

СОДЕРЖАНИЕ

Обзорные доклады по экспериментальным задачам и системам

Юдин Д. Б. Решающее правило в экстремальных задачах	957
Неймарк Ю. И. Автоматная оптимизация	967
Гермейер Ю. Б. Тезисы о принятии решений в играх с непротивоположными интересами	972
Растигин Л. А. Проблемы случайного поиска	982
Леонов Н. Н. Некоторые вопросы автоматического поиска на инерционных объектах	992
Стронгин Р. Г. Информационно-статистическая теория поиска экстремума функций	999
Фицнер Л. Н. О решении экстремальных задач биологической системой управления	1006
Батищев Д. И. Оптимальное проектирование радиотехнических цепей	1016
Островский Г. М. Методы оптимизации в химической науке и технологии	1026
Малышев А. П. О сходимости метода прямых для некоторых задач параболического типа	1033
Л. Н. Белюстина, В. Н. Белых. О неавтономной фазовой системе уравнений с малым параметром, содержащей инвариантные торы и грубые гомоклинические кривые	1039
Мельникова В. А. Явление захватывания в автоколебательной системе с двумя степенями свободы	1049
Филиппов А. В. Исследование устойчивости полярно-координатного компенсатора	1059
Билюба В. Ф., Савельев В. П. Исследование оптимального разделения ресурса времени в одной задаче обслуживания с приоритетами	1070
Стронгин Р. Г. Простой алгоритм поиска глобального экстремума функции нескольких переменных и его использование в задаче аппроксимации функций	1077
Федоткин М. А., Княжицкий Б. Я. Изучение и оптимизация процесса транспортного движения на перекрестках с помощью специализированной физической модели	1085
Гришанин Б. А., Мамаев Д. Д. Сравнение качества эмпирических и оптимальных алгоритмов адаптации в задачах многоальтернативного выбора	1096
В. А. Добрыдень. Оптимальные стратегии контроля полумарковского процесса коллективом наблюдателей	1103
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Таланов В. А., Шевченко В. Н. Об одной задаче на динамической транспортной сети	1113

УДК 62—506

РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ**Д. Б. Юдин*

Приводится классификация известных подходов к постановке и решению сложных экстремальных задач и предлагается новый подход, синтезирующий в известной степени достоинства математического, эвристического и эволюционного программирования.

Задачи планирования, управления и проектирования представляют собой, как правило, сложные экстремальные задачи. Можно разделить подходы к постановке и решению таких задач на три класса, связанных, соответственно, с математическим программированием, эвристическим программированием и эволюционным программированием. Представляется, что можно также получить новый подход к экстремальным задачам, обладающий основными достоинствами перечисленных подходов в известной мере лишенный их недостатков. Изложение принципов такого подхода и является предметом данной работы.

1. В течение ряда лет математическое программирование в широком смысле (включающее экстремальные задачи в функциональных пространствах) рассматривалось как основной математический аппарат оптимального синтеза сложных систем и выбора решений в сложных ситуациях. Выбор решения формализуется как выбор вектора и (или) вектор-функций, принадлежащих некоторому множеству — допустимой области — и обращающих в минимум или в максимум (в зависимости от постановки задачи) некоторый функционал — критерий качества решения задачи.

Анализ опыта решения практических экстремальных задач методами математического программирования свидетельствует о серьезных успехах этих методов (и о внедрении их в практику планирования, управления и проектирования) в задачах относительно простой структуры (главным образом, однородных экстремальных) при не очень большой размерности задачи (когда число переменных и ограничений в задачах достаточно общего вида не превышает сотен или тысяч). Однако эти методы не прививаются в системах большой сложности, отвечающих многоэкстремальным задачам или задачам большой размерности. Между тем, практические задачи управления, планирования и проектирования, исследование которых уже сейчас стоит на повестке дня, содержат весьма большое число переменных и ограничений и обладают достаточно сложной структурой. Можно указать ряд практических задач, в которых методы детерминированного математического программирования не позволяют обеспечить оперативное решение требуемого качества ни на современных, ни на перспективных вычислительных машинах.

2. Некоторое продвижение в решении сложных экстремальных задач связано с бионикой. Соответствующие подходы к решению экстремаль-

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

ных задач объединены под общим названием — эвристическое программирование. Эвристическое программирование состоит в моделировании методов переработки информации и выбора решений живыми организмами. Наблюдение за поведением биологических систем в разных средах и анализ их реакции на те или иные возмущения среды дает основания для правдоподобных гипотез о механизме выбора решений в относительно широком классе ситуаций. Анализ ходов, выбираемых талантливыми игроками, или результатов экспертизы, полученных квалифицированным консилиумом, используется для получения некоторого устойчивого множества «подзадач», облегчающих игроку или экспертам выбор решения. Выявленные таким образом закономерности применяются при составлении программ для машин, способных играть в шахматы, доказывать теоремы, решать задачи логического и технологического проектирования, задачи календарного планирования и выбирать рациональные решения в некоторых классах ситуаций. Методы эвристического программирования позволяют получить удовлетворительные решения для задач достаточно большой размерности и относительно сложной структуры, для которых строго обоснованные формальные методы не могли быть приспособлены.

Использованию эвристического программирования для решения экстремальных задач посвящены многочисленные работы Неймарка, Растригина и их учеников (см., например, [1, 2]). Значительно продвинули эвристические методы выбора решений Фейгенбаум и Фельдман [3], Геллертер [4], Ньюэлл, Саймон и Шоу [5], Рейтман [6] и др. Накоплен значительный опыт выбора рациональных решений в сложных ситуациях с помощью эвристических программ «Логик—теоретик», «Общий решатель задач» (*GPS*), «Аргус» и их модификаций.

Основной недостаток эвристического программирования — отсутствие формального обоснования, устанавливающего допустимые границы применения его методов и гарантирующего (или оценивающего) качество решения, полученного этими методами. Попытки теоретического осмысливания и аргументации методов эвристического программирования, основанные, например, на формальных методах исследования поведения автоматов в случайных средах (см., напр., книгу Цейтлина [7] и цитированную в ней литературу) и так называемой теории сплайнов (см., напр., [8]), находятся в зачаточном состоянии. Решения экстремальных задач методами эвристического программирования конструируются, главным образом, на основе продемонстрированной пригодности этих методов при решении более простых задач.

3. Третий подход к постановкам и решению экстремальных задач естественно называть эволюционным программированием. В отличие от эвристического программирования при эволюционном программировании процесс моделирования «целесообразной» деятельности организма заменяется ускоренным моделированием процесса его эволюции. В ряде случаев эволюционное программирование позволяет удачно сочетать аналитические и алгоритмические методы с экспериментальными, варьируя в широких пределах начальной структурой и сложностью организмов — конечных автоматов, характеристиками среды и механизмом мутаций.

Различным аспектам эволюционного программирования посвящены работы Фогеля, Оуэнса и Уолша [9, 10], Паска [11] и др. К сожалению, интуитивные основы эволюционного программирования не позволяют определить рациональные границы его применения и оценить качество полученных с его помощью решений.

Представляется, однако, что распространение формальных методов адаптации и обучения (см., напр., [12]) на ситуации, описываемые многоэкстремальными задачами ([13], где введены понятия, которые могут

быть истолкованы как эквиваленты мутаций), позволит уточнить область применения эволюционного программирования и расширит его возможности.

4. Сопоставление и анализ достоинств и недостатков разных подходов к решению экстремальных задач приводит к новому взгляду на постановку и решение сложных задач планирования, управления и проектирования. Формальная основа нового подхода — обобщение идей стохастического программирования и стохастической аппроксимации. Содержательная основа подхода вытекает из следующей гипотезы, объясняющей обычно рациональный оперативный выбор решений живыми организмами. Эволюция вида, благодаря естественному отбору, и опыт (а для человека и общественное обучение) в процессе адаптации индуцируют некоторую вероятностную меру на классах ситуаций, характерных для вида или индивидуума. Такая гипотеза объясняет возможность предвидения и механизм «возникновения и закрепления инстинктов, позволяющих почти автоматически принимать решение в привычных для вида или индивидуума ситуациях. Гипотеза дает также основание для расчленения сложной задачи на иерархическую систему связанных между собой «подзадач», подлежащих обсуждению и решению консиллиумом экспертов. Наконец, сформулированная гипотеза определяет качественные требования к структуре формального аппарата выбора решения в сложных ситуациях, к построению и анализу моделей управления, планирования и проектирования.

Модель выбора решения должна соответствовать не отдельной ситуации, а классу «однотипных» в некотором смысле ситуаций. Текущую оптимизацию целесообразно заменить «оптимизацией в среднем». Определение понятий «однотипные ситуации» и «оптимизация в среднем» уточняется применительно к каждому конкретному классу задач. Под «однотипными ситуациями» подразумеваются ситуации, описываемые областью определения стохастической задачи, характеризующей класс ситуаций. Смысл «оптимизации в среднем» уточняется выбранным критерием качества решения задачи стохастического программирования.

Рассматриваемый формальный путь позволяет разделить процесс выбора решения на два этапа — трудоемкий предварительный, использующий априорную статистическую информацию для получения решающего правила, и нетрудоемкий оперативный, использующий решающее правило и текущую реализацию случайных параметров условий для численного решения задачи.

При отсутствии априорных статистических характеристик исходной информации решающее правило получается на предварительном этапе в результате итеративного процесса «обучения» (точнее, самообучения) по последовательным реализациям случайных параметров условий задачи.

5. Приведем достаточно общую модель выбора решения, удовлетворяющую перечисленным выше требованиям

$$M_{\omega^n} \psi_0(x^n, \omega^n) \rightarrow \sup, \quad (1)$$

$$M_{\omega_1} \{\psi_1(x_1, \omega_1)\} \geq b_1,$$

$$M_{\omega_2} \{\psi_2(x^2, \omega^2) | \omega^1\} \geq b_2(\omega_1),$$

...

$$M_{\omega_n} \{\psi_n(x^n, \omega^n) | \omega^{n-1}\} \geq b_n(\omega^{n-1}),$$

$$x_i \in K_i. \quad (3)$$

Здесь $\psi_k(x^k, \omega^k)$ ($k = 1, \dots, n$) — вектор-функция размерности m_k от векторных аргументов $x^k = (x_1, \dots, x_k)$ и $\omega^k = (\omega_1, \dots, \omega_k)$, где x_i — n_i -мерный вектор, ω_i — элемент вероятностного пространства $(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)$; $\psi_0(x^n, \omega^n)$ — скалярная функция x^n и ω^n ; $b_k(\omega^{k-1})$ — m_k -мерная вектор-функция случайного аргумента ω^{k-1} ; K_i — фиксированное замкнутое выпуклое множество в n_i -мерном евклидовом пространстве (конечномерность пространств, в которых определена модель, не связана, вообще говоря, с существом анализа и принятая лишь для упрощения последующих рассуждений); $M_{\omega_k} \{\psi_k(x^k, \omega^k) | \omega^{k-1}\} = \int_{\Omega_k} \psi_k(x^k, \omega^k) dP_k$ — условное

математическое ожидание $\psi_k(x^k, \omega^k)$ по ω_k в предположении, что реализация $\omega^{k-1} = (\omega_1, \dots, \omega_{k-1})$ фиксирована.

Число этапов задачи n предполагается заданным. Более общая модель, в которой количество этапов случайно и определяется моментом попадания траектории $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в некоторую запретную область, здесь не рассматривается.

Исследуются два подхода к постановке и решению задачи (1) — (3), различающиеся информацией о реализованных значениях случайных параметров условий задачи, которой располагают при выборе очередного решения.

При первом подходе предполагается, что составляющие решения x_i на i -ом этапе зависят от реализаций случайных параметров до i -го этапа включительно, $x_i = x_i(\omega^i)$. В этом случае решения $x_i = x_i(\omega^i)$ задачи будем называть апостериорными решающими правилами.

При втором подходе решение на i -ом этапе принимается при наличии информации о реализованных значениях случайных параметров предыдущих этапов, но до реализации случая на i -ом этапе. При этом составляющие решения x_i зависят от (ω^{i-1}) и не зависят от ω_i . Решения $x_i = x_i(\omega^{i-1})$ задачи будем называть априорными решающими правилами.

Определение решающих правил модели (1) — (3) (непосредственно или в процессе обучения) — предварительный этап задачи управления — представляет собой, вообще говоря, весьма трудоемкую задачу. Однако время на решение задачи предварительного этапа обычно не лимитировано. Для получения решающих правил нет необходимости в текущей оперативной информации о конкретных значениях параметров условий задачи. Требуются лишь некоторые статистические характеристики совместного распределения случайных параметров или — при использовании обучения — некоторая выборка возможных значений случайных параметров условий задачи.

6. Рассмотрим ряд частных случаев, для которых удается указать конструктивные пути получения решающих правил. Начнем с одноступенчатых задач и апостериорных решающих правил.

Пусть $\psi_0(x, \omega) = c(\omega)x$,

$$-\psi_1(x, \omega) = \begin{bmatrix} -A(\omega)x \\ x_{(1)}^2 \\ \vdots \\ x_{(n)}^2 \end{bmatrix}; \quad -b_1 = \begin{bmatrix} -b \\ d_{(1)}^2 \\ \vdots \\ d_{(n)}^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$x = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}); \quad b = (b_{(1)}, \dots, b_{(m)}); \quad d = (d_{(1)}, \dots, d_{(n)});$$

$$c(\omega) = (c_{(1)}(\omega), \dots, c_{(n)}(\omega)); \quad A(\omega) = \|a_{ij}(\omega)\| \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n),$$

Введем случайные величины

$$\Delta_j(\omega, \lambda) = c_j(\omega) - \sum_{i=1}^m a_{ij}(\omega) \lambda_i \quad (j=1, \dots, n),$$

где λ_i ($i = 1, \dots, m$) — детерминированные неотрицательные параметры. Предполагается, что случайные параметры условий задачи таковы, что при всех j и $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) второй момент $\|\Delta_j(\omega, \lambda)\|^2$ случайной величины $\Delta_j(\omega, \lambda)$ отличен от нуля.

