ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 538.56

К ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

Г. Ф. Ефремов

Рассматривается вопрос о связи тепловых флуктуаций в неравновесных системах с нелинейными свойствами системы. Получены точные соотношения между нелинейными восприимчивостями третьего порядка и спектральными плотностями второго порядка по внешней силе. Общая теория применяется к исследованию электрических флуктуаций.

В данной работе, следуя [1], мы продолжим рассмотрение соотношений между флуктуациями в неравновесных системах и нелинейными свойствами системы.

Пусть на систему действует возмущение вида*

$$V(t) = -X_a Q_a(t), \tag{1}$$

где X_a — операторы физических величин, характеризующих систему; $Q_a(t)$ — внешние заданные силы.

Внешние силы $Q_a(t)$ разложим в интеграл Фурье

$$Q_a(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_a(\omega). \tag{1a}$$

Влияние возмущения (1) на систему будем характеризовать обобщенными восприимчивостями, определяющими средние значения физических величин:

$$\begin{aligned}\langle X_a^{\Gamma}(t)\rangle = &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi}\chi_{ab}(\omega_1) f_b(\omega_1)\exp(-i\omega_1 t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1}{2\pi}\times\\ &\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_2}{2\pi}\chi_{abc}(\omega_1,\omega_2) f_b(\omega_1) f_c(\omega_2)\exp[-i(\omega_1+\omega_2)t] + \\ &+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_3}{2\pi}\chi_{abcd}(\omega_1,\omega_2,\omega_3) f_b(\omega_1) f_c(\omega_2) f_d(\omega_3)\times\\ &\times\exp[-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t] + \ldots\end{aligned} \tag{2}$$

($\chi_{ab}(\omega_1)$, $\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2)$ и $\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — соответственно линейная и нелинейные восприимчивости второго и третьего порядков по внешней

---

* В момент времени $t = -\infty$ $Q_a = 0$, и состояние системы описывается матрицей плотности канонического ансамбля Гиббса

$$\rho_0 = \exp[(\beta/\hbar)(F - H_0)],$$

где H_0 — гамильтониан невозмущенной системы; F — свободная энергия; $\beta = \hbar/kT$.

силе), и спектральными плотностями, определяющими корреляцию флуктуаций во времени*:

$$\left\langle \frac{1}{2}\left(X_a^\Gamma(t) X_b^\Gamma(t_1) + X_b^\Gamma(t_1) X_a^\Gamma(t)\right)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \exp\left[-i\omega_1(t-t_1)\right] \times$$
$$\times \left\{ \Phi_{ab}(\omega_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \Phi_{abc}(\omega_1; \omega_2) f_c(\omega_2) \exp(-i\omega_2 t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \times \right. \tag{3}$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_3}{2\pi} \Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3) f_c(\omega_2) f_d(\omega_3) \exp\left[-i(\omega_2+\omega_3)t\right] + \ldots \right\}$$

($\Phi_{ab}(\omega_1)$ — спектральная плотность равновесных флуктуаций, $\Phi_{abc}(\omega_1; \omega_2)$ и $\Phi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — спектральные плотности соответственно первого и второго порядков по внешней силе)**.

В работе [1] показано, что спектральные плотности первого порядка по внешней силе определяются квадратичными нелинейностями (см. (3.17 I), (3.18 I))***

$$\Phi_{abc}(\omega_1; \omega_2) = -i\hbar\left[\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2) - \varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \chi^*_{cab}(\omega_0, \omega_1)\right] \times$$
$$\times \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) - i\hbar\left[\chi_{bac}(\omega_0, \omega_2) - \varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \chi^*_{cab}(\omega_0, \omega_1)\right] \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right), \tag{4}$$

где частоты $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ удовлетворяют условию

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0;$$

множители ε^a равны 1 или -1 в зависимости от того, является ли величина X_a четной или нечетной относительно изменения знака времени.

В настоящей работе получены точные соотношения между спектральными плотностями второго порядка и кубичными нелинейностями (вывод их дан в Приложении)****:

$$\left\{\frac{3\hbar}{2i}\left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\chi_{bacd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\right] - \right.$$
$$\left. - \Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3)\right\} \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) = \varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d \left\{\frac{3\hbar}{2i}\left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \times \right.\right. \tag{5}$$
$$\times \chi_{cdab}(\omega_3, \omega_0, \omega_1) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)\chi_{dcab}(\omega_2, \omega_0, \omega_1)\Big] -$$
$$\left. - \Phi_{dcab}(\omega_2; \omega_0, \omega_1)\right\}^* \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right).$$

---

* Мы ограничиваемся корреляционной теорией флуктуаций в неравновесных системах. $X_a^\Gamma(t)$, $X_b^\Gamma(t_1)$ — гейзенберговские операторы; угловые скобки означают усреднение по ансамблю Гиббса.

** Обобщенные восприимчивости и спектральные плотности связаны преобразованием Фурье (1.8), (1.9) из [1] с функциями реакции и функциями $\Psi_{ab}(t, t_1)$, $\Psi_{abc}(t, t_1, t_2)$..., определяемыми (1.5), (1.7) из [1].

*** При ссылке на формулы [1] будем отмечать их римской цифрой I.

**** Еще два соотношения получаются перестановкой индексов a, b, c, d с соответствующими частотами ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, причем $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

Соотношения (5), так же как и ранее полученные формулы (4), являются следствием симметрии уравнений движения относительно обращения времени и распределения Гиббса*.

Используя формулы (5) и дисперсионные соотношения для нелинейных восприимчивостей (П.28), можно показать, что кубичные нелинейности однозначно определяются спектральными плотностями второго порядка**.

