ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 621.372.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Ю. К. Богатырев

Предлагается метод исследования многоволновых процессов в слабонелинейных пространственно-периодических (цепочечных) структурах, описываемых системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Получены более простые (по сравнению с исходными) укороченные дифференциально-разностные уравнения первого и второго приближений, и дан алгоритм построения следующих приближений.

Ранее в работах [1–3] с помощью различных приближенных и численных методов рассматривались отдельные задачи, связанные с изучением процессов распространения, усиления, генерации и исследованием структуры волн в волновых системах с сильной пространственной дисперсией. Однако в большинстве из этих работ укороченные уравнения, описывающие изменение структуры волн, получались лишь в первом приближении нерегулярными методами, зависящими от конкретных физических особенностей рассматриваемых задач.

В данной работе предлагается асимптотический метод исследования многоволновых процессов в слабонелинейных волновых системах с периодической пространственной структурой (одномерных нелинейных решетках), являющийся обобщением метода, изложенного в [5, 9] для распределенных систем, и аналогичного асимптотическому методу Боголюбова для сосредоточенных систем [6, 7].

Волновые системы с периодической (цепочечной) структурой, в отличие от систем с распределенными параметрами, имеют ряд специфических особенностей. Прежде всего это системы с пространственной дисперсией, обусловленной взаимосвязью между звеньями, образующими структуру. Дисперсионная характеристика такой системы является периодической функцией волнового числа [4]. Поэтому в системе всегда распространяется не одна гармоническая волна, а бесконечное число волн (пространственных гармоник) одной частоты ω_s, но с различными волновыми числами $k_{si}(\omega_s)$ и, следовательно, разными фазовыми скоростями

$$v_{\phi si} = \omega_s [k_{si}(\omega_s)]^{-1} = \frac{\omega_s}{k_s(\omega_s) \pm 2\pi i/\Lambda},$$

где Λ — пространственный период неоднородности (расстояние между звеньями цепочки); $i = 0, 1, 2, \ldots$ — целые числа. Несмотря на то, что в целом пространственные гармоники образуют сложную волну с одинаковой для всех гармоник групповой скоростью

$$v_s = \frac{dk_{si}(\omega_s)}{d\omega_s} = \frac{dk_s(\omega_s)}{d\omega_s},$$

их следует рассматривать как отдельные волны, участвующие в любом возможном (в том числе и нелинейном) взаимодействии с другими

волнами, существующими в системе. При этом не все пространственные гармоники, а лишь некоторые из них (имеющие близкие фазовые скорости) эффективно участвуют во взаимодействии.

В том случае, когда звено, образующее элемент периодичности волновой системы, имеет Q степеней свободы (состоит в свою очередь из Q элементарных ячеек), дисперсионная кривая k_{si} становится неоднозначной (не обязательно периодической) функцией частоты ω*. Число ветвей дисперсионной характеристики при этом, так же как и число полос пропускания по частоте, увеличится и будет равно Q — числу степеней свободы звена структуры. При этом число взаимодействующих волн, удовлетворяющих условиям синхронизма, естественно, возрастает. Увеличится и количество типов взаимодействия.

Полосы пропускания (которые могут и перекрываться между собой) ограничены критическими частотами. Влияние пространственной дисперсии на волновые процессы наиболее значительно в области критических частот.

Таким образом, отмеченные выше основные свойства волновых систем с периодической структурой придают особую специфику происходящим в них многоволновым процессам. Эта специфика выражается в возникновении новых видов связи между взаимодействующими волнами, обусловленных не только нелинейностью, но и периодичностью изменения свойств волновой системы вдоль направления распространения волн.

В большинстве практически интересных случаев уравнения, описывающие поля в слабонелинейной среде с пространственно-периодической структурой, можно представить в виде

$$A\Delta u_n + B_1 \frac{\partial u_n}{\partial t} + B_2 \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t} + C_1 u_n + C_2 u_{n+1} = \\ = \mu f\left(u_n, u_{n+1}, \Delta u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t}, \frac{\partial u_{n+1}}{\partial t}, \ldots, t, n, \tau\right) \\ (n = 1, 2, 3, \ldots; \quad \tau = \mu t, \quad \mu \ll 1), \tag{1}$$

где A, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ — квадратные матрицы, Δ — разностный оператор ($\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$), $u_n = (u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_m})$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ — m-мерные вектор-функции, причем f — полином по u_n, u_{n+1}, Δu_n, $\frac{\partial u_n}{\partial t}$, ... и периодическая функция n, t.

