

УДК 621.373.42

О ВЛИЯНИИ ФЛУКТУАЦИЙ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

В. В. Болознев, Ю. Е. Польский

Произведена оценка влияния флуктуаций контурной емкости и модулятора (реактивная лампа) на внешнюю и взаимную синхронизацию автогенераторов, модулированных по частоте. Вычислены границы области, в которой имеет место «сильная» синхронизация. На основе анализа процессов при «слабой» синхронизации определены интервалы изменения индекса модуляции, в пределах которых вероятность срыва синхронного режима не превышает заданной величины.

В работе [1] исследованы особенности синхронизации автогенераторов, модулированных по частоте. Там, однако, мы не упомянули о некоторых эффектах, наблюдавшихся в эксперименте и влияющих на практическое использование синхронизированных ЧМ генераторов. Во-первых, границы области захвата непостоянны, что затрудняет измерение ее ширины; последняя обычно получается меньше расчетной. Во-вторых, при достаточно малых эквивалентных коэффициентах связи α_j (т. е. в окрестностях точек, где $\alpha_j = 0$) захват вообще не удается надежно зафиксировать. Для изучения и количественного описания этих явлений обратимся к исследованию флуктуационных процессов в синхронизованных ЧМ генераторах.

Для наших целей удобно воспользоваться результатами работы [2], в которой систематически и подробно изложена теория флуктуационных явлений в автоколебательных системах.

1. В данной работе мы ограничимся рассмотрением технических флуктуаций, так как их влияние на условия синхронизации значительно превосходит влияние естественных флуктуаций [2].

В немодулированных генераторах основное влияние на флуктуации фазы и частоты оказывают флуктуации контурной емкости [3]. Вместе с тем, известно [4], что частотный модулятор является одним из основных источников нестабильности центральной частоты ЧМ генераторов и, следовательно, вносит значительный вклад во флуктуационные процессы (особенно в высокодобротных системах). В качестве модулятора используем реактивную лампу—эквивалентную индуктивность:

$$L_M = n^2 h S,$$

где n — коэффициент включения реактивной лампы в контур генератора, h — постоянная, зависящая от величины элементов фазовращающей цепочки анод — сетка реактивной лампы, S — крутизна анодно-сеточной характеристики. Видно, что флуктуации эквивалентной индуктивности ξ_M однозначно связаны с флуктуациями крутизны лампы, а последние определяются в основном флуктуациями питающих напряжений. Следовательно, спектральная плотность флуктуаций ξ_M

$$S_M(\Omega) = \frac{pn^2 h A_U}{2\pi |\Omega|^{\rho_U}} = \frac{A_M}{2\pi |\Omega|^{\rho_M}}. \quad (1)$$

Здесь в соответствии с [2] (§ 3.4) $p = \frac{1}{4} \div \frac{1}{9}$, Ω — частота.

Флуктуации контурной ёмкости и эквивалентной индуктивности являются нестационарными фликкерными процессами. Дисперсия фликкерного процесса

$$\langle \xi_i^2 \rangle = \frac{A_i}{\Gamma(\rho_i) \sin \frac{\pi}{2} (\rho_i - 1)} |t|^{\rho_i - 1}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\rho_i)$ — гамма-функция, $i = M, C$.

Обычно $\rho_C \gtrsim 1$, $A_C \sim 10^{-9}$; если в качестве источника питания использован выпрямитель с электронным стабилизатором, то $\rho_M = 2 \div \div 2,5$, $A_U \sim 10^{-10}$ ([2], § 3.4). Несложный расчет показывает, что при этих значениях параметров и малых t ($t \ll 10$ сек)

$$\langle \xi_C^2 \rangle \gg \langle \xi_M^2 \rangle,$$

и, следовательно, флуктуациями в модуляторе можно пренебречь. Однако при $t \sim 10$ сек обе величины становятся сравнимыми, а при дальнейшем увеличении t рост $\langle \xi_M^2 \rangle$ идет очень быстро, так что при $t > 100$ сек

$$\langle \xi_C^2 \rangle \ll \langle \xi_M^2 \rangle, \quad (3)$$

т. е. можно пренебречь флуктуациями ёмкости. Мы будем пренебрегать также зависимостью $\langle \xi_M^2 \rangle$ от амплитуды модулирующего напряжения, считая такую зависимость слабой. Влияние флуктуаций модулирующего напряжения и соответствующих флуктуаций девиации частоты (индекса модуляции) также считаем малым; отметим, что такое влияние рассмотрено, правда в несколько ином аспекте, в [5].