В общем случае (по крайней мере без дополнительных предположений) при отличной от нуля температуре спектральные плотности второго порядка однозначно не определяются кубичными нелинейностями***.

В предельном случае $T \to 0$ $(\beta \to \infty)$ при $\omega_0 + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3 = 0$ (стационарные флуктуации) из (5) находим, что спектральные плотности $\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, -\omega_2)$ $(|\omega_1| > |\omega_2|)$ выражаются через кубичные нелинейности

$$\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, -\omega_2) = \frac{3\hbar}{2i}[\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, -\omega_2) - \chi_{bacd}(-\omega_1, \omega_2, -\omega_2)] \operatorname{sgn}(\omega_1). \tag{6}$$

Кроме этого, при дополнительных условиях (отсутствие «линейной» диссипации на определенных частотах) из (5) могут быть получены различные случаи «приближенных соотношений», определяющих спектральные плотности второго порядка кубичными нелинейностями (одной из таких формул является формула Файна и Ящина [3]****). Ограничимся рассмотрением простого случая. Пусть при $\omega_3 \to 0$ $\chi_{dcab}(\omega_2, \omega_0, \omega_1)$ и $\Phi_{dcab}(\omega_2; \omega_0, \omega_1)$ не имеют особенности вида $1/\omega_3$. Тогда в пределе при $\omega_3 \to 0$ из (5) получаем

$$\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, 0) = \frac{3\hbar}{2i} P_{01}\left\{\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)[\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, 0) - \right. \\ \left. - \varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d \chi^*_{cabd}(\omega_0, \omega_1, 0)]\right\}, \tag{7}$$

где P_{01} — оператор суммы перестановок $a\,\omega_0$, $b\,\omega_1$. Если и при $\omega_2 \to 0$ $\chi_{cabd}(\omega_0, \omega_1, 0)$ не имеет особенности вида $1/\omega_2$, то, переходя в (7) к пределу $\omega_2 \to 0$, находим

$$\Phi_{abcd}(\omega; 0, 0) = \frac{3\hbar}{2i}[\chi_{abcd}(\omega, 0, 0) - \chi^*_{bacd}(\omega, 0, 0)] \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right). \tag{8}$$

Отсутствие отмеченных выше особенностей вида $1/\omega_3$, $1/\omega_2$ физически связано с отсутствием диссипации энергии при действии постоянных сил $f_d(0), f_c(0)$ на систему. Для подтверждения этого выведем формулы (7) и (8), непосредственно используя условие отсутствия диссипации при действии сил $f_d(0)$, $f_c(0)$. Предположим, что постоян-

---

* При выводе (4), (5) предполагалось, что невозмущенная система $(t = -\infty)$ не находится во внешнем магнитном поле и не обладает «магнитной структурой» (см. [2], стр. 469).

** Здесь мы не приводим вывода этих соотношений (см. Приложение).

*** Из определений (3), (2) следует, что имеется шесть спектральных плотностей второго порядка и четыре кубичных нелинейности, получаемых перестановкой индексов a, b, c, d с соответствующими частотами ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 Действительно, из (3) имеем соотношения симметрии

$$\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3) = \Phi_{bacd}(\omega_0; \omega_2, \omega_3) = \Phi_{abdc}(\omega_1; \omega_3, \omega_2).$$

**** В данной работе мы не имеем возможности остановиться на этих вопросах. Тем не менее, уместно отметить, что «приближенные соотношения» (в их ланжевеновской формулировке) могут играть важную роль в конкретных применениях (например, в теории рассеяния света).

ные во времени внешние силы $f_d(0)$ не приводят к диссипации энергии в системе.

Равновесное состояние системы в присутствии сил $f(0)$ описывается распределением Гиббса. Для этого случая формула Каллена—Вельтона и формула (3) имеют соответственно вид*

$$\Phi_{ab}(\omega;\ f(0)) = \frac{\hbar}{2i}\,[\chi_{ab}(\omega; f(0)) - \chi^*_{ba}(\omega; f(0))]\ \mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right); \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{abc}(\omega_1;\ \omega_2;\ f(0)) = \frac{\hbar}{i}P_{01}\left\{\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)[\chi_{abc}(\omega_1, \omega_2; f(0)) - \right.\\ \left. - \varepsilon^a\varepsilon^b\varepsilon^c\varepsilon^d\chi^*_{cab}(\omega_0,\ \omega_1;\ \varepsilon^d f_d(0))]\right\}.\end{gathered} \tag{10}$$

Разлагая (10) по степеням внешней силы $f(0)$, в первом порядке по $f(0)$ получим формулу (7). При разложении (9) по степеням внешней силы во втором порядке по $f(0)$ приходим к формуле (8).

Для конкретного применения формул (4) —(6) необходимо выяснить, какая величина играет роль обобщенной силы по отношению к интересующей нас переменной. Это легко сделать, если нам известно изменение средней энергии (см. [4], § 87)

$$\frac{dE}{dt} = -\ \langle X^{\Gamma}_a(t) \rangle\,\frac{df_a(t)}{dt}. \tag{11}$$

Пусть, например, на проводник (или полупроводник) с инверсионной симметрией наложено внешнее электрическое поле

$$\vec{\mathscr{E}}(r,\ t) = \sum_k \vec{\mathscr{E}}(r,\ \omega_k)\exp(-\,i\,\omega_k\,t). \tag{12}$$

Скорость изменения средней энергии в этом случае

$$\frac{dE}{dt} = \int dr\,\langle\, j_\alpha(r,\ t)\,\rangle\,\mathscr{E}_\alpha(r,\ t). \tag{13}$$

Если в качестве величины X_a выбрать компоненты плотности тока $j_\alpha(r)$, то, сравнивая (11) и (13), находим сопряженную с $j_\alpha(r)$ внешнюю силу $f_a(\omega) = \mathscr{E}_\alpha(r,\ \omega)/i\,\omega$.

