной мощности;

2) малую рассеиваемую мощность на датчике, работающем в режиме проходящей мощности, что позволяет измерять высокие уровни мощности;

3) простоту измерительной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. F. Sun, J. Appl. Phys., **35**, № 1, 211 (1964).

Воронежский государственный университет
Гомельский государственный университет

Поступила в редакцию
22 июня 1971 г.

ON THE USE OF THE MAGNETO-RESISTANCE EFFECT FOR MEASURING UHF TRANSMITTING POWER

*V. A. Antropov, L. Kh. Antropova, G. A. Morgacheva,
N. V. Kotosonov, A. G. Shuvaev*

The possibility is discussed of using the magneto-resistance sensors for measuring the UHF transmitting power. The experimental results are given of the dependence of the voltage caused by the magneto-resistance effect versus the transmitting power at the frequency of 9870 Mc/s.

УДК 621.396.674.3

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОКА И ВХОДНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ИЗОГНУТЫХ ВИБРАТОРОВ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В. С. Варывдин, Ф. И. Коломойцев, В. В. Овсяников

Применен метод интегрального уравнения для расчета распределения тока и входных сопротивлений изогнутого тонкого симметричного вибратора, плечо которого состоит из двух прямолинейных участков, произвольно изогнутых в одной плоскости друг относительно друга. Точка питания на антенне располагается произвольно. Получена система интегральных уравнений первого рода, решение которой численным методом позволяет найти распределение тока и входные сопротивления. Проведен анализ ядра этой системы. Результаты расчета сопоставляются с известными данными для частного случая изогнутого вибратора—прямой полуволновой антенны. Приводятся расчетные данные и результаты измерений входных сопротивлений, а также данные по добротностям Г-образных и наклонных вибраторов.

В технике сверхвысоких частот широкое применение нашли изогнутые тонкие вибраторы различной конфигурации, длина которых не превышает длины рабочей волны. При использовании таких антенн важно знать их входное сопротивление в точке подключения к фидеру, которое легко определяется при известном распределении тока на вибраторе. Одним из эффективных способов отыскания распределения тока на антенне является метод интегрального уравнения. Этот метод был развит в работах Леонтовича и Левина [1], Халлена [2], Кинга [3], Васильева [4] и других авторов.

Для изогнутых тонких вибраторов с помощью вариационной формулы, полученной из интегрального уравнения, найдено [5] входное сопротивление дуговых и спиральных антенн конечной толщины. Приводится [6] преобразование интегрального уравнения Поклингтона в уравнение типа Халлена и даны результаты расчета круговой рамки и равноугольной спиральной антенны. Рассмотрено [7] распределение тока и входное сопротивление изогнутых вибраторов из бесконечно тонкой ленты.

В настоящей работе методом интегрального уравнения определяется распределение тока и входные сопротивления для цилиндрического симметричного вибратора конечной толщины, плечо которого представляет собой два прямолинейных отрезка, произвольно изогнутых друг относительно друга.

1. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в криволинейной цилиндрической системе координат [5] произвольно изогнутый в одной плоскости идеально проводящий вибратор длиной $2d$ с круглым поперечным сечением радиуса r_a . Пусть соблюдаются соотношения $2d \gg r_a$ и $kr_a \ll 1$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ —длина волны в свободном пространстве. Разместим начало координат на середине вибратора и запишем интегральное уравнение [6], связывающее искомый

ток $I(s)$ на поверхности антенны с известными сторонним полем $E_s^{CT}(s)$ и функцией влияния $G(s, s')$, в виде [5, 8]

$$\int_{-d}^{+d} I(s') \left[\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} G(s, s') - k^2 G(s, s') \right] ds' = i\omega \epsilon_a E_s^{CT}(s) \quad (1)$$

$$(-d \leq s \leq d),$$

где s и s' — точки наблюдения и интегрирования на поверхности и оси вибратора соответственно; Δ — расстояние между точками наблюдения и интегрирования; $G(s, s')$ — функция Грина, равная $\frac{e^{-ik\Delta}}{4\pi\Delta}$; \mathbf{s} и \mathbf{s}' — единичные векторы, касательные к оси вибратора в сечении s и в точке интегрирования s' соответственно; $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ — скалярное произведение единичных векторов; k — волновое число, равно $\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$; ω — круговая частота; ϵ_a, μ_a — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

В дальнейшем для удобства расчетов обе части уравнения (1) интегрируются в пределах от $-s$ до $+s$. Если ветви вибратора симметричны относительно прямой $O-O$, лежащей в плоскости изгиба и проходящей через начало координат (рис. 1), а точки возбуждения располага-

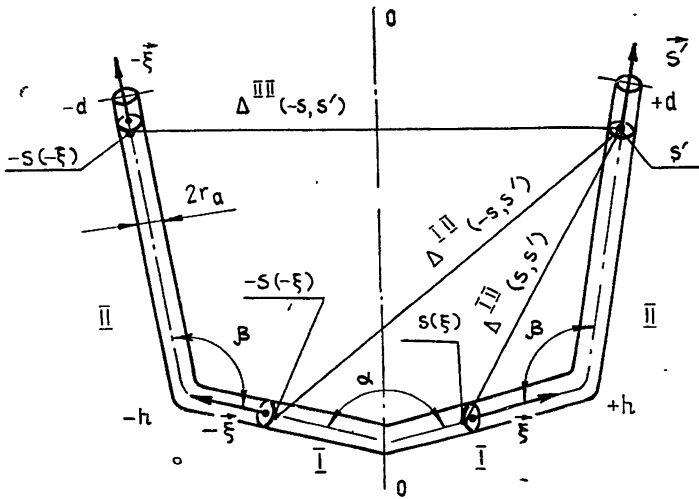


Рис. 1. Изогнутый симметричный вибратор.

ются симметрично относительно начала координат либо в самом начале координат, уравнение (1) можно записать в виде

$$\int_0^d I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [G(s, s') - G(-s, s')] - k^2 \int_0^{|s|} [G(\xi, s') (\xi, s') - G(-\xi, s') (-\xi, s')] d\xi \right\} ds' = F_E(s) \quad (0 \leq |s| \leq d), \quad (2)$$

где $G(s, s')$, $G(\xi, s')$ — функции Грина для точек одной и той же ветви антенны; $G(-s, s')$, $G(-\xi, s')$ — функции Грина для точек разных ветвей; (ξ, s') , $(-\xi, s')$ — скалярные произведения единичных векто-

ров, находящихся на одной и на разных ветвях антенны соответственно, $F_E(s)$ — функция возбуждения. Отметим, что для решения (2) нет необходимости накладывать на искомый ток условие равенства нулю на концах антенны.

Пусть антенна возбуждается δ -генератором с напряжением V , который расположен на расстоянии $\pm h_V$ от начала координат. С учетом этого функция возбуждения $F_E(s)$ принимает вид

$$F_E(s) = i\omega\varepsilon_a \int_0^{|s|} E_{\xi}^{ct}(\xi) \delta(\xi - |h_V|) d\xi = \begin{cases} 0 & (0 \leq |s| < h_V) \\ i\omega\varepsilon_a \frac{V}{2} & (h_V \leq |s| \leq d) \end{cases}. \quad (3)$$

Если антенну можно аппроксимировать набором прямых отрезков и круглых дуг, уравнение (2) эквивалентно системе интегральных уравнений, число которых определяется количеством участков аппроксимации. Для симметричного вибратора, полудлина которого состоит из двух произвольно изогнутых друг относительно друга прямолинейных отрезков (рис. 1), система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^h I^I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [G^{I1}(s, s') - G^{I1}(-s, s')] - k^2 \int_0^{|s|} [G^{I1}(\xi, s') - \right. \\ & \quad \left. - G^{I1}(-\xi, s') \cos \alpha] d\xi \right\} ds' + \int_h^d I^{II}(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [G^{II1}(s, s') - \right. \\ & \quad \left. - G^{II1}(-s, s')] - k^2 \int_0^{|s|} [G^{II1}(-\xi, s') \cos(\alpha + \beta) - G^{II1}(\xi, s') \cos \beta] \times \right. \\ & \quad \left. \times d\xi \right\} ds' = F_E^I(s) \quad (0 \leq |s| \leq h), \quad (4) \\ & \int_0^h I^I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [G^{II1}(s, s') - G^{II1}(-s, s')] - k^2 \int_0^{|s|} [G^{II1}(-\xi, s') \times \right. \\ & \quad \left. \times \cos(\alpha + \beta) - G^{II1}(\xi, s') \cos \beta] d\xi \right\} ds' + \int_h^d I^{II}(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} [G^{II2}(s, s') - \right. \\ & \quad \left. - G^{II2}(-s, s')] - k^2 \int_0^{|s|} [G^{II2}(\xi, s') - G^{II2}(-\xi, s') \cos(\alpha + 2\beta)] d\xi \right\} ds' = \\ & \quad = F_E^{II}(s) \quad (h < |s| \leq d). \end{aligned}$$

Здесь римскими цифрами обозначены номера по порядку отрезков аппроксимации, считая от начала координат. Первая цифра — номер отрезка наблюдения, вторая — номер отрезка интегрирования.

Система уравнений (4) решается приближенно численным методом, подобным методу Крылова и Боголюбова [9]. Полудлина вибратора d делится на N равных малых отрезков длиной $\rho = \frac{d}{N}$. Внешние интегра-

лы системы заменяются суммой интегралов по отрезкам разбиения ρ . Искомый ток на каждом отрезке считается постоянным и выносится за знак интегралов. При этом получаем систему N линейных комплексных алгебраических уравнений.

2. АНАЛИЗ ЯДРА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (4)

Рассмотрим структуру ядра системы интегральных уравнений (4), вычисленного приближенно на ЭВМ и представляющего собой матрицу соответствующей системы линейных уравнений. Анализ ядра проведем на примере полуволнового вибратора с параметром толщины $\Omega = 4,6 \lg \frac{2d}{r_a} = 9,11$. Общее число разбиений N полудлины d равно 16, количество отрезков разбиения N' на первом отрезке до изгиба вибратора $N' = 7$. При расчете вводятся следующие обозначения: m — номер точки наблюдения, n — номер отрезка интегрирования, считая от начала координат (m и n — номера строк и столбцов матрицы соответственно). В системе уравнений (4) первые слагаемые выражений в фигурных скобках обозначаются через А, вторые — через Б. Для рассматриваемого случая первые (А) и вторые (Б) слагаемые матрицы приведены в виде графиков на рис. 2а и 2б соответственно.

При расчете первых слагаемых матрицы координаты точки наблюдения задаются в виде $s_m = \rho(m - 0,2)$, для вторых слагаемых — в виде $s_m = \rho(m - 0,5)$.

Из приведенных графиков следует, что суммарная действительная часть ядра представляет собой резко изменяющуюся знакопеременную функцию, незначительно зависящую от конфигурации антенны. Матрица действительной части по абсолютной величине близка к диагональной. Минимая часть ядра — функция более гладкая, больше зависящая от конфигурации вибратора. По абсолютной величине она меньше действительной приблизительно на два порядка.