В дальнейшем анализ мы полагаем спектрально-корреляционные характеристики флуктуаций параметров генераторов известными, так как способы их определения даны в [2].

2. Рассмотрим ЧМ автогенератор, находящийся под воздействием внешней гармонической ЭДС. Пренебрегая нелинейностью модуляционной характеристики, полагаем

$$L_M(t) = L_0(1 + k \cos \Omega_1 t + \xi_M(t)), \quad (4)$$

где $\xi_M(t)$ — случайная функция, имеющая спектральную плотность (1), $\langle \xi_M^2 \rangle \ll 1$. Контурную ёмкость представим выражением

$$C(t) = C_0(1 + \xi_C(t)), \quad (5)$$

где $\xi_C(t)$ — также случайная функция, $\langle \xi_C^2 \rangle \ll 1$.

Аппроксимируя анодно-сеточную характеристику лампы кубическим полиномом, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{u} + u = \mu(1 - \dot{u}^2)\dot{u} - [2k \cos \gamma_1 \tau + \xi(\tau)]u + 2\xi(\tau)\dot{u} + \varepsilon u_2, \quad (6)$$

где u , u_2 — безразмерные напряжения, $\tau = \omega_0 t$, ω_0 — центральная часто-

та генератора, $\gamma_1 = \Omega_1/\omega_0$ — частота модуляции, $\xi(\tau) = \xi_M(\tau) + \xi_C(\tau)$, $\mu, k, \gamma_1, \varepsilon \ll 1$.

Полагаем

$$\varepsilon u_2 = \varepsilon E \cos(1 + \Delta)\tau,$$

где $\Delta = \frac{\omega_C - \omega_0}{\omega_0} \ll 1$ — расстройка, ω_C — частота сигнала. Исходя из тех же допущений, что в работе [1], ищем решение в виде

$$u = N \cos(\eta + \varphi_1),$$

где $\eta = (1 + \Delta)\tau + \psi \sin \gamma_1 \tau$, $\psi = k/\gamma_1$ — индекс модуляции.

Следуя [2], представим

$$N = N_0(1 + \beta), \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \varphi,$$

где $\beta(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ — случайные функции, $\langle \beta \rangle = \langle \varphi \rangle = 0$. Для отыскания квазистационарных значений амплитуды и фазы N_0 и φ_0 необходимо провести усреднение по явно содержащемуся времени. Здесь возникает специфическая трудность. Если, как в [1], для оператора усреднения брать время $\tau \rightarrow \infty$, то это исключит из укороченных уравнений случайные функции $\beta(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, имеющие нулевые математические ожидания. Нельзя также применить обычное усреднение по периоду высокой частоты, так как при этом в укороченных уравнениях сохранится медленная зависимость от члена, содержащего $\gamma_1 \tau$.

Выберем частоту модуляции γ_1 достаточно большой, так чтобы для некоторой частоты $\gamma_p \ll \gamma_1$ выполнялось условие

$$\left| \frac{A_M}{2\pi |\gamma|^M} \right|_{\tau > \gamma_p} \ll \frac{k^2}{2} \quad (\gamma \neq \gamma_1).$$

Иными словами, в данном случае функция $\xi_M(\tau)$ является «медленной» по сравнению с $\cos \gamma_1 \tau$. Полагаем, что это допущение выполняется и для функции $\xi_C(\tau)$. Тогда для получения укороченных уравнений можно проводить усреднение по периоду модуляции $T_1 = 2\pi/\gamma_1$. Укороченные уравнения для детерминированных частей N и φ , т. е. для N_0 и φ_0 , совпадают с широко известными (см., например, [6]; при этом ε заменено на $\alpha = \varepsilon J_0(\psi)$, где $J_0(\psi)$ — бесселева функция), поэтому мы их не приводим. Учтем, что амплитуда свободного генератора (при $\varepsilon = 0$) $N_0^{(0)} = 2$, положим также $\varepsilon/\mu < 1$ и $E = 2$. При этих условиях ширина области захвата без модуляции $2\Delta_{\text{захв}} = \varepsilon$, а влияние модуляции определяется сомножителем $J_0(\psi)$. Относительная ширина области захвата при модуляции

$$\frac{2\Delta_{\text{захв}}}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\varepsilon} = J_0(\psi).$$