В сильном электрическом поле средняя плотность тока есть нелинейная функция приложенного поля. Для среды без дисперсии эта зависимость имеет вид**

$$\begin{gathered}\langle\, j_\alpha(r,\ t)\,\rangle = \sigma_{\alpha\beta}\mathscr{E}_\beta(r,\ \omega_k)\exp(-\,i\,\omega_k\,t) + \sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathscr{E}_\beta(\omega_k,\ r)\,\times\\ \times\,\mathscr{E}_\gamma(\omega_l,\ r)\,\mathscr{E}_\delta(\omega_m,\ r)\exp[-\,i(\omega_k + \omega_l + \omega_m)\,t].\end{gathered} \tag{14}$$

Корреляцию флуктуаций плотности тока представим в виде**

---

* Наличие сил $f_d(0)$ меняет лишь вывод (10), если величина X_d, сопряженная с $f_d(0)$, нечетна относительно изменения знака времени.

** В среде с центром инверсии $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0$. В (14) мы опускаем знаки суммирования по индексам k, l, m.

*** (15) аналогично разложению вида (3), поскольку при (12)

$$\vec{\mathscr{E}}(r,\ \omega) = \sum_k \vec{\mathscr{E}}(r,\ \omega_k)\,2\,\pi\delta(\omega - \omega_k);$$

δ-корреляция флуктуаций плотности тока связана с пренебрежением пространственной дисперсией.

$$\left\langle \frac{1}{2} [j_\alpha(r, t), j_\beta(r_1, t_1)]_+ \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \exp[-i\omega_1(t - t_1)] \times$$
$$\times [\Phi_{\alpha\beta}(\omega_1) + \Phi^{\mathcal{E}}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1; \omega_l, \omega_m) \mathcal{E}_\gamma(r, \omega_l) \mathcal{E}_\delta(r, \omega_m) \times$$
$$\times \exp[-i(\omega_l + \omega_m)t] + \ldots] \delta(r - r_1). \tag{15}$$

Сравнивая (2), (3) и (14), (15), находим, что роль $\chi_{ab}(\omega_1)$ $\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_l, \omega_m)$, $\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_l, \omega_m)$ играют соответственно $i\omega_1 \sigma_{\alpha\beta}$, $-i\omega_1 \omega_l \omega_m \sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $-\omega_l \omega_m \Phi^{\mathcal{E}}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1; \omega_l, \omega_m)$. В классическом пределе формула (5) для нашего случая имеет вид

$$\Phi^{\mathcal{E}}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 3kT[\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sigma_{\beta\alpha\gamma\delta}] = \Phi^{\mathcal{E}}_{\gamma\delta\alpha\beta} - 3kT[\sigma_{\gamma\delta\alpha\beta} + \sigma_{\delta\gamma\alpha\beta}]. \tag{16}$$

Из формулы (16), в частности, следует, что при известных проводимостях ($\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}, \ldots$) корреляция флуктуаций $\langle j_\alpha(r, t) j_\beta(r_1, t_1) \rangle$ в присутствии полей $\mathcal{E}_\gamma$, $\mathcal{E}_\delta$ определяет корреляцию флуктуаций $\langle j_\gamma(r, t) j_\delta(r_1, t_1) \rangle$ при действии полей $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$.

При нулевой температуре из формулы (6) находим ($\omega_2 = \omega_l; |\omega_1| > |\omega_l|$)

$$\Phi^{\mathcal{E}}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_1; \omega_l, -\omega_l) = \frac{3}{2} \hbar\omega_1 [\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sigma_{\beta\alpha\gamma\delta}] \operatorname{sgn}(\omega_1). \tag{17}$$

Принимая во внимание (17) и формулу Каллена—Вельтона (см. 2.37 I)

$$\Phi_{\alpha\beta}(\omega_1) = \hbar\omega_1 \sigma_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}(\omega_1),$$

из (15) находим

$$(j_\alpha(r) j_\beta(r_1))_{\omega_1} = \hbar\omega_1 \left\{ \sigma_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} [\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sigma_{\beta\alpha\gamma\delta}] \mathcal{E}_\gamma(\omega_l, r) \times \right.$$
$$\left. \times \mathcal{E}^*_\delta(\omega_l, r) \right\} \operatorname{sgn}(\omega_1) \delta(r - r_1).$$

Таким образом, в квантовом случае ($\hbar\omega_1 \gg kT$) спектральная плотность флуктуаций плотности тока на частоте ω_1, большей, чем частота ω_l действующего на систему электрического поля, определяется проводимостями.

В качестве другого примера рассмотрим нелинейный элемент, вольт-амперная характеристика которого при наличии тока,

$$I(t) = \sum_k I(\omega_k) \exp(-i\omega_k t), \tag{18}$$

имеет вид

$$\langle u(t) \rangle = Z(\omega_k) I(\omega_k) \exp(-i\omega_k t) + Z_2(\omega_k, \omega_l) I(\omega_k) \times$$
$$\times I(\omega_l) \exp[-i(\omega_k + \omega_l)t] + Z_3(\omega_k, \omega_l, \omega_m) I(\omega_k) \times \tag{19}$$
$$\times I(\omega_l) I(\omega_m) \exp[-i(\omega_k + \omega_l + \omega_m)t] + \ldots$$

