

4. В. Р. Заславская, Оптика и спектроскопия, 28, № 1, 93 (1970).  
 5. Г. Когельник, Т. Ли, Труды Института инженеров по электронике и радиоэлектронике (ТИИЭР), 54, № 10, 95 (1966).

Поступила в редакцию  
7 января 1972 г.

УДК 621.373

## ДИСПЕРСИЯ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ВЗАИМНО СИНХРОНИЗОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В. И. Канавец, А. Ю. Стабинс

Как следует из общего рассмотрения взаимной синхронизации генераторов при наличии шумов, существуют оптимальные связи, приводящие к сужению спектральной линии колебания [1, 2]. Покажем, что такие оптимальные условия реализуются в системе генераторов, связанных через сопротивления. Будем считать, что генераторы находятся под воздействием естественных шумов. Рассмотрим систему  $N$  связанных одинаковых генераторов, построенных по схеме параллельного контура. Обобщенная эквивалентная схема показана на рис. 1, где  $G_n$  — нелинейная проводимость;

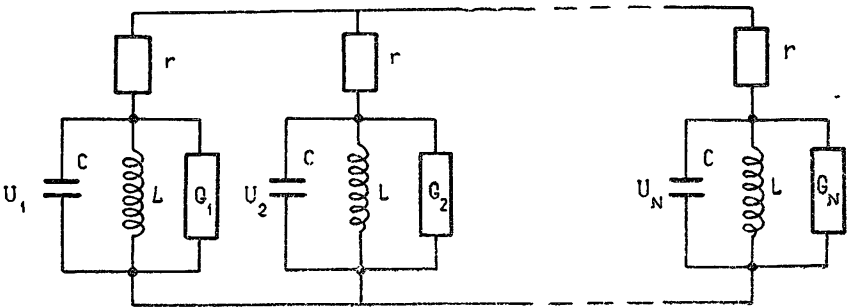


Рис. 1.

$G_n = G^{(n)} + G^{(нл)}$ ,  $r$  — сопротивление связи;  $U_n$  — напряжение на отдельном генераторе. Работа автогенераторов описывается системой уравнений.

$$\ddot{U}_n + \alpha_0 \dot{U}_n + \alpha_2 U_n^2 \dot{U}_n + \omega_0^2 U_n = \frac{\alpha_c}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq n)}}^N \dot{U}_m + \omega_0^2 E_n(t), \quad (1)$$

где  $\alpha_0 = \frac{G^{(n)}}{C}$ ,  $\alpha_2 = \frac{3G^{(нл)}}{C}$ ,  $\alpha_c = \frac{1}{Cr}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $E_n(t)$  — «белый шум», действующий на  $n$ -й генератор,  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Найдем стационарный режим работы без учета шумов. Предположим, что имеет место синфазный режим работы на частоте  $\omega_0$ . Решение ищем в виде  $U_n = a_n \cos(\omega_0 t + \varphi_n)$ , где  $a_n$  и  $\varphi_n$  — величины, медленно меняющиеся за период колебания, если  $|a_0| \ll \omega_0$ ,  $|a_2| a_n^2 \ll \omega_0$ ,  $\alpha_c \ll \omega_0$ ,  $|E_n| \ll a_n$ . Получим следующие укороченные уравнения:

$$\dot{a}_n = -\frac{\alpha_0}{2} a_n \left(1 + \frac{\alpha_2}{4\alpha_0} a_n^2\right) + \frac{\alpha_c}{2N} \sum_{m \neq n} a_m \cos(\varphi_m - \varphi_n), \quad (2)$$

$$\dot{\varphi}_n = \frac{\alpha_c}{2a_n N} \sum_m a_m \sin(\varphi_m - \varphi_n),$$