В действительной части ядра превалирует первое слагаемое (А), которое определяет степень обусловленности системы линейных уравнений. Под хорошей обусловленностью системы понимается заметное превышение диагональных элементов матрицы над остальными [4]. В рассматриваемом случае обусловленность системы уравнений зависит от расположения точки наблюдения на отрезке разбиения. Так, например, для случая, когда координата точки наблюдения равна $s_m = \rho(m - 0,5)$, на рис. 2а пунктирными линиями показаны графики действительных частей первых слагаемых матрицы при $m = 5$ и 12. Графики мнимых частей совпадают с кривыми 2а и 4.

Из этих графиков и графиков рис. 2б видно, что при $m = n$ суммарные действительные части диагональных членов матрицы близки к нулю, а при m , близких к n , они достигают сравнительно больших значений. В связи с малостью диагональных членов система линейных уравнений является плохо обусловленной, и в решении для мнимой части искомого тока появляется неустойчивость в виде маложения на результат счета некоторой колеблющейся функции. В действительной части тока эта неустойчивость проявляется в виде резкой зависимости результирующего тока от величины, количества и четности отрезков разбиения. Неустойчивость в решении для тока подобна описанной в [4, 10] и проявляется тем сильнее, чем толще вибратор, т. е. когда ядро становится более гладким.

С целью получения хорошей обусловленности системы следует выбрать оптимальное расположение на антенне точек наблюдения. Для первых слагаемых (А) координата оптимального расположения, обеспе-

чивающая устранение неустойчивости в решении, имеет вид $s_m = \rho(m - x)$, где $x \approx 0,2 \div 0,3$. Отметим, что изменение параметра x в указанных пределах слабо влияет на искомый ток. Графики рис. 2 а

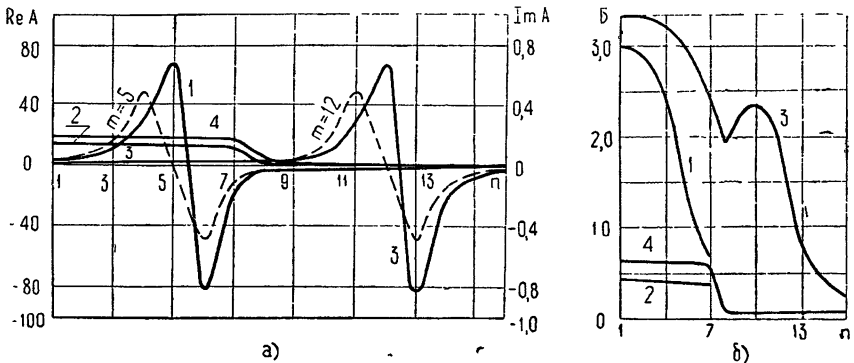


Рис. 2. Графики слагаемых матрицы системы линейных уравнений ($N = 16$) для изогнутого симметричного полуволнового вибратора ($\alpha = 180^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $h/\lambda = 0,102$).

Кривые 1 и 2 — действительная и мнимая части для $m = 5$, кривые 3 и 4 — соответственно для $m = 12$.

и все последующие расчеты первых слагаемых ядра получены при координате точки наблюдения, равной $s_m = \rho(m - 0,2)$. При этом диагональные члены значительно превышают остальные элементы матрицы и система линейных уравнений является хорошо обусловленной.

Особенности ядра системы (4), рассмотренные выше на примере П-образной антенны, сохраняются для изогнутых полуволновых и близких к ним вибраторов (см. рис. 1) других конфигураций и толщин.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для решения системы уравнений (4) была составлена программа, позволяющая вычислять токи и входные сопротивления вибраторов (см. рис. 1) с произвольно расположенной точкой возбуждения при разных сочетаниях размеров h , d и углов α , β , включая случай V-образного вибратора ($h = d$). В связи с тем, что при углах α и β , меньших 20° , становится несправедливым предположение о равномерности распределения тока по периметру вибратора, точные результаты получаются для антенн, углы которых находятся в пределах $20^\circ < \alpha < 180^\circ$ и $20^\circ \leq \beta < 340^\circ$.

Учитывая, что исходное интегральное уравнение (2) может быть сведено к уравнению типа Халлена [6] и на него накладываются такие же ограничения, применимость системы интегральных уравнений (4) опрашивается толщинами антенн с Ω не менее 7—8 (см. [3]) при указанных выше значениях углов α и β .

К сожалению, в известной авторам литературе нет данных по распределению тока на изогнутых антеннах. Поэтому по составленной программе вычислялось распределение тока для частного случая $\alpha = \beta = 180^\circ$, т. е. для прямого вибратора, и сравнивалось с расчетными и экспериментальными данными из известных работ [6] и [11]. На рис. 3 приведены вычисленные по системе уравнений (4) распределения амплитуды $|I|$ и фазы $\varphi = \arcsin \frac{I_r}{|I|}$ поверхностного тока (I_x — мнимая часть

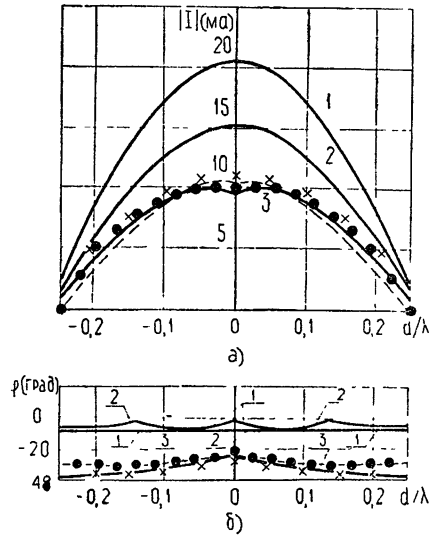
тока) для прямого вибратора средней толщины. Все графики приведены для случая, когда антенны возбуждаются δ -генератором с напряжением

$V = 1$ в. Из рис. 3 видно хорошее согласование результатов расчета с данными литературы.

На рисунке также показано распределение тока для изогнутого

Рис. 3. Распределение амплитуды $|I|$ и фазы (φ) тока на полуволновом симметричном вибраторе, $\Omega = 10$.

Кривые 1 и 2 — изогнутый вибратор ($\alpha = 180^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $h/\lambda = 0,136$), возбужденный у основания и в середине полудлины (расчет). Кривые 3 — прямой вибратор ($\alpha = \beta = 180^\circ$), возбужденный у основания (расчет); (●●●) и (---) — аналогичный прямой вибратор по данным работ [8] и [11] соответственно; (×××) — результаты измерений [11].



П-образного вибратора (кривые 1 и 2), возбужденного у основания и в середине полудлины. Из графиков следует, что амплитуда тока на изогнутом вибраторе, по сравнению с прямолинейным, больше и по форме

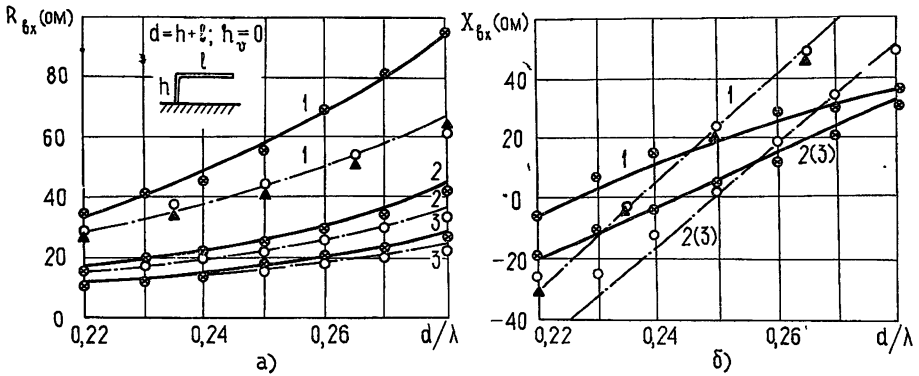


Рис. 4. Графики активной ($R_{вх}$) и реактивной ($X_{вх}$) составляющих входного сопротивления Γ -образных и вертикальных вибраторов.

Кривые 1 — вертикальные вибраторы ($\alpha = \beta = 180^\circ$) с размером $h/\lambda_{ср} = 0,25$, кривые 2, 3 — Γ -образные вибраторы ($\alpha = 180^\circ$, $\beta = 90^\circ$) с размерами $h/\lambda_{ср}$, равными 0,136 и 0,102 соответственно (расчет).

▲▲▲ по данным работы [3] для $\Omega = 11,34$ ○○○ — результаты измерений для $\Omega = 11,34$, ⊕ — результаты измерений для $\Omega = 7,33$.

ближе к синусоидальной. В точках питания фаза тока претерпевает небольшой скачок и вдоль изогнутого вибратора изменяется более плавно.

Входное сопротивление антенны легко определяется при известном токе в точке питания $I(h_V)$ по формуле

$$Z_{вх} = \frac{V}{I(h_V)} \tag{5}$$

При рассмотрении входных сопротивлений мы ограничимся вибраторами, близкими к полуволновым, длина плеча которых находится в пределах $d = (0,22 \div 0,28) \lambda$, а размер h составляет не менее $0,1 \lambda_{cp}$, где λ_{cp} — средняя длина волны рассматриваемого диапазона. На рис. 4, 5 приведены результаты расчетов входных сопротивлений несимметричных Г-образных вибраторов, возбужденных у основания, толщина и конфигурация которых изменяется в довольно широких пределах. Следует обратить внимание на практическое совпадение (рис. 4) реактивной составляющей входного сопротивления у антенн с размерами $\frac{h}{\lambda_{cp}} = 0,102$ и

$$\frac{h}{\lambda_{cp}} = 0,136 \text{ (кривые 2 и 3)}.$$

Входные сопротивления четвертьволновых вибраторов в зависимости от положения точки возбуждения приводятся на рис. 6.

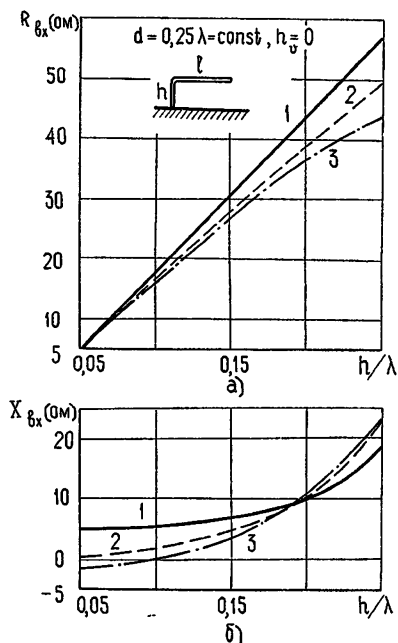


Рис. 5. Графики входных сопротивлений четвертьволновых Г-образных антенн в зависимости от величины вертикальной части h (расчет). 1 — $Q=7,33$; 2 — $Q=9,11$; 3 — $Q=11,34$

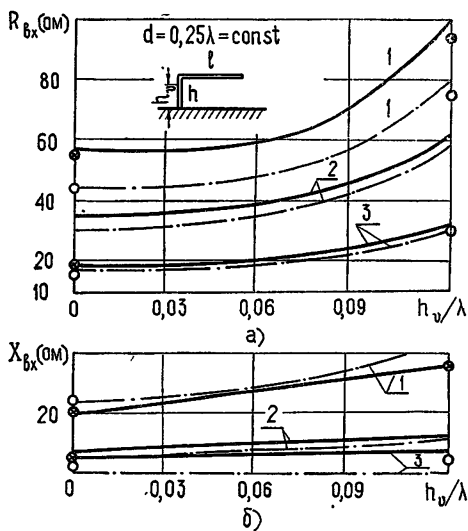


Рис. 6. Графики входных сопротивлений четвертьволновых Г-образных и вертикальных антенн в зависимости от положения точки питания (h_w) для $Q=11,34$ (— —) и $Q=7,33$ (—). Кривые 1 — $h/\lambda=0,25$, кривые 2 — $h/\lambda=0,167$, кривые 3 — $h/\lambda=0,104$ (расчет). $\circ \circ$ — результаты измерений для $Q=11,34$, \oplus — результаты измерений для $Q=7,33$.