Оптимальное решающее правило в рассматриваемой задаче имеет вид [14]

$$x_j^*(\omega) = \frac{d_j \Delta_j(\omega, \lambda^*)}{\|\Delta_j(\omega, \lambda^*)\|}, \quad (4)$$

где вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ является решением следующей детерминированной задачи выпуклого программирования

$$\min_{\lambda > 0} \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^n d_j \|\Delta_j(\omega, \lambda)\| \right\}.$$

Как видим, для вычисления λ_i^* достаточно знать вторые моменты $\Delta_j(\omega, \lambda)$, которые выражаются через первые и вторые моменты случайных параметров условий задачи. Если априорные статистические характеристики исходной информации отсутствуют, решение задачи может быть, тем не менее, получено с помощью решающего правила (4). Последовательные приближения для λ^* определяются при этом посредством итеративной процедуры типа стохастической аппроксимации [15]. В таких случаях предварительный этап представляет собой обучение решающему правилу по последовательным реализациям случайных параметров условий задачи.

Аналогичные решающие правила и итеративные процедуры обучения решающим правилам получены для общей задачи квадратичного стохастического программирования и для задачи выпуклого программирования, у которой целевая функция и функции, определяющие ограничения, представляют собой математические ожидания случайных полуопределенных квадратичных форм искомых переменных [16].

В [17] получен метод построения апостериорных решающих правил (точнее, решающих таблиц) для модели, в которой

$$\begin{aligned} \phi_0(x, \omega) &= \varphi_0(x, \omega), \\ \psi_1(x, \omega) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \omega) \\ \varphi_2(x, \omega) \\ -A(\omega)x \end{pmatrix}; \quad b_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\varphi_i(x, \omega)$ ($i = 0, 1, 2$) — характеристические функции, вообще говоря, произвольных случайных множеств $G_i(\omega)$; ($0 \leq \alpha_i \leq 1$).

Рассматриваемая здесь модель имеет вид

$$P\{x \in G_0(\omega)\} \rightarrow \sup,$$

$$P\{x \in G_i(\omega)\} \geq \alpha_i \quad (i = 1, 2),$$

$$M\{A(\omega)x\} \leq b.$$

Принципы построения апостериорных решающих правил для этой модели могут быть обобщены и распространены на многоэтапную задачу стохастического программирования вида (1) — (3), в которой $\Phi_0(x^n, \omega^n)$ — произвольный функционал от x^n и ω^n , а $\psi_i(x^i, \omega^i)$ представляют собой характеристические функции, вообще говоря, произвольных случайных множеств $G_i(x^{i-1}, \omega^i)$; $b_i = \alpha_i(\omega^{i-1})$, $0 \leq \alpha_i(\omega^{i-1}) \leq 1$. Такая модель соответствует многоэтапной задаче стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями

$$M\Phi_0(x^n, \omega^n) \rightarrow \sup, \quad (5)$$

$$P\{x_1 \in G_1(\omega_1)\} \geq \alpha_1,$$

$$P\{x_2 \in G_2(x_1, \omega^2) | \omega_1\} \geq \alpha_2(\omega_1), \quad (6)$$

· · · · ·

$$P\{x_n \in G_n(x^{n-1}, \omega^n) | \omega^{n-1}\} \geq \alpha_n(\omega^{n-1}).$$

Можно считать, что условия вида (3) $x_i \in K_i$ учтены при выборе множеств $G_i(x^{i-1}, \omega^i)$. Множество G_i можно, в частности, составить из конечного или счетного числа точек.

Построена рекуррентная система соотношений, определяющая поэтапную последовательность конструирования апостериорных решающих правил задачи (5) — (6). Частные допущения о совместном распределении случайных параметров последовательных этапов упрощают построение решающих таблиц задачи. Аналогичный подход, связанный, однако, со значительно более трудоемкими вычислениями, может быть использован и для конструирования апостериорных решающих правил общей задачи (1) — (3).

Рассматриваются и другие общие приемы построения оптимальных апостериорных решающих правил задачи (1) — (3). Каждой многоэтапной стохастической задаче приводится в соответствие некоторая одноступенчатая задача стохастического программирования и указывается алгоритм, позволяющий по решению одноэтапной задачи получить оптимальные апостериорные решающие правила исходной многоэтапной задачи. Таким образом, удается использовать одноэтапные модели, изученные в [14—17], для описания достаточно широких классов многоэтапных задач, допускающих явные выражения для оптимальных решающих правил.

7. Переход к построению априорных решающих правил связан не только с техническими, но и с дополнительными принципиальными трудностями. Теория двойственности выпуклого программирования в функциональных пространствах — основа конструирования апостериорных решающих правил — в этом случае далеко не всегда может быть использована. Для обеспечения выпуклости областей определения стохастических задач с априорными решающими правилами необходимо предъявить функциям, определяющим условия задачи, гораздо более жесткие требования. Соответственно и продвижение в анализе задач с априорными решающими правилами существенно меньше, чем в исследовании задач с апостериорными правилами.

Априорные решающие правила рассматриваются, главным образом, применительно к задачам класса (5) — (6) — стохастическим задачам с условными вероятностными ограничениями и сепарабельными целевыми функциями вида $\Phi_0(x^n, \omega^n) = \sum_{i=1}^n \Phi_{0j}(x^j, \omega^{j-1})$. При этом на каждом этапе обычно предполагается несколько условных вероятностных ограничений.

Задача класса (5) — (6) приводится в соответствие более простая — двухэтапная задача, в которой «во второй этап» объединены все условия многоэтапной задачи за исключением ограничений первого этапа. Сформулированы достаточные условия, при которых априорные решающие правила двухэтапной задачи позволяют точно или с погрешностью, не превышающей заданной, восстановить априорные решающие правила многоэтапной задачи. При некоторых допущениях относительно множеств $G_i(x^{i-1}, \omega^i)$ построены оптимальные априорные решающие правила для соответствующих стохастических задач.

Приведем пример класса многоэтапных задач, для которых можно в явном виде выписать оптимальные априорные решающие правила.

Пусть $\psi_0(x^n, \omega^n) = \sum_{i=1}^n \psi_{0j}(x_j, \omega^{i-1})$, где ψ_{0j} монотонно убывающие функционалы по x_j для любого фиксированного ω^{i-1} и $\psi_{0j}(0, \omega^{i-1}) = 0$, $\forall \omega^{i-1}$.

На i -ом этапе предполагается m_i условно-вероятностных ограничений вида

$$P\{x_i \in G_{i\tau}(x^{i-1}, \omega^i) \mid \omega^{i-1}\} \geq \alpha_{i\tau}(\omega^{i-1}),$$

где области G_{ir} определяются строками векторных неравенств

$$\sum_{j=1}^i \psi_{lj}(x_j, \omega^{i-1}) \leq b_l(\omega^i);$$

$\psi_{ij}(x_j, \omega^{i-1})$ ограниченные сверху по ω^{i-1} вектор-функции размерности m_i , монотонно возрастающие при $i \neq j$, $\forall \omega^{i-1}$, и монотонно убывающие при $i = j$, $\forall \omega^{i-1}$; $\psi_{ij}(0, \omega^{i-1}) = 0$, $\forall \omega^{i-1}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$); K_i — неотрицательные ортанты.

Таким образом, рассматривается многоэтапная задача стохастического программирования с условными вероятностными ограничениями вида

$$M \sum_{j=1}^n \psi_{0j}(x_j, \omega^{i-1}) \rightarrow \sup, \quad (7)$$

$$P\{\psi_{1,1}(x_1) \leq b_1(\omega_1)\} \geq \alpha_1,$$

$$P\{\psi_{2,1}(x_1, \omega_1) + \psi_{2,2}(x_2, \omega_1) \leq b_2(\omega^2) | \omega_1\} \geq \alpha_2(\omega_1), \quad (8)$$

• • • • • • • • • • • • • • • • • • •

$$\begin{aligned} P\{\psi_{n,1}(x_1, \omega^{n-1}) + \psi_{n,2}(x_2, \omega^{n-1}) + \dots + \psi_{n,n}(x_n, \omega^{n-1})\} &\leq \\ &\leq b_n(\omega^n) |\omega^{n-1}| \geq \alpha_n(\omega^{n-1}), \\ x_i &\in K_i. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через $F_i(\cdot)$ вектор-функцию условных распределений $b_i(\omega^i)$ при фиксированных компонентах вектора b^{i-1} и соответственно через $F_i^{-1}(\cdot)$ вектор-функцию, составляющие которой обратные функции к компонентам F_i (точнее, $F_i^{-1}(t) = \sup\{y \mid F_i(y) < t\}$). Предполагается, что составляющие F_i^{-1} ограничены снизу $\forall \omega^{i-1}$.

При принятых предположениях оптимальные решающие правила для задачи (7)–(9) имеют вид

$$x_i^*(\omega^{i-1}) = \psi_i^{-1} \left\{ - \left[F_i^{-1}(1 - \alpha_i(\omega^{i-1})) - \sum_{j=1}^{i-1} \psi_{ij}(x_j^*, \omega^{i-1}) \right]_{(-)}, \omega^{i-1} \right\},$$

где $\psi_i^{-1}(\cdot, \omega^{i-1})$ — вектор-функция, компоненты которой обратны составляющим вектор-функции $\psi_{ii}(\cdot, \omega^{i-1})$, а $[S]_{(-)} = \max(0, -S)$.

В случае, когда $\psi_{ii}(x_i, \omega^{i-1}) = A_{ii}(\omega^{i-1})x_i$, где $A_{ii}(\omega^{i-1})$ — случайная матрица, оптимальное априорное решающее правило $x_i^*(\omega^{i-1})$ оказывается кусочно-линейной функцией относительно $F_i^{-1}(1 - \alpha_i(\omega^{i-1}))$ и $\psi_{ij}(x_j^*, \omega^{i-1})$ ($j = 1, 2, \dots, i - 1$)

$$x_i^*(\omega^{i-1}) = -A_{ii}^{-1}(\omega^{i-1}) [F_i^{-1}(1 - \alpha_i(\omega^{i-1})) - \sum_{j=1}^n \psi_{ij}(x_j^*, \omega^{i-1})]_{(-)}.$$

Здесь $A_{ii}^{-1}(\omega^{i-1})$ — обратная (или соответственно, если A_{ii} прямоугольна, — псевдообратная) матрица. При некоторых допущениях о структуре многоэтапных стохастических задач их анализ может быть существенно упрощен и оптимальные априорные решающие правила могут быть получены по решению некоторой одноэтапной задачи с апостериорными решающими правилами.

Сведение многоэтапных стохастических задач с апостериорными и априорными решающими правилами к эквивалентным в некотором смысле одноэтапным моделям позволяет, кроме того, использовать алгоритмы стохастической аппроксимации или их естественные модификации для построения итерационных алгоритмов обучения решающим правилам и для их совершенствования.

8. Подведем итоги. В работе дан новый подход к выбору решения в сложных ситуациях, синтезирующий, в известной степени, достоинства математического, эвристического и эволюционного программирования. Экстремальную задачу (статическую или динамическую) предлагается рассматривать как одну из задач некоторого класса идентичных по структуре задач, на котором определена вероятностная мера. Решение задачи разделяется на два этапа — предварительный и оперативный. На предварительном, вообще говоря, трудоемком этапе определяется решающее правило, зависящее лишь от структуры задачи и статистических характеристик параметров условий. Разработка решающего правила (или решающей таблицы) сводится к решению детерминированной задачи стохастического программирования или к использованию итеративных процедур типа стохастической аппроксимации.

На втором этапе решающее правило (решающая таблица) используется для оперативного решения задачи по полученным реализациям параметров условий.

Значительный интерес, но и значительные трудности вызывает перенесение изложенных построений на задачи управления и планирования в уникальных неповторяющихся ситуациях. Здесь весьма важную роль играет субъективная вероятность и связанная с ней теория полезности. Интерпретация случайности как понятия, противопоставленного закономерности, дается здесь в определенных Колмогоровым (см., напр., [18]) терминах «сложности алгоритмов и программ». Для оценки трудоемкости оперативного использования решающих правил применяется введенное в теории конечных автоматов понятие «сложности вычислений». Все эти вопросы остаются, однако, за рамками данной работы.

В заключение отметим перспективы использования разрабатываемых принципов. Изложенный подход к решению экстремальных задач позволяет по-новому смотреть на конструирование и использование управляемых вычислительных машин и существенно расширить смысл, вкладываемый в понятие математическое обеспечение вычислительной техники.

Нет оснований сомневаться в необходимости универсальных вычислительных машин. Однако во многих, если не в большинстве сложных

систем управления, машины предназначены, главным образом, для решения задач одного или нескольких специальных классов. Машина может приспосабливаться к экономному оперативному решению задач заданных классов, меняя свою структуру или совершенствуя математическое (программное) обеспечение. Рассмотренный подход к постановке и решению экстремальных задач управления намечает пути решения каждой из этих задач.

Предлагается расширить производственный цикл изготовления вычислительных машин и ввести в него этапы обучения. До поступления к потребителю в заводских условиях и в дальнейшем у потребителя в лабораторных условиях машина проходит ряд курсов обучения на стендах, определяющих специализированный класс задач, для решения которых предназначается вычислительный комплекс. Время обучения зависит от сложности класса задач и требуемого качества решения. В результате обучения в машине с помощью структурных преобразований или программным путем формируются решающие схемы или решающие правила, обеспечивающие оперативное решение задачи каждого из классов задач, по которым специализируется вычислительный комплекс.