Генерация колебаний возможна при выполнении условий  $\alpha_0 < 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ . Обозначим  $a_0^2 = 4|\alpha_0|/a_2$  и введем безразмерные величины  $t' = \omega_0 t$ ,  $\beta_1 = |\alpha_0|/2\omega_0$ ,  $\beta_0 = \alpha_c/2\omega_0$ ,  $y_n = a_n/a_0$ . Здесь  $a_0$  — стационарная амплитуда колебания изолированного генератора,  $\beta_1$  и  $\beta_0$  — коэффициенты потерь и связи,  $\beta_1 \ll 1$ ,  $\beta_0 \ll 1$ . Опуская штрихи, получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_n &= \beta_1 y_n (1 - y_n^2) + \frac{\beta_1}{N} \sum_{m \neq n} y_m \cos(\varphi_m - \varphi_n), \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{\beta_0}{y_n N} \sum_m y_m \sin(\varphi_m - \varphi_n). \end{aligned} \quad (3)$$

В системе существует стационарный режим с одинаковыми  $y_n$  и  $\varphi_n$  для всех генераторов. Исследование показало, что режим устойчив, а стационарное значение амплитуды равно  $y_{ст} = \sqrt{1 + \beta_0(N-1)/\beta_1 N}$ . Синхронный синфазный режим работы генераторов является результатом связи генераторов через сопротивления.

Введем замену переменных  $y_n = y_{ст}(1 + x_n)$ . Ограничимся рассмотрением достаточно малой связи  $\beta_0/\beta_1 \ll 1$  и малых относительных отклонений амплитуд  $x_n \ll 1$ . Оставляя члены одинакового порядка малости, вместо (3) получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -2\beta_1 x_n + \frac{\beta_0}{N} \sum_{m \neq n} \cos(\varphi_m - \varphi_n) - \beta_0 \frac{N-1}{N}, \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{\beta_0}{N} \sum_m \sin(\varphi_m - \varphi_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Вводя в рассмотрение шумы  $E_n(t)$ , такие, что, по-прежнему, выполняется условие  $x_n \ll 1$ , и, пользуясь методикой, развитой в [3], получаем укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= -2\beta_1 x_n + \frac{\beta_0}{N} \sum_{m \neq n} \cos(\varphi_m - \varphi_n) - \beta_0 \frac{N-1}{N} + \frac{1}{2a_0} E_{\perp n}, \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{\beta_0}{N} \sum_m \sin(\varphi_m - \varphi_n) - \frac{1}{2a_0} E_{\parallel n}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $x_n$  имеет смысл относительных флуктуаций амплитуд,  $E_{\parallel n}(t) = e_{\parallel n} \cos \varphi_n + e_{\perp n} \sin \varphi_n$ ,  $E_{\perp n}(t) = e_{\perp n} \cos \varphi_n - e_{\parallel n} \sin \varphi_n$ , а  $e_{\parallel n}$  и  $e_{\perp n}$  связаны с  $E_n(t)$  [9].

Ограничимся рассмотрением фазовых флуктуаций, амплитудными флуктуациями пренебрегаем. Применяя метод статистической эквивалентности уравнений для фаз, систему (5) можно заменить системой уравнений

$$\dot{\varphi}_n = \frac{\beta_0}{N} \sum_m \sin(\varphi_m - \varphi_n) + \xi_n \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (6)$$

где  $\xi_n = -\frac{1}{2a_0} e_{\parallel n}$  — нормально распределенные случайные величины с функциями корреляции  $\Phi_\xi = D \delta(\tau)$ .