Используя приведенные выше графики (рис. 4—6), можно, изменяя место изгиба и расположение точки питания, добиваться полного согласования антенны с широко используемыми фидерными линиями.

Вычисленные входные сопротивления сравнивались с результатами измерений. Как видно из рис. 4, 6, результаты расчета и эксперимента в достаточной мере согласованы.

Отметим, что входное сопротивление Г-образных антенн с малой вертикальной частью (h) можно вычислять приблизительно без применения ЭВМ по инженерной методике, изложенной в [12]. Так, например,

для четвертьволнового несимметричного вибратора средней толщины ($\Omega = 9,11$) с размером $h = 0,05 \lambda$ расчет по методике работы [12] дает входное сопротивление $Z_{вх} = 4,97 \text{ ом}$, а при расчете на ЭВМ по системе уравнений (4) получаем $Z_{вх} = (4,52 + i0,43) \text{ ом}$. При увеличении вертикальной части антенны расхождение результатов растет и инженерная методика становится неприемлемой.

Для рассматриваемых изогнутых антенн важно знать добротность, определяющую их полосу пропускания и КПД. Полагая, что схема замещения четвертьволнового вибратора представляет собой контур с резонансным сопротивлением $R_{вх}$, равным волновому сопротивлению фидера, оцениваем добротность с помощью выражения

$$Q = \frac{1}{\Delta f/f_0} \frac{1-K}{\sqrt{K}}, \quad (6)$$

где $\Delta f/f_0$ — полоса пропускания по уровню коэффициента бегущей волны K . Результаты расчета добротности Г-образных и наклонных антенн, возбужденных у основания, приведены на рис. 7.

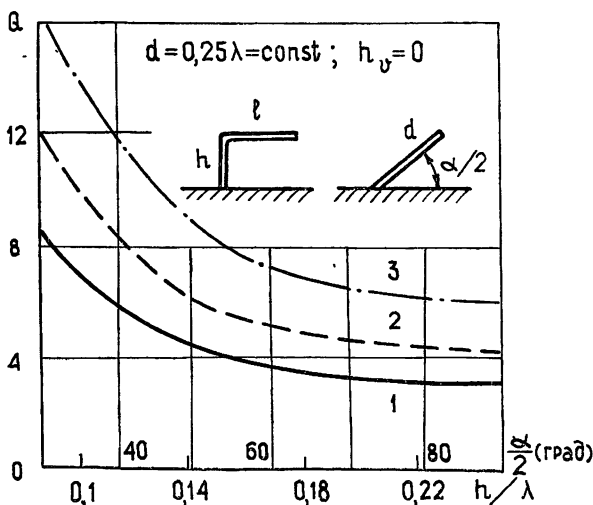


Рис. 7. Графики добротностей (Q) четвертьволновых Г-образных и наклонных антенн в зависимости от величины вертикальной части (h) и угла наклона ($\alpha/2$).
1 — $\Omega = 7,33$; 2 — $\Omega = 9,11$; 3 — $\Omega = 11,34$.

По той же программе, как и для Г-образных, была произведена серия расчетов и для наклонных вибраторов ($l = 0$, $\alpha/2 = \text{var}$). Характер изменения входных сопротивлений этих антенн аналогичен характеру Г-образных, поэтому входные сопротивления наклонных вибраторов не приводятся. Однако сравнительный анализ добротностей Г-образных и наклонных антенн позволил установить соответствие между вертикальной частью h Г-образного вибратора и углом наклона $\alpha/2$ наклонного, что позволило получить совмещенный график добротностей, приведенный на рис. 7.

Авторы выражают благодарность Е. Д. Романенко за участие в расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М Леонтович и М. Левин, ЖТФ, 14, № 9, 481 (1944).
2. E. Hallen, *Nova Acta (Uppsala)*, 11, № 4, 1 (1938).
3. R. W. P. King, E. A. Aronson, C. W. Harrison, *Rad. Sci.*, 1 (New Series), № 7, 835 (1966).
4. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалунин, ЖТФ, 37, № 3, 421 (1967).
5. С. Н. Tang, *IEEE Trans. Antenn. Propagation*, AP-12, № 1, 2 (1964).
6. К. К. Mei, *IEEE Trans. Antenn. Propagation*, AP-13, № 5, 374 (1965).
7. Г. И. Панчев, *Радиотехника и электроника*, 11, № 2, 195 (1966).
8. Аарони, *Антенны*, изд. Сов. радио, М, 1951.
9. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Физматгиз, М—Л., 1962
- 10 Г. Т. Марков, Е. Н. Васильев, *Математические методы прикладной электродинамики*, изд. Сов. радио, М., 1970.
11. R. W. P. King, *Theory of Linear Antennas*, Cambridge, Mass Harward University Press, 1956.
12. R. W. P. King, C. W. Harrison, D. H. Denton, *IRE Trans. Antenn. Propagation*, AP-8, № 1, 88 (1960).

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию
27 сентября 1971 г.

ON CURRENT DISTRIBUTION AND INPUT RESISTANCE OF CURVED
VIBRATORS OF FINITE THICKNESS

V. S. Varyadin, F. I. Kolomoitsev, V. V. Ovsyanikov

The integral equation method is used to calculate the current distribution and input resistances of a curved thin symmetric vibrator which arm consists of two rectilinear sections curved arbitrarily in one plane with respect to each other. The point of the antenna feed is arbitrarily situated. The system of the first kind integral equations is obtained. Its numerical solution enables one to find the current distribution and input resistances. The analysis of the system nucleus is made. The calculation results are compared with the known data for the particular case of the curved vibrator (a straight half-wave antenna). The calculation data and measurement results are given, as well as the data on Q-factors of Γ -shaped and oblique vibrators.

УДК 621.396.67

ОБРАТНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНО ВОЗБУЖДЕННОГО ИМПЕДАНСНОГО ЦИЛИНДРА

В. В. Чебышев

Рассматривается обратная электродинамическая задача для неограниченного импедансного цилиндра, возбужденного кольцом с бегущей волной тока. Получено интегральное выражение, связывающее диаграмму направленности с распределением поверхностного импеданса по образующей цилиндра. На основе этого выражения предлагается метод синтеза импедансной антенны, позволяющий при задании диаграммы направленности рядом Котельникова получить распределение реактанса в пределах заданной полосы на цилиндре. Обсуждается применение полученного решения для синтеза антенн вращающейся поляризации с диаграммой направленности осевого излучения и воронкообразного вида.

Одним из направлений при решении задачи синтеза является использование импедансных структур для реализации заданной диаграммы направленности. В приближении «сторонних» импедансных граничных условий [1] в этом случае удастся связать расчет поверхностного импеданса структуры с расчетом ее конструкции.

В настоящей работе рассматривается обратная электродинамическая задача для антенны в виде импедансного цилиндра, возбужденного кольцом с бегущей волной тока. Решение задачи позволяет проектировать антенны вращающейся поляризации с конечными размерами импедансной структуры по заданной диаграмме направленности. Последняя может быть весьма произвольного вида. Решение обратной задачи получено в аналитическом виде, т. е. в виде формулы, позволяющей подойти к оптимальному проектированию антенн такого рода.

1. ВЫВОД ИСХОДНОГО СООТНОШЕНИЯ

Представим расчетную модель антенны в виде неограниченного импедансного цилиндра радиуса a , возбужденного кольцом радиуса b с бегущей волной магнитного тока (рис. 1). Такая модель позволяет рассмотреть формирование диаграммы направленности в плоскости угла θ для антенны с вращающейся поляризацией в зависимости от распределения поверхностного импеданса по образующей цилиндра в пределах полосы — $d \leq z \leq d$ при целевом возбуждении.

При выводе исходного соотношения предположим сначала, что распределение импеданса на цилиндре неограничено. Задача возбужде-

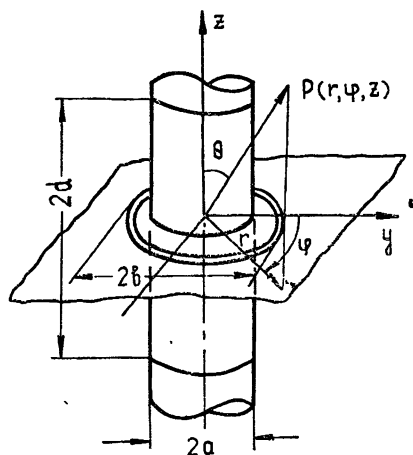


Рис. 1.

ния импедансного цилиндра сводится к решению волнового уравнения для векторного потенциала \bar{A}^M в системе координат (r, φ, z)

$$\nabla^2 \bar{A}^M + k^2 \bar{A}^M = -\bar{j}_{\text{ст}}^M(r', \varphi', z') \quad (1)$$

при импедансном граничном условии $r = a$

$$Z(z) = \frac{E_z}{H_\varphi} \quad (2)$$

и условии излучения.

Сторонний источник в виде кольца с бегущей волной тока представим как

$$\bar{j}_\varphi^M = A \delta(r' - b) \delta(z' - h) \frac{\exp(-il\varphi')}{r'} \quad (3)$$

где A — амплитуда тока, δ — дельта-функция, $l = 1$. Для этого случая можно получить [2], что поле антенны определяется составляющими векторного потенциала A_r^M и A_φ^M .