Рассмотрим уравнение для случайной компоненты фазы. После выкладок, аналогичных [2] (§ 9.5), имеем

$$\dot{\varphi} = -\Delta(1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\Delta^2} \sin \varphi - \frac{1}{2}g(\tau), \quad (7)$$

где случайная функция $g(\tau)$ определяется на основе соотношений в [2] и в нашем случае попросту равна $\xi(\tau)$.

В случае «сильной» синхронизации ($\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$) линеаризуем уравнение (7) и определим дисперсию фазы

$$\langle \varphi^2(\tau) \rangle = \frac{4}{\alpha^2 - 4\Delta^2} \langle \xi_M^2(\tau) \rangle.$$

Положим, что выбранные значения τ и α обеспечивают выполнение условий «сильной» синхронизации $\langle \varphi^2(\tau) \rangle \leq \chi_0$ и, кроме того, выбранное значение $\tau = \tau^*$ обеспечивает выполнение условия (3). Тогда

$$\frac{4}{\alpha^2 - 4\Delta^2} \langle \xi_M^2(\tau^*) \rangle \leq \chi_0.$$

«Сильная» синхронизация имеет место в полосе относительных расстроек:

$$\frac{2\Delta}{\epsilon} = \sqrt{J_0^2(\psi) - \frac{4}{\chi_0 \epsilon^2} \langle \xi_M^2(\tau^*) \rangle}.$$

Отметим, что «сильная» синхронизация возможна, пока $J_0^2(\psi)$ много больше второго слагаемого. Это позволяет разложить правую часть в ряд; ограничиваясь двумя членами ряда, имеем

$$\frac{2\Delta}{\epsilon} \approx J_0(\psi) - \frac{2}{\chi_0 \epsilon^2 J_0(\psi)} \langle \xi_M^2(\tau^*) \rangle. \quad (8)$$

Два последних выражения позволяют уточнить условия «сильной» синхронизации. Во-первых, при весьма малых внешних сигналах (при малых ϵ) ее вообще не существует [2]. Во-вторых, даже при достаточно больших ϵ она существует не для всех ψ , и в окрестностях корней бесселевой функции синхронизация становится «слабой». В-третьих, при достаточно длительных временных интервалах «сильная» синхронизация всегда переходит в «слабую». Здесь влияет, конечно, и выбор параметра χ_0 , это подробно рассмотрено в [2] (§ 9.5).

Перейдем к «слабой» синхронизации. Синхронный режим существует, если случайные отклонения частоты, вызванные флюктуациями, не выводят ее за пределы области захвата, т. е. если

$$|2\Delta + \xi(\tau)| \leq \alpha.$$

Такое неравенство можно трактовать лишь в вероятностном смысле. Если распределение флюктуаций подчиняется нормальному закону и $\langle \xi_M \rangle = 0$, то на временном интервале $\tau \in (0, \tau^*)$ синхронизация имеет место, если

$$\alpha - 2|\Delta| \geq \Theta \sqrt{\langle \xi_M^2(\tau^*) \rangle}, \quad (9)$$

где Θ — коэффициент, зависящий от требуемой достоверности существования синхронного режима (например, при $\Theta = 1$ и $\Theta = 3$ достоверность составляет 50% и 99,8% соответственно). Синхронный режим (в указанном выше смысле) существует в полосе относительных расстроек:

$$\frac{2\Delta}{\epsilon} = J_0(\psi) - \frac{\Theta}{\epsilon} \sqrt{\langle \xi_M^2(\tau^*) \rangle}. \quad (10)$$

Видно, что синхронизация возможна, если в (10) первое слагаемое больше второго. Это предопределяет наличие некоторых областей изменения ψ в окрестностях корней бесселевой функции ($\psi = 2,408; 5,56; 8,65$), в которых генератор не синхронизируется (с заданной вероятностью).

