

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

O. С. Мергелян

В приближении теории возмущений решена задача дифракции на диэлектрической гофрированной поверхности. Получены выражения для амплитуд и углового распределения рассеянных полей.

Интерес к распространению электромагнитных волн в средах с периодически меняющимися свойствами и излучению в таких средах в последнее время возрос в связи с рядом возможных приложений [1-4]. Однако в случае неплоских границ раздела возникают серьезные трудности при применении граничных условий.

В настоящей работе использование метода «сшивания» полей на границе с диэлектриком с периодически меняющейся плотностью [5] позволило свести задачу дифракции на гофрированной диэлектрической поверхности к задаче отражения и преломления электромагнитной волны плоско-параллельным слоем из диэлектрика с периодически меняющейся проницаемостью ϵ , помещенным между изотропными диэлектриками.

1. Пусть плоская электромагнитная волна частоты ω

$$\mathbf{E}_0(r, t) = \mathbf{E}_0(\omega) \exp i(kr - \omega t), \quad k(k_x, k_y, k_z) \quad (1)$$

из среды с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 падает на диэлектрик с проницаемостью ϵ_2 . Границей диэлектриков является поверхность $z = f(x)$, причем функция $f(x)$ — периодическая с периодом l , а z меняется от 0 до d . Проведем плоскости $z = 0$ и $z = d$, касательные к поверхности границы. Тогда пространство разбивается на 3 области:

1) область $z < 0$, занимаемая изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ_1 ;

2) область $z > d$, занимаемая изотропным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 ;

3) область $0 \leq z \leq d$, в которой периодически чередуются диэлектрики с ϵ_1 и ϵ_2 . Этую область мы можем охарактеризовать диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x, z)$. Разлагая $\epsilon(x, z)$ в ряд Фурье по x с периодом l и по z с периодом d , имеем

$$\epsilon(x, z) = \epsilon_0 + \sum_{n, m} a_{nm} \exp \left[i2\pi \left(\frac{n}{l}x + \frac{m}{d}z \right) \right] = \epsilon_0 + \epsilon'(x, z). \quad (2)$$

Коэффициенты a_{nm} определяются значениями ϵ_1 и ϵ_2 и функцией $z = f(x, z)$.

Так как задача полностью симметрична, будем считать, что начальная волна падает из области $z < 0$.

Если $\epsilon' \ll \epsilon_0$, к решению задачи можно применить теорию возмущений. Обозначим через E_1, E_2, E_3 и E_4 невозмущенные решения,

т. е. поля волн, распространяющихся при $\epsilon' = 0$ в областях $z < 0$ (отраженное поле E_1), $0 \leq z \leq d$ (поля E_2 и E_3 , соответствующие волнам, распространяющимся в направлениях $+z$ и $-z$) и $z > d$ (поле E_4).

Тогда поля, обязанные своим появлением отклонению границы раздела от плоскости, записываются для областей $z < 0$ и $z > d$ в виде

$$\begin{aligned} E'_1(r, t) &= \sum_{n, m \neq 0} A_{nm} \exp \{i[(k_x + \xi n)x + k_y y - \lambda_{1n} z] - i\omega t\}, \\ E'_4(r, t) &= \sum_{n, m \neq 0} B_{nm} \exp \{i[(k_x + \xi n)x + k_y y + \lambda_{4n} z] - i\omega t\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\xi = 2\pi/l,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1n} &= \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 - (k_x + \xi n)^2 - k_y^2 \right\}^{1/2}, \\ \lambda_{4n} &= \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - (k_x + \xi n)^2 - k_y^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} удовлетворяют условиям поперечности полей:

$$\begin{aligned} [n_x(k_x + \xi n) + n_y k_y - n_z \lambda_{1n}] A_{nm} &= 0, \\ [n_x(k_x + \xi n) + n_y k_y + n_z \lambda_{4n}] B_{nm} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

n_x , n_y и n_z — единичные векторы вдоль осей x , y и z .