Поле антенны представим как результат наложения первичного поля, создаваемого сторонним источником в свободном пространстве, и вторичного поля, которое является результатом отражения первичного поля от импедансного цилиндра. Первичное поле определим при помощи фундаментальной функции Грина $G(\rho/\rho')$, для которой используем интегральное представление [2]

$$G(\rho/\rho') = \frac{1}{8\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-in(\varphi - \varphi')) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ix(z - z')) \times \quad (4)$$

$$\times \begin{cases} H_n^{(2)}(\nu r') J_n(\nu r) dx & (r < r'), \\ H_n^{(2)}(\nu r) J_n(\nu r') dx & (r > r'), \end{cases}$$

где $\nu = -i\sqrt{x^2 - k^2}$; r, φ, z — координаты точки наблюдения; r', φ', z' — координаты точки источника. При подстановке (3) и (4) в выражения для A_φ^M, A_r^M из [2] получим

$$A_\varphi^{\text{пер}} = \frac{A}{8i} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \begin{cases} H_0^{(2)}(\nu b) J_0(\nu r) & (r < b) \\ H_0^{(2)}(\nu r) J_0(\nu b) & (r > b) \end{cases} dx \quad (5)$$

$$A_r^{\text{пер}} = -\frac{A}{8} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} \begin{cases} H_0^{(2)}(\nu b) J_0(\nu r) & (r < b) \\ H_0^{(2)}(\nu r) J_0(\nu b) & (r > b) \end{cases} dx$$

Рассмотрим компоненту A_φ . Вторичное поле антенны, определяемое компонентой A_φ^M , представим подобно (5) в виде

$$A_\varphi^{\text{вт}} = \frac{1}{8i} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixz} H_0^{(2)}(\nu r) dx \quad (6)$$

Это выражение является следствием решения однородного волнового уравнения. Функция спектральной плотности $f(x)$ связана с распределением поля на поверхности антенны, которое определяется импедансными граничными условиями (2). При решении обратной задачи указанная функция позволяет определить зависимость распределения поверхностного импеданса от диаграммы направленности антенны,

Для полного поля антенны в области $r > b$ из (5) и (6) можно получить выражение

$$A_{\varphi}^{(1)} = \frac{e^{-i\varphi}}{8i} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) + AJ_0(\nu b)] H_0^{(2)}(\nu r) e^{-ixz} dx.$$

Вычислим это выражение в приближении дальней зоны $\nu r \gg 1$ методом перевала и получим

$$A_{\varphi}^{(1)} \approx \frac{\sqrt{i}}{8} e^{-i\varphi} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} [f(x) + AJ_0(\nu b)].$$

Последнему множителю в точке перевала $x = k \cos \theta$ можно придать смысл диаграммы направленности $F(x)$. Отсюда следует соотношение

$$f(x) = F(x) - AJ_1(\nu b), \quad (7)$$

которое связывает функцию спектральной плотности с функцией диаграммы направленности. Если предположить последнюю аналитической функцией, то соотношение (7) определяет $f(x)$ для всех значений x . Для известной функции диаграммы это позволяет однозначно определить вторичное поле антенны. Полное поле для компоненты A_{φ}^m в области $r < b$ можно представить из (5) и (6) с учетом (7) в виде

$$A_{\varphi}^{(2)} = \frac{e^{-i\varphi}}{8i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x) H_0^{(2)}(\nu r) e^{-ixz} dx - A \int_{-\infty}^{\infty} [J_0(\nu b) H_0(\nu r) - J_0(\nu r) H_0^{(2)}(\nu b)] e^{-ixz} dx \right]. \quad (8)$$

Последнее выражение позволяет вычислить составляющие электромагнитного поля в импедансном граничном условии (2).

Подобные рассуждения можно провести и для другой компоненты A_r^m , вводя функцию спектральной плотности $\varphi(x)$ для вторичного поля, отличную от функции $f(x)$. Вторичное поле представим по аналогии с (5) в виде

$$A_r^{вт} = -\frac{1}{8} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) H_0^{(2)}(\nu r) e^{-ixz} dx. \quad (9)$$

Полное поле в области $r < b$ из (5) и (9)

$$A_r^m = -\frac{1}{8} e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) H_0^{(2)}(\nu r) + AH_0^{(2)}(\nu b) J_0(\nu r)] e^{-ixz} dx. \quad (10)$$

Функцию спектральной плотности $\varphi(x)$ определим из граничного условия на цилиндре $r = a$. Предположим, что поверхностный импеданс антенны реализуется ребристой структурой достаточно малого периода, так что составляющая поля на поверхности $E_{\varphi} = 0$. Выражая это граничное условие через компоненту A_r^m в (10) при $r = a$, для функции спектральной плотности $\varphi(x)$ получим

$$\varphi(x) = -\frac{AH_0^{(2)}(\nu b) J_0(\nu a)}{H_0^{(2)}(\nu a)}.$$

Это соотношение позволяет определить компоненту A_r^M в дальней зоне на основе (5) и (9) и, тем самым, вычислить распределение составляющей поля E_φ в дальней зоне. Из этого соотношения следует также, что составляющие E_z и H_φ в граничном условии (2) определяются компонентой A_φ^M .

Вычислим импедансное граничное условие (2) из (8) при $r = a$:

$$Z(z) = \frac{i}{\omega \varepsilon k a} + \frac{i}{\omega \varepsilon} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \nu H_1^{(2)}(\nu a) e^{-i x z} d x - \int_{-\infty}^{\infty} [\nu J_0(\nu b) H_1^{(2)}(\nu a) - \nu J_1(\nu a) H_0^{(2)}(\nu b)] e^{-i x z} d x \right\} \left(1 - \frac{1}{(k a)^2} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x) H_0^{(2)}(\nu a) e^{-i x z} d x - \int_{-\infty}^{\infty} [J_0(\nu b) H_0^{(2)}(\nu a) - J_0(\nu a) H_0^{(2)}(\nu b)] e^{-i x z} d x \right]^{-1}. \quad (11)$$

Полученное выражение связывает функцию диаграммы направленности с распределением поверхностного импеданса по образующей цилиндра и может быть использовано при синтезе импедансной антенны, предполагающем расчет поверхностного импеданса антенны по заданной диаграмме направленности.

В практическом отношении наиболее интересен случай чисто реактивного импеданса (реактанса), который накладывает определенные ограничения на способ задания диаграммы направленности и возбуждение импедансной структуры антенны. Однако вывод условия чистой реактивности импеданса $\operatorname{Re} Z(z) = 0$ из (11) в общем виде не представляется возможным. Поэтому ограничим рассмотрение заданием рамки с током на импедансном цилиндре $a = b$.

Используя известное соотношение

$$H_1^{(2)}(\nu a) J_0(\nu a) - J_1(\nu a) H_0^{(2)}(\nu a) = -\frac{2}{i \pi \nu a}$$

и определение дельта-функции, из (11) можно получить при $a = b$

$$q(z) = \frac{1}{k a} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \nu H_1^{(2)}(\nu a) e^{-i x z} d x}{\left[1 - 1/(k a)^2 \right] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(x) H_0^{(2)}(\nu a) e^{-i x z} d x \right\}} + \frac{2}{i \pi a} \bar{\delta}(z' - 0), \quad (12)$$

где $q(z) = -i \frac{Z(z)}{\omega \varepsilon}$, $\bar{\delta}(z' - 0)$ — дельта-функция, нормированная отно-

сительно знаменателя дроби (12). Из (12) следует, что влияние стороннего источника на распределение поверхностного импеданса выражается особенностью последнего в виде дельта-функции. В дальнейшем выделим эту особенность из рассмотрения, предполагая, что источник расположен в локальной области с достаточно большой величиной импеданса, которая исключает собственное излучение источника и обеспечивает эффективное возбуждение импедансной структуры. В этом случае расчет импедансной структуры антенны по заданной диаграмме направленности можно проводить вне зависимости от стороннего источника, как в случае однородной задачи.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДИАГРАММЫ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА АНТЕННЫ

Из выражения (12) следует, что не существует функции диаграммы, для которой поверхностный импеданс будет распределен в пределах полосы на цилиндре. Однако при определенном допущении относительно диаметра цилиндра ka приближенно можно считать, что распределение поверхностного импеданса определяется сложной дробью в (12). В этом случае задача состоит в таком представлении функции диаграммы, которое обеспечивает распределение чисто реактивного импеданса (реактанса) в пределах заданной полосы на цилиндре рис. 1. При этом предполагается, что первое слагаемое является поправочной величиной для импеданса на полосе.

Представим функцию диаграммы в виде

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{H_1^{(2)}(\nu a)}}, \quad (13)$$

где $\Phi(x)$ — некоторая аналитическая функция. Сложную дробь в (12) можно рассматривать как отношение магнитного и электрического токов на импедансной поверхности антенны. Для функции диаграммы (13) распределение магнитного тока антенны, которое определяется числителем этой дроби, принимает вид

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-ixz} dx. \quad (14)$$

Приведенное выражение имеет тот же вид, что и для случая импедансной плоскости, если представить функцию $\Phi(x)$ как функцию диаграммы плоской импедансной антенны [3].

Для финитного распределения магнитного тока в пределах полосы размером $2a$, где $a = kd$, в выражении (14) следует потребовать принадлежности функции диаграммы классу функций W_a [4]. Выбор функции из этого класса при синтезе импедансной антенны должен отвечать условию чистой реактивности импеданса. С этой целью рассмотрим представление функции диаграммы рядом Котельникова [4]:

$$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin a(x - n\pi/a)}{a(x - n\pi/a)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{\sin(ax - n\pi)}{(ax - n\pi)}. \quad (15)$$

Известно, что любая функция класса W_a может быть представлена рядом (15), причем ряд сходится равномерно в любой ограниченной области. Поэтому такое представление можно признать наиболее общим представлением функций класса W_a .

Проведем преобразование

$$\frac{\sin(ax - n\pi)}{(ax - n\pi)} = \frac{e^{i(ax - n\pi)}}{2i(ax - n\pi)} - \frac{e^{-i(ax - n\pi)}}{2i(ax - n\pi)}$$

и подставим (15) с учетом последнего соотношения в (14):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{-ixz} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n}{2i} \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(-z+a)}}{ax - n\pi} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix(z+a)}}{ax - n\pi} dx \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Переведем рассмотрение подынтегральных выражений в (16) на плоскость комплексного переменного $\gamma = x + i\eta$. При вычислении распределения магнитного тока нас интересуют значения функции распределения в пределах полосы $-\alpha \leq z \leq \alpha$. При этом условие первое слагаемое в (16) рассмотрим на комплексной плоскости в области определения рис. 2а, а второе слагаемое в области рис. 2б. Можно видеть, что подынтегральные функции в этом случае удовлетворяют лемме Жордана, и рассматриваемые интегральные выражения в (16) можно вычислить на основе теоремы Коши [5].

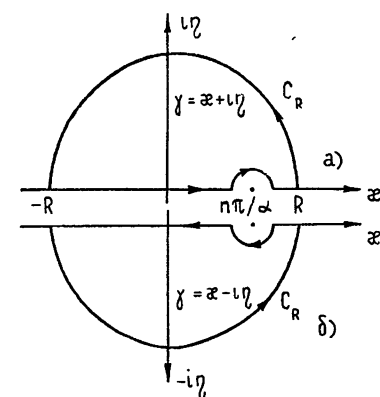


Рис. 2.

Первый интеграл в (16) рассмотрим в области рис. 2а при значениях $(-z + \alpha) > 0$. Применяя теорему о вычетах и используя лемму Жордана при $R \rightarrow \infty$, можно получить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\eta(-z+\alpha)} d\eta}{\alpha\eta - n\pi} = \pi i (-1)^n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right).$$

Подобным образом можно вычислить и второй интеграл в области рис. 2б при значениях $(z + \alpha) > 0$. Окончательно для выражения (16) будем иметь в пределах полосы

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) e^{-i\eta z} d\eta = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right). \quad (17)$$

Вычислим распределение электрического тока на импедансном цилиндре, которое для функции диаграммы (13) определяется знаменателем дроби (12) вида

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(x) H_0^{(2)}(\nu a) e^{-i z x} dx}{\nu H_1^{(2)}(\nu a)}. \quad (18)$$

Подынтегральная функция имеет логарифмическую особенность при значениях $\nu = \pm 1$. При вычислении (18) можно ограничиться значениями z в пределах полосы 2α . Подставляя в (18) разложение (15) и проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше при вычислении магнитного тока, можно показать, что указанная особенность является устраняемой на плоскости комплексного переменного, и получить в пределах полосы $-\alpha \leq z \leq \alpha$

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right) H_0(\nu_n a)}{\nu_n H_1^{(2)}(\nu_n a)}, \quad (19)$$

где $\nu_n = -i \sqrt{(n\pi/\alpha)^2 - 1}$.