3. Обратимся теперь к рассмотрению взаимной синхронизации двух ЧМ генераторов, промодулированных гармоническим сигналом одной частоты и амплитуды, но с некоторым фазовым сдвигом \times [1]. Положим, что эквивалентные индуктивности модуляторов и контурные емкости описываются выражениями (4) и (5). Пренебрегая в отличие от [1] нелинейностью модуляционной характеристики, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 &= \mu(1 - u_1^2) \dot{u}_1 - [2k \cos \gamma_1 \tau + \xi_1(\tau)] u_1 + 2\xi_1(\tau) \dot{u}_1 + \epsilon_1 u_2, \\ \ddot{u}_2 + u_2 &= \mu(1 - u_2^2) \dot{u}_2 - [2k \cos(\gamma_1 \tau + \alpha) + \xi_2(\tau) + 2\Delta] u_2 + 2\xi_2(\tau) \dot{u}_2 + \epsilon_2 u_1, \end{aligned} \quad (11)$$

где все обозначения аналогичны (6), $\Delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}$, и для простоты положено $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Принимая те же допущения, что и в п. 2, ищем решение в виде

$$u_j = N_j \cos(\eta_j + \Phi_j) \quad (j = 1, 2),$$

где $\eta_1 = (1 + \delta)\tau + \psi \sin \gamma_1 \tau$, $\eta_2 = (1 + \delta)\tau + \psi \sin(\gamma_1 \tau + \alpha)$, $(1 + \delta)$ — нормальная частота синхронизации, остальные обозначения аналогичны п. 2.

Как и в п. 2, рассмотрим уравнение для случайной компоненты разности фаз

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (\varphi_j = \Phi_j - \varphi_{0j}).$$

После выкладок имеем

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \frac{1}{2} a_1 \cos \varphi - \frac{1}{2} a_2 \sin \varphi - \frac{1}{2} (\xi_1 - \xi_2), \quad (12)$$

где $a_1 = \alpha \sin \varphi_0$, $a_2 = \alpha \cos \varphi_0$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_j = \epsilon_j B(\psi, \alpha)$, $\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$, $\xi_j = \xi_{Mj} + \xi_{Cj}$, $B(\psi, \alpha) = J_0^2(\psi) + 2 \sum_{n=1} J_n^2(\psi) \cos n\alpha$.

Здесь $B(\psi, \alpha)$ имеет смысл относительной ширины области захвата, значение $B(\psi, \alpha)$ вычислено в [1].

Прежде чем решать уравнение (12), оговорим вопрос о коррелированности флюктуаций во взаимно-синхронизированных генераторах. В случае общего для обоих генераторов источника питания следует предположить существование сильной корреляции между флюктуациями эквивалентных индуктивностей. Эта корреляционная связь характеризуется совместной структурной функцией второго рода ([2], § 1.8), которую мы определять не будем, а ограничимся рассмотрением двух крайних случаев: а) флюктуации ξ_{Mj} некоррелированы и б) флюктуации ξ_{Mj} полностью коррелированы. Флюктуации контурных емкостей генераторов считаем некоррелированными. В первом случае спектрально-корреляционные характеристики флюктуационного процесса находятся простым суммированием соответствующих спектрально-корреляционных характеристик ξ_1 и ξ_2 . Во втором случае представим, что флюктуации в модуляторах связаны линейно: $\xi_{M1} = b \xi_{M2}$ ($b > 0$). Тогда имеет место «компенсация» флюктуаций и при $b = 1$ имеем $\xi_M = \xi_{M1} - \xi_{M2} = 0$, а $\xi = \xi_{C1} - \xi_{C2}$ (очевидно, этот случай будет «самым крайним»).

Представим также, что в выражениях для спектральных плотностей $\rho_{M1} = \rho_{M2} = \rho_M$, $A_{M2} = \lambda_M A_{M1} = \lambda_M A_M$ (λ_M — вещественный коэффициент); такое же упрощение введем для флюктуаций контурных емкостей.