При $\mu = 0$ система (1) имеет решение в виде бегущих волн

$$u_n \sim \psi^s \exp[j(\omega t - k_{si} n)] + \text{к. с.}, \tag{2}$$

где ψ^s — правые собственные векторы матрицы

$$M = \| A[\exp(-jk_{si}) - 1] + j\omega[B_1 + B_2 \exp(-jk_{si})] + C_1 + \\ + C_2 \exp(-jk_{si}) \|, \tag{3}$$

определяемые из уравнений

$$M\psi^s = 0, \tag{4}$$

а ω, k_{si} — действительные величины (если ω и k_{si} комплексны, то предполагается, что $\operatorname{Re}\omega, k_{si} \gg \operatorname{Im}\omega, k_{si}$), связанные дисперсионным уравнением

* Каждому значению k_i соответствует Q типов волн с различными частотами ω_q.

$$D(\omega, k_{si}) = \det M = 0$$

(s — индекс нормальной волны—ветви дисперсионного уравнения).

При $\mu \neq 0$ решение (1) будем искать в виде

$$u_n = \sum_{s=1}^{q} \psi^s a_\nu^s(\nu, \tau) \exp[j(\omega_s t - k_s n)] + \text{к. с.} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k w_\nu^{(k)}(\nu, \tau, n, t), \quad (5)$$

т. е. как результат взаимодействия квазигармонических волн. Здесь a_ν^s — комплексные вектор-функции, медленно меняющиеся в пространстве и времени; $w_\nu^{(k)}$ — периодические вектор-функции переменных n и t*. Естественно, что в решении (5) должны быть учтены все волны, возникающие из-за нелинейности и внешних полей, которые находятся в синхронизме с нормальными волнами линейной системы.

Для отыскания решения (5) с любой заранее заданной степенью точности необходимо определить неизвестные функции a_ν^s, ψ^s и $w_\nu^{(k)}$. Уравнение для функции a_ν^s ищем в виде

$$\Delta_\nu a_\nu^s = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \Phi_k^s \{a_\nu^s\}, \quad (6)$$

где Δ_ν — разностный оператор по ν, а Φ_k^s — неизвестные функционалы.

Уравнения для ψ^s и $w_\nu^{(k)}$ найдем из (1), предварительно преобразовав его к виду

$$\begin{gathered} A(\Delta_\nu u_{n+1,\nu} + \Delta_n u_{n,\nu}) + B_1\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial \tau}\right) u_{n,\nu} + \\ + B_2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial \tau}\right)(u_{n+1,\nu} + \Delta_\nu u_{n+1,\nu}) + C_1 u_{n,\nu} + \\ + C_2(u_{n+1,\nu} + \Delta_\nu u_{n+1,\nu}) = \mu F_1(a_\nu^s) + \mu^2 F_2(a_\nu^s, w_\nu^{(1)}) + \\ + \mu^3 F_3(a_\nu^s, w_\nu^{(1)}, w_\nu^{(2)}) + \ldots, \end{gathered} \quad (7)$$

где F_k — периодические функции явно входящих переменных n, t. Подставив в (7) ряды (5), (6) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ^k, получим систему

$$M\psi^s = 0; \quad (8)$$

$$Mw_\nu^{(1)} = F_1 - \sum_{s=1}^{q}\left(N\Phi_1^s + P\frac{\partial a_\nu^s}{\partial \tau}\right)\psi^s = h^{(1)}; \quad (9)$$

$$\begin{gathered} Mw_\nu^{(2)} = F_2 - \left\{\sum_{s=1}^{q}\left[N\Phi_2^s + B_2\exp(-jk_s)\frac{\partial \Phi_1^s}{\partial \tau}\right]\psi^s + \right. \\ \left. + N\frac{\Delta_\nu w_\nu^{(1)}}{\mu} + P\frac{\partial w_\nu^{(1)}}{\partial \tau}\right\} = h^{(2)}; \end{gathered} \quad (10)$$

. . . . . .