Поля внутри слоя, связанные с отклонением $\epsilon(x, z)$ от среднего значения ϵ_0 , обозначим через $E'_2(r, t)$ и $E'_3(r, t)$. Они удовлетворяют уравнению

$$-\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0\right) E'_{2,3} + \nabla(\nabla E'_{2,3}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' E'_{2,3}(r, t). \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6), описывающее электрическое поле внутри слоя, появляющееся вследствие возмущения ϵ' , имеет вид

$$\begin{aligned} E'^{\text{вн}}(r, t) &= \sum_{n, m} \exp \{i[(k_x + \xi n)x + k_y y - \omega t]\} \left\{ \eta_{2, nm} \exp \left[i \left(\lambda_2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{2\pi m}{d} \right) z \right] + \eta_{3, nm} \exp \left[i \left(-\lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} \right) z \right] + P_{nm} \exp(i\lambda_{2n} z) + \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + Q_{nm} \exp(-i\lambda_{2n} z) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} (\eta_{nm})_{2,3} &= \frac{a_{nm}}{\epsilon_0} \times \\ &\times \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 E_{2,3} - \left(\xi n E_{2,3,x} + \frac{2\pi m}{d} E_z \right) \left(k_{2,3} + \frac{2\pi m}{d} n_z + n \xi n_x \right)}{n^2 \xi^2 + (2\pi m/d)^2 + 2n\xi k_x \pm (4\pi m/d) \lambda_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем

$$k_{2,3} = n_x k_x + n_y k_y \pm n_z \lambda_2,$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - k_x^2 - k_y^2 \right)^{1/2}, \\ \lambda_{2n} &= \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 - (k_x + \xi n)^2 - k_y^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь $E_{2,3}$ — амплитуды полей $E_{2,3}(r, t)$ внутри слоя, P_{nm} и Q_{nm} — амплитуды полей, являющихся свободными решениями (6) внутри пластины и распространяющихся в направлениях $+z$ и $-z$ соответственно. Определяются они из граничных условий, причем

$$[n_x(k_x + \xi n) + n_y k_y \pm n_z \lambda_{2n}] (P_{nm}, Q_{nm}) = 0. \quad (10)$$

Приведенные формулы наряду с граничными условиями позволяют получить все фазовые и амплитудные соотношения между падающей и дифрагированными волнами.

2. ФАЗОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Угловое распределение отраженных в область $z < 0$ и преломленных в область $z > d$ гармоник дается следующими формулами:

$$\begin{aligned}\sin \theta_{1n} &= \left\{ \sin^2 \theta_0 + \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\lambda}{l} n + \frac{\lambda^2}{l^2} n^2 \right\}^{1/2}, \\ \sin \theta_{2n} &= \left\{ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2 \theta_0 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \frac{\lambda}{l} n + \frac{\lambda^2}{l^2} n^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (11)$$

В формулах (11) θ_0 и φ_0 — углы, образованные волновым вектором падающей волны с осями z и x соответственно, n — номер гармоники, λ — длина волны, θ_{1n} и θ_{2n} — углы, образованные волновыми векторами высших гармоник с осью z в областях $z < 0$ и $z > d$ соответственно. Первая формула (11) относится к области $z < 0$, а вторая — к $z > d$.

3. АМПЛИТУДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Запишем магнитные поля в областях $z < 0$ и $z > d$ в виде, аналогичном (3),

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1' &= \sum_{n, m \neq 0} \mathbf{H}_{n m}' \exp \{i [(k_x + \xi n)x + k_y y - \lambda_{1n} z - \omega t]\}, \\ \mathbf{H}_4'' &= \sum_{n, m \neq 0} \mathbf{H}_{n m}'' \exp \{i [(k_x + \xi n)x + k_y y + \lambda_{4n} z - \omega t]\},\end{aligned}\quad (12)$$

а магнитные поля внутри слоя будут иметь вид

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{\text{вн}} &= \sum_{n, m \neq 0} \left\{ \frac{c}{\omega} \left[\left(\mathbf{k}_2 + \frac{2\pi n}{l} \mathbf{n}_x + \frac{2\pi m}{d} \mathbf{n}_y \right) (\eta_{nm})_2 \right] \exp \left[i \left(\lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} \right) z \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{\omega} \left[\left(\mathbf{k}_3 + \frac{2\pi n}{l} \mathbf{n}_x + \frac{2\pi m}{d} \mathbf{n}_y \right) (\eta_{nm})_3 \right] \exp \left[i \left(-\lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} \right) z \right] + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{C}_{nm} \exp(i\lambda_{2n} z) + \mathbf{R}_{nm} \exp(-i\lambda_{2n} z)] \right\} \exp \{i [(k_x + \xi n)x + k_y y - \omega t]\}.\end{aligned}\quad (13)$$