Рассмотрим флуктуации напряжения на нелинейном элементе при протекающем через него токе (18). Корреляцию флуктуаций напряжения запишем в виде

$$\left\langle \frac{1}{2} [u(t), u(t_1)]_+ \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \exp[-i\omega_1(t - t_1)] \{\Phi(\omega_1) + \Phi^I(\omega_1, \omega_l) \times$$
$$\times I(\omega_l) \exp(-i\omega_l t) + \Phi^I(\omega_1; \omega_l, \omega_m) I(\omega_l) I(\omega_m) \exp[-i(\omega_l + \omega_m)t]\}. \tag{20}$$

Из выражения для изменения средней энергии

$$\frac{dE}{dt} = \langle u(t) \rangle I(t) = - \langle X_a(t) \rangle \dot{f}_a(t)$$

находим сопряженную с u внешнюю силу $f_\omega = I_\omega / i\omega$. Тогда роль обобщенных восприимчивостей и спектральных плотностей из общей теории будут играть соответственно

$$i\omega_1 Z(\omega_1), \; -\omega_1\omega_l Z_2(\omega_1, \omega_l), \; -i\omega_1\omega_l\omega_m Z_3(\omega_1, \omega_l, \omega_m);$$

$$\Phi(\omega_1), \; i\omega_l \Phi^I(\omega_1; \omega_l), \; -\omega_l\omega_m \Phi^I(\omega_1; \omega_l, \omega_m).$$

Используя формулы (2.37 I), (4) и (5), находим ($\varepsilon^a = \varepsilon^b = \varepsilon^c = \varepsilon^d = 1$)

$$\Phi(\omega) = \hbar\omega Z'(\omega)\cdot\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right); \tag{21}$$

$$\Phi^I(\omega_1; \omega_2) = \hbar\omega_0 Z_2(\omega_0, \omega_2)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \hbar\omega_1 Z_2(\omega_1, \omega_2) \times$$
$$\times\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_0\omega_1}{\omega_0+\omega_1} Z_2^*(\omega_0, \omega_1)\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\right]; \tag{22}$$

$$\left[3\hbar\omega_1 Z_3'(\omega_1, \omega_2, -\omega_2)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) - \Phi^I(\omega_1; \omega_2, -\omega_2)\right] \times$$
$$\times\,\omega_2^2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) = \left[3\hbar\omega_2 Z_3'(\omega_2, \omega_1, -\omega_1)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) - \right. \tag{23}$$
$$\left. - \Phi^I(\omega_2; \omega_1, -\omega_1)\right]\omega_1^2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right),$$

где $Z'(\omega)$, $Z_3'(\omega_1, \omega_2, -\omega_2)$ — действительные части импедансов. В простейшем случае, когда через нелинейные элементы протекает постоянный ток I_0, из формул (22), (23) в пределе $\omega_0 \to 0$ получаем

$$\Phi^I(\omega; 0) = \hbar\omega\left[2Z_2'(\omega, 0)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) + \frac{\beta\omega}{3} Z_2(\omega, -\omega)\,\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)\right]; \tag{24}$$

$$\left[3\hbar\omega Z_3'(\omega, 0, 0)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) - \Phi^I(\omega; 0, 0)\right] =$$
$$= [2kT\,3Z_3(0, \omega, -\omega) - \Phi^I(0, \omega, -\omega)]\left(\frac{\beta\omega}{2}\right)^2\mathrm{sh}^{-2}\left(\frac{\beta\omega}{2}\right). \tag{25}$$

При нулевой температуре спектральная плотность флуктуаций напряжения определяется формулой

$$(u^2)_\omega = \hbar\omega[Z'(\omega) + 2Z'(\omega, 0)I_0 + 3Z'(\omega, 0, 0)I_0^2]\,\mathrm{sgn}(\omega) =$$
$$= \hbar\omega Z'(\omega, I_0)\,\mathrm{sgn}(\omega), \tag{26}$$

где $Z'(\omega, I_0)$ есть сопротивление на частоте ω при протекающем через нелинейный элемент постоянном токе I_0. В предельном классическом случае ($\hbar\omega \ll kT$) спектральная плотность $(u)^2{}_\omega$ определяется только до первого порядка по току I_0:

$$(u^2)_\omega = 2kT\,\{Z_1'(\omega) + 2Z_2'(\omega, 0)I_0 + Z_2(\omega, -\omega)I_0\}. \tag{27}$$

Выражение в фигурных скобках определяет диссипацию энергии на частоте ω при протекающем через нелинейный элемент постоянном токе I_0 (диссипативное сопротивление). В этом смысле (27) обобщает формулу Найквиста. Для нелинейного элемента без дисперсии $Z'(\omega) = R_1$, $Z_2'(\omega, 0) = Z(\omega, -\omega) = R_2$; из (27) приходим к формуле

$$(u^2)_\omega = 2kT\{R_1 + 3R_2 I_0\}, \tag{28}$$

полученной Стратоновичем [5].

Полученные в настоящей работе формулы (5) в сущности есть соотношения симметрии выражения

$$\left\{\frac{3\hbar}{2i}\left[\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \chi_{bacd}(\omega_0, \omega_2, \omega_3)\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3)\right\}\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)$$

относительно перестановки $a\,\omega_0$; $b\,\omega_1 \rightleftarrows c\,\omega_2$; $d\,\omega_3$. При $\varepsilon^a\varepsilon^b\varepsilon^c\varepsilon^d=1$ действительная часть этого выражения симметрична относительно перестановки $a\,\omega_0$; $b\,\omega_1 \rightleftarrows c\,\omega_2$; $d\,\omega_3$, а мнимая часть антисимметрична.