Рассмотрим режим сильной синхронизации, когда средний квадрат отклонения  $\langle (\varphi_m - \varphi_n)^2 \rangle \ll 1$ . Уравнения (6) упрощаются:

$$\dot{\varphi}_n = \frac{\beta_0}{N} \sum_m \varphi_m - \beta_0 \varphi_n + \xi_n, \quad (7)$$

$$\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_n = -\beta_0(\varphi_m - \varphi_n) + \xi_m - \xi_n.$$

Интегрируя последнее уравнение, можно показать, что условие малости  $\langle (\varphi_m - \varphi_n)^2 \rangle \ll 1$  дается неравенством  $D/\beta_0 \ll 1$ . Для фазы отдельного генератора  $\varphi_n$  при предположении  $\sum_m \varphi_m(0) = 0$  получим

$$\dot{\varphi}_n = -\beta_0 \varphi_n + \xi_n(t) + \frac{\beta_0}{N} \sum_m \int_0^t \xi_m(t) dt. \quad (8)$$

Обозначим  $\eta(t) = \xi_n(t) + \frac{\beta_0}{N} \sum_m \int_0^t \xi_m dt$ . Статистическая структурная функция равна

$$d_\eta[\theta; \tau] = D \delta(\theta) - \frac{1}{2} D \delta(\tau - \theta) - \frac{1}{2} D \delta(\tau + \theta) + \begin{cases} \frac{1}{2N} \beta_0^2 D [|\tau| - |\theta|] & (|\tau| \geq |\theta|) \\ 0 & (|\tau| < |\theta|) \end{cases}$$

Используя приведенное в [3] соотношение  $d_\varphi[0; \tau] = \frac{1}{2} \langle \varphi_n^2 \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[-\beta_0(u + v)] d_\eta[u - v, \tau] dudv$ , при условии  $\beta_0 |\tau| \gg 1$  и при пренебрежении величинами порядка  $D/\beta_0$  получим выражение

$$\langle \varphi_n^2 \rangle = \frac{D |\tau|}{N}. \quad (9)$$

Таким образом, интенсивность флуктуаций фазы отдельного генератора уменьшается в  $N$  раз. В этом выражении величина  $D/N$  есть коэффициент диффузии фазы. Для свободного генератора он равен величине  $D$ . При пренебрежении амплитудными флуктуациями ширина спектральной линии генератора пропорциональна этому коэффициенту [3]. Таким образом, ширина спектральной линии уменьшается также в  $N$  раз.

Рассмотрим преобразование спектра на примере двух генераторов, не ограничиваясь условием  $\langle (\varphi_m - \varphi_n)^2 \rangle \ll 1$ . Фазовые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \xi_1 + \frac{\beta_0}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \dot{\varphi}_2 &= \xi_2 - \frac{\beta_0}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Введем функции  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  и  $\psi = \varphi_2 + \varphi_1$ . Они определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \xi_2 - \xi_1 - \beta_0 \sin \varphi, \\ \dot{\psi} &= \xi_1 + \xi_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как  $\langle \varphi \psi \rangle = 0$ , получаем  $\langle \varphi_1^2 \rangle = \langle \varphi_2^2 \rangle = \frac{1}{4} \{ \langle \psi^2 \rangle + \langle \varphi^2 \rangle \}$ , откуда

$$\langle \varphi_1^2 \rangle = \frac{D |\tau|}{2} + \frac{1}{4} \langle \varphi^2 \rangle. \quad (12)$$

В случае  $\beta_0/D \gg 1$ , используя выражение для коэффициента диффузии, полученное в [3] (формула 9.2.43), имеем

$$\langle \varphi^2 \rangle = 4 \pi \beta_0 \exp(-2\beta_0/D) |\tau| \quad (13)$$

и

$$\langle \varphi_1^2 \rangle = \frac{D}{2} \mu |\tau|, \quad (14)$$

где  $\mu = 1 + (2\pi\beta_0/D) \exp(-2\beta_0/D)$ . Множитель  $\mu$  определяет увеличение коэффициента диффузии фазы  $\varphi_1$  при большом, но конечном значении отношения  $\beta_0/D$ .

В другом крайнем случае  $\beta_0/D \ll 1$ , используя соответствующее выражение для коэффициента диффузии в [3] (формула 9.2.23), имеем

$$\langle \varphi^2 \rangle = 2D \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\beta_0^2}{D^2} \right) |\tau| \quad (15)$$

и

$$\langle \varphi_1^2 \rangle = D \mu |\tau|, \quad (16)$$

где  $\mu = 1 - \frac{1}{4} \frac{\beta_0^2}{D^2}$ . Здесь множитель  $\mu$  показывает, как уменьшается коэффициент диффузии фазы свободного генератора при введении слабой связи.