* Индекс ν приписан функциям или их составляющим, медленно меняющимся вдоль n.

$$M w_\nu^{(k)} = F_k - \left\{ \sum_{s=1}^{q} \left[N \Phi_k^s + B_2 \exp(-jk_s) \frac{\partial \Phi_{k-1}}{\partial \tau} \right] \psi^s + \right.$$
$$\left. + N \frac{\Delta_\nu w_\nu^{(k-1)}}{\mu} + B_2 \exp(-jk_s) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\Delta_\nu w_\nu^{(k-2)}}{\mu} \right) + P \frac{\partial w_\nu^{(k-1)}}{\partial \tau} \right\} = h^{(k)}, \tag{11}$$

где

$$N = (A + j\omega_s B_2 + C_2) \exp(-jk_s),$$
$$P = B_1 + B_2 \exp(-jk_s), \tag{12}$$

а функции $w_\nu^{(1)}$, $w_\nu^{(2)}$ находятся как решения линейных систем (9), (10), каждую из которых можно разбить на q независимых систем, отличающихся лишь значениями параметров ω_s и k_{si}. Поэтому в дальнейшем комплексную амплитуду a_ν^s можно считать медленной функцией (а не вектор-функцией) переменной ν, а Φ_k^s — функционалом.

Поскольку правые части уравнений (9), (10)—периодические функции n и t, представим матрицы $w_\nu^{(k)}$ и $h^{(k)}$ в виде сумм

$$w_\nu^{(k)} = \sum_{s=1}^{q} W^{(k)s} \exp[j(\omega_s t - k_{si} n)] + \sum_{m=q+1}^{p} W^{(k)m} \exp[j(\omega_m t - k_{mi} n)],$$
$$h^{(k)} = \sum_{s=1}^{q} H^{(k)s} \exp[j(\omega_s t - k_{si} n)] + \sum_{m=q+1}^{p} H^{(k)m} \exp[j(\omega_m t - k_{mi} n)], \tag{13}$$

в которых первыми членами являются матрицы, соответствующие собственным волнам системы, для них

$$|M| = |M^s| = D(\omega_s, k_{si}) = 0, \tag{14}$$

а вторыми—матрицы, соответствующие комбинационным волнам, возникающим за счет нелинейности и внешних полей и находящихся вне синхронизма с первыми. Для них

$$|M| = |M^m| = D(\omega_m, k_{mi}) \neq 0. \tag{15}$$

Собственные волны системы будут удовлетворять (14) только при выполнении условий синхронизма, которые для пространственно-периодических волновых структур имеют вид

$$\sum_{j=1} n_j k_j(\omega_j) \pm \frac{2\pi}{\Lambda} i = k_s(\omega_s), \qquad \sum_{j=1} n_j \omega_j = \omega_s, \tag{15a}$$

где n_j — целые числа.

Подставляя (13) в (9) и приравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим две системы алгебраических уравнений, которые после усреднения пригодны, соответственно, для определения $W^{(k)s}$ и $W^{(k)m}$. Амплитуды $W^{(1)m}$, согласно (15), ограничены и равны

$$W^{(1)m} = M^{-1} H^{(1)m}. \tag{16}$$

Ограниченные решения для $W^{(1)s}$, ввиду (14), могут существовать лишь при выполнении условий ортогональности

$$(\zeta^{*s}, H^{(1)s}) = 0, \tag{17}$$

где ζ^{*s} — правый собственный вектор сопряженной с (8) алгебраиче-

ской системы, т. е. собственный вектор известной транспонированной матрицы $\widetilde{M}^s$.

Из системы (9) с учетом условия ортогональности (17) находим для s-й компоненты неизвестный функционал

$$\Phi_1^s = -\frac{\zeta^{*s}, P^s \psi^s}{\zeta^{*s}, N^s \psi^s} \frac{\partial a_\nu^s}{\partial \tau} + \frac{\zeta^{*s}, F_1^{(s)}}{\zeta^{*s}, H^s \psi^s}. \tag{18}$$

Преобразуем в (18) коэффициент при производной. Для этого вначале дифференцируем равенство (8) по ω_s и выделяем производную

$$M^s \frac{d\psi^s}{d\omega_s} = -\left(\frac{dM^s}{d\omega_s}\right)\psi^s, \tag{19}$$

которая будет ограниченной функцией, если выполняется условие ортогональности

$$\left[\zeta^{*s}, \left(\frac{dM_s}{d\omega_s}\right)\psi^s\right] = 0.$$

Затем из (3) с учетом (12) определяем

$$\frac{dM^s}{d\omega_s} = j\left(P^s - N^s \frac{dk_{si}}{d\omega_s}\right) \tag{20}$$