Подставим (17) и (19) в (12) и для поверхностного импеданса на цилиндре получим

$$\bar{q}(z) = \frac{1}{ka} + \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right)}{\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right) \frac{H_0^{(2)}(\nu_n a)}{\nu_n H_1^{(2)}(\nu_n a)} \right\} \left(1 - \frac{1}{(ka)^2}\right)} + \bar{\delta}(z-0), \quad (20)$$

где $\bar{q}(z) = -i \frac{Z(z)}{z_0}$; $z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$. Полученное соотношение выражает связь

диаграммы направленности антенны, определяемую (13) и (15), с распределением поверхностного импеданса по образующей цилиндра в замкнутом виде и может быть использовано при синтезе импедансной антенны. Числитель и знаменатель дроби (20) представляют собой линейно независимые функции. Поэтому вывод условия чистой реактивности импеданса $\text{Im } q(z) = 0$ для произвольной функции диаграммы $F(x)$ из класса W_a не представляется возможным. Ниже рассматриваются частные случаи выполнения этого условия.

3. ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА ИМПЕДАНСНОЙ АНТЕННЫ

Ограничимся случаем задания функции диаграммы при синтезе антенны в виде отдельных гармоник в разложении (15). При этом возможны два приближения, позволяющие упростить выражение (20). Предположим, что выбор гармоник и размер цилиндра ka обеспечивают выполнение условия $ka \nu_n \gg 1$. Тогда, используя асимптотические представления Ханкеля большого аргумента, из (20) можно получить

$$\bar{q}(z) = \frac{1}{ka} + \frac{\sum_n C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right)}{\left\{ \sum_n C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right) \left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \right]^{-1} \right\} \left[1 - \left(\frac{1}{ka}\right)^2 \right]} + \bar{\delta}(z-0). \quad (21)$$

Условие чистой реактивности импеданса в этом случае выполняется, если при выборе гармоник функции диаграммы $n\pi/\alpha = \chi_n > 1$. Рассматриваемый случай предполагает формирование импедансной структурой антенны осевого излучения вращающейся поляризации. Поле над импедансной структурой имеет вид поверхностных волн с волновыми числами χ_n .

Если предположить выбор гармоник в (15) и размера ka такими, что $ka \nu_n \ll 1$, то, используя асимптотические представления функций Ханкеля малого аргумента, для распределения импеданса из (20) можно получить

$$\bar{q}(z) = \frac{1}{ka} + \frac{\sum_n C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right)}{\left\{ \sum_n C_n \exp\left(-i \frac{n\pi}{\alpha} z\right) \ln\left(\frac{2}{\gamma ka \nu_n}\right) \right\} \left[1 - \left(\frac{1}{ka}\right)^2 \right]} + \bar{\delta}(z-0), \quad (22)$$

где $\gamma = 1,85$. Условие чистой реактивности импеданса выполняется при выборе гармоник функции диаграммы со значениями $\chi_n = n\pi/\alpha < 1$. Этот случай предполагает формирование воронкообразной диаграммы направленности вращающейся поляризации.

Рассмотрим более подробно случай расчета импедансной антенны на основе соотношения (21). Импедансную антенну для этого случая можно отнести к цилиндрической антенне поверхностных волн. Если гармоники для диаграммы направленности в (15) выбрать с амплитудами $C_n = C_{-n}$, то выражение (21) принимает вид:

$$\bar{q}(z) = \frac{1}{ka} + \frac{\sum_n C_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} z\right)}{\left[1 - \left(\frac{1}{ka}\right)^2\right] \sum_n C_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha} z\right) \left[\sqrt{\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 - 1}\right]^{-1}} + \delta(z-0).$$

Это выражение получено вследствие представления поля на реактансной полосе в виде прямых и обратных поверхностных волн при расположении стороннего источника в середине полосты, как для антенн с фазовым центром [3]. Выбором гармоник функции диаграммы можно изменять ширину диаграммы направленности и уровень боковых лепестков в сравнении со случаем одиночной гармоники, который имеет место для антенны поверхностной волны. На рис. 3 представлена схема формирования диаграммы направленности антенны при помощи двух гармоник $n = 4$, $m = 5$; $\alpha = 12,1$; $C_n = C_m = 1$.

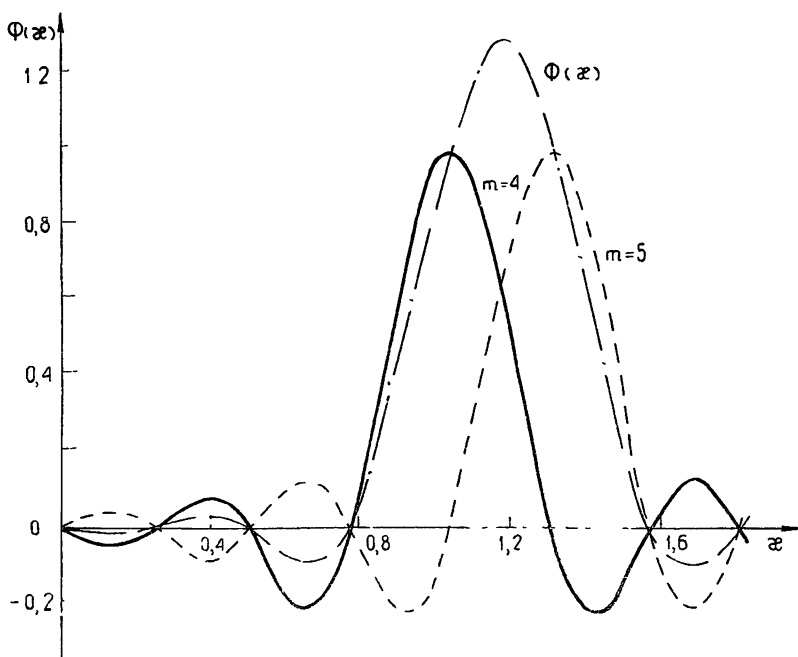


Рис. 3.

Полученное решение можно распространить и на случай однопольного излучения. Практическим подтверждением этого предположения является тот факт, что формирование основного излучения антенны поверхностных волн определяется, в основном, замедляющей структурой, прилегающей к основному лепестку диаграммы направленности, и не зависит от формирования ее другой части в симметричной области. С этой целью может быть использована методика расчета плоской импедансной антенны с несимметричной диаграммой направ-

ленности, основанная на подборе функции диаграммы для каждой полуполосы разных размеров α_1 и α_2 по обе стороны от стороннего источника [3].

Сторонний источник в виде кольца магнитного тока может быть реализован в виде щелевого излучателя на цилиндре, который помещается в локальной области с достаточно большим распределением импеданса, как было отмечено ранее при анализе дельта-особенности в распределении импеданса (12). При реализации поверхностного реактанса ребристой структурой возбуждающая щель окружается одной-двумя канавками ребристой структуры с обеих сторон со значением реактанса $\bar{q} = 1 \div 1,5$, что обеспечивает достаточно эффективное возбуждение структуры и исключает собственное излучение узкой щели. Более удобен возбуждатель поверхностной волны, отвечающий этим условиям.

Указанные условия возбуждения импедансной структуры выполняются при апертурном возбуждении последней, например, кольцевым раскрытом рупором. При этом предполагается существование внутри рупора импедансной структуры, которая формирует первичную поверхностную волну, возбуждающую импедансную структуру антенны.

Заметим, что полученное решение можно обобщить на случай многощелевого возбуждения импедансного цилиндра. Диаграмма направленности в этом случае имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^N F'_k(x),$$

где $F'_k(x) = \frac{F_k(x)}{A_k}$ — нормированная парциальная диаграмма, соответствующая возбуждению импедансной структуры одной щелью, A_k — амплитуда тока k -го щелевого излучателя. В качестве функций $F_k(x)$ можно выбирать функции класса W_{α_k} , где размер $2\alpha_k$ не должен превышать размер импедансной полосы 2α . Это открывает новые возможности при синтезе цилиндрических импедансных антенн. В частности, отсюда следует случай многощелевого возбуждения импедансной структуры в режиме бегущей волны, что позволяет проектировать импедансные антенны с невыступающими возбуждающими устройствами и весьма произвольными направленными характеристиками осевого излучения. Расчет поверхностного импеданса для парциальных диаграмм $F_k(x)$ можно, например, проводить по принципу вложенных отрезков.

Решение обратной задачи для несимметрично возбужденного импедансного цилиндра рассматривается в приближении, допускающем применение асимптотических выражений для цилиндрических функций большого и малого аргумента. Это позволяет получить выражения для поверхностного импеданса (21) и (22), которые могут быть использованы при синтезе импедансной антенны по методу парциальных диаграмм, известному из теории синтеза антенн. Парциальные диаграммы представляются гармониками ряда Котельникова (15).

При осевом излучении антенны условие чистой реактивности поверхностного импеданса в пределах заданной полосы размером 2α получено в предположении существования над импедансной структурой прямых и обратных поверхностных волн. Как известно из теории антенн поверхностных волн, при таком предположении излучение антенны представляется как результат отражения поверхностных волн от конца

импедансной структуры, размер которой d должен быть не более 8λ . Диаметр цилиндра в этом случае можно принять $a > 0,3\lambda$. Тогда величина $1/ka$ служит поправочной величиной для импеданса в пределах полосы на цилиндре.

В качестве способа реализации поверхностного реактанса указана цилиндрическая ребристая структура малого периода. Можно предложить и другие способы реализации поверхностного реактанса структурами, удовлетворяющими требованиям «сторонних» импедансных граничных условий [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 5, 795 (1961).
2. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М., 1967.
3. В. В. Чебышев, Синтез плоской импедансной антенны конечной длины, сб. Антенны, № 6, 1969.
4. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике и др., Физматгиз, М., 1962.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
19 ноября 1971 г.

INVERSE ELECTRODYNAMIC PROBLEM FOR ASYMMETRICALLY EXCITED IMPEDANCE CYLINDER

V. V. Chebyshev

The inverse electrodynamic problem for the infinite impedance cylinder excited by a ring with a traveling wave of the current is considered. The integral expression relating the radiation pattern with the impedance distribution over the cylinder element is derived. On the basis of this expression a method of antenna synthesis is suggested. In this method the radiation pattern is given by Kotel'nikov series which allows to obtain the reactance distribution within the given limits. The application of the solution derived in design of V-type antennas and those of rotating polarization with the axial radiation pattern is discussed.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621 376.234

О ДЕТЕКТОРЕ НА ОСНОВЕ InSb *n*-ТИПА ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ 77°K

В. Н. Генкин, В. И. Пискарев, Б. А. Трифионов

В последнее время большой интерес вызывают вопросы преобразования и детектирования миллиметрового и субмиллиметрового излучения на основе объемных нелинейных эффектов в полупроводниках [1-3]. Нелинейные объемные эффекты приводят, как правило, к кубичной зависимости между током и полем и обусловлены чаще всего зависимостью подвижности или концентрации носителей тока от поля. Хорошо известен детектор [1], в котором используется разогрев электронов в образце InSb *n*-типа при гелиевых температурах. В настоящей работе проведено исследование детектирующих свойств *n* — InSb при температуре 77°K.

Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Конструкция

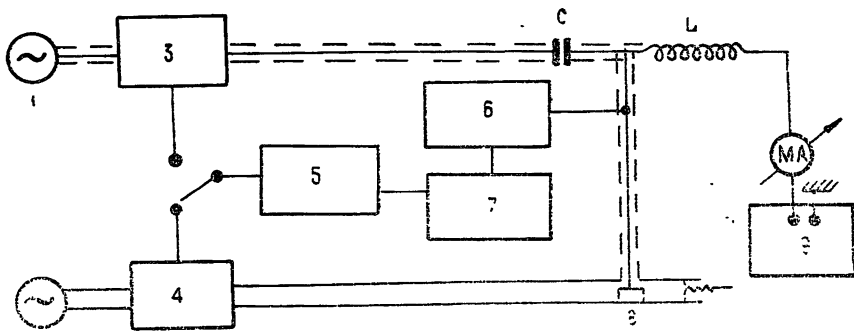


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1, 2 — генераторы сигнала ($f_1 = 3 \text{ Гц}$, $f_2 = 150 \text{ Гц}$); 3, 4 — модуляторы СВЧ излучения; 5 — звуковой генератор ($f = 1000 \text{ гц}$); 6 — измерительный усилитель У2-6; 7 — синхронный детектор; 8 — пластинка InSb *n*-типа; 9 — мост постоянного тока; L, C — развязывающие элементы.

детекторного узла приведена в работе [3]. В качестве детекторного элемента используется образец InSb *n*-типа размерами $0,25 \times 0,21 \times 0,05 \text{ мм}^3$ ($n = 9,1 \cdot 10^{18}$, $\mu = 7,5 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$, $T = 77^\circ\text{K}$).

Экспериментально исследовалась вольт-ваттная чувствительность $K = U/P_c$ (отношение напряжения на частоте модуляции к мощности сигнала, поглощаемой в детекторе). Измерения осуществлялись на частоте 3 и 150 Гц. В обоих случаях сигнал модулировался частотой 1000 гц. Величина коэффициента поглощения высокочастотных сигналов в полупроводниковой пластинке оценивалась по изменению ее сопротивления постоянному току. В качестве градуировочной кривой использовалась зависимость сопротивления образца от поглощаемой в нем мощности постоянного тока* (рис. 2).

Коэффициент поглощения сигнала в полупроводниковом образце в присутствии постоянного поля измерялся при относительно высоком уровне сигнала, но при $P_c < P_0$ (P_0 — мощность постоянного тока). Продетектированный сигнал поступал на вход измерительного усилителя типа У2-6, и далее на синхронный детектор.

На рис. 2 приведена экспериментально снятая зависимость вольт-ваттной чувст-

* Для оценок можно считать, что сопротивление образца постоянному току является функцией только поглощаемой в нем мощности.

вительности от смещения (частота сигнала — $f_1 = 3$ Гц). Аналогичная кривая получена и при детектировании излучения на частоте $f_2 = 150$ Гц.

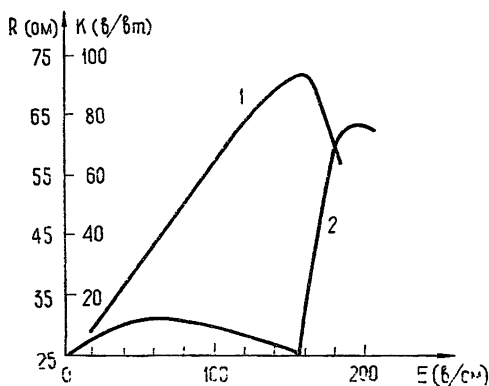


Рис. 2. 1 — сопротивление образца постоянному току, 2 — вольт-ваттная чувствительность.

На графике зависимости вольт-ваттной чувствительности от смещения можно выделить две характерные области. Первая область соответствует росту сопротивления с увеличением поля ($E < 160$ в/см), а вторая — падению сопротивления ($E > 160$ в/см). Граничное значение поля $E = 160$ в/см — это характерное поле, при котором начинается существенное изменение концентрации в InSb n -типа при 77°K [5]. В первой области эффект детектирования обусловлен зависимостью подвижности электронов от поля. Инерционность этого механизма определяется временем передачи энергии от электронов решетке ($\tau_e \sim 10^{-11}$ сек). Максимальная вольт-ваттная чувствительность в этой области $k \sim 10$ в/вт (добротность $m = K/\sqrt{R} \sim 2$ ом $^{1/2}$ /в)*. Для полей $E > 160$ в/см эффект детектирования связан с зависимостью концентрации от поля. Изменение концентрации фиксируется как по уменьшению сопротивления во второй области, так и непосредственно по изменению фазы протектированного сигнала**. Более резкая зависимость R от E в этой области приводит к большим значениям вольт-ваттной чувствительности, которая достигает в максимуме величин $K \sim 80$ в/вт, $m \sim 10$ ом $^{1/2}$ /в. Инерционность этого механизма определяется временем жизни неравновесных носителей и составляет в условиях эксперимента 10^{-9} сек [4]. Вольт-ваттная чувствительность рассматриваемого детектора практически не зависит от мощности сигнала для $P_c < P_0$.

Это позволяет оценить его предельную чувствительность $P_{пр} = \sqrt{U_{ш}^2/K}$ (предельная чувствительность детектора есть мощность СВЧ сигнала на входе, при которой мощности сигнала и шумов на выходе равны). Для теплового шума ЭДС в расчете на единичную полосу равна $\sqrt{U_{ш}^2} = \sqrt{4kTR}$ (T — температура, R — сопротивление детектора). В нашем случае в предпробойной области $P_{пр} = 3 \cdot 10^{-11}$ вт, в области за пробоем $P_{пр} = 4 \cdot 10^{-12}$ вт.

Из приведенных оценок следует, что рассмотренный выше детектор уступает по предельной чувствительности детектору [1], который работает при температуре $4,2^\circ\text{K}$, однако его достоинствами являются возможность работы при азотных температурах и малая инерционность.

Авторы благодарны А. М. Леонову за участие в проведении эксперимента, а также А. М. Белянцеву, В. А. Козлову и Л. И. Федосееву за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Выставкин, В. Н. Губанков, В. И. Листвин, В. В. Мигулин, ФТП, 1, № 6, 844 (1967).

* $K(E)$ в приближении электронной температуры может быть вычислена по зависимости $R(E)$. Однако можно убедиться, что даже качественно она не совпадает с приведенной на рис. 2. Это, по-видимому, связано с существенным отличием истинной функции распределения в поле от максвелловской.

** Нелинейные токи, обусловленные зависимостью концентрации и подвижности от поля, текут в противофазе.

2. Ш. М. Коган, ФТТ, 9, 2474 (1962).
3. А. М. Белянцев, В. А. Валов, В. Н. Генкин, А. М. Леонов, Б. А. Трифонов, ЖЭТФ, 61, № 3 (9) (1971).
4. В. И. Пискарев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
5. О. Маделунг, Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп, изд. Мир, М., 1967.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 января 1972 г.

УДК 538.56 : 621.371

К ВОПРОСУ О СООТНОШЕНИИ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Г. И. Овчинников, В. И. Татарский

Уравнение переноса излучения можно вывести из уравнений для функции когерентности. Однако при этом возникают некоторые логические трудности, которые становятся понятными уже на примере однородной среды.

В теории когерентности [1] краевая задача формулируется для функции $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_1)\psi^*(\mathbf{r}_2)$ (ψ — монохроматическое поле), которая в однородной среде удовлетворяет двум уравнениям Гельмгольца, записываемым для точек \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Уравнение же переноса излучения [2] берется для углового спектра функции когерентности при заданном начальном распределении углового спектра на границе области.

Угловой спектр $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$ и функция когерентности $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ связаны между собой следующим образом:

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \int J(\mathbf{q}, \mathbf{R}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d^3q; \quad (1)$$

$$I(\mathbf{n}, \mathbf{R}) = \int_0^\infty J(\mathbf{q}, \mathbf{R}) q^2 dq, \quad (2)$$

где $J(\mathbf{q}, \mathbf{R})$ — спектр функции когерентности; $\mathbf{q} = q\mathbf{n}$, $2\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Из уравнений, которым удовлетворяет функция когерентности, можно составить два линейно независимых уравнения — суммарное и разностное. Переходя в последних к переменным \mathbf{R} и \mathbf{r} , получаем [3]

$$(\Delta_{\mathbf{R}} + 4\Delta_{\mathbf{r}} + 4k^2)\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0; \quad (3)$$

$$(\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{R}})\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0, \quad (4)$$

а для спектра $J(\mathbf{q}, \mathbf{R})$ имеем уравнения

$$[\Delta_{\mathbf{R}} + 4(k^2 - q^2)]J(\mathbf{q}, \mathbf{R}) = 0; \quad (5)$$

$$(q \nabla_{\mathbf{R}})J(\mathbf{q}, \mathbf{R}) = 0, \quad (6)$$

где k — волновое число, $\mathbf{R} = (Z, \mathbf{R}_\perp)$, $\mathbf{r} = (z, \rho)$.

Согласно (2) и (6) угловой спектр $I(\mathbf{n}, \mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению переноса излучения в однородной среде [2]

$$(n \nabla_{\mathbf{R}})I(\mathbf{n}, \mathbf{R}) = 0. \quad (7)$$

Граничное условие для функции когерентности зададим в виде

$$\Gamma(0, \mathbf{R}_\perp, 0, \rho) = \Gamma_0(\mathbf{R}_\perp, \rho). \quad (8)$$

Тогда из уравнений (3), (4) при граничном условии (8) и условиях излучения по z и Z имеем

$$\Gamma(r, R) = \iint \Phi(q_{\perp}, \kappa) \exp \left\{ i \left[\kappa \left(R_{\perp} - \frac{q_{\perp}}{p_Z} Z \right) + q_{\perp} \rho + p_Z z \right] \right\} \times \\ \times d^2 q_{\perp} d^2 \kappa, \quad (9)$$

где $\Phi(q_{\perp}, \kappa)$ — спектр $\Gamma_0(\rho, R_{\perp})$; $p_Z = \frac{1}{2} \left\{ \left[k^2 - \left(q_{\perp} + \frac{\kappa}{2} \right)^2 \right]^{1/2} + \left[k^2 - \left(q_{\perp} - \frac{\kappa}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}$.

С учетом (9) и соотношений (1), (2) нетрудно определить спектр $J(q, R)$ и угловой спектр $I(n, R)$, если предположить, что $\Phi(q_{\perp}, \kappa) = 0$ при $k^2 - \left(q_{\perp} \pm \frac{\kappa}{2} \right)^2 < 0$.

Уравнение переноса (7) при заданном начальном распределении $I_0(n, R_{\perp})$ имеет единственное решение $I(n, R) = I_0 \left(n, R_{\perp} - \frac{n_{\perp}}{n_Z} Z \right)$, которое согласно (1), (2) связано с функцией когерентности следующим образом

$$\Gamma(0, R) = \iint_{4\pi} I_0 \left(n, R_{\perp} - \frac{n_{\perp}}{n_Z} Z \right) d\Omega_n. \quad (10)$$

Однако соотношение (2) принципиально не позволяет выразить начальное распределение $I_0(n, R_{\perp})$ через заданное начальное распределение функции когерентности $\Gamma_0(\rho, R_{\perp})$. В связи с этим произвольное задание $I_0(n, R_{\perp})$ может привести к выводам, противоречащим точной задаче дифракции. Рассмотрим поэтому точное решение (9) и установим ограничения, при которых функция когерентности и решение уравнения переноса согласованы друг с другом.