Тогда условия на границах $z = 0$ и $z = d$ дадут для амплитуд электрических и магнитных полей внутри слоя следующие выражения:

$$(P_z)_{nm} = \frac{1}{\Delta_{nm}} \left\{ \left(\lambda_{2n} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) (f_2 + f_3)_{nm} \exp(-i\lambda_{2n}d) - \left(\lambda_{2n} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{1n} \right) [\tilde{f}_2 \exp(i\lambda_2 d) + \tilde{f}_3 \exp(-i\lambda_2 d)]_{nm} \right\}, \quad (14)$$

$$(C_z)_{nm} = \frac{1}{\Delta_{nm}^*} \{ (\lambda_{2n} + \lambda_{4n}) (s_2 + s_3)_{nm} \exp(-i\lambda_{2n}d) - (\lambda_{2n} - \lambda_{1n}) [\tilde{s}_2 \exp(i\lambda_2 d) + \tilde{s}_3 \exp(-i\lambda_2 d)]_{nm} \}.$$

$(Q_z)_{nm}$ и $(R_z)_{nm}$ получаются из $(P_z)_{nm}$ и $(C_z)_{nm}$ соответственно заменой $\lambda_{2n} \rightarrow -\lambda_{2n}$.

В формулах (14)

$$\Delta_{nm} = \left(\lambda_{2n} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{1n} \right) \left(\lambda_{2n} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) \exp(-i\lambda_{2n}d) - \left(\lambda_{2n} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{1n} \right) \left(\lambda_{2n} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) \exp(i\lambda_{2n}d),$$

$$(f_2)_{nm} = - \frac{a_{nm}}{\epsilon_0} \left\{ \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{1n} E_{2z} + \left[n^2 \xi^2 + \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 + 2n\xi k_x + \frac{4\pi m}{d} \lambda_2 \right]^{-1} \times \right. \\ \times \left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \left(\lambda_2 + \tau_z + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{1n} \right) E_{2z} - \left(\lambda_{2n}^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{1n} \left[\lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} \right] \right) \times \right. \\ \left. \left. \times \left(\xi n E_{2x} + \frac{2\pi m}{d} E_{2z} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

$$(s_2)_{nm} = - \frac{\omega}{c} a_{nm} \left(\lambda_2 + \lambda_{1n} + \frac{2\pi m}{d} \right) \left(k_x E_{2y} - k_y E_{2x} + 2\pi \frac{n}{l} E_{2y} \right);$$

Δ_{nm}^* получается из Δ_{nm} , если в последнем положить $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$; $(f_3)_{nm}$ и $(s_3)_{nm}$ получаются из $(f_2)_{nm}$ и $(s_2)_{nm}$ соответственно заменой $\lambda_2 \rightarrow -\lambda_2$; $(\tilde{f}_{2,3})_{nm}$ получаются из $(f_{2,3})_{nm}$ заменой $\frac{1}{\epsilon_1} \lambda_{1n} \rightarrow -\lambda_{4n} \frac{1}{\epsilon_2}$, а $(\tilde{s}_{2,3})_{nm}$ получаются из $(s_{2,3})_{nm}$ заменой $\lambda_{1n} \rightarrow -\lambda_{4n}$.

Формулы (14) и (15) дают возможность из граничных условий определить z -компоненты амплитуд отраженных и преломленных полей.

Выпишем в явном виде амплитуды дифрагированных в область $z < 0$ волн:

$$(A_z)_{nm} = \frac{a_{nm}}{\epsilon_1 \Delta_{nm}} \left\{ (a_1)_{nm} E_{2z} + (a_1^*)_{nm} E_{3z} + \right. \\ \left. + (a_2)_{nm} 2\pi \left(\frac{n}{l} E_{2x} + \frac{m}{d} E_{2z} \right) + (a_2^*)_{nm} 2\pi \left(\frac{n}{l} E_{3x} + \frac{m}{d} E_{3z} \right) \right\}, \quad (16)$$

$$H'_{nm} = \frac{\omega}{c} \frac{a_{nm}}{\Delta_{nm}^*} \left\{ \xi_{nm} \left(k_x E_{2y} - k_y E_{2x} + \frac{2\pi n}{l} E_{2y} \right) + \right. \\ \left. + \xi_{nm}^* \left(k_x E_{3y} - k_y E_{3x} + \frac{2\pi n}{l} E_{3y} \right) \right\}.$$

В формулах (16)