и, используя условие ортогональности, находим значение коэффициента

$$\frac{\zeta^{*s}, P^s \psi^s}{\zeta^{*s}, N^s \psi^s} = \frac{dk_{si}}{d\omega_s} = 1/v_s. \tag{21}$$

Таким образом, согласно (6), уравнение первого приближения относительно a_ν^s можно записать в виде

$$\Delta_\nu a_\nu^s + \frac{1}{v_s}\frac{\partial a_\nu^s}{\partial t} = \mu G_1^{(s)}, \tag{22}$$

где $G_1^{(s)} = \zeta^{*s}, F_1^{(s)}/\zeta^{*s}, N^s \psi^s$.

Для отыскания уравнения второго приближения необходимо найти решение $w_\nu^{(1)}$, соответствующее собственным волнам системы (9), и выражение для функционала Φ_2^s. Согласно (9) и (20) уравнение для $W^{(1)s}$ запишем в виде

$$M^s W^{(1)s} = Q^{(1)s} + (N^s v_s^{-1} - P^s)\psi^s \frac{\partial a_\nu^s}{\partial \tau}, \tag{23}$$

где $Q^{(1)s} = F_1^{(s)} - N^s \psi^s G_1^{(s)}$, и будем искать решение для $W^{(1)s}$ в виде суммы решений

$$W^{(1)s} = W_1^{(1)s} + W_2^{(1)s},$$

каждое из которых удовлетворяет, соответственно (23), уравнениям

$$MW_1^{(1)s} = (N^s v_s^{-1} - P^s)\psi^s \frac{\partial a_\nu^s}{\partial \tau}; \tag{24}$$

$$MW_2^{(1)s} = Q^{(1)s}. \tag{25}$$

Сравнивая (24) с (19), учитывающим (20), нетрудно найти решение относительно $W_1^{(1)s}$ (см. [10]):

$$W_1^{(1)s} = -j\frac{d\psi^s}{d\omega_s}\frac{\partial a_\nu^s}{\partial\tau}. \tag{26}$$

Решение уравнения (25) с вырожденной матрицей M^s можно представить в виде

$$W_2^{(1)s} = M^{s+}Q^{(1)s} = Q_1^{(s)}, \tag{27}$$

где M^{s+} — псевдообратная матрица [8].

Для нахождения функционала Φ_2^s воспользуемся условием ортогональности

$$(\zeta^{*s}, H^{(2)s}) = 0, \tag{28}$$

вытекающим из ограниченности решений для $W^{(2)s}$. В результате получим равенство

$$\Phi_2^s = -\left[\zeta^{*s}, \left(B_2\psi^s\exp(-jk_s)\frac{\partial\Phi_1^s}{\partial\tau} + P^s\frac{\partial w^{(1)s}}{\partial\tau} + N^s\frac{\Delta_\nu W^{(1)s}}{\mu} - F_2^{(s)}\right)\right](\zeta^{*s}, N^s\psi^s)^{-1}. \tag{29}$$

После подстановки выражений для Φ_1^s, $W^{(1)s}$ и упрощения коэффициента при производной $\frac{\partial^2 a_\nu^s}{\partial\tau^2}$, проведенного по схеме, уже примененной для преобразования коэффициента при $\frac{\partial a_\nu}{\partial\tau}$ в (18), но использующего теперь условие ортогональности

$$\left[\zeta^{*s}, 2\frac{dM^s}{d\omega_s}\frac{d\psi_s}{d\omega_s} + \left(\frac{d^2M^s}{d\omega_s^2}\right)\psi^s\right] = 0,$$

равенство (29), ввиду ограниченности второй производной $\frac{d^2\psi_s}{d\omega_s^2}$, примет вид

$$\Phi_2^s = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dk_{si}}{d\omega_s}\right)^2 + j\frac{d^2k_{si}}{d\omega_s^2}\right]\frac{\partial^2 a_\nu^s}{\partial\tau^2} - \left\{\zeta^{*s}, \left[\left(B_2\psi^s\exp(-jk_s) - jN^s\frac{d\psi^s}{d\omega_s}\right)\frac{\partial G_1^{(s)}}{\partial\tau} + P^s\frac{\partial Q_1^{(s)}}{\partial\tau} - F_2^{(s)}\right]\right\}(\zeta^{*s}, N^s\psi^s)^{-1}, \tag{30}$$