Пусть начальный спектр $\Phi(q_{\perp}, \kappa)$ имеет характерный масштаб κ_0 , такой, что при $\kappa > \kappa_0$ $\Phi(q_{\perp}, \kappa) \rightarrow 0$. Тогда в области $\kappa < \kappa_0$ и при условиях

$$\kappa_0^2 \ll 8(k^2 - q_{\perp}^2); \quad (11)$$

$$q_{\perp} \kappa_0^3 Z \ll 8(k^2 - q_{\perp}^2)^{3/2}; \quad (12)$$

$$\kappa_0^2 z \ll 2(k^2 - q_{\perp}^2)^{1/2} \quad (13)$$

из (9), разлагая $\left[k^2 - \left(q_{\perp} \pm \frac{\kappa}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$ в ряды по κ , получаем следующее соотношение для функции когерентности и углового спектра:

$$\Gamma(r, R) = \iint_{4\pi} I_1(n, R) \exp(iknr) d\Omega_n; \quad (14)$$

$$I_1(n, R) = k^2 n_Z F \left(kn_{\perp}, R_{\perp} - \frac{n_{\perp}}{n_Z} Z \right), \quad (15)$$

где $F(q_{\perp}, R_{\perp})$ — фурье-образ $\Gamma_0(\rho, R_{\perp})$ по ρ .

Пусть $\kappa_0 \rightarrow 0$. Для того, чтобы $\Phi(q_{\perp}, \kappa) \neq 0$ при этом, необходимо, чтобы Φ имела вид $\Phi(q_{\perp}, \kappa) = \delta(\kappa) f(q_{\perp})$, т. е. на границе области $z = Z = 0$ задано статистически однородное поле $\Gamma_0(\rho, R_{\perp}) = \Gamma_0(\rho, 0)$. Так как рассматривается случай однородной среды, то волновое поле остается статистически однородным во всем пространстве: $\Gamma(r, R) = \Gamma(r, 0)$. В этом случае непосредственно из (14), (15) имеем

$$\Gamma(r, 0) = \iint_{4\pi} I_1(n, 0) \exp(iknr) d\Omega_n; \quad (16)$$

$$I_1(n, 0) = k^2 n_Z f(k n_{\perp}). \quad (17)$$

В этом частном случае все условия (11)—(13) выполняются автоматически, так как $\kappa_0 \rightarrow 0$, если только источник не создает неоднородных волн ($k > q_{\perp}$).

Если помимо условий (11)—(13) выполняется условие $\Phi(q_{\perp}, \kappa) \rightarrow 0$ при $q_{\perp} > q_0 \ll k$, то (14) и (15) переходят в малоугловое приближение [3], а условия (11)—(13) аналогичны условиям применимости параболического уравнения [4]:

$$\Gamma(r, R) = \iint_{-\infty}^{\infty} I_2(n, R) \exp(ik n_{\perp} \rho) d^2 n_{\perp}; \quad (18)$$

$$I_2(n, R) = k^2 F(k n_{\perp}, R_{\perp} - n_{\perp} Z) \exp(ikz); \quad (19)$$

$$\kappa_m \ll k, \quad \kappa_m^4 Z \ll 8k^3, \quad \kappa_m^2 z \ll 2k, \quad \kappa_m = \max(\kappa_0, q_0). \quad (20)$$

Итак, при выполнении условий (11)—(13) решение уравнения переноса излучения позволяет восстановить функцию когерентности, если мы сумеем правильно задать начальное условие для углового спектра, которое, однако, не вытекает из начального условия для функции когерентности. И лишь в случае, когда применимо малоугловое приближение, эта трудность с согласованием начальных условий отпадает.

В заключение мы благодарим Л. С. Долипа за полезные замечания и дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
2. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 559 (1964).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
13 июля 1971 г.

УДК 621.371 : 535.3

КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУД В РАЗНЕСЕННЫХ ПО УГЛУ ВОЛНОВЫХ ПУЧКАХ*

В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев

В ряде практических приложений необходимо передавать оптическое излучение одновременно по нескольким каналам, при этом возникает вопрос о взаимных статистических характеристиках полей волновых пучков, прошедших слой турбулентной атмосферы [1, 2]. В настоящем сообщении рассмотрена корреляция флуктуаций амплитуд двух гауссовых волновых пучков, оптические оси которых пересекаются в центре излучающей апертуры. Полученные результаты позволяют оценить величину коэффициента корреляции в зависимости от размеров выходной апертуры и углового расстояния между осями пучков.

Комплексные амплитуды поля пучков в плоскости излучающей апертуры представляются в виде

$$u(\rho_0, \theta_0) = \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{2\alpha^2} \pm ikz_0 \theta_0\right) \quad (\theta_0 \ll 1), \quad (1)$$

где $1/\alpha^2 = 1/\alpha_0^2 + ik/F_0$, α_0 — эффективный радиус пучка, F_0 — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число в свободном пространстве, $\rho_0 = (y_0^2 + z_0^2)^{1/2}$ — модуль радиуса вектора в плоскости излучающей апертуры, $2\theta_0$ — угол между оптическими осями пучков.

В первом приближении метода плавных возмущений [3] выражения для случайной комплексной фазы ($\Psi_1 = \chi + is$) поля пучков (1) после прохождения слоя турбулентной атмосферы толщиной L запишутся в виде

$$\Psi(L, \rho, \pm \theta_0) = ik \int_0^L dx \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ix_{\perp} \rho \gamma - i\gamma \frac{L-x}{2k} \left[x_{\perp}^2 \pm 2 \frac{x_3 k \theta_0}{1+iD(x)}\right]\right\} \times \quad (2)$$

$$\times d\nu(x_2, x_3, x),$$

* Работа доложена на Всесоюзном симпозиуме по распространению лазерного излучения в атмосфере (г. Новосибирск, июль 1971 г.).

где $\gamma = \gamma_1 - i\gamma_2 = [1 + iD(x)]/[1 + iD(L)]$, $D(L) = a + ib = L/k\alpha_0^2 + iL/F_0$, $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, ρ — радиус-вектор в плоскости $x = L$. Используя выражение (2) и дельта-коррелированность [4] спектральных «амплитуд» $\partial \chi(\alpha_2, \alpha_3, x)$ флуктуаций показателя преломления в направлении распространения (ось Ox), получим следующее выражение для корреляционной функции флуктуаций уровней $\chi(\rho, \theta_0)$, $\chi(\rho, -\theta_0)$ и фаз $s(\rho, \theta_0)$, $s(\rho, -\theta_0)$:

$$B_{\chi, s}(\rho, \theta_0) = 2\pi^2 k^2 \int_0^L d\eta \int_0^\infty \Phi_n(x) \left[\exp\left(-\gamma_2 \frac{L-\eta}{k} x^2\right) J_0(2Qx) \mp \exp\left(-i\gamma \frac{L-\eta}{k} x^2\right) J_0\left(\frac{2x(L-\eta)}{1+iD(L)} \theta_0\right) \right] x dx, \quad (3)$$

где

$$Q = \left[-\rho^2 \gamma_2^2 + 2i\rho \cos \varphi \gamma_2 (L-\eta) \theta_0 \operatorname{Re}(1+iD(L))^{-1} + (L-\eta)^2 \theta_0^2 \operatorname{Re}(1+iD(L))^{-1} \right]^{1/2},$$

φ — угол между положительным направлением оси z и вектором ρ , $\rho = |\rho|$.

При $\theta_0 = 0$ выражение (3) совпадает с формулами для дисперсий флуктуаций логарифма амплитуды и фазы, полученными в [5]. В предельном случае двух плоских волн ($D(L) = 0$), распространяющихся под углом $2\theta_0$, из формулы (3) следует результат, приведенный в [6].

Подставляя в выражение (3) колмогоровский спектр флуктуаций показателя преломления [3] и проводя интегрирование по x , находим

$$B_\chi(\rho, \theta_0) = 7,068 \sigma_{\chi_0}^2 \operatorname{Re} \int_0^1 \left\{ -A^{5/6} {}_1F_1 \left[-\frac{5}{6}, 1, -A^{-1}(r_0^2 \gamma + 2ir_0 \cos \varphi \theta_0 \gamma_2 (1-\eta) \operatorname{Re}(1+iD(L))^{-1} + (1-\eta)^2 \theta_0^2 kL \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{Re}^2(1+iD(L))^{-1} \right] + C^{5/6} {}_1F_1 \left[-\frac{5}{6}, 1; -\frac{kL \theta_0^2 (1-\eta)^2}{C(1+iD(L))} \right] \right\} d\eta, \quad (4)$$

где ${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; p\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [7], $\sigma_{\chi_0}^2 = 0,308 C_n^2 \times \times k^{7/6} L^{11/6}$ — дисперсия флуктуаций логарифма амплитуды плоской волны, $A = S^2 + + \gamma_2(1-\eta)$, $C = S^2 + i\gamma(1-\eta)$, $r_0 = \rho \sqrt{k/L}$, $S^2 = l_0^2 k/(5,92)^2 L$, C_n^2 и l_0 — соответственно структурная характеристика и внутренний масштаб флуктуаций показателя преломления.

Если в выражении (4) ограничиться значениями θ_0 в пределах дифракционной диаграммы направленности ($\theta_0 \ll (k\alpha_0)^{-1}$) и положить $\rho = 0$, $b = 0$, $l_0 = 0$, то, удерживая первый член разложения функции ${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; p\right)$ в степенной ряд, после интегрирования по η будем иметь

$$B_\chi(0, \theta_0) \approx 7,068 \sigma_{\chi_0}^2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{3}{8} \left(\frac{a}{1+a^2} \right)^{5/6} {}_1F_1 \left[-\frac{5}{6}, 1; -\frac{Lk \theta_0^2}{a(1+a^2)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{6}{11} \left(\frac{a+i}{a^2+1} \right)^{5/6} {}_2F_1 \left[1, -\frac{5}{6}; \frac{17}{6}; -ia \right] + \frac{5}{17} \left(\frac{1+a^2}{a^2+i} \right)^{1/6} \times \right. \\ \left. \times \frac{kL \theta_0^2}{(1+ia)^2} {}_2F_1 \left[1, \frac{1}{6}; \frac{23}{6}; -ia \right] \right\}, \quad (5)$$

где ${}_2F_1[\beta, \mu; \nu; \omega]$ — гипергеометрическая функция Гаусса [7].