$$\begin{aligned}
 (\alpha_1)_{nm} = & \lambda_{2n} \left[\left(\lambda_{2n} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) \exp(-i\lambda_{2n}d) - \left(\lambda_{2n} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) \exp(i\lambda_{2n}d) - \right. \\
 & - 2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \exp(i\lambda_2 d) \left. \right] + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \left[\xi^2 n^2 + \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 + 2n\xi k_x + \frac{4\pi m}{d} \lambda_2 \right]^{-1} \times \\
 & \times \left[\left(\lambda_{2n} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \lambda_{4n} \right) \left(\lambda_{2n} - \lambda_2 - \frac{2\pi m}{d} \right) \exp(-i\lambda_{2n}d) - \right. \\
 & - \left(\lambda_{2n} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) \left(\lambda_{2n} + \lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} \right) \exp(i\lambda_{2n}d) - \\
 & \left. - 2\lambda_{2n} \left(\lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \lambda_{4n} \right) \exp(i\lambda_2 d) \right], \\
 \xi_{nm} = & \exp(-i\lambda_{2n}d) (\lambda_{2n} + \lambda_{4n}) \left(\lambda_{2n} - \lambda_2 - \frac{2\pi m}{d} \right) - \\
 & - \exp(i\lambda_{2n}d) (\lambda_{2n} - \lambda_{4n}) \left(\lambda_{2n} + \lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} \right) + \\
 & + 2\lambda_{2n} \left(\lambda_2 + \frac{2\pi m}{d} - \lambda_{4n} \right) \exp(i\lambda_2 d).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Величины $(\alpha_{1,2}^*)_{nm}$ и ξ_{nm}^* получаются из $(\alpha_{1,2})_{nm}$ и ξ_{nm} заменой $\lambda_2 \rightarrow -\lambda_2$.

Формулы (16) дают z -компоненты электрических и магнитных полей. Остальные компоненты без труда определяются из

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{n}_x(k_x + \xi n) + \mathbf{n}_y k_y - \mathbf{n}_z \lambda_{1n}] \mathbf{A}_{nm} = 0, \\
 [\{\mathbf{n}_x(k_x + \xi n) + \mathbf{n}_y k_y - \mathbf{n}_z \lambda_{1n}\} \mathbf{A}_{nm}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}'_{nm}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты $(\alpha_2)_{nm}$ и $(\alpha_2^*)_{nm}$ определяют повороты плоскости поляризации высших гармоник отраженного поля относительно основной, а нули выражений

$$\mathbf{F}_{nm}^\pm(\omega, \theta_0, \varphi_0) = n^2 \xi^2 + \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 + 2n\xi k_x \pm \frac{2\pi m}{d} \lambda_2 \tag{19}$$

дают угловое и частотное распределение полос непрозрачности гофрированного слоя.

На первый взгляд распределение полос непрозрачности не зависит от формы поверхности. Однако форма поверхности определяет форму разложения $\epsilon(x, z)$ в ряд (в частности, l и d) и таким образом неявно входит в формулу (19).

В заключение остановимся на условиях применимости теории возмущений. Рассмотрим для примера простейшую для расчета форму поверхности, когда в диэлектрике с $\epsilon = \epsilon_1$ находятся периодически расположенные прямоугольные ступеньки с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Толщину ступеньки обозначим через l_0 . Тогда толщина слоя диэлектрика с $\epsilon = \epsilon_1$ будет $l - l_0$. Условие $\epsilon' \ll \epsilon_0$ грубо сводится к условию

$$\left| \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\pi} \sin \frac{\pi l_0}{l} \right| \ll \frac{|\epsilon_2 l_0 + \epsilon_1(l - l_0)|}{l}. \tag{20}$$

Как видно из (20), условие $\varepsilon' \ll \varepsilon_0$ выполняется либо при

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \ll \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \varepsilon_1}{l} \quad (21)$$

(если l_0 сравнимо с l), либо при

$$\frac{\sin(\pi l_0/l)}{\pi l_0/l} \ll \frac{\varepsilon_2 l_0 + \varepsilon_1 (l - l_0)}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| l_0} \quad (22)$$

(если разность $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ не мала).

Для более сложных поверхностей условия (20) — (22) будут конечно сложнее, и в них войдет высота профилированного слоя d .

В заключение заметим, что так как в окончательные формулы ε_1 и ε_2 входят через a_{nm} и ε_0 , эти формулы применимы и в случае, когда диэлектрическая проницаемость при $z < 0$ равна ε_3 , а при $z > d$ равна ε_4 . Для этого достаточно во всех формулах, кроме (20) — (22), заменить $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_3$ и $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_4$. Никаких ограничений на $\varepsilon_{3,4}$ не накладывается.

Автор благодарен Б. М. Болотовскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 88, № 2, 209 (1966).
2. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 94, № 3, 377 (1968).
3. Л. Бриллюэн, М. Пироди, Распространение электромагнитных волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.
4. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
5. О. С. Мергелян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 9, 1412 (1970).

Институт радиофизики и электроники
АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
15 июня 1971 г.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON A DIELECTRIC CORRUGATED SURFACE

O. S. Mergelyan

The problem of the diffraction on a dielectric corrugated surface has been solved in the perturbation theory approximation. Expressions have been derived for amplitude and angular distribution of scattered fields.