Соотношения (5) уменьшают число независимых величин и связывают между собой различные физические эффекты. В этом смысле (5) аналогичны соотношениям взаимности Онзагера. Однако, в отличие от линейных соотношений взаимности, они одновременно включают не только динамические характеристики (кубичные нелинейности), но и величины (спектральные плотности второго порядка), определяющие флуктуации в неравновесных системах. Впервые на это обстоятельство обратил внимание Стратонович [7, 8], рассматривая «нелинейные соотношения взаимности» для внутренних термодинамических параметров.

В заключение отметим, что макроскопическая корреляционная теория тепловых флуктуаций в неравновесных системах (в частности, теория рассеяния света в нелинейной среде) может быть построена на основе обобщенной флуктуационно-диссипационной теоремы, включающей в себя теорему Каллена—Вельтона (2.37 I) и формулы (4)—(6).

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность В. М. Файну, М. А. Новикову и В. Б. Цареградскому за обсуждение вопросов, затронутых в работе, а также А. А. Викторовой за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод формул (5) основан на том, что $\Psi_{abcd}(t, t_1; t_2, t_3)$ и $\varphi_{abcd}(t, t_1, t_2, t_3)$ (связанные с $\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3)$, и $\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ преобразованием Фурье (1.9 I) выражаются через вспомогательные функции (2.22 I) (см. (2.24 I)):

$$G(t, t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{i}\langle T[X_a(t)X_b(t_1)X_c(t_2)X_d(t_3)]\rangle; \tag{П.1}$$

$$A_1(t_1; t, t_2, t_3) = i\langle X_b(t_1)T[X_a(t)X_c(t_2)X_d(t_3)]\rangle; \tag{П.2}$$

$$\alpha_{01}(t, t_1; t_2, t_3) = i\langle T[X_a(t)X_b(t_1)]T[X_c(t_2)X_d(t_3)]\rangle - - i\langle X_a(t)X_b(t_1)]_+ T[X_c(t_2)X_d(t_3)]\rangle \tag{П.3}$$

($X_a(t), \ldots, X_d(t_3)$ — гейзенберговские операторы невозмущенной системы; символ T или оператор упорядочения во времени располагает операторы в более ранний момент времени справа от операторов в более поздний момент времени*), для которых легко написать соотношения, используя симметрию уравнений движения относительно обращения времени, распределение Гиббса и условие унитарности S-матрицы (1.4 I).

Перейдем от временного к спектральному описанию, определив преобразование фурье-функций (П.1)—(П.3) соотношениями **

$$A_1(\omega_1; \omega_0, \omega_2, \omega_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_3 \times$$
$$\times \exp(-i\omega_0 t - i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2 - i\omega_3 t_3) A_1(t_1; t, t_2, t_3). \tag{П.4}$$

Поскольку (П.1)—(П.3) являются функциями только разностей $t-t_1$, $t-t_2$, $t-t_3$, то их фурье-образы содержат δ-функцию от $\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3$. Это значит, что можно написать***

$$\begin{gathered} A_1(\omega_1; \omega_0, \omega_2, \omega_3) = 2\pi\delta(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3) A_1(\omega_0, \omega_2, \omega_3), \\ G(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = 2\pi\delta(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3) G(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \\ \alpha_{01}(\omega_0, \omega_1; \omega_2, \omega_3) = 2\pi\delta(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3) \alpha_{01}(\omega_1; \omega_2, \omega_3). \end{gathered} \tag{П.5}$$

Формулы (П.5) следует рассматривать как определения

$$G(\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ A_1(\omega_0, \omega_2, \omega_3),\ \alpha_{01}(\omega_1; \omega_2, \omega_3).$$****

Принимая во внимание (П.4), (П.5), напишем уравнение (2.24 I) в спектральной форме

$$\begin{gathered} 3\hbar^3 [\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \chi_{bacd}(\omega_0, \omega_2, \omega_3)] + i2\hbar^2 \Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3) = \\ = G(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + A_2(\omega_0, \omega_1, \omega_3) + A_3(\omega_0, \omega_1, \omega_2) + \alpha_{23}(\omega_3; \omega_0, \omega_1). \end{gathered} \tag{П.6}$$

Полученные в [1] соотношения (2.25 I), (2.34 I), (2.35 I) с физической точки зрения являются следствием симметрии уравнений движения относительно обращения времени и распределения Гиббса. Чтобы написать их, определим симметричные и антисимметричные части функций (П.5) относительно изменения знака частот*****:

$$A_1^s(\omega_0, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2}[A_1(\omega_0, \omega_2, \omega_3) + A_1(-\omega_0, -\omega_2, -\omega_2)],$$

$$A_1^a(\omega_0, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2}[A_1(\omega_0, \omega_2, \omega_3) - A_1(-\omega_0, -\omega_2, -\omega_3)].$$

Тогда при $\varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d = 1$ имеем соотношения

$$G^s(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = G(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \quad G^a(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0; \tag{П.7а}$$

$$A_1^s(\omega_0, \omega_2, \omega_3) = -\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) A_1^a(\omega_0, \omega_2, \omega_3); \tag{П.8а}$$

---

* Под знаком T-упорядочения операторы как угодно можно переставлять местами. Вследствие этого из операторов $X_a(t)$, $X_b(t_1)$, $X_c(t_2)$, $X_d(t_3)$ можно построить одну причинную функцию Грина (П.1), четыре функции A (П.2) и шесть функций α (П.3).

** Аналогичным образом определяются фурье-образы функций G и α (П.1), (П.3).

*** Введенные ранее с помощью преобразования Фурье спектральные плотности $\Phi_{abcd}(\omega_1; \omega_2, \omega_3)$ и восприимчивости $\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ((1.9 I), (1.8 I)) совпадают с определениями (П.4), (П.5).