и, следовательно, уравнение второго приближения запишется в виде

$$\Delta_\nu a_\nu^s + \frac{1}{v_s}\frac{\partial a_\nu^s}{\partial t} - \frac{1}{2v_s^2}\left(1 - j\frac{dv_s}{d\omega_s}\right)\frac{\partial^2 a_\nu^s}{\partial t^2} = \mu G_1^{(s)} + \mu^2 G_2^{(s)} - \mu\left\{\zeta^{*s}, \left[\left(B_2\psi^s\exp(-jk_s) - jN^s\frac{d\psi^s}{d\omega_s}\right)\frac{\partial G_1^{(s)}}{\partial t} + P^s\frac{\partial Q_1^{(s)}}{\partial t}\right]\right\}(\zeta^{*s}, N^s\psi^s)^{-1} \tag{31}$$

$$\left(G_2^{(s)} = \zeta^{*s}, F_2^{(s)}/\zeta^{*s}, N^s\psi^s\right).$$

Аналогичным образом строятся и более высокие приближения.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий некоторые особенности распространения и взаимодействия волн радиодиапазона в периодической структуре типа бесконечно длинного (или кольцевого) цепочного фильтра низких частот, в каждое звено которого включены нели-

нейные элементы (например, туннельные диоды (рис. 1)) с характеристикой нелинейности, представленной полиномом $i_g = -\mu g (1 - \alpha u^2) u$ $(g, \alpha > 0)$.

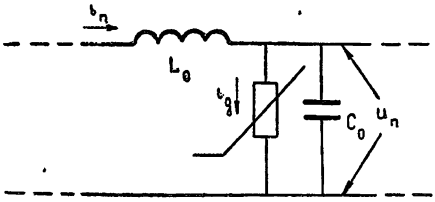

Рис. 1.

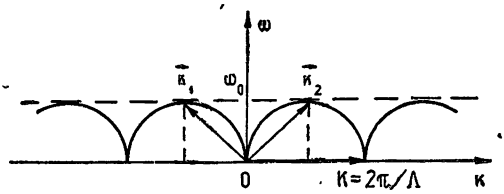

Рис 2.

Такая структура описывается системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$\Delta i_n + C_0 \frac{\partial u_n}{\partial t} = 0,$$

$$\Delta u_n + L_0 \frac{\partial i_{n+1}}{\partial t} = -\mu g L_0 \frac{\partial}{\partial t} \{ 1 - \alpha (\Delta u_n)^2 \} \Delta u_n, \tag{32}$$

соответствующих (1) для матриц

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad B_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & C_0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$B_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ L_0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad C_{1,2} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

с дисперсионной характеристикой

$$D(\omega, k_{si}) = |M| = \omega - 2\omega_0 \sin\left(k_s \pm \frac{2\pi}{\Lambda} i\right) \Big/ 2. \tag{33}$$

Кривая $D(\omega, k_{s0})$ имеет ветвь, проходящую через начало координат (рис. 2). Полоса пропускания системы по частоте лежит в пределах $\omega \in 0, \omega_0$ $(\omega_0^2 = 1/L_0 C_0)$. Из рис. 2 видно, что в системе могут существовать три различных волновых режима.

1. *Одноволновый режим.* Для волн с частотами ω_s, не близкими к граничным $\omega=0$ и $\omega=\omega_0$, условия синхронизма (15 а) не выполняются. Укороченное уравнение первого приближения (22) имеет вид

$$\Delta a_\nu^s + (\omega_0 \cos(k_s/2))^{-1} \frac{\partial a_\nu^s}{\partial t} = \mu g \omega_s L_0 (1 - \cos k_s) \times$$
$$\times [1 - 12\alpha(1 - \cos k_s) |a_\nu^s|^2] a_\nu^s. \tag{34}$$

В этом случае изменение амплитуды a_ν огибающей волны при ее распространении в дискретной структуре качественно не будет отличаться от такового в распределенной системе [5]. Отличие будет лишь количественное, определяемое разницей значений постоянных коэффициентов укороченных уравнений.

2. *Многоволновое взаимодействие.* а) Для волн с частотами ω_s, близкими к $\omega = 0$ $(\lambda_s \gg \Lambda)$ в области, где дисперсионная характеристика может быть представлена первым членом разложения (32) $\omega = \omega_0 k$,

система ведет себя как чисто распределенная. Взаимодействуют волны, для которых выполняются обычные условия синхронизма

$$\sum_{j=1} n_j \omega_j = \omega_i, \quad \sum_{j=1} n_j k_j = k_i.$$

Укороченные уравнения всех приближений полностью совпадают с аналогичными для распределенной системы $\left(v_s = v_{\Phi s},\ \Delta a_\nu^s \approx \frac{\partial a_\nu^s}{\partial n} \text{ и т. п.} \right)$.