Проводя аналогичные вычисления с использованием выражения (2), можно получить точную и приближенную формулы для дисперсии флуктуаций уровня $\sigma_\chi^2(0, \theta_0) = \langle \chi^2(0, \theta_0) \rangle$:

$$\sigma_\chi^2(0, \theta_0) = 7,068 \sigma_{\chi_0}^2 \times$$

$$\times \operatorname{Re} \int_0^1 \left\{ C^{5/6} - A^{5/6} {}_1F_1 \left[-\frac{5}{6}, 1; \frac{kL}{A} \theta_0^2 (1-\eta) \operatorname{Im}^2 (1+iD(L))^{-1} \right] \right\} d\eta; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\chi^2(0, \theta_0) \approx 7,068 \sigma_{\chi 0}^2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{3}{8} \left(\frac{-a}{1+a^2} \right)^{5/6} {}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1; \frac{kLa}{1+a^2} \theta_0^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{6}{11} \left(\frac{a+i}{a^2+1} \right)^{5/6} {}_2F_1 \left(1, -\frac{5}{6}; \frac{17}{6}; -ia \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 1 представлены графические зависимости коэффициента корреляции

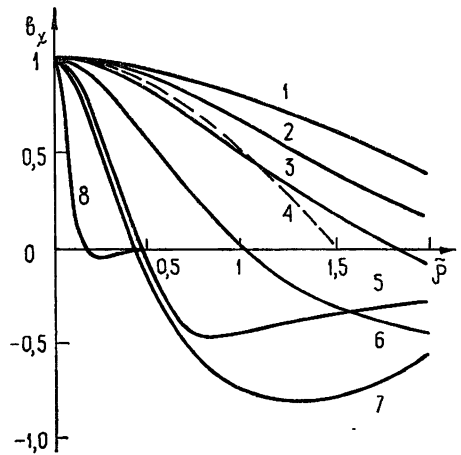


Рис. 1 Коэффициент корреляции b_χ флуктуаций логарифма амплитуды (коллимированный пучок, $b=0$; $S^2=0,237 \cdot 10^{-3}$; $\rho=0$).

1 - $a=100$; 2 - $a=50$; 3 - $a=28$; 4 - $a=28$;
5 - $a=0,25$; 6 - $a=10$; 7 - $a=1$; 8 - $a=0,01$.

$b_\chi(0, \theta_0) = B_\chi(0, \theta_0) / \sigma_\chi^2(0, \theta_0)$ от величины углового разнота $\tilde{\rho} = L\theta_0/\rho_b$, выраженной через дифракционный размер [5] пучка

$$\rho_b = \{[(1-b)^2 + a^2] L/ka\}^{1/2}. \quad (8)$$

Численный расчет проводился с помощью ЭВМ по формулам (4), (6), и использовался алгоритм расчета, предложенный в работе [8].

Расчетные значения коэффициента корреляции двух плоских волн при $a=10^{-9}$ совпадают с результатами, приведенными в [6]. Увеличение параметра a , как видно из (8), приводит к уменьшению размера пучка ρ_b . При этом радиус положительной корреляции $\tilde{\rho}_c$, определяемый как точка пересечения кривых $b_\chi(0, \theta_0)$ с осью $\tilde{\rho}$, увеличивается, достигая максимума при $a \approx 0,25$, а затем незначительно уменьшается до минимального значения в точке $a=1$. Эта точка соответствует минимальному дифракционному размеру пучка. Дальнейшее увеличение параметра a , что равносильно увеличению дифракционного размера пучка, приводит к монотонному росту радиуса корреляции.

Используя результаты, представленные на рис. 1, можно оценить величину угла положительной корреляции по формуле

$$2\theta_c = \gamma_c \tilde{\rho}_c \{[(1-b)^2 + a^2] a^{-1}\}^{1/2},$$

где $\gamma_c = 2/\sqrt{kL}$ — угловой радиус корреляции двух плоских волн [6].

Сравнение кривых 3 и 4, рассчитанных соответственно по точным (4), (6) и приближенным (5), (7) формулам, показывает, что они удовлетворительно совпадают при $\theta_0 < (ka_0)^{-1}$.

В заключение авторы выражают благодарность С. И. Тузовой и С. Н. Беловицкому за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кон, Тезисы Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере, изд. ТГУ, Томск, 1971.
2. З. И. Фейзулин, Радиотехника и электроника, 15, № 7, 1320 (1970).

3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, препринт АН СССР, Отделение океанологии, физики атмосферы и географии, Москва, 1970.
5. A. Ishimaru, Rad. Sci., 4, № 4, 295 (1969).
6. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 306 (1964).
7. Г. Бейтмен, А Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд. Наука, М., 1965.
8. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 865 (1972).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
1 декабря 1971 г.

УДК 621.371 · 538 574

О СРЕДНЕМ ПОЛЕ ПРИ СВЕРХРЕФРАКЦИИ

М. Б. Каневский

Наряду со случайными неровностями границ [1] на распространение волн в природных волноводах существенное влияние оказывают неоднородности среды. В настоящей работе рассматривается среднее поле в случайно неоднородной среде с крупномасштабными неоднородностями при наличии регулярной сверхрефракции.

Пусть поле $\Psi(x, z)$ над границей $z = 0$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Psi + k^2 [\varepsilon_0(z) + \varepsilon_1(x, z)] \Psi = 0, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon \rangle$ и ε_1 — соответственно средняя и флуктуационная части диэлектрической проницаемости. Предполагается, что ε_0 убывает с высотой и при этом всюду мало отличается от единицы, а малые флуктуации ε_1 крупномасштабны по сравнению с длиной волны λ .

В случае нормального распределения ε_1 известная процедура диаграммного метода с использованием приближения Бурре [2] приводит к следующему уравнению для среднего поля $\langle \Psi \rangle$:

$$\langle \Psi \rangle = \Psi_0 + k^4 M_0 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle \langle \Psi \rangle, \quad (2)$$

где Ψ_0 — поле, реализующееся при $\varepsilon_1 = 0$,

$$\Psi_0 = \sum_m a_m u_m(z) \exp(ih_m x), \quad (3)$$

а оператор M_0 имеет вид

$$M_0 \varepsilon_1 \langle \Psi \rangle = -\frac{i}{2k} \sum_m u_m(z) \times \\ \times \int_0^x dx' \int_0^\infty dz' \varepsilon_1(x', z') \langle \Psi \rangle u_m(z') \exp[ih_m(x - x')]. \quad (4)$$

Суммирование здесь ведется по нормальным волнам (модам) регулярного волновода. В (4) учтено, что флуктуации ε_1 крупномасштабны (обратное рассеяние считается пренебрежимо малым) и углы скольжения волноводных мод малы (в амплитудных множителях положено $h_m = k$).

Представим $\langle \Psi \rangle$ в виде разложения по модам регулярного волновода:

$$\langle \Psi \rangle = \sum_n u_n(z) w_n(x) \exp(ih_n x), \quad (5)$$

полагая при этом, что $w_n(x)$ мало меняется на расстояниях порядка размера неодно-

родности l . Тогда, если $l \ll D_n$ (D_n — длина цикла волноводной моды)*, то для второго слагаемого правой части (2) найдем:

$$k^4 M_0 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle \langle \Psi \rangle = -\frac{\pi k^2}{4} \sum_m u_m(z) \times \\ \times \int_0^x dx' \exp[ih_m(x-x')] \sum_n A_{mn} \omega_n(x') \exp(ih_n x'), \quad (6)$$

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_z \Phi_\varepsilon(0, x_z) \sum_s a_{ms} a_{ns}^*,$$

$$a_{ms}(x_z) = \int_0^{\infty} dz u_m(z) u_s(z) \exp(ix_z z),$$

где $\Phi_\varepsilon(x_x, x_z)$ — спектр случайной величины ε_1 , поле которой предполагается статистически однородным. Формулы для $a_{ms}(x_z)$, соответствующие линейной зависимости $\varepsilon_0(z)$, получены в [3].

Подставим (6) в (2) и после несложных преобразований придем к системе дифференциальных уравнений для функций $X_m(x) = \omega_m(x) \exp(ih_m x)$:

$$X'_m + \sum_n \left(\frac{\pi k^2}{4} A_{mn} - ih_m \delta_{mn} \right) X_n = 0, \quad (7) \\ X_m(0) = a_m.$$

Теперь ясно, что среднее поле может быть представлено в виде разложения по эффективным модам:

$$\langle \Psi \rangle = \sum_r c_r \left[\sum_m b_{mr} u_m(z) \right] \exp(iq_r x), \quad (8)$$

где c_r и b_{mr} — коэффициенты, известным образом выражающиеся через a_m и матрицу коэффициентов системы (7), а спектр q_r определяется из уравнения

$$\det \| i(h_m - q) \delta_{mn} - \frac{\pi k^2}{4} A_{mn} \| = 0. \quad (9)$$

Если матрица $\| A_{mn} \|$ диагональна, то система (7) распадается на N независимых уравнений, где N — число мод регулярного волновода, у которых $a_m \neq 0$. Физически это соответствует случаю, когда неоднородности настолько крупномасштабны, что любая мода регулярного волновода рассеивается лишь в одном направлении — сама в себя, а взаимное перерассеяние между модами отсутствует. При этом $a_{ms} = \delta_{ms}$ (см. (6)) и выражение для A_{mn} совпадает с выражением для коэффициента затухания среднего поля плоской волны, хотя диаграмма рассеяния плоской волны имеет, вообще говоря, ненулевую ширину.

Пусть $\sum_{n \neq m} A_{mn} \ll A_{mm}$. Это неравенство выполнено, если $l_z \gg H$; l_z — характерный вертикальный размер неоднородностей среды, H — вертикальный размер области, где сосредоточено поле Ψ_0 . Тогда, решая (7) методом итераций, можно видеть, что в первом приближении

$$iq_r = ih_r - \frac{\pi k^2}{4} \iint_{-\infty}^{\infty} dx_y dx_z \Phi_\varepsilon(0, x_y, x_z) \sum_s |a_{rs}(x_z)|^2. \quad (10)$$

Флуктуации ε_1 здесь предполагаются трехмерными. Из решения второго приближения можно определить малый сдвиг уровней $\text{Re } q_r$ относительно h_r .

* В отличие от [1] неравенство $l \ll D_n$ здесь не эквивалентно $\Delta \vartheta_n \ll \lambda/l$ ($\Delta \vartheta_n$ — разность углов скольжения двух соседних мод вблизи $z = 0$). Как нетрудно показать для линейной зависимости $\varepsilon_0(z)$, последнее неравенство выполнено, если $l \ll D_n/k\Delta$; $D_n = k\Delta(z_n\Delta)^{1/2}$, $\Delta = k^{-2/3}|\varepsilon_0'|^{-1/3} \gg \lambda$ (Δ — масштаб осцилляций функции $u_n(z)$ вблизи точки поворота z_n).

Считая зависимость $\epsilon_0(z)$ линейной и используя соответствующие формулы для a_{rs} [3], оценим по формуле (10) коэффициент затухания эффективной моды номера r применительно к условиям тропосферного волновода. Рассмотрим следующий пример: $\epsilon'_0 = -10^{-6} \text{ м}^{-1}$, $\Phi_s = 0,063 \langle \epsilon_1^2 \rangle L_0^3 [1 + (x_x^2 + x_y^2 + x_z^2) L_0^2]^{-11/6}$, $L_0 = 10 \text{ м}$, $\lambda = 3 \text{ мм}$, $r = 6$. Расчет на ЭВМ показал, что $\frac{\pi k^2}{4} A_{rr} = 0,97 \cdot 10^{10} \langle \epsilon_1^2 \rangle \text{ км}^{-1}$, причем 7,5% от вычисленного значения связаны с рассеянием из r -й моды регулярного волновода в моды с номерами $s \neq r$. Отметим, что полученный результат лишь на 5% превышает соответствующий результат для плоской волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1521 (1969).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1392 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 февраля 1972 г.