**** В [1] даны несколько другие обозначения функций G, A и α.

***** Аналогично определяются симметричные и антисимметричные части функций G, α.

$$\alpha^s_{01}(\omega_1; \omega_2, \omega_3) = -\operatorname{cth}\left[\frac{\beta(\omega_0+\omega_1)}{2}\right]\alpha^a_{01}(\omega_1; \omega_2, \omega_3). \tag{П.9а}$$

Если же $\varepsilon^a\varepsilon^b\varepsilon^c\varepsilon^d = 1$, то имеют место соотношения

$$G^a(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = G(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad G^s(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0; \tag{П.7б}$$

$$A^a_1(\omega_0, \omega_2, \omega_3) = -\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)A^s_1(\omega_0, \omega_2, \omega_3); \tag{П.8б}$$

$$\alpha^a_{01}(\omega_1; \omega_2, \omega_3) = -\operatorname{cth}\left(\frac{\beta(\omega_0+\omega_1)}{2}\right)\alpha^s_{01}(\omega_1; \omega_2, \omega_3). \tag{П.9б}$$

Получим тождества, используя условие унитарности S-матрицы (1.4 I). Заметим, что все функции (П.1)—(П.3) являются коэффициентами разложения (функциональными производными) условия унитарности S-матрицы:

$$\langle S^+(\infty)S(\infty)\rangle = 1. \tag{П.10}$$

Действительно, принимая во внимание формулы (см. 2.9 I)*

$$\frac{\delta S(\infty)}{\delta f_a(t)} = \frac{i}{\hbar}T[S(\infty)X_a(t)]; \quad \frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta f_a(t)\,\delta f_b(t_1)} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \times \times T[S(\infty)X_a(t)X_b(t_1)] \tag{П.11}$$

и (2.11 I), находим

$$iG(t, t_1, t_2, t_3) = \hbar^4\left\langle\frac{\delta^4 S(\infty)}{\delta f_a(t)\,\delta f_b(t_1)\,\delta f_c(t_2)\,\delta f_d(t_3)}\right\rangle\Bigg|_{f=0}; \tag{П.12}$$

$$iA_1(t_1; t, t_2, t_3) = \hbar^4\left\langle\frac{\delta S^+(\infty)}{\delta f_b(t_1)}\,\frac{\delta^3 S(\infty)}{\delta f_a(t)\,\delta f_c(t_2)\,\delta f_d(t_3)}\right\rangle\Bigg|_{f=0}; \tag{П.13}$$

$$i\alpha_{01}(t, t_1; t_2, t_3) = \hbar^4\left\langle\frac{\delta^2 S^+(\infty)}{\delta f_a(t)\,\delta f_b(t_1)}\,\frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta f_c(t_2)\,\delta f_d(t_3)}\right\rangle\Bigg|_{f=0}. \tag{П.14}$$

Из выражения (П.14) получаем

$$-i\alpha^*_{01}(t, t_1; t_2, t_3) = \hbar^4 \operatorname{Sp}\left(\rho_0\frac{\delta^2 S^+(\infty)}{\delta f_c(t_2)\,\delta f_d(t_3)}\,\frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta f_a(t)\,\delta f_b(t_1)}\right)\Bigg|_{f=0} = = i\alpha_{23}(t_2, t_3; t, t_1). \tag{П.15}$$

Здесь мы воспользовались свойством

$$(\operatorname{Sp}\rho_0 K^+L)^* = \operatorname{Sp}[\rho_0 K^+L]^+ = \operatorname{Sp}\rho_0 L^+K. \tag{П.16}$$

Четырехкратное дифференцирование (П.10) с учетом (П.12)—(П.16) приводит к тождеству

$$\operatorname{Im}[G(t, t_1, t_2, t_3) + P^{\text{ц}}_{0123}A_0(t, t_1, t_2, t_3) + P^{\text{ц}}_{123}\alpha_{12} \times \times (t_1, t_2; t, t_3)] = 0, \tag{П.17}$$

где $P^{\text{ц}}_{0123}$ $(P^{\text{ц}}_{123})$ — оператор циклической перестановки индексов 0, 1, 2, 3 (1, 2, 3).

В спектральной форме тождества (П.15), (П.17) принимают вид

* Под знаком T-упорядочения можно дифференцировать, не заботясь о порядке множителей.

$$\alpha_{23}(\omega_3;\,\omega_0,\,\omega_1) = -\alpha^*_{01}(-\omega_1;\,-\omega_2,\,-\omega_3); \tag{П.18}$$

$$G(\omega_1,\omega_2,\omega_3) - G^*(-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3) + P^{\text{ц}}_{0123}[A_0(\omega_1,\omega_2,\omega_3) - A_0^*(-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3)] + P^{\text{ц}}_{123}[\alpha_{12}(\omega_2;\,\omega_0,\omega_3) - \alpha^*_{12}\times (\omega_2;\,\omega_0,\omega_3)] \equiv 0. \tag{П.19}$$

Фундаментальные соотношения (П.7)—(П.9) и тождества (П.18), (П.19), уменьшая число независимых функций G, A и α, приводят к соотношениям (5). Для вывода (5) необходимо выписать все уравнения (П.6) (получающиеся из (П.6) перестановками $a\omega_0$, $b\omega_1$, $c\omega_2$, $d\omega_3$), затем, воспользовавшись (П.7)—(П.9) и тождествами (П.18), (П.19), исключить функции G, A. и α. Мы не будем приводить несложные, но достаточно длинные выкладки, приводящие к (5).

Для проверки (5) убедимся, что подстановка спектральных плотностей второго порядка и кубичных нелинейностей из уравнений (П.6) обращает (5) в тождество.