Обратимся теперь к уравнению (12). Линеаризуя его в случае «сильной» синхронизации, найдем дисперсию фазовых флуктуаций. При некоррелированных флуктуациях ξ_{Mj} и при $\tau \leq \tau^*$ имеем

$$\langle \varphi^2(\tau) \rangle = \frac{8(1 + \lambda_M)}{\alpha^2 - 4\Delta^2} \langle \xi_M^2(\tau) \rangle. \quad (13)$$

При полностью коррелированных флуктуациях ξ_{Mj} ($b = 1$)

$$\langle \varphi^2(\tau) \rangle = \frac{8(1 + \lambda_C)}{\alpha^2 - 4\Delta^2} \langle \xi_C^2(\tau) \rangle, \quad (14)$$

причем выражение (14) справедливо и для $\tau \ll \tau^*$. В зависимости от степени коррелированности флуктуаций ξ_{Mj} реальные значения дисперсии фазы будут лежать в интервале, границы которого определяются выражениями (13) и (14). Поступая так же, как в п. 2, заключаем, что «сильная» синхронизация имеет место в полосе относительных расстроек:

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta}{\varepsilon} &= \sqrt{B^2(\psi, \chi) - \frac{8(1 + \lambda_i)}{\chi_0 \varepsilon^2} \langle \xi_i^2(\tau^*) \rangle} \approx \\ &\approx B(\psi, \chi) - \frac{8(1 + \lambda_i)}{\chi_0 \varepsilon^2 B(\psi, \chi)} \langle \xi_i^2(\tau^*) \rangle \\ &(\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, i = M, C). \end{aligned} \quad (15)$$

Опуская выкладки, аналогичные п. 2, для «слабой» синхронизации имеем

$$\frac{2\Delta}{\varepsilon} = B(\psi, \chi) - \frac{\Theta}{\varepsilon} \sqrt{(1 + \lambda_i) \langle \xi_i^2(\tau^*) \rangle}. \quad (16)$$

В обоих случаях первое слагаемое представляет из себя относительное сужение области захвата «бесшумных» генераторов, а второе слагаемое обязано наличию флуктуационных членов. По сравнению с (16) формула (15) более богата физическим содержанием. Влияние флуктуаций тем больше, чем больше дисперсия $\langle \xi_i^2 \rangle$, чем строже наши требования к эффективности синхронизации (чем меньше χ_0) и чем меньше область захвата без шумов $B(\psi, \chi)$. Это совпадает с выводами в [2]. Формула (16) дает лишь приближенную оценку.

4. Проведенное выше сопоставление формул (15) и (16) имеет, однако, формальный характер, и выяснение существа вопроса требует более подробной дискуссии. Формулы (15) и (16) (а также (8) и (10)) определяют по существу различные величины. Формула (15) выделяет из всей области синхронизации лишь ту ее часть, где синхронизация эффективна по Малахову [2], т. е. где флуктуации фазы не превышают некоторой величины. Формула (16) определяет ту область расстроек, в пределах которой с определенной достоверностью можно утверждать, что случайные отклонения частоты генератора не выводят ее за пределы области синхронизации. Критерий эффективности здесь принят иной: достоверность существования синхронного режима, влияющая на выбор коэффициента Θ . Об этих обстоятельствах необходимо помнить при сравнении результатов. Теперь об эксперименте [1]. Захват фиксировался осциллографическим методом. При малых эквивалентных коэффициентах связи это связано с трудностями, так как границы области захвата непостоянны и картина на экране расплывчата. Поэтому

в качестве экспериментального значения ширины области захвата использован усредненный результат многократных измерений.

Усредненное значение ширины области захвата обычно меньше расчетного [1], а при весьма малых эквивалентных коэффициентах связи (в окрестностях точек, где $\alpha_j = 0$) захват вообще не удается достоверно зафиксировать. В этом смысле формулы (15) и (16) дают хорошее совпадение с экспериментом. Вердикт экспериментатора не фиксирует захвата ни тогда (см. (15)), когда синхронизация неэффективна (в указанном выше смысле), ни тогда (см. (16)), когда наличие синхронного режима маловероятно.