б) Если в линии существует волна с $\omega_s = \omega_1 \sim \omega_0$, $k_s = k_1$, то всегда появится и отраженная волна с ω_2, k_2. Между волнами возникает новая связь, обусловленная дискретно-периодической структурой системы с эффективным взаимодействием волн при выполнении условий синхронизма $\omega_1 = \omega_2$, $k_1(\omega_1) \pm \frac{2\pi}{\Lambda} i \approx k_2(\omega_2)$.

В рассматриваемом случае ($\Lambda = 1$) взаимодействие возникает за счет первой пространственной гармоники ($i = 1$) и имеет резонансный характер, причем $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ звеньям. Волны встречные ($k_1 = -k_2$). Укороченные уравнения для взаимодействующих волн

$$\Delta a_\nu^{(1,2)} + \left(\omega_0 \cos \frac{k_{1,2}}{2} \right) \frac{\partial a_\nu^{(1,2)}}{\partial t} = 2\mu g j \omega_{1,2} L_0 (1 - \cos k_{1,2}) \times$$

$$\times \left[1 - 12\alpha (1 - \cos k_{1,2}) \left(|a_\nu^{(1,2)}|^2 + 2 \sum_{i \neq s}^{2} |a_\nu^{(s)}|^2 \frac{1 - \cos k_i}{1 - \cos k_s} + \right. \right. \quad (35)$$

$$\left. \left. + a_\nu^{(1,2)} a_\nu^{(2,1)*} \right) \right] a_\nu^{(1,2)},$$

в отличие от аналогичных уравнений для волн в распределенной системе, имеют дополнительный член $\sim a_\nu^{(1,2)^2} a_\nu^{(2,1)*}$, учитывающий новый вид взаимодействия (a_ν^* — комплексно-сопряженная с a_ν).

Если нелинейные элементы включены через звено ($\Lambda = 2$), то становится возможным новое взаимодействие волн, удовлетворяющее условию $2k_1 \pm \pi = k_2$ $(2\omega_1 = \omega_2)$ и т. д.

В заключение отметим основные особенности, связанные с применением метода для пространственно-неоднородных периодических систем, каждое звено которых имеет Q степеней свободы. В этом случае 1) дисперсионная характеристика будет описываться системой из Q линейных уравнений и иметь Q ветвей; 2) условия синхронизма должны учитывать взаимодействие волн для всех ветвей дисперсионной кривой; 3) в укороченных уравнениях изменится не только правая часть, где появятся дополнительные члены, учитывающие взаимодействие дополнительных волн, принадлежащих другим ветвям дисперсионной кривой и удовлетворяющих условиям пространственного синхронизма, но может измениться и левая также за счет появления дополнительных членов.

Алгоритм построения укороченных уравнений полностью сохраняется.

Автор признателен А. В. Гапонову и Л. А. Островскому за интерес к работе и обсуждение результатов, а также М. И. Рабиновичу за полезные замечания, сделанные при рецензировании рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, № 4, 680 (1961); **5**, № 6, 1130 (1962); **13**, № 9, 1361 (1970).
2. Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, № 5, 973 (1963); **6**, № 5, 985 (1963).
3. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 1, 173 (1966).
4. Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.
5. М. И. Рабинович, Докл. АН СССР, **191**, № 6, 1253 (1970).
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
7. В. П. Рубаник, Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, изд. Наука, М., 1969.
8. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.
9. М. И Рабинович, А. А. Розенблюм, Докл. АН СССР, **199**, № 3, 575 (1971).
10. Е. Н. Пелиновский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 9, 1373 (1971).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

ASYMPTOTIC METHOD FOR NONLINEAR WAVE SYSTEMS WITH PERIODIC STRUCTURE

Yu. K. Bogatyrev

A method is proposed to investigate multi-wave processes in weakly-nonlinear spatially-periodic (train) structures described by a system of nonlinear differential-difference equations. More simple (as compared with initial) shortened differential-difference equations of the 1st and 2nd approximations are obtained, as well as the algorithm of building the next approximations.