Запишем исходные уравнения (П.6) и тождества (П.18), (П.19) по отдельности для симметричной и антисимметричной (относительно изменения знака частот) частей при $\varepsilon^a\varepsilon^b\varepsilon^c\varepsilon^d = 1$*:

$$3\hbar^3[\chi_0' + \chi_1'] + i2\hbar^2\Phi'_{01} = G + A_2^s + A_3^s + \alpha^s_{23}; \tag{П.20а}$$

$$i3\hbar^3[\chi_0'' + \chi_1''] - 2\hbar^2\Phi''_{01} = A_2^a + A_3^a + \alpha^a_{23}; \tag{П.20б}$$

$$G'' + A_0''^s + A_1''^s + A_2''^s + A_3''^s + \alpha''^s_{12} + \alpha''^s_{23} + \alpha''^s_{31} = 0; \tag{П.21а}$$

$$A_0'^a + A_1'^a + A_2'^a + A_3'^a + \alpha'^a_{12} + \alpha'^a_{23} + \alpha'^a_{31} = 0; \tag{П.21б}$$

$$\alpha''^s_{23} = \alpha''^s_{01},\quad \alpha'^a_{23} = \alpha'^a_{01},\quad \alpha^s_{23} = \mathrm{cth}\left(\frac{\beta(\omega_0+\omega_1)}{2}\right)\alpha^a_{23} = -\mathrm{cth}\left(\frac{\beta(\omega_2+\omega_3)}{2}\right)\alpha^a_{23}, \tag{П.22}$$

где введены сокращенные обозначения

$$\chi_0' = \chi'_{abcd}(\omega_1,\omega_2,\omega_3),\quad \chi_0'' = \chi''_{abcd}(\omega_1,\omega_2,\omega_3),$$

$$\chi_2 = \chi_{cabd}(\omega_0,\omega_1,\omega_3),$$

$$\Phi'_{01} = \Phi'_{abcd}(\omega_1;\,\omega_2,\omega_3) = \mathrm{Re}\,\Phi_{abcd}(\omega_1;\,\omega_2,\omega_3),$$

$$\Phi''_{23} = \Phi''_{cdab}(\omega_3;\,\omega_0,\omega_1),$$

$$\alpha''^s_{01} = \mathrm{Im}\,\alpha^s_{01}(\omega_1;\,\omega_2,\omega_3),\quad A_2'^a = \mathrm{Re}\,A_2^a(\omega_0,\omega_1,\omega_3),$$

$$G = G^s(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\quad (G^a(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = 0) \text{ и т. д.}$$

Все остальные уравнения получаются из (П.20) перестановкой индексов 0, 1, 2, 3. Комплексное соотношение (5) эквивалентно двум действи-

---

* В силу действительности $\varphi_{abcd}(t, t_1, t_2, t_3)$, $\Psi_{abcd}(t, t_1, t_2, t_3)$ симметричные (антисимметричные) части функций $\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\Phi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$—чисто действительные (мнимые).

тельным уравнениям. Докажем сначала действительную часть соотношения (5)*

$$\left\{3\hbar^3\left[\chi_0''\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)+\chi_1''\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\right]-2\hbar^2\Phi_{01}'\right\}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)\right]=-\left\{3\hbar^3\left[\chi_2''\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)+\chi_3''\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)\right]-\right. \qquad (\Pi.23)$$
$$\left.-\,2\hbar^2\Phi_{23}'\right\}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\right].$$

Подставляя в левую часть уравнения (П.23)

$$3\hbar^3\left[\chi_0''+\chi_1''\right]=A_2''^{a}+A_3''^{a}+\alpha_{23}''^{a},$$
$$3\hbar^3\left[\chi_0''-\chi_1''\right]=A_1''^{a}-A_0''^{a}+\alpha_{31}''^{a}+\alpha_{12}''^{a},$$
$$-2\hbar^2\Phi_{01}'=A_0''^{s}+A_1''^{s}+\alpha_{31}''^{s}+\alpha_{12}''^{s},$$

преобразуем ее с помощью соотношений (П.22) к виду

$$\frac{1}{2}\left\{A_2''^{a}+A_3''^{a}-A_0''^{a}-A_1''^{a}+\alpha_{23}''^{a}\right\}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)\right]+P_{32}\alpha_{31}''^{a}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)-\right.\right. \qquad (\Pi.24)$$
$$\left.\left.-\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\right)-\mathrm{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_1)}{2}\right)\right]\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)\right].$$

Принимая во внимание (П.22) и тождества

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)-\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\right]-\mathrm{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_1)}{2}\right)\right\}\times$$
$$\times\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)\right]=-\left\{\frac{1}{2}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)-\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_1)}{2}\right)\right\}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\right],$$

легко убедиться, что (П.24) антисимметрично относительно перестановки индексов $0,1\rightleftarrows 2,3$, а значит, равно правой части (П.23). Докажем теперь мнимую часть соотношения (5)

$$\left\{3\hbar^3\left[\chi_0'\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)+\chi_1'\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\right]+2\hbar^2\Phi_{01}''\right\}\times$$
$$\times\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)\right]=\left\{3\hbar^3\left[\chi_2'\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)+\chi_3'\,\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right)\right]+\right. \qquad (\Pi.25)$$

---

* Здесь мы воспользовались формулами

$$\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)=\mathrm{sh}\left(\frac{\beta(\omega_0+\omega_1)}{2}\right)\left[\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right)\right]^{-1},$$
$$\mathrm{sh}\left(\frac{\beta(\omega_0+\omega_1)}{2}\right)+\mathrm{sh}\left(\frac{\beta(\omega_2+\omega_3)}{2}\right)=0.$$

$$+ 2\hbar^2 \Phi''_{23} \Big\} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right].$$