Результаты расчета по формулам (15) и (16) представлены на рис. 1. При построении графика приняты следующие значения параметров: $A_C = 10^{-9}$, $A_U = 10^{-10}$, $n = 0,8$, $h = 0,5$, $p = 0,2$, $\rho_M = 2,2$, $\rho_C = 1,1$, $\varepsilon = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 10^{-3}$, $\chi_0 = 0,1$, $\lambda_C = \lambda_M = 1$, $\Theta = 3$, $\chi = \pi/2, \pi$, $\tau^*/\omega_0 = 2 \cdot 10^2$ сек (выбранное значение τ^* необходимо для фиксирования обеих границ области захвата в эксперименте).

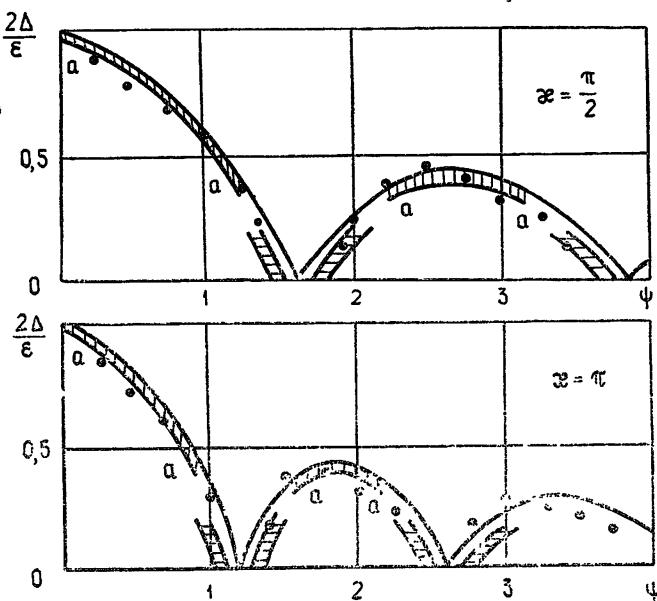


Рис. 1.

Все значения взяты в соответствии с результатами работы [2] и параметрами экспериментальной установки.

На рис. 1 толстой линией показана зависимость относительной ширины области захвата от индекса модуляции для «бесшумных» генераторов.

Область «сильной» синхронизации показана линией «aa» для случая некоррелированных флуктуаций в модуляторах. При когерентных флуктуациях она отличается от ширины области захвата «бесшумных» генераторов на 1—2%, и соответствующие линии на графике практически совпадают. Кривые, соответствующие различной степени коррелированности флуктуаций в модуляторах, проходят в заштрихованной области (вертикальная штриховка). Аналогичное построение проведено для случая «слабой» синхронизации (горизонтальная штриховка). На рисунке показаны также усредненные экспериментальные значения.

Вид уравнений (6) и (11) не меняется, если модулятор является эквивалентной емкостью. Поэтому полученные результаты справедливы и для этого случая.

Следовательно, флуктуации контурной емкости и модулятора оказывают значительное влияние на синхронизацию ЧМ генераторов, особенно при малых эквивалентных коэффициентах связи α , приводя к появлению интервалов изменения индекса модуляции, в которых синхронизация не имеет места.

С ростом времени наблюдения роль флуктуаций контурных емкостей заметно падает и сохраняет свое значение лишь тогда, когда флуктуации в модуляторах сильно коррелированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Болознев, Р. Ф. Марданов, Ю. Е. Польский, Радиотехника и электроника, 16, № 6, 972 (1971).
2. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
3. Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 924 (1965).
4. А. Д. Артым, Теория и методы частотной модуляции, Госэнергоиздат, М., 1961.
5. П. С. Ланда, Е. Ф. Слинько, Вестник МГУ, 4, 400 (1970).
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Казанский авиационный институт

Поступила в редакцию
25 января 1971 г.,
после доработки
20 марта 1972 г.

THE INFLUENCE OF FLUCTUATIONS ON SYNCHRONIZATION OF FREQUENCY-MODULATED GENERATORS

V. V. Boloznev, Yu. E. Pol'skii

The influence of the circuit capacitance and modulator (reactance tube) fluctuations on the external and mutual synchronization of frequency-modulated self-oscillators has been estimated. The boundaries of the region in which a "strong" synchronization takes place are calculated. On the basis of the process analysis at weak synchronization the limits of the modulation index variation are determined in which the probability of stopping the synchronous regime does not exceed the given value,