Конечно, процессу обучения для каждого класса задач должна предшествовать кропотливая работа по установлению общего вида и качественному анализу решающих правил или структур решающих таблиц..

Естественно, выполнение намеченной программы связано с огромными трудностями. Представляется, однако, что это не столько принципиальные, сколько технические трудности. Представляется также, что изложенный подход к постановке и решению задач управления, планирования и проектирования существенно расширит класс практических задач, поддающихся формальному количественному анализу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапорт, Об оптимизации независимыми детерминированными и стохастическими автоматами, Тр. НИИ ПМК и ф-та ГГУ, Горький, 1967.
2. Л. А. Растигийн, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
3. Э. А. Фейгенбаум, Д. Фельдман (ред.), Вычислительные машины и мышление, изд. Мир, М., 1967.
4. Г. Геллернгер, Реализация машины, доказывающей геометрические теоремы, см. сб. [3], стр. 145—164.
5. А. Ньюэлл, Дж. Саймон, Дж. Шоу, Разновидность интеллектуального обучения программы GPS, в сб. Самоорганизация системы, изд. Мир, М., 1964.
6. У. Рейтман, Познание и мышление. Моделирование на уровне информационных процессов, изд. Мир, М., 1968.
7. М. Л. Цетлин, Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, изд. Наука, М., 1969.
8. С. А. Смоляк, Экономика и математические методы, 7, № 3, 419 (1971).
9. Л. Фогель, Интеллектуальные уровни решений, в сб. Инженерная психология, изд. Прогресс, 1964.
10. Л. Фогель, А. Оуэнс, М. Уолш, Искусственный интеллект и эволюционное моделирование, изд. Мир, М., 1969.
11. Г. Паск, Модель эволюции, в сб. Принципы самоорганизации, изд. Мир, М., 1966.
12. Я. З. Цыпкин, Основы теории обучающихся систем, изд. Наука, М., 1970.
13. Э. М. Вайсборд, Д. Б. Юдин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 3 (1968).
14. Д. Б. Юдин, ДАН СССР, 177, № 6, 1292 (1967).
15. М. Т. Вазан, Стохастическая аппроксимация, изд. Мир, М., 1972.

16. Д. Б. Юдин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3 (1969).
17. А. Д. Иоффе, Д. Б. Юдин, Ж. вычисл. математ. и матем. физики, 10, № 1, 158 (1970).
18. А. К. Звонкин, Л. А. Левин, УМН, 25, 6 (156), 85 (1970).

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

DECISIVE RULES IN EXTREMAL PROBLEMS

D. B. Yudin

A classification of known approaches to the statement and solution of complicated extremal problems is given and a new approach is suggested that synthesizes to a certain extent the advantages of mathematic, heuristic and evolutional programming.

УДК 62—507

АВТОМАТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ*

Ю. И. Неймарк

Дается обзор результатов математических экспериментов по исследованию оптимизационных возможностей коллектива независимых автоматов.

Задача оптимизации функций многих переменных из казавшейся недавно тривиальной и бессодержательной превратилась в последнее время в одну из актуальных проблем. Это связано не только с ее огромной практической важностью, но и с изменением нашего понимания ее содержания.

Работы по изучению процессов оптимизации в г. Горьком начались с изучения динамики экстремальных систем с автоколебательным и шаговым типами поиска. Основные результаты этих работ состоят в полном исследовании структуры фазового пространства, в открытии новых особенностей этой структуры и ее связи с процессами поиска экстремума. Основное внимание этих работ было сосредоточено на исследовании динамики экстремальной системы при весьма примитивной логике поиска. Затем к ним присоединились работы по изучению стохастических моделей экстремальных систем. В них основное внимание уделялось изучению алгоритмов поиска и их работоспособности в обстановке помех. Оба этих направления работ, проводившихся в основном Н. Н. Леоновым и М. Л. Таэм, непосредственно примыкают к традиционной тематике Горьковской школы нелинейных колебаний, созданной А. А. Андроновым.

Под влиянием новых веяний стал естественным интерес к самому процессу поиска экстремума, понимаемого как некоторый последовательный процесс принятия решений, к рассмотрению задачи оптимизации функций, как некого пробного камня для изучения загадок процесса поиска решения.

В этом плане можно стремиться к построению метода поиска минимума. Для этого прежде всего нужно было построить математическую модель задачи. Предложенная математическая модель состояла из пространства минимизируемых функций Φ , с заданной в ней вероятностной мерой, из набора допустимых действий Ω и функционала H , характеризующего степень завершенности отыскания минимума. В этой модели процесс поиска минимума функции состоит в последовательном выборе действий из класса Ω , возможно быстрее минимизирующих функционал H . При выборе в качестве функционала H энтропии глобального минимума функции приходим к принципу максимума информации, сформулированному в работе [1].

Возможен и другой путь, состоящий не в поиске метода, а поиске системы, обладающей способностью отыскания минимума функции. Можно думать, что такой подход — нечто совершенно отличное от подхода, в основе которого лежит поиск метода. Однако это не так, во вся-

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

ком случае, не так при подходе к обеим постановкам с достаточно общих позиций. Ведь первый подход—это тоже поиск минимума некоторой системой, системой очень сложной, мало нам известной, функционирующей в соответствии с законами логики, априорной аксиоматики и кто его знает еще чего.

Таким образом, с этой очень общей позиции решение задачи поиска минимума функции в обоих случаях есть результат деятельности некоторой системы.

Какова же должна быть система, каковы должны быть ее основные структурные характеристики и свойства, для того, чтобы она обладала возможностью поискового решения достаточно широкого класса задач минимизации функций?

Если не за ответом на вопрос, то, во всяком случае, за помощью в ответе, естественно обратиться к биологическим системам. При всей их сложности в их основе, как мы можем сейчас думать, лежат простые элементы, способные к простым действиям, в значительной мере независимые друг от друга, точнее связанные друг с другом лишь через воздействие общей среды, на которую все они влияют. Мы не можем сейчас сколько-нибудь существенно уточнить эти соображения. Но возможно пойти по пути построения и опробования гипотетических моделей, в какой-то мере отвечающих этим общим соображениям.

Что из себя представляет отдельный элемент? В простейшем случае—это автомат с двумя выходными действиями, определяемыми внутренним состоянием автомата, которые меняются под воздействием внешней среды в соответствии с примитивными реакциями типа приемлемо—неприемлемо, да—нет, удовольствие—неудовольствие. Это может быть, например, автомат с линейной тактикой М. Л. Цетлина, изображенный на рис. 1, или его стохастический вариант.

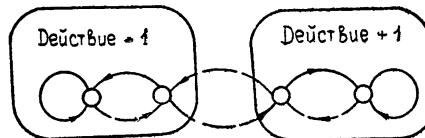


Рис. 1.

Двум левым состояниям отвечают действия автомата —1, правым +1. Смена состояний автомата происходит согласно стрелкам, сплошным при положительной реакции автомата на состояние среды и пунктирным—при отрицательной реакции. Стохастический автомат отличается от детерминированного тем, что теперь смена состояний носит случайный характер. При положительной реакции автомата на состояние среды с вероятностью p смена состояний происходит в соответствии со сплошными стрелками, с вероятностью $q < p$ —в соответствии с пунктирными; при отрицательной реакции—наоборот.

Как известно [2, 3], описанный автомат с линейной тактикой наделен способностью к целесообразному поведению в стационарных и достаточно медленно меняющихся средах.

Какова же система в целом? Примем, что состояние общей для всех автоматов среды, характеризующейся числом Q , изменяется в зависимости от выходных действий $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ находящихся в ней автоматов $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ и что автоматы положительно реагируют на уменьшение Q и отрицательно—на его возрастание (рис. 2).

Показатель состояния среды Q определяется значениями каких-то переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Влияние автоматов на среду состоит в том,

что их действия $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ определяют изменения переменных x_1, x_2, \dots, x_n так, что

$$\Delta x_s = f_s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В простейшем случае, когда каждый из автоматов Ω_s действует на «свою» переменную x_s среды, можно принять, что

$$\Delta x_s = \alpha_s \xi_s.$$

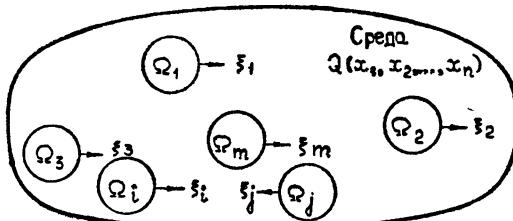


Рис. 2.

В этом простейшем случае влияния действия автоматов на среду приходим к структурной схеме автоматного оптимизатора, показанной на рис. 3.

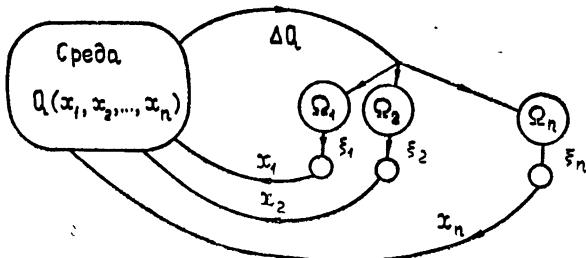


Рис. 3.

На первый взгляд представляется, что система с такой структурой не должна работать. При одинаковых автоматах $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ так оно и оказалось. Поиска минимума не происходило, а вместо этого система зацикливалась. Однако все оказалось совсем иначе, как только автоматы $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ были выбраны достаточно разнообразными или, еще лучше, стохастическими. Система сразу обрела способность к поиску минимума, осуществляла слежение за достаточно медленно дрейфующим минимумом иправлялась с не очень интенсивными помехами [4, 5]. Соответствующие эксперименты проводились на разнообразных функциях $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с числом переменных x_1, x_2, \dots, x_n от 1 до 25. Среди этих функций были как очень просто устроенные функции вида

$$\sum_{i=1}^{l=n} x_i^2 \quad (n = 1, 2, \dots, 25),$$

так и несколько более сложные функции

$$100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + A \sum_{i=n-l}^n (x_i - x_{i-1})^2 \quad (n = 1, 2, \dots, 10; l = 1, 2, \dots, n-2),$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 40 \sin x_1 \sin x_2$$

с оврагами и несколькими экстремумами.

Оказалось, что такой коллектив независимых автоматов может оптимизировать не только стационарную среду-функцию $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но и не слишком сложные динамические объекты, описываемые уравнениями первого или второго порядка [5].

Автоматный оптимизатор справился и с такими задачами, как оптимизация структуры игрового автомата [6], с поиском глобального экстремума [7] и поиском минимума функций при наличии ограничений [5].

Возможен непрерывный аналог автоматов с линейной тактикой. При этом входы ξ_i связаны с Q дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} T_i \dot{\varphi}_i + \varphi_i &= \operatorname{sgn}(\varphi_i \dot{Q}), \\ \xi_i &= \operatorname{sgn} \varphi_i. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что при непрерывной реализации система осуществляет поиск минимума и в случае одинаковых элементов (одинаковые T_i). Объясняется это неизбежным наличием помех в моделирующей непрерывной системе. Аналогичное обстоятельство было обнаружено Л. Н. Фицнером [8].

Каковы возможные пути улучшения поисковых возможностей автоматного оптимизатора? Рассмотрению были подвергнуты следующие:

1. Оптимизация параметров автоматного оптимизатора.
2. Увеличение разнообразия поисковых движений.

3. Отыскание способа, с помощью которого при поиске глобального минимума можно было бы, в частности, избавиться от ручного управления вероятностью p смены состояний стохастических автоматов.

Качество поиска минимума, которое можно характеризовать средним временем поиска, его точностью и разбросом, зависит от объемов памяти автоматов, вероятностей смены их состояний и размеров шагов. Поэтому казалось естественным пытаться улучшить работу автоматного оптимизатора путем прямой оптимизации его параметров по этим критериям качества, например, с помощью опять же автоматных оптимизаторов. Однако этот путь оказался непреемлемым. Время оптимизации во втором этаже было несоизмеримо велико с временем изменения условий работы автоматного оптимизатора первого этажа, в результате чего, по-видимому, и не удалось получить сколь-нибудь обнадеживающие результаты.

В связи с этим был экспериментально опробован другой путь, состоящий в том, что из некоторого набора автоматы могли попадать в автоматный оптимизатор и возвращаться обратно случайно с вероятностями, зависящими от их лицевых счетов, отражающих эффективность их деятельности. Оказалось, что введение лицевых счетов и приоритетов в использовании обеспечивает некоторую адаптацию параметров автоматного оптимизатора к конкретным условиям поиска минимума [7, 9, -0].

Автоматный оптимизатор, как он был описан выше, обладает сравнительно небольшим разнообразием поисковых движений. Для некоторых «неудачных» функций это может привести к значительному ухудшению поиска минимума или даже практической его потере.

Однако простое увеличение разнообразия поисковых движений сразу же вступает в противоречие со слишком большим временем, необходимым для выбора нужного движения. Одним из приемлемых путей преодоления этого основного противоречия в осуществлении всякого

поискового решения оказалась рассинхронизация тактовых частот работы автоматов с адаптацией.

Другой возможный путь был обнаружен в связи с попыткой полностью автоматизировать процесс поиска глобального экстремума. При экспериментальном изучении автоматного оптимизатора было обнаружено, что при управлении вероятностью p можно добиться того, чтобы он отыскивал глобальный экстремум. Этой автоматизации удалось добиться путем введения оценки самим автоматным оптимизатором результатов своей деятельности и изменения вероятности p в зависимости от этой оценки. Под влиянием биологических ассоциаций эта оценка была названа эмоциональной, а уменьшение и увеличение вероятности p — торможением и возбуждением. Механизм эмоциональной оценки дал положительный результат и в ускорении адаптации параметров автоматного оптимизатора [7, 9, 10].

Таким образом, коллектив независимых автоматов с примитивной линейной тактикой оказался способным к решению не очень сложных поисковых задач. Трудно сказать, где граница его возможностей. Выяснение этого весьма затруднительно, и, я думаю, значительно интересней вопрос о том, как найти более универсальные и совершенные структуры, способные к решению более сложных поисковых решений.

Думается, что здесь опять следует обращаться к окружающей нас биологической природе и действовать подобно ей, организовывая эволюционные процессы, ведущие к совершенствованию структуры. Некоторый пробный шаг в этом направлении уже сделан [11], но здесь, мне кажется, все еще впереди.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Стронгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 17 (1966).
2. М. Л. Цетлин, УМН, 18, вып. 4 (112), 3 (1963).
3. М. Л. Цетлин, Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, изд. Наука, М., 1969.
4. Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапопорт, Об оптимизации коллективом независимых автоматов и играх автоматов, Уч. зап. НИИ ПМК и ВМК ГГУ, Горький, 1967.
5. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Е. И. Ронин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 15, № 3, 365 (1972).
6. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Е. И. Ронин, В. И. Мухин, Автоматика и вычислительная техника, № 2, 42, Рига, (1972).
7. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Е. И. Ронин, в сб. Задачи статистической оптимизации, Рига, 1971.
8. Л. Н. Фицнер, Автоматика и телемеханика, 26, № 11, 1968 (1965).
9. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Е. И. Ронин, Коллектив независимых стохастических автоматов, как адаптивная система, Тр. семинара комиссии по адаптации, Томск, 1971.
10. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Об одной гомеостатической модели оптимизации, Вопросы кибернетики и вычислительной математики, вып. 28, изд. ФАН, Узб. ССР, Ташкент, 1969.
11. В. И. Мухин, Ю. И. Неймарк, Е. И. Ронин, Исследование эволюционирующей модели поисковой системы оптимизации, Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по экстремальным задачам, Горький, 1971.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 ноября 1971 г.

OPTIMIZATION BY AUTOMATA

Yu. I. Neimark

The article presents a survey of the results of a mathematical investigation into the optimizational potentialities of an autonomous automata collective.

УДК 519.87

ТЕЗИСЫ О ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ В ИГРАХ С НЕПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ*

Ю. Б. Гермейер

Анализируются основные понятия рационального выбора с отделением этого вопроса от оценки ожидаемого результата. Необходим учет реальной взаимной информированности игроков об интересах и ходах и учет возможности обмена информацией. Это позволяет сформулировать и использовать обобщенный принцип максимального гарантированного результата. Описываются соответствующие результаты в случае полной информированности первого игрока и желательность для второго частичного скрытия своих интересов.

Предлагается единая форма записи критерия коалиции без побочных платежей, с побочными платежами и стремления к использованию ситуаций равновесия.

1. Хотя бы апостериори любое принятное решение может трактоваться как полученное целеустремленно для увеличения или уменьшения некоторого одного критерия эффективности, например, некоторой невязки.

Процесс, рассматриваемый только в интересах группы лиц, придерживающихся единой цели (т. е. одного и того же критерия), целесообразно называть операцией этой группы лиц (оперирующей стороны). В отличие от операции игра объективно характеризуется наличием нескольких критериев эффективности, отвечающих интересам соответствующих «игроков». Ясно, что игра, рассматриваемая только с позиций одного из игроков, есть операция.

Появление в операции векторного критерия оперирующей стороны может быть только следствием неопределенности желаний или недостаточно четкого моделирования единой цели.

Во всех этих случаях общую ситуацию при выборе решения можно выразить следующим образом.

Имеется n критериев эффективности

$$W_i = f_i(\bar{x}) = f_i(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

(которые желательно увеличивать) при условии $\bar{x} \in P$, причем x_i выбирается i -м игроком; в частности, если реально есть только один первый игрок, то x_2, \dots, x_n фиксированы. В качестве одного из игроков (пусть n -го) может быть «природа». Последняя также характеризуется тем или иным вариационным принципом — критерием эффективности, например, при полной неопределенности это

$$f_n(\bar{x}) = \text{const}. \quad (2)$$

В игре (1) можно при желании положить $P = P_1 \times \dots \times P_n$, где $x_i \in P_i$. Если первоначально P не обладает этим свойством, то взяв в качестве P_i проекцию P на пространство x_i и введя

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

$$f_i^*(\bar{x}) = \begin{cases} f_i(\bar{x}) & (\bar{x} \in P), \\ -\infty & (\bar{x} \in P_1 \times \dots \times P_n - P), \end{cases} \quad (3)$$

преобразуем игру (1) к требуемому виду. В дальнейшем будем полагать $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$.

Общее описание игры дополняется введением множеств M_i стратегий игроков, отвечающих ожидаемой информации i -го игрока о решениях остальных игроков. Как обычно в теории игр, стратегиями являются функции $\tilde{x}_i = x_i(\bar{x})$, разрешаемые этой ожидаемой информацией. Так, если информации не ожидается, то $x_i(\bar{x}) = x_i$ и $M_i = P_i$; если же i -й игрок ожидает полную информацию о некотором x_j и только о нем, то M_i состоит из любых функций $x_i(x_j)$ и т. д.

Нужно еще указать для каждого i -го игрока номера $j^{(i)}$ критериев (в том числе и $j^{(i)} = i$), которые этот игрок хотел бы увеличивать.

Исходная игровая ситуация будет определена полностью, если еще будет указано, что знает i -й игрок об интересах и множествах стратегий остальных игроков. В классической теории игр эта информация по существу считается полной и точной, что отнюдь не всегда соответствует реальности.

2. В простейшем случае полной независимости игроков

$$W_i = f_i(x_i).$$

при $P = P_1 \times \dots \times P_n$ (в том числе и при $n = 1$) понятие рационального выбора ситуации (x_1, \dots, x_n) , очевидно, полностью описывается стремлением i -го игрока к оптимизации своего W_i . Задача поиска рационального выбора i -м игроком сводится к решению n оптимизационных задач $\max_{x_i \in P_i} f_i(x_i)$.

Столь же просто обстоит дело и в случае совпадающих интересов $f_1(\bar{x}) = \dots = f_n(\bar{x})$, когда разумные игроки должны стремиться к совместной оптимизации единого критерия эффективности, а потому и добровольно обмениваться информацией.

Заслуживает термина «оптимальный выбор» и седловая точка (если она существует) в антагонистической игре ($n = 2$, $f_1 = -f_2$).

В остальных случаях в настоящее время не существует (и, видимо, не может существовать) определенное и единственное понятие оптимальности выбора; поэтому следует избегать этого термина, заменив его, например, термином «рациональный» с обязательной фиксацией его смысла в каждом конкретном случае. При этом, как правило, задачи определения рационального выбора x_i i -м игроком и ожидаемого результата игры оказываются различными математическими задачами, по разному связанными со взаимной информированностью игроков.

Так, в случае игр с распадающимися интересами, когда i -й игрок интересуется лишь величиной W_i , причем $P = P_1 \times \dots \times P_n$ и

$$W_i = f_i(x_i) + \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (4)$$

за рациональный выбор принимают оптимизацию $\max_{x_i \in P_i} f_i(x_i)$, независимо от того, каковы $M_i \supset P_i$. При этом рациональное поведение i -го игрока не зависит от поведения остальных и требует поэтому для своего определения знания i -м игроком интересов и выбора остальных и даже знания φ_i .

В то же время для оценки ожидаемого результата игры i -му игроку, (а тем более, для игры в целом) необходимы, очевидно, знание φ_i и фиксация степени информированности о поведении и интересах дру-

гих игроков; более точная информация позволяет и более точно оценить ожидаемый результат игры при рациональном поведении игроков, особенно, если соответствующий выбор не единствен.

Уже из этого примера видно, что задача правильного прогнозирования результата игры при рациональных действиях требует или высокой самостоятельной информированности или же (что проще) обмена информацией.

Аналогичное разделение задач легко видеть и в случае, когда все игроки в игре (3) в качестве своего принципа рационального выбора применяют $\max \min_{\substack{x_i \in M_i \\ i \neq l}} f_i(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_l, \dots, x_n)$.

$$\max_{x_i \in M_i} \min_{\substack{x_j \in P_j \\ i \neq j}} f_i(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_l, \dots, x_n)$$

3. В современной теории и исследовательской практике принятия решений основным способом формирования рациональных решений является рекуррентия к уже рассмотренным ранее более простым случаям принятия решений путем некоторой замены вектора критериев, уменьшающей их число или количество переменных, сказывающихся на их значениях.

Примеры.

а) Принцип рационального выбора (при $n = 2$)

$$\max_{x_1 \in P_1} \min_{x_2 \in P_2} f_1(x_1, x_2),$$

признаваемый как для антагонистических игр, так и для «игр с природой», характеризуемой (2), очевидно, равнозначен оптимизации критерия

$$\varphi_1(x_1) = \min_{x_2 \in P_2} f_2(x_1, x_2),$$

зависящего уже только от одной переменной.

б) Для определения рационального компромиссного решения в случае «векторной оптимизации» часто используют введение одного

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\bar{x}), \quad (5)$$

который и оптимизируется.

Столь же часто рациональными действиями считаются действия, приводящие к «удовлетворительным результатам», т. е. к выполнению неравенств $f_i(\bar{x}) \geq a_i$, где a_i задаются заранее. Но это эквивалентно оптимизации одного критерия

$$\Phi(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \min_{1 \leq i \leq n} f_i(\bar{x}) \geq a_i, \\ 0 & \text{при } \min_{1 \leq i \leq n} f_i(\bar{x}) < a_i. \end{cases} \quad (6)$$

в) Стремление к выбору в качестве рациональных стратегий игроков компонент ситуаций равновесия, т. е. векторов \bar{x}_0 , для которых при $1 \leq i \leq n$

$$f_i(\bar{x}_0) = \max_{x_i \in P_i} f_i(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0), \quad (7)$$

оказывается эквивалентом «игре с природой», управляемой вектором $\bar{y} \in P$, или антагонистической игре с общим для всех игроков критерием

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{1 \leq i \leq n} [f_i(\bar{x}) - f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_i, \dots, x_n)]. \quad (8)$$

Таким образом, здесь рациональный выбор сведен к случаю а) и, значит, в дальнейшем к совместной оптимизации критерия

$$\min_{\bar{y} \in P} \Psi(\bar{x}, \bar{y}).$$

г) В теории фон Неймана и Моргенштерна рассмотрение игр n лиц по существу сводится к рассмотрению различных коалиций (т. е. множеств номеров S) игроков, которые объединены стремлением к увеличению единого критерия $\sum_{i \in S} f_i(\bar{x})$. Рациональное поведение

коалиции при этом сводится к рациональному поведению игрока в антагонистической игре, т. е. к случаю а).

Если согласиться с выдвинутым тезисом, то последовательно проведенная рекуррентия приводит к выводу, что всегда рациональный выбор i -го игрока может быть представлен как стремление к оптимизации некоторого одного критерия эффективности.

Анализ показывает, что формирование такого единого критерия с любой точностью может быть представлено с помощью последовательного выполнения над формально введенным единственным критерием

$$F(\bar{x}^*) = F(\bar{x}, i) = f_i(\bar{x}) \quad (9)$$

(где $\bar{x}^* = (n+1)$ -мерный вектор, а i есть по существу составляющая стратегии «природы») следующих «основных» способов свертывания.

1 способ.

$$f_c(\bar{x}^*) = \int F(\bar{y}^*) d\lambda(\bar{y}^*) + \lambda_0 \quad (10)$$

$(\bar{y}^* \in P(\bar{x}^*) \subset P).$

Здесь $\lambda(\bar{y}^*)$ — функция с ограниченной вариацией. Частным случаем (10) является (5) или взятие математического ожидания, если какая-либо составляющая \bar{x}^* (например, «природная») считается случайной.

2 способ.

$$f_c(\bar{x}^*) = \min_{\bar{y}^* \in P(\bar{x}^*)} \lambda(\bar{y}^*) F(\bar{y}^*). \quad (11)$$

В частности, если при $n=2$ взять $P(\bar{x}^*) = \{\bar{y}^* \mid \bar{y}^* \in P, y_1^* = x_1^*, y_3^* = i=1\}$ и $\lambda(\bar{y}^*) = 1$, то

$$f_c(\bar{x}^*) = f_c(x_1) = \min_{x_2 \in P_2} f_1(x_1, x_2).$$

Частным случаем (11) является и

$$f_c(\bar{x}) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i f_i(\bar{x}).$$

3 способ.

$$f_c(\bar{x}^*) = \max_{\bar{y}^* \in P(\bar{x}^*)} \lambda(\bar{y}^*) F(\bar{y}^*). \quad (12)$$

Способы свертывания (11) и (12) являются обобщением логических операций — конъюнкции и дизъюнкции.

4 способ.

4. В практике принятия рациональных решений можно довольно отчетливо отметить существование двух противоположных (но не взаимоисключающих) тенденций.

А) «Изоляционизм» — когда какой-то, например, первый, игрок

интересуется только первым критерием и стремится к принятию решения в виде стратегии, остающейся неизменной независимо от решений остальных игроков и, как правило, от их интересов. Такое поведение особенно оправдано, когда этот игрок не имеет достаточно точной информации (или не доверяет ей) об интересах других игроков. В этом случае для выбора решения он, естественно, стремится сформировать критерий, независимый от конкретных решений остальных игроков, а затем уже его оптимизировать.

Б) «Коллективизм», состоящий в стремлении принять совместное компромиссное решение, учитывающее интересы всех игроков. Такой способ действия требует достаточно точного знания этих интересов, которое, как правило, может появиться только при добровольном обмене информацией. В этом случае игроки должны совместно выработать единый для всех критерий и уж затем его оптимизировать.

Такой способ действий естествен для единственного игрока в случае «векторной оптимизации» (8); другим примером коллективных действий является применение ситуаций равновесия (6) и образование коалиций игроков (частичный «коллективизм»).

Наиболее ярким проявлением первой тенденции является применение принципа наилучшего гарантированного результата, частным случаем которого будет реализация первым игроком максимина на множестве стратегий M_1 :

$$\max_{\tilde{x}_1 \in M_1} \min_{\substack{x_j \in P_j \\ j \neq i}} f_1(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\tilde{x}_1 \in M_1} \varphi_1(\tilde{x}_1) = \Delta_1(M_1). \quad (13)$$

Такой способ действий несомненно рационален, если первый игрок не знает интересов остальных и степени коллективности их действий. Однако наиболее желательным для «изоляциониста» представляется наличие «абсолютно оптимальной» стратегии \tilde{x}_1^a первого игрока, доминирующей все его остальные стратегии, так что при любых $x_i \in P_i$

$$f_1(\tilde{x}_1^a, x_2, \dots, x_n) = \max_{\tilde{x}_1 \in M_1} f_1(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_n). \quad (14)$$

Введя новый критерий

$$F_1(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_n) - \max_{y_1 \in P_1} f_1(y_1, x_2, \dots, x_n), \quad (15)$$

стремление к получению \tilde{x}_1^a можно представить в виде стремления к реализации

$$\max_{\tilde{x}_1 \in M_1} \min_{\substack{x_j \in P_j \\ j > i}} F_1(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0. \quad (16)$$

Если максимин в (16) равен нулю, то абсолютно оптимальная стратегия существует. В частности, она существует, если $M_1 = M_1^a$ состоит из всевозможных функций $x_1(x_2, \dots, x_n)$, что соответствует своевременному получению точной и полной информации об (x_2, \dots, x_n) первым игроком. Ясно, что расширение M_1 от P_1 до M_1^a приводит к увеличению максимина (16); как только его значение станет достаточно близким к нулю, соответствующая степень информированности об

(x_2, \dots, x_n) может считаться достаточной, а стратегия \tilde{x}_1 , реализующая (16), близкой к \tilde{x}_1^a и, следовательно, рациональной.

Такая стратегия, безусловно, хороша, если интересы остальных игроков неизвестны; в этом случае ожидаемый по принципу гарантии результат близок к

$$\min_{\substack{x_j \in P_j \\ j > 1}} \max_{x_1 \in P_1} f_1(x_1, \dots, x_n) \quad (17)$$

и определение ею—задача, отнюдь не совпадающая с (16). Кажущаяся безусловно оптимальной \tilde{x}_1^a на самом деле лишь рациональна в определенных условиях.

5. Область действия и понимание принципа наилучшего гарантированного результата могут быть значительно расширены, если учесть возможную информацию первого игрока об интересах других. Однако, для реализации этого необходимо установить определенный порядок ходов игроков и возможность добровольной передачи игроками информации о выборе своих стратегий.

В достаточно разработанном случае $n = 2$ принцип наилучшего гарантированного результата для первого игрока выглядит следующим образом.

Первый игрок знает, что интересы второго описываются критерием $W_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha)$, где, однако, о значении α первому игроку известно лишь, что $\alpha \in E$ (неполная информация об интересах), хотя на самом деле α фиксировано и известно второму игроку. Делая первый «ход», первый игрок выбирает стратегию $\tilde{x}_1 \in M_1$ и сообщает ее второму. В этих условиях наилучший гарантированный результат первого игрока равен

$$\max_{\tilde{x}_1 \in M_1} \inf_{\tilde{x}_2 \in P_2(\tilde{x}_1)} f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \quad (18)$$

причем

$$P_2(\tilde{x}_1) = \sum_{\alpha \in E} P_2(\tilde{x}_1, \alpha), \quad (19)$$

$$P_2(\tilde{x}_1, \alpha) = \{ x_2 / f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \alpha) = \max_{x'_2 \in P_2} f_2(\tilde{x}_1, x'_2, \alpha) \}.$$

В случаях, когда E состоит из одной точки (интересы второго игрока точно известны первому) и f_2 унимодальна, результат (18)—(19) для первого игрока не хуже лучшего равновесного, а зачастую и значительно лучше.

Во многих случаях соответствующее поведение первого игрока обещает ему результат лучший, чем дает \tilde{x}_1^a .

Это обстоятельство является следствием права первого хода и точного знания интересов второго игрока.

Если $M_1 = M_1^u$ (т. е. ожидается точная информация о \tilde{x}_2), то рациональная по (18)—(19) стратегия \tilde{x}_1^0 описывается точно аналитически и поконится на следующих основных идеях (второй игрок—не «природа»).

1) Стратегия \tilde{x}_1^0 дает второму игроку возможность получить выигрыш больший, чем

$$\max_{x_2 \in P_2} \min_{x_1 \in P_1} f_2(x_1, x_2) = L_2,$$

если он выберет x_2 , указываемое первым игроком (и ему выгодное).

2) Если второй игрок не примет этого решения, то \tilde{x}_1^0 наказывает его так, что он не сможет получить результата, большего, чем L_2 (а его второй игрок может получить при самостоятельных «изоляционистских» действиях).

Анализ возможных ответных действий второго игрока приводит к желательности для него сокрытия своих интересов так, чтобы первый игрок знал лишь $f_2(x_1, x_2, \alpha)$ при $\alpha \in E$.

6. Пусть среди игроков нет «природы». Аналогично $L_i(M_i)$ в (13) определяются и $L'_i(M_i)$. Эти величины выражают результат, который может достичнуть любой игрок, не взирая на интересы и действия остальных, если он интересуется только своим W_i . Возможны только такие коллективные решения \bar{x} , для которых

$$f_i(\bar{x}) \geq L_i(M_i)$$

для всех i .

Обозначим соответствующую область через $D(M_1, \dots, M_n)$ и пусть

$$D'(M_1, \dots, M_n) = \{ \bar{x} / f_i(\bar{x}) > L_i(M_i); \quad i = [1, n] \}.$$

Для $M_i = P_i$ область D_0 всегда не пуста, если $L_i(P_i)$ достижимы (например, если f_i непрерывны, а P_i компактны). Однако область D_0 вряд ли может вся считаться областью возможных коалиционных действий; скорее таковой является область $D'_0 = D'(P_1, \dots, P_n)$, если, конечно, игроки не ожидают самостоятельно получаемой информации о решениях остальных игроков, т. е., если $M_i = P_i$.

По мере роста M_i от P_i до $M_i^u L_i$, как это видно из (13), вообще говоря, возрастают, а значит, области D и D' уменьшаются; вместе с тем уменьшается как бы и возможность коллективных решений. Если $D'_0 = \emptyset$, то коллективные решения всех игроков по существу невозможны, хотя и могут образовываться частные коалиции.

Если, наоборот, $D'(M_1^u, \dots, M_n^u) \neq \emptyset$, то разумные игроки не должны действовать индивидуально, во всяком случае, если они не обладают правом первого хода.

Проверка непустоты D или D' легко приводится к оптимизации критерия

$$W(\bar{x}) = \min_{1 \leq i \leq n} [f_i(\bar{x}) - L_i(M_1, \dots, M_n)]. \quad (20)$$

Если $\max_{\bar{x} \in P} W(\bar{x}) > 0$, то $D' \neq \emptyset$ и т. д.

Сам рациональный коллективный компромисс сводится к стремлению оптимизировать некоторый единый критерий, в качестве которого можно, например, использовать функции вида

$$F(\bar{x}) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i [f_i(\bar{x}) - R_i(\bar{x})]. \quad (21)$$

Здесь $R_i(\bar{x})$ выражают стремление i -го игрока в отношении величины W_i , а μ_i — вес интересов i -го игрока в компромиссе; создание

компромисса или коалиции эквивалентно принятию совместного решения о $R_i(\bar{x})$ и μ_i , после чего задача выработки рационального поведения сводится к оптимизации $F(\bar{x})$ (опять редукция к оптимизации).

Стремление к точкам равновесия (см. (8)) эквивалентно принятию в (21) $R_i(\bar{x}) = \max_{x_i \in P_i} f_i(\bar{x})$. Если принять $R_i(\bar{x}) = \max_{\bar{x} \in D_0} f_i(\bar{x})$, то ис-

пользование (21) есть математический эквивалент стремления к достижению максимумов всех критериев одновременно; последнее, конечно, возможно при полном совпадении интересов, но и не только тогда, как показывает пример: $n = 2$

$$f_1 = -(x_1 - x_2)^2, \quad f_2 = -(x_1^2 + x_2^2)$$

при $P_1 = [-1, 1] = P_2$.

Определенные удобства может представить и $R_i(\bar{x}) = -L_i$, поскольку тогда оптимизация (21) одновременно дает (так же, как и (20)) возможность судить о целесообразности коллективных действий. Показано, что в случае $M_i = P_i$ такой способ выработки коллективных действий может дать при надлежащем выборе μ_i результат игры не хуже, чем вектор $f_i(\bar{x})$ при любом фиксированном x . Таким образом, изменения $\{\mu_i\}$, можно отразить с помощью (21) любой компромисс или, как говорят, коалицию без побочных платежей. В качестве компромиссных могут быть получены и результаты лучшие, чем те, что дают ситуации равновесия. Например, в известной игре «дилемма заключенного», где

$$f_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}, \quad f_2 = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

есть единственная ситуация равновесия—применение обоими игроками вторых стратегий; это дает результат $(1; 1)$. В то же время для $M_1 = P_1$, $M_2 = P_2$, $L_1 = L_2 = 1$, взяв еще $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и оптимизируя (21), получим в качестве рациональной коллективной стратегии применение обоими игроками первых стратегий, что дает результат $(5; 5)$.

По поводу рациональности использования точек равновесия можно отметить следующее.

а) Применение точек равновесия обеспечивает игрокам результаты не худшие, чем L_i , соответствующие $M_i = P_i$.

б) Отход одного игрока от ситуации равновесия, в то время как остальные ее придерживаются, не приносит ему выгоды. Это обстоятельство является существенным при малых n (например, при $n = 2$), поскольку создает известную устойчивость равновесных результатов; однако при больших n одновременный отход нескольких игроков создает иную ситуацию—устойчивости по существу нет.

в) По идеи Нэша равновесные ситуации могли бы быть основой самостоятельно выбиравшего (бескоалиционного) решения игроков, знающих интересы друг друга. Однако ситуации равновесия в чистых стратегиях существуют редко, а если существуют, то не единственны и не эквивалентны между собой с точки зрения интересов отдельных игроков. Поэтому ситуация равновесия в большинстве случаев может реализоваться только в результате переговоров, т. е. коллективных действий. Но тогда для разумных и доверяющих друг другу игроков более рациональны коалиции по (21) при $R_i(\bar{x}) = L_i$.

Выбор μ_i , как и сами причины образования коалиции, в настоящее время не formalизованы, а может быть и вообще не могут быть formalизованы. Однако, если участники коалиции полностью передоверяют

выбор μ_i арбитру, то формальное применение принципа гарантированного результата приведет его к решению

$$\mu_i = \frac{1}{\max_{\bar{x} \in D'_0} f_i(\bar{x}) - L_i}.$$

7. Еще большие возможности создают коалиции с побочными платежами, в которых выражение критериев игроков имеет вид

$$W_i = f_i(\bar{x}) + \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 0. \quad (22)$$

Здесь величины α_i выражают дополнительный платеж i -му игроку, выдаваемый коалицией.

Суммарный критерий коалиции, аналогично (21), есть

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i [f_i(\bar{x}) + \alpha_i - L_i]. \quad (23)$$

Выбор вектора $\{\mu_i\}$ (который может быть назван принципом дележа) и определяет деятельность коалиции. Рациональное решение — оптимизация (23) по \bar{x} и $\{\alpha_i\}$. Если на α_i не наложены ограничения, кроме $\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = 0$, то при любом n оптимальны α_i^0 такие, что

$$\mu_i [f_i(\bar{x}) + \alpha_i^0 - L_i] = \mu_1 [f_1(\bar{x}) + \alpha_1^0 - L_1] = K.$$

При этом

$$K \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$$

и i -й игрок получает W_i , равный

$$f_i(\bar{x}) + \alpha_i^0 = L_i + \frac{1}{\mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\mu_j}} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \lambda_j L_j \right]. \quad (24)$$

Таким образом, выигрыш всех игроков коалиции растет с ростом

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\bar{x}). \quad (25)$$

Оптимизация (23) приводится к оптимизации (25) по \bar{x} и последующему определению W_i по (24). Именно так (при $\lambda_i = 1$) и представляется дело в классической теории игр с побочными платежами; однако оптимизация (23) не будет эквивалентом оптимизации (25), если на побочные платежи будут наложены дополнительные ограничения.

Использование $\{\mu_i\}$ в качестве принципа действия коалиции удобно потому, что создает общее правило дележа (24), которое может считаться одинаково «справедливым» при любом x . Это важно, ибо практически коалиции создаются до того, как определяется «оптимальное» \bar{x} , и это типично для больших систем.

Не менее важна и возможность сохранения принципа дележа (24) (или более обще—оптимизация (23) по α_i) в условиях наличия игроков, не входящих в коалицию; например, природы. Обозначив через y стратегии этих игроков, можем заменить «формулу коалиции» (23) на

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i [f_i(\bar{x}, \bar{y}) + \alpha_i - L_i]. \quad (26)$$

В этом случае рекуррентия выбора рационального поведения состоит в уменьшении числа игроков за счет объединения n игроков коалиции в одного игрока с возможностью последующего использования сказанного в пунктах 4—5 или расширения коалиции.

Наложив в (26) на α_i ограничения $\alpha_i = 0$, придем к коалициям без побочных платежей, которые оказываются, таким образом, частным случаем коалиций с ограниченными побочными платежами; последние вовсе не рассматривались в классической теории игр. Это лишний раз подтверждает целесообразность описания коалиций с помощью введения единого критерия типа (26).

В коалиции (24)—(25) достижимы (в чистых стратегиях) все результаты, которые достижимы в игре n лиц даже со смешанными стратегиями; тем самым ясна нецелесообразность использования смешанных стратегий, если возможна коалиция.

ЛИТЕРАТУРА

- Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, с доб. Н. Н. Воробьева, изд. Наука, М., 1970.
- Льюис и Райфа, Игры и решения, ИЛ, М., 1961.
- Г. Оуэн, Теория игр, со вступ. стат. Н. Н. Воробьева, изд. Мир, М., 1971.
- Ю. Б. Гермейер, Введение в теорию исследования операций, изд. Наука, М., 1971.
- В. А. Горелик, Принцип гарантированного результата в неантагонистических играх двух лиц с обменом информацией, в сб. Исследование операций, вып. 2, изд. ВЦ АН СССР, М., 1971.
- Ю. Б. Гермейер, ДАН СССР, 198, № 5, 1001 (1971).
- В. В. Морозов, ЖВМиМФ, 11, № 3, 611 (1971).
- Н. С. Кукушкин, Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами, ЖВМиМФ (в печати).

Вычислительный центр АН СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

THESES ON DECISION MAKING IN GAMES WITH NONOPPOSED INTERESTS

Hermeyer Yu. B.

The basic notions of a rational choice are analysed separately from the estimation of expected result. The consideration for real mutual information of the partners on interests and moves is necessary as well as the consideration for possibility of information exchange. This allows to formulate and use the generalized principle of a maximal guaranteed result. The corresponding results are described for the case when the first partner is fully informed and the second desires to partly conceal his interests.

A unitary form is proposed to write the criterion of a coalition the particular cases of which are coalitions without side payments, coalitions with side payments and aspiration to make use of balance situations.

УДК 519.8

ПРОБЛЕМЫ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА*

Л. А. Растригин

Рассмотрены основные направления проблематики случайного поиска.

ВВЕДЕНИЕ

0.1. Решение задач математического программирования связано с минимизацией заданного показателя качества Q на допустимом множестве S векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$Q(X) \rightarrow \min_{X \in S}, \quad (1)$$

где множество S задается системой равенств и неравенств

$$S : \begin{cases} h_i(X) \geq 0 & (i = 1, \dots, m), \\ g_j(X) = 0 & (j = 1, \dots, q). \end{cases} \quad (2)$$

Решение этой задачи

$$X^* = \arg \min_{X \in S} Q(X), \quad (3)$$

если оно существует, достигается на множестве S^*

$$X^* \in S^*. \quad (4)$$

Это множество может состоять из одного элемента X^* , который в этом случае называют целью. Однако решение этой задачи в общем случае представляет большие трудности, да и полученное решение труднореализуемо ввиду своей уникальности.

0.2. Поэтому в практике оптимизации обычно решают другие задачи ϵ -задача: определяется решение X^* , отличающееся по показателю качества от экстремального не более, чем на $\epsilon > 0$

$$Q(X^*) \leq \min_{X \in S} Q(X) + \epsilon. \quad (5)$$

δ -задача: определяется решение X^* , отличающееся по модулю от экстремального X^{**} не более, чем на $\delta > 0$

$$|X^* - X^{**}| \leq \delta. \quad (6)$$

Эти задачи в пространстве оптимизируемых параметров $\{X\}$ уже имеют целую область S^* решений X^* .

0.3. Процесс определения показателя $Q(X)$ может быть связан со случайными ошибками, что заставляет обращаться в (0.1) к осреднению:

$$M_E H(E, X) \rightarrow \min_{X \in S}, \quad (7)$$

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

где M — знак математического ожидания, а $H(E, X)$ — замеренное значение показателя качества, где E — фактор неопределенности.

0.4. Поиском будем называть процесс перехода от одного состояния X_i к другому, X_{i+1} , которое в некотором смысле более предпочтительно

$$X_{i+1} = \Phi(X_i, W_i), \quad (8)$$

где Φ — оператор поиска, W — вектор памяти (если $W = 0$, то поиск будем называть локальным и, в противоположном случае, — нелокальным).

0.5. Если оператор Φ регулярный, то и поиск является регулярным (например, градиентный поиск и т. д.). Если же в оператор Φ введен элемент случайности ξ , то такой оператор Φ_ξ определяет случайный поиск (СП).

Едва ли целесообразно рассматривать наиболее распространенные алгоритмы случайного поиска. Будем рассматривать лишь различные тактики СП, которые объединяют значительное число алгоритмов.

1. ТАКТИКИ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА (СП)

1.1. Линейная тактика характеризуется следующим выражением для рабочего шага:

$$\Delta X_{N+1} = \begin{cases} a\xi & (\Delta Q_N > 0), \\ \Delta X_N & (\Delta Q_N < 0). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь a — величина модуля рабочего шага; ξ — единичный случайный вектор, равномерно распределенный по всем направлениям пространства параметров;

$$\Delta Q_N = Q(X_N) - Q(X_{N-1}) \quad (1.2)$$

— приращение показателя качества на предыдущем N -м шаге. Граф этого алгоритма показан на рис. 1 а, где знаком „ ξ “ обозначен оператор случайного шага, „ $+$ “ — оператор поощрения (в данном случае это шаг в направлении предыдущего шага, т. е. действие $\Delta X_{N+1} = \Delta X_N$). Над стрелками надписаны условия соответствующих переходов, а в скобках обозначены вероятности этих условных переходов. Стохастическая матрица этого графа имеет вид

$$\begin{matrix} \xi & \parallel 1 - p_1 & p_1 \parallel \\ + & \parallel 1 - p_2 & p_2 \parallel \end{matrix}. \quad (1.3)$$

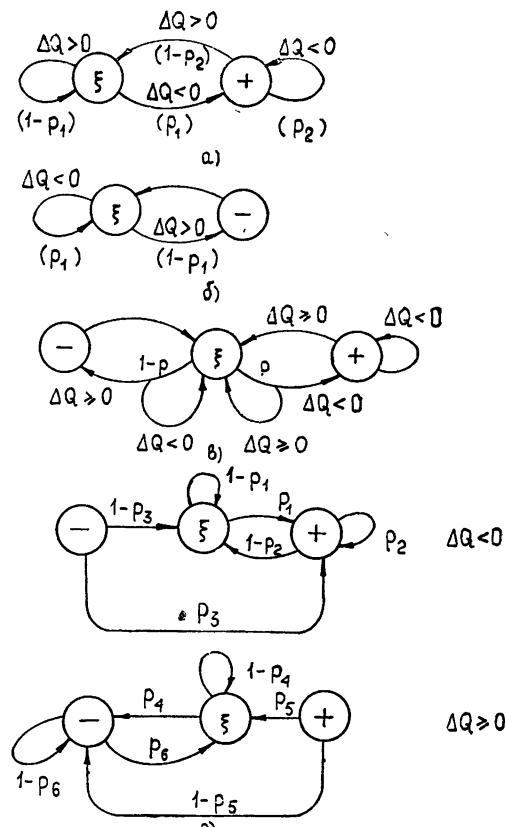


Рис. 1.

Здесь p_1 — вероятность того, что случайный шаг ξ окажется удачным ($\Delta Q < 0$), т. е. $p_1 = \text{Вер}(\Delta Q < 0)$, p_2 — вероятность успеха при повторении удачного шага, т. е. $p_2 = \text{Вер}(\Delta Q_{N+1} < 0 | \Delta Q_N < 0)$. Очевидно, что величины p_1 и p_2 целиком и полностью определяются функцией качества объекта $Q(X)$.

Эффективность линейного случайного поиска, как видно из (1.3), тем выше, чем больше p_2 (величина p_1 при этом не должна быть малой). Этим условиям, прежде всего, удовлетворяет линейный объект, для которого при отсутствии помех имеем $p_1 = 1/2$, а $p_2 = 1$. Именно поэтому рассмотренный алгоритм назван линейным. Он наиболее эффективен при оптимизации объектов, близких к линейным. Однако этот алгоритм хорошо работает и в нелинейной обстановке. При минимизации квадратичной формы $Q(X) = x_1^2 + \rho x_2^2$ в работе [3] для случая $\alpha \rightarrow 0$ получена оценка

$$M^\xi \frac{Q(X_1)}{Q(X_0)} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{\rho} + 1}, \quad (1.4)$$

где X_0 — исходное состояние в начале спуска; X_1 — состояние в конце однократного случайного спуска.

Любопытно сопоставить эффективность случайного спуска с эффективностью метода наискорейшего спуска, для которого Канторовичем [4] получена оценка

$$\frac{Q(X_1)}{Q(X_0)} \leq 1 - \frac{4}{\left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)^2}. \quad (1.5)$$

При больших $\rho > 16$ видно, что случайный поиск оказывается всегда эффективнее метода наискорейшего спуска.

Величина ρ в данном случае характеризует степень «ковражности» функции качества, которая связана с обусловленностью задачи. Практические задачи (особенно задачи типа оптимального проектирования с большим числом ограничений) всегда плохо обусловлены. Это и объясняет успех применения метода случайного поиска для решения задач такого рода.

1.2. Если же объект нелинейный, то целесообразно обратиться к нелинейной тактике, для которой имеем

$$\Delta X_{N+1} = \begin{cases} -\Delta X_N & (\Delta Q_N \geq 0), \\ \alpha \xi & (\Delta Q_N < 0). \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь целесообразность алгоритма образуется за счет возврата в исходную точку $(-\Delta X)$ при неудачном случайном шаге. Граф этого алгоритма показан на рис. 1б, где знаком «—» обозначен оператор возврата в исходную точку. Стохастическая матрица алгоритма имеет вид

$$\xi \begin{array}{|c c|} \hline p_1 & 1-p_1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (1.7)$$

Эффективность этого алгоритма существенно зависит от величины p_1 . Чем больше p_1 , тем эффективнее этот алгоритм.

Нелинейность тактики в данном случае заключается в отказе продолжать движение в удачном направлении. Сопоставление нелинейного

алгоритма (1.6) с градиентным методом по критерию потерь на поиск (среднее число шагов, необходимое для единичного смещения вдоль градиентного направления) при кусочно-линейной функции качества показывает преимущество метода случайного поиска уже при $n > 3$. А при наличии помех при $n > 2$. Если функция качества в пространстве параметров определяет сферическое поле, то эффективность случайного поиска снижается по мере приближения к цели и в районе цели метод градиента имеет потери на поиск меньше, чем случайный поиск [2].

Этот результат четко распределяет функции между случайными и регулярными алгоритмами поиска. Если необходимо решать задачу оптимизации быстро и приближенно, то целесообразно обратиться к случайному поиску. Если же надо получить точное решение, то, по-видимому, целесообразно обратиться к регулярному методу (например, градиентному).

1.3. Комбинируя различным образом операторы случайного шага (ξ), поощрения (+) и наказания (-), можно получить всевозможные алгоритмы случайного поиска со смешанной тактикой. Смешенная комбинация обеих тактик дает возможность иметь гибкий алгоритм, способный перестраиваться с одной тактики на другую. Для этого, например, можно после случайного шага ξ с вероятностью p выбирать линейную тактику, а с вероятностью $1-p$ — нелинейную. Граф такого смешанного алгоритма случайного поиска показан на рис. 1 б. Варьируя значением p , можно подобрать тактику, адекватную оптимизируемому объекту (так при $p = 1$ получаем линейную тактику, а при $p=0$ — нелинейную).

1.4. Градиентная тактика. При оптимизации унимодальных объектов всякий поиск, как правило, заключается в организации движения вдоль антиградиента, т. е. сводится к оценке градиента показателя качества $Q(X)$ с последующим рабочим шагом в направлении полученной оценки:

$$\Delta X = -\hat{a} \operatorname{grad} Q(X). \quad (1.8)$$

Оценка градиента может производиться различным образом. Наиболее распространенной является `покоординатная (градиентная) оценка. Однако для того, чтобы получить такую оценку, необходимо $2n$ измерений показателя качества, что является весьма дорогой платой, особенно при оптимизации сложных систем. Именно поэтому в последнее время получили распространение статистические методы оценки [5]. Несмешенная оценка на базе $2m$ случайных проб имеет вид [5]

$$\hat{\operatorname{grad}}_x Q(X) = \frac{n}{2mg} \sum_{i=1}^n [Q(X + g\xi_i) - Q(X - g\xi_i)] \xi_i. \quad (1.9)$$

Эта оценка сделана методом статистического градиента. Ее дисперсия уменьшается с ростом объема накопления m . Эффективность этой оценки по критерию потерь на оценку

$$L = 2m [\hat{D} (\operatorname{grad} Q)]^{1/2} \quad (1.10)$$

превышает градиентную при

$$m < \frac{n}{\frac{4}{\kappa^2} \frac{n-1}{n(n+2)} + 1}, \quad (1.11)$$

где κ — соотношение шума и полезного сигнала

$$\kappa = \frac{\sigma}{gk}, \quad (1.12)$$

σ^2 — дисперсия аддитивной помехи, k — модуль градиента показателя качества, т. е. только при $m < n$. При $m > n$ градиентная оценка всегда лучше, чем оценка (1.9).

2. СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

Необходимость быстрого и точного решения задачи оптимизации заставляет обращаться к поиску с переменным рабочим шагом. Стратегия изменения длины рабочего шага может быть различной. Она может быть программной, т. е. зависящей только от времени, и адаптивной. В последнем случае длина рабочего шага изменяется адаптивно, т. е. в зависимости от создавшейся ситуации (алгоритмы адаптации СП будут рассмотрены в следующем параграфе).

Программный способ изменения рабочего шага при случайному поиске вводится аналогично тому, как вводятся изменение длин рабочего и пробного шагов в градиентном методе при образовании метода стохастической аппроксимации. Для поиска с парными пробами имеем

$$\Delta X_{i+1} = \frac{a_i}{g_i} \xi_i [Q(X_i + g_i \xi_i) - Q(X_i - g_i \xi_i)]. \quad (2.1)$$

Здесь значения a_i и g_i для сходимости алгоритма должны удовлетворять условиям Дворецкого [7]

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i = \infty, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{g_i} \right)^2 < \infty. \quad (2.2)$$

Сопоставление такого рода случайного поиска и стохастической аппроксимации [7], выполненное теоретическим и экспериментальным образом, показало, что случайный поиск более эффективен как по быстродействию, так и по надежности. Причем эта относительная эффективность возрастает с увеличением размерности объекта оптимизации.

3. АДАПТАЦИЯ В ПРОЦЕССЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

3.0. Многообразие, уникальность объектов оптимизации и возможность их изменения в процессе оптимизации заставляет обращаться к адаптации алгоритмов поиска. Задача оптимизации в процессе поиска заключается в таком целенаправленном изменении параметров поиска, чтобы показатель его эффективности был бы достаточно высок, независимо от свойств объекта и их изменения.

Процесс адаптации, как всякий процесс управления, прежде всего нуждается в идентификации объекта. Поэтому процесс определения свойств объекта оптимизации во время случайного поиска приобретает основное значение для адаптации.

3.1. Идентифицируемыми параметрами могут быть уровень помех, модуль градиента показателя качества, кривизны поверхности равного уровня и т. д. Информация об этих параметрах объекта дает возможность оптимально определять такие важные параметры поиска, как дли-

ну рабочих и пробных шагов, объем накопления и т. д. Более того, идентификация дает возможность выбрать наиболее подходящий в данной ситуации алгоритм поиска, т. е. открывает путь адаптации не только в пространстве параметров данного алгоритма, но и в пространстве алгоритмов.

Пусть априорные сведения об объекте оптимизации, необходимые для всякой адаптации, сводятся к плотности распределения замеров показателя качества Q_i в случайных точках X_i ($i = 1, \dots$)

$$p(Q | A), \quad (3.1)$$

где $A = (a_1, \dots, a_m)$ — вектор неизвестных параметров, подлежащих идентификации. Это означает, что функция (3.1) известна с точностью до параметров A . Процесс идентификации может быть реализован адаптивным образом с применением процедуры стохастической аппроксимации

$$A_{N+1} = A_N + \gamma_N \hat{\text{grad}} \ln p(Q_{N+1} | A_N), \quad (3.2)$$

где оценка градиента может производиться методом Монте—Карло [11].

3.2. Адаптивный способ определения длины рабочего шага связан, прежде всего, с оценкой состояния объекта в процессе оптимизации. Рассмотрим несколько таких адаптивных алгоритмов.

3.2.1. Число неудачных шагов ($\Delta Q \geq 0$) при отсутствии помех несет информацию о кривизне поверхности равного уровня функции качества и дает возможность адаптировать длину шага a . Так, если вероятность рабочего шага мала, о чем свидетельствует большое число неудачных шагов, то длину рабочего шага следует уменьшать. И, наоборот, если эта вероятность близка к $1/2$, то шаг следует увеличивать.

3.2.2. Можно принимать решение об изменении длины рабочего шага и на каждом шаге поиска, увеличивая ее при удачном шаге и уменьшая при неудачном

$$a_{N+1} = \begin{cases} k_1 a_N & (\Delta Q_N \geq 0), \\ k_2 a_N & (\Delta Q_N < 0), \end{cases} \quad (3.3)$$

где для сходимости алгоритма необходимо выполнение условий

$$k_1 < 1 \text{ и } k_2 k_1 > 1. \quad (3.4)$$

3.2.3. При использовании нелинейной тактики часто целесообразно делать вдоль удачного направления не две, а три пробы в точках

$$X, X + a\xi, X + a(1 + \varepsilon)\xi, \quad (3.5)$$

что дает возможность увеличивать длину рабочего шага $a_{N+1} = a_N(1 + \varepsilon)$, если последняя прока лучше, чем промежуточная $X + a\xi$ [10].

3.3. Самообучение является одной из отличительных черт адаптации СП. Под самообучением при случайному поиске обычно подразумевается перестройка вероятностных свойств случного шага в зависимости от результатов предыстории поиска. Этую предысторию удобно накапливать в виде вектора памяти, который образует марковский процесс вида

$$W_N = \varphi(W_{N-1}, \Delta X_N, \Delta Q_N), \quad (3.6)$$

причем плотность распределения случного шага ΔX_N зависит от предыстории, т. е.

$$p(\Delta X_N | \mathbb{W}_{N-1}). \quad (3.7)$$

Так, например,

$$\begin{aligned} W_N &= k W_{N-1} - \delta \Delta X_N \Delta Q_N, \\ \Delta X_N &= \xi + \mu W_{N-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где k , δ , μ — параметры самообучения.

3.4. Адаптация объема накопления m может производиться как на базе фиксированной, так и последовательной выборки.

3.4.1. В первом случае, оценивая параметры объекта (дисперсию помехи, уровень полезного сигнала и т. д.), можно определить объем выборки m^* , обеспечивающий заданную надежность поиска.

$$\Delta X = -a \operatorname{dir} \sum_{i=1}^{m^*} \xi_i \Delta Q_i, \quad (3.9)$$

где $m^* = F(x)$, а dir — знак направления. При этом вероятность ошибочного шага, т. е. $\operatorname{Вер}(\Delta Q > 0)$, не будет выше заданной.

3.4.2. При последовательной выборке рабочий шаг в направлении j -й координаты производится лишь в том случае, если величина

$$b_j = [e_j, \sum_{i=1}^m \xi_i \Delta Q_i] \quad (3.10)$$

по модулю превышает заданный порог $A > 0$, где e_j — j -й орт, $[,]$ — скалярное произведение. При этом рабочий шаг равен

$$\Delta X = -e_j \operatorname{sign} b_j. \quad (3.11)$$

Порог A адаптируется методом стохастической аппроксимации

$$A_{N+1} = A_N + \gamma_N (p^* - \hat{p}_N), \quad (3.12)$$

где p^* — заданный уровень ошибки, а \hat{p} — оценка этой ошибки для $A = A_N$, которая может вычисляться, например, по формуле

$$\hat{p}_N = \frac{B_N - A_N}{2(B_N + A_N)}, \quad (3.13)$$

где B_N — число шагов до первого пересечения уровня A_N .

Эта процедура позволяет адаптировать алгоритм к объекту при условии, что вероятность ошибок в среднем не будет превышать заданный уровень p^* .

3.5. Адаптация структуры алгоритмов СП может происходить за счет изменения вероятностей переходов между операторами „ ξ “, „ $+$ “ и „ $-$ “. На рис. 1 г показан пример алгоритма, зависящего от шести вероятностей $P = (p_1, \dots, p_6)$. Теперь, вводя параметры ситуации (объекта) C и критерий оптимальности алгоритма J -функцию от P и C , можно адаптировать структуру алгоритма. Для этого необходимо решить следующую экстремальную задачу

$$J = J(P, C) \rightarrow \underset{P}{\operatorname{extr}}. \quad (3.14)$$

4. СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК КАК СТОХАСТИЧЕСКИЙ АВТОМАТ

4.1. Рассмотренные выше алгоритмы являются марковскими алгоритмами случайного поиска, поведение которых на N -м шаге зависит

только от предыдущего шага. Этую зависимость можно представить в виде условного распределения

$$p(\Delta X_N | \Delta X_{N-1}, \text{ sign } \Delta Q_{N-1}), \quad (4.1)$$

которое в дискретно-распределенном поиске удобно записать в виде двух стохастических матриц:

$$A_0 = \|a_{ij}^0\|; \quad A_1 = \|a_{ij}^1\|, \quad (4.2)$$

где A_0 — матрица «поощрения», которая действует при «нештрафе» ($\Delta Q < 0$), а A_1 — «штрафная» матрица, действующая при $\Delta Q \geq 0$. Как видно, алгоритм поиска целиком определяется коэффициентами матриц (4.2), т. е. задача параметризуется, что позволяет поставить задачу синтеза оптимальных алгоритмов.

4.2. Для этого необходимо определить класс объектов, для которых строится оптимальный алгоритм, и сформулировать критерий оптимальности. Объект для этой цели может задаваться также в виде стохастического автомата, определяющего поведение градиента при переходе из одного состояния в другое.

Пусть свойства объекта определяются вектором параметров C , а критерием оптимальности поиска является функционал J , минимум которого определяется оптимальный алгоритм

$$J = J(C, A_0, A_1). \quad (4.3)$$

Это выражение позволяет синтезировать оптимальные алгоритмы поиска, коль скоро известны параметры C объекта

$$(A_0^*, A_1^*) = F(C), \quad (4.4)$$

где F — оператор решения задачи (4.3). Таким образом, оценивая каждый раз параметры объекта C , можно действовать оптимально на каждом шаге поиска.

4.3. Вообще алгоритм случайного поиска может быть представлен в виде стохастического автомата вида

$$\langle \Delta Q, W, \Delta X, p_1(W | \Delta Q), p_2(\Delta X | W) \rangle, \quad (4.5)$$

где ΔQ — вход, ΔX — выход, W — состояние автомата, p_1 и p_2 — переходные матрицы (в общем случае стохастические).

4.4. В области теории СП в настоящее время есть два направления. Одно [2] рассматривает случай, когда $p_1(\cdot)$ — детерминированная матрица, а $p_2(\cdot)$ — вероятностная. Другое направление, рассматривающее оптимизацию коллективом независимых стохастических автоматов [12], наоборот, матрицу $p_1(\cdot)$ предполагает стохастической, а $p_2(\cdot)$ — детерминированной. Коллектив таких автоматов также уверенно оптимизирует многопараметрические объекты даже при наличии оврагов. Сопоставление работы случайного поиска с самообучением и коллектива оптимизирующих автоматов показывает их большую общность с точки зрения конечного результата [13].

5. ГЛОБАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК

5.0. Многочисленные алгоритмы глобального случайного поиска можно условно подразделить на следующие классы:

1. «Монте—Карловские» алгоритмы.
2. «Блуждающие» алгоритмы.
3. «Эволюционные» алгоритмы.
4. «Сглаживающие» алгоритмы.

5.1. К первому классу относятся алгоритмы, эксплуатирующие идеи метода статистических испытаний, где, однако, плотность распределения случайных экспериментов изменяется в зависимости от полученных результатов [14]

$$p(X_N | Y_{N-1}, \dots, Y_1), \quad (5.1)$$

где

$$Y_i = [X_i, Q(X_i)].$$

5.2. Второй класс образуют алгоритмы, имитирующие случайное блуждание в пространстве параметров по типу броуновского движения [15]. Преобразуя различным образом исходный шум, можно построить несколько алгоритмов поиска, которые, как доказано, в пределе сходятся к глобальному экстремуму.

5.3. Идеи эволюции и отбора породили «эволюционные» алгоритмы, которые моделируют выживание популяции при отборе по критерию $Q(X)$ [16].

5.4. Сглаживание является одним из методов превращения глобальной задачи в унимодальную с тем, чтобы решать глобальную задачу локальным методом. Алгоритмы сглаживания сводятся к вычислению интеграла [15]

$$\widetilde{Q}(X) = \int Q(Z) \rho(Z | X) dZ, \quad (5.2)$$

где $\rho(Z | X)$ — весовая функция, $\widetilde{Q}(X)$ — сглаженное в точке X значение показателя качества. Оценка интеграла (5.2) методом статистических испытаний и придает статистический характер процессу поиска [17].

6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МНОГОКАНАЛЬНЫЕ ОПТИМИЗАТОРЫ

К настоящему времени разработана целая серия многоканальных оптимизаторов, работающих по алгоритмам случайного поиска. Среди них сверхбыстродействующий [19], релейный [20] и полупроводниковый [21] оптимизаторы. Все они работают покоординатным образом, т. е. смещения вдоль координат не зависят друг от друга, а лишь от выхода объекта. Разработаны схемы и с непрерывным распределением шагов в пространстве параметров [22].

Адаптация длины шага в процессе поиска позволяет значительно повысить эффективность оптимизатора как по быстродействию, так и по точности оптимизации [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Росс Эшби, Конструкция мозга, ИЛ, М., 1962.
2. Л. А. Растигин, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
3. Е. Г. Николаев, Автоматика и вычислительная техника, № 3, 40 (1970).
4. Л. В. Канторович, ДАН СССР, 56, 3, 233 (1947).
5. Л. А. Растигин, Автоматика и вычислительная техника, № 4, 25 (1970).
6. У. Росс Эшби, Схема усилителя мыслительных способностей, в сб. Автоматы, ИЛ, М., 1955.
7. Я. З. Цыпкин, Адаптация и обучение в автоматических системах, изд. Наука, М., 1968.
8. Л. А. Растигин, Я. С. Рубинштейн, Автоматика и вычислительная техника, № 5, 23 (1968).
9. А. Т. Рябцев, Опыт применения одного условия прекращения случайного поиска оптимального значения функции многих переменных, сб. Методы статистической оптимизации, изд. Зинатне, Рига, 1968.
10. Shumer M. A., Steiglitz K. Adaptive step size random search, „IEEE Transactions on Automatic Control,” vol. AC-13, № 3. (1968)
11. Л. А. Растигин, Автоматика и вычислительная техника, № 6, 39 (1970).

12. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 7, 967 (1972).
13. К. К. Рипа, Автоматика и вычислительная техника, № 3, 28 (1970).
14. И. Б. Мощук, Многоэкстремальные задачи в проектировании, изд. Наука, М., 1967.
15. Д. Б. Юдин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1965, № 1, 1966.
16. А. И. Половинкин, Автоматика и вычислительная техника, № 2, 3 (1970).
17. Г. Е. Антонов, В. Я. Катковник, Автоматика и вычислительная техника, № 4, 53 (1970).
18. Л. А. Растрогин, К. К. Рипа, Автоматика и вычислительная техника (в печати).
19. Л. А. Растрогин, Л. В. Сытенко, Быстро действующий экстремальный регулятор, работающий по методу случайного поиска, в сб. Автоматика и вычислительная техника, изд. АН Латв. ССР, Рига, 1963.
20. Л. А. Растрогин, Л. В. Сытенко, Релейный многоканальный оптимизатор, работающий по алгоритмам случайного поиска, в сб. Автоматика и вычислительная техника, вып. 10, изд. Зинатне, Рига, 1965.
21. Е. Т. Иванов, Б. В. Рыков, Л. В. Сытенко, Многоканальный статистический оптимизатор с адаптацией длины шага, в сб. Проблемы случайного поиска, вып. 1, изд. Зинатне, Рига, 1972.
22. Н. Е. Никифорова, Л. А. Растрогин, Л. В. Сытенко, Двухканальный оптимизатор с равномерным распределением шага в пространстве параметров, в сб. Проблемы статистической оптимизации, изд. Зинатне, Рига, 1968.
23. Л. В. Сытенко, Реализация случайного поиска с изменением шага в многоканальном статистическом оптимизаторе, в сб. Задачи статистической оптимизации, изд. Зинатне, Рига, 1971.

Институт электроники и
вычислительной техники АН Латв. ССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

RANDOM SEARCH PROBLEMS

L. A. Rastrigin

The basic directions of the random search problems are considered.

УДК 62—506

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОИСКА НА ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТАХ

Н. Н. Леонов

В статье подытоживаются результаты исследований автора по вопросам влияния инерционных свойств устойчивых объектов управления на характер автоматического поиска.

1. Управление в системах автоматической оптимизации, в силу известной специфики, формируется на основе неполной информации о поведении объекта управления в процессе его работы. В этих условиях представляется интересным исследование влияния различных инерционных свойств, являющихся характерной чертой реальных объектов автоматической оптимизации, на поведение управляемой системы. Такие исследования были проведены на простейших системах автоматической оптимизации автоколебательного (с постоянной скоростью поиска) и шагового (с постоянной площадью управляющих импульсов) типов с одноканальными устойчивыми объектами. В результате было установлено, что влияние инерционных свойств объектов на поведение системы имеет двусторонний характер. Первая сторона заключается в динамических искажениях поведения системы, связанных с искажением сигналов при их прохождении через инерционные звенья; это известная задача, которая решается различными, хорошо известными точными и приближенными методами.

Вторая сторона заключается во влиянии инерционных свойств объектов управления на информативность данных о поведении объекта, по которым формируется управление системой. Проведенные исследования показали, что информативность этих данных резко падает при переходе от безынерционных объектов к инерционным. Простейшими данными о поведении объекта в процессе работы, для систем автоматической оптимизации автоколебательного и шагового типов, могут служить скорость изменения его оптимизируемого выхода или ее дискретный аналог. Для безынерционных систем этих данных в принципе достаточно для организации направленного поиска, т. е. для ориентации системы относительно искомого значения входа объекта и определения направления изменения входа объекта в сторону его значения, соответствующего экстремуму выхода в статике. Для инерционных же систем этих данных недостаточно для организации направленного поиска и поэтому в инерционных системах по этим данным можно организовать лишь слепой поиск. Это объясняется тем, что для безынерционных систем автоматической оптимизации с постоянной скоростью поиска или с постоянными по площади управляющими импульсами, при отсутствии помех, между скоростью изменения выхода объекта управления или ее дискретным аналогом и значениями входной управляемой координаты

* Доклад, сделанный на пленарном заседании на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

объекта существует взаимнооднозначное соответствие. Наличие такой взаимнооднозначной связи между наблюдаемыми и управляющими величинами позволяет в каждый момент времени контролировать правильность направления изменения входа объекта по изменению наблюдаемых величин для любых начальных условий движения.

Для инерционных систем связь между наблюдаемыми и управляющими величинами дополняется зависимостью от начальных условий движений, что в безынерционных системах места не имеет. Указанные начальные условия отсчитываются от искомой экстремальной точки, поэтому они неизвестны в процессе работы системы. При фиксированных начальных условиях сохраняется взаимная однозначность связи между наблюдаемыми и управляющими величинами. На всем же множестве начальных условий, в силу невозможности их определения относительно искомой экстремальной точки, однозначность этой зависимости исчезает. Каждому значению скорости изменения выхода объекта или ее дискретного аналога, в зависимости от начальных условий, может отвечать любое значение входной управляющей координаты объекта, и наоборот, каждому значению входной координаты объекта может отвечать, в зависимости от начальных условий, любое значение наблюдаемой величины. В силу этого знание наблюдаемой величины не позволяет судить о том, в каком направлении относительно искомого значения изменяется входная координата объекта, и не представляет возможности организовать направленный поиск экстремума выхода объекта, в отличие от безынерционных систем. Сходимость поиска здесь обеспечивается устойчивостью самого объекта управления.

Потеря информативности данных о поведении объекта управления существенно снижает качество работы систем автоматической оптимизации. Она приводит к появлению в системах автоколебательного типа множества режимов скольжения, с существованием которого связан ряд негативных явлений в поведении этих систем. Для режимов скольжения характерна предельно высокая (теоретически бесконечно большая) частота переключений выхода автоматического оптимизатора. В фазовых пространствах динамических систем траектории режимов скольжения обычно заполняют подпространства меньшей размерности, чем размерность фазового пространства. Траектории режимов скольжения систем автоматической оптимизации автоколебательного типа заполняют области той же размерности, что и само фазовое пространство. Поэтому режимы скольжения в этих системах становятся регулярными движениями, определяющими характер поведения этих систем наряду с гладкими движениями, для которых выход оптимизатора постоянен.

Наличие указанного множества режимов скольжения в системах автоматической оптимизации автоколебательного типа создает предпосылки неустойчивости поиска при воздействии на систему определенного вида возмущений (например, возмущений с сильно смещенным законом распределения, при котором они принимают значения лишь одного знака). Впервые на это было обращено внимание при изучении системы с инерционностью первого порядка [1]. Затем возможность неустойчивости поиска из-за наличия режимов скольжения была установлена и для систем с более высокими порядками инерционности [2-6].

Для систем автоматической оптимизации автоколебательного типа с инерционностью порядка не ниже второго было обнаружено, что наличие указанного множества режимов скольжения приводит к существенному снижению помехоустойчивости систем и к тому, что стационарные режимы таких систем имеют весьма сложный вид с переменной амплитудой, могущей принимать достаточно большие значения [2-6]. Необходимость дифференцирования выходного сигнала объекта управления в си-

стемах автоматической оптимизации автоколебательного типа для определения скорости изменения выхода объекта в процессе оптимизации вызывает снижение помехоустойчивости этих систем. Принято считать, что дифференциатор — основная причина низкой помехоустойчивости таких систем. Для систем с инерционностью не выше первого порядка это, пожалуй, верно. Однако, для систем, обладающих инерционностью порядка выше первого, на первый план в ряду причин, снижающих их помехоустойчивость, выступают обстоятельства, связанные с существованием множества режимов скольжения. Эти обстоятельства приводят к тому, что в указанных системах существует большое множество разнообразных по сложности стационарных режимов, области устойчивости каждого из которых обладают незначительными размерами. В силу незначительности размеров областей устойчивости стационарных режимов работы указанных систем класс возмущений, по отношению к которым система обладает низкой помехоустойчивостью из-за наличия множества режимов скольжения, существенно шире аналогичного класса возмущений, связанного с существованием в системе дифференцирующих устройств. Этим, в первую очередь, объясняется то, что в установке помех даже очень низкого уровня амплитуда стационарных движений в системах автоматической оптимизации автоколебательного типа с инерционностью порядка выше первого наряду с приемлемыми величинами имеет и недопустимые выбросы с точки зрения качества работы системы в целом.

Исследования систем автоматической оптимизации, квантованных по времени (шаговых и разностных) с постоянными по величине площади управляющими импульсами показали, что потеря информативности данных о поведении объекта в процессе работы системы из-за его инерционности вызывает те же эффекты, что и в системах автоколебательного типа [7–10]. Проявление этих эффектов также связано с существованием множества режимов работы системы, аналогичных режимах скольжения непрерывных систем. Для движения — аналога режима скольжения выход оптимизатора меняет знак после каждого шага, после каждого управляющего импульса. Исследования квантованных по времени систем с инерционностью порядка выше первого дали дополнительное подтверждение того, что в аналогичных непрерывных автоколебательных системах основная причина низкой помехоустойчивости связана с существованием множества режимов скольжения. Действительно, в системах, квантованных по времени, дифференциаторы для получения наблюдаемых величин не используются, наблюдаемой величиной является величина приращения выхода объекта оптимизации за время шага. Несмотря на это все негативные стороны поведения непрерывной системы повторяются и в поведении квантованных по времени систем с некоторым своеобразием. Стационарные режимы работы этих систем имеют также весьма сложный вид. При этом их амплитуда наряду с приемлемыми величинами также имеет недопустимые выбросы с точки зрения качества их работы.

Наличие множества движений — аналогов режимов скольжения в системах автоматической оптимизации, квантованных по времени, с постоянными по площади управляющими импульсами, существование которого обусловлено потерей информативности наблюдаемых данных, оказывает большое влияние и на характер процесса оптимизации в безынерционных системах, обладающих транспортным запаздыванием. При исследовании такой системы было обнаружено [11], что при малых периодах квантования (по сравнению с величиной запаздывания) поиск в этой системе неустойчив даже при отсутствии возмущений. Детальные исследования показали [12], что причина этой неустойчивости связана

с существованием в системе движений — аналогов режимов скольжения.

Наряду с исследованием эффектов, вызываемых потерей информативности наблюдаемых величин из-за инерционности объектов оптимизации, рассматривались вопросы уменьшения влияния этих эффектов на качество работы систем автоматической оптимизации. Здесь можно отметить два пути — либо увеличение объема информации, получаемой о работе системы в процессе оптимизации, либо видоизменение алгоритмов управления этими системами без получения дополнительной информации о наблюдаемых данных. Эти исследования показали, что за счет увеличения отбираемой информации потеря информативности наблюдаемых величин может быть полностью или частично устранена в зависимости от вида объекта. Для систем автоматической оптимизации автоколебательного типа это может быть достигнуто лишь при постановке на входе оптимизатора звена с оператором, обратным оператору линейной части объекта управления [2–6, 13]. Реализация такого способа требует осуществления многократного дифференцирования выхода объекта и знания коэффициента передачи его линейной части. Для систем, квантованных по времени, этот путь требует введения перед оптимизатором звена с соответствующей структурой, являющейся дискретным аналогом звена с оператором, обратным оператору линейной части объекта управления [14, 15]. Иными словами, в этом случае для дискретных систем должно быть реализовано управление с накоплением данных, где глубина памяти определяется порядком инерционности объекта, а весовые коэффициенты определяются динамическими характеристиками объекта.

Изучение систем автоматической оптимизации с устойчивыми объектами, как указано выше, показало, что потеря информативности наблюдаемых данных оказывает негативное влияние на поведение этих систем через эффекты, связанные с существованием специфических множеств движений в режиме скольжения для непрерывных систем и движений — аналогов режимов скольжения для дискретных систем. В связи с этим был предложен простой, но в общем случае достаточно эффективный способ повышения качества работы этих систем [2–6, 13], позволяющий устраниТЬ движения в режиме скольжения и их дискретные аналоги. Способ состоит в отключении управления системой в течение того времени, когда в системе могут существовать движения в режиме скольжения. Их появление и исчезновение нетрудно обнаружить по простейшим наблюдаемым данным. Если наблюдаемые величины показывают, что выход объекта удаляется от своего экстремального значения (точнее, уменьшается для экстремума-максимума и увеличивается для экстремума-минимума), то движение происходит в режиме скольжения или в его дискретном аналоге. Поэтому для реализации такого управления дополнительной информации о поведении объекта в процессе работы системы не требуется независимо от характера инерционности объекта (т. е. от порядка инерционности, наличия транспортного запаздывания, постоянства или переменности параметров системы). В результате указанного видоизменения законов управления системами автоматической оптимизации автоколебательного типа и квантованных по времени с постоянными по площади управляющими импульсами устраняются связанные с существованием режимов скольжения и их аналогов причины низкой помехоустойчивости, устраняются стационарные режимы весьма сложного вида в системах с инерционностью порядка выше первого, сужается класс возмущений, могущих привести к неустойчивости процесса поиска. В системах, содержащих транспортное запаздывание, устраняется возможность неустойчивости поиска при любых значениях периода квантования; при этом оптимум качества работы системы в