Сужение линии в системе связанных генераторов, находящихся под воздействием шумов, может рассматриваться как результат нелинейной частотной модуляции. В этом

смысле оно аналогично преобразованию спектра в системе связанных осцилляторов, рассмотренному Винером [4].

### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
2. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Докл. АН СССР, 196, № 5, 1065 (1971).
3. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1966.
4. Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1969.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
19 апреля 1971 г.

УДК 621.372.8

## К ВОПРОСУ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ЭКРАНЕ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Л. Л. Коленский, Ю. А. Медведев

В [1] приведены выражения в виде рядов от функций Бесселя различных порядков\* для электромагнитного поля внутри бесконечного цилиндрического проводящего экрана, находящегося в поле монохроматической плоской волны с электрическим вектором, параллельным или перпендикулярным оси цилиндра. При нахождении импульсной функции экрана для импульсов выделенного в [1] класса в соответствующих рядах учитывались лишь члены с  $n = 0$  (обозначения те же, что и в [1]). Если учесть также члены с  $n = \pm 1$  и  $n = \pm 2$ , ограничиться первыми членами разложений функций Бесселя по степеням  $\xi = kr \ll 1$  и рассматривать импульсы, основная энергия которых сосредоточена в интервале частот  $\frac{c^2}{4\pi\sigma R h} \ll \omega \ll \frac{c}{R}$  (нижняя граница допустимого интервала частот определяется величиной в  $R/h$  раз меньшей, чем в [1], верхняя частота та же, что и в [1]), то коэффициенты  $a_i^k$  определяются выражениями  $a_0^1 =$

$$= \mu(Y \ln X \sin \kappa Y)^{-1}, \quad a_1^1 = a_0^2 = \frac{a_2^1}{2} = -2\mu(Y \sin \kappa Y)^{-1}, \quad a_1^2 = 2a_2^2 = 2\mu X^2 (Y \sin \kappa Y)^{-1}$$

( $Y = mX = mkR$ ,  $R$  — толщина оболочки), из которых следует, что  $a_1^1/a_0^1 = -2 \ln X \gg 1$  и  $|a_1^2/a_0^2| = X^2 \ll 1$ . Поэтому в [1] компоненты  $H_z$ ,  $E_\varphi$  и  $E_z$  оценены правильно, тогда как при оценке компоненты  $H_\varphi$  необходимо удерживать члены с  $n = \pm 1$ . Члены с  $n = \pm 2$  можно не учитывать при оценке всех компонент.

При учете членов с  $n = 0$  и  $n = \pm 1$  в выражениях (1) и (2) [1] выражения для полей в полости в случае гармонических зависимостей от времени, определяемые приведенными выше выражениями для коэффициентов  $a_i^k$ , допускают точные обратные фурье-преобразования. Например, импульсная функция экрана для магнитного поля имеет вид

$$H(t) = \frac{2}{\pi} \frac{c}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma t}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t_k/2t},$$

где  $t_k = (1+2k)^2 \frac{2\pi\mu h^2}{c^2}$ . Нулевой член ряда, описывающий передний фронт импульсной функции, совпадает с соответствующим выражением (14), полученным в [1] в результате оценки методом перевала. Так, при  $t < t_0$  погрешность, возникающая при пренебрежении членами с  $k \geq 1$ , не превосходит 2%. При этом функция  $H_0$  однополярна, достигает своего максимального значения  $H_{\max} = 0,15 \frac{c^2}{R h \sigma}$  в момент времени  $t = t_0$ .

\* В выражениях (1) и (2) [1] вместо  $(-1)^{n+1}$  должно быть  $(-i)^{n+1}$ .