Добавляя к левой и правой частям соотношения (П.25)

$$- \left[3\hbar^3 \chi'_0 + A'^s_0\right] \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right] \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right],$$

после подстановки из исходных уравнений

$$3\hbar^3 (\chi'_0 - \chi'_1) + A'^s_0 = A'^s_1 + \alpha'^s_{31} + \alpha'^s_{21},$$
$$3\hbar^3 (\chi'_0 - \chi'_2) + A'^s_0 = A'^s_2 + \alpha'^s_{21} + \alpha'^s_{23},$$
$$3\hbar^3 (\chi'_0 - \chi'_3) + A'^s_0 = A'^s_3 + \alpha'^s_{31} + \alpha'^s_{23},$$
$$2\hbar^2 \Phi''_{01} = A'^a_0 + A'^a_1 + \alpha'^a_{31} + \alpha'^a_{21},$$
$$2\hbar^2 \Phi''_{23} = A'^a_2 + A'^a_3 + \alpha'^a_{31} + \alpha'^a_{21}$$

и преобразования с учетом формул (П.21), (П.22) получим

$$\Big\{ [A'^a_0 + A'^a_1] \left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right] + P_{23}\alpha'^a_{31} \left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_0)}{2}\right) \right] \Big\} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] = \Big\{ (A'^a_2 + A'^a_3) \left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] + \alpha'^a_{23} \operatorname{cth}\left(\frac{\beta(\omega_2+\omega_3)}{2}\right) \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] + P_{32}\alpha'^a_{31} \times \qquad (\text{П.26})$$
$$\times \left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_0)}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \right] \Big\} \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right].$$

Принимая во внимание тождества

$$\left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_1)}{2}\right) \right] \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] =$$
$$= \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta(\omega_3+\omega_0)}{2}\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right],$$

$$\left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right] \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] =$$
$$= - \left[1 + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right] \left[\operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right) + \operatorname{cth}\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \right],$$

из (П.26) приходим к тождеству (П.21 б). Тем самым доказано соотношение (5) при $\varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d = 1$. Заметим, что нет необходимости доказывать (5) при $\varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d = -1$, поскольку исходные уравнения (П.20)—(П.22) при $\varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d = 1$ преобразуются в уравнения при $\varepsilon^a \varepsilon^b \varepsilon^c \varepsilon^d = -1$ заменой индексов $a \rightleftarrows s$ и мнимых частей действительными (и наоборот).

Принцип причинности приводит к тому, что из восьми величин (действительные и мнимые части кубичных нелинейностей $\chi_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\chi_{bacd}(\omega_0, \omega_2, \omega_3)$, $\chi_{cabd}(\omega_0, \omega_1, \omega_3)$, $\chi_{dabc}(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ независимыми являются только три (например, $\chi'_{abcd}(\omega_1\ \omega_2\ \omega_3) - \chi'_{bacd}(\omega_0, \omega_2, \omega_3)$; $\chi'_{abcd}(\omega_1,$

$\omega_2, \omega_3) - \chi'_{cabd}(\omega_0, \omega_1, \omega_3)$; $\chi'_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) - \chi'_{dabc}(\omega_0, \omega_1, \omega_2))$. Дисперсионные соотношения получим из (2.13 I), (2.14 I). Путем двукратного дифференцирования (2.14 I) по внешней силе с учетом (2.13 I) находим (см. (2.6 I), (2.7 I))

$$\begin{gathered}\varphi_{abcd}(t, t_1, t_2, t_3) + \varphi_{bacd}(t_1, t, t_2, t_3) = \\ = [\varphi_{abcd}(t, t_1, t_2, t_3) - \varphi_{bacd}(t_1, t, t_2, t_3)]\,\mathrm{sgn}\,(t - t_1).\end{gathered} \tag{П.27}$$

Принимая во внимание интегральное представление

$$\mathrm{sgn}\,(t - t_1) = \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Omega}{\Omega}\exp[-i\Omega(t - t_1)],$$

с помощью преобразования Фурье (П.27) получаем

$$\begin{gathered}\chi_{abcd}(\omega_1\,\omega_2\,\omega_3) + \chi_{bacd}(\omega_0, \omega_2, \omega_3) = \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Omega}{\Omega}\times \\ \times[\chi_{abcd}(\omega_1 - \Omega, \omega_2, \omega_3) - \chi_{bacd}(\omega_0 + \Omega, \omega_2, \omega_3)].\end{gathered} \tag{П.28}$$

Из формул (5) мы можем определить через спектральные плотности лишь разности $(\varepsilon^a\varepsilon^b\varepsilon^c\varepsilon^d = 1)$ $\chi'_{abcd}(\omega_1 - \Omega, \omega_2, \omega_3) - \chi'_{bacd}(\omega_0 + \Omega, \omega_2, \omega_3)$, которые с помощью (П.28) определяют кубичные нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 54, 2322 (1968).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
3. В. М. Файн, Э. Г. Ящин, ЖЭТФ, 46, 695 (1964).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
5. Р. Л. Стратонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1512 (1970).
6. L. Onsager, Phys. Rev., 37, 405 (1931); 38, 2265 (1931).
7. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 39, 1647 (1960).
8. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. физ., астрон., № 4, 84 (1967).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
2 июля 1971 г.

ON THE THEORY OF THERMAL FLUCTUATIONS IN NON-EQUILIBRIUM SYSTEMS

G. F. Efremov

The association of thermal fluctuations in non-equilibrium systems with nonlinear features of the system is considered. Explicit relations have been obtained between the nonlinear third-order susceptibilities and the spectral densities of the 2nd order over the external force. The general theory is applied to investigation of electrical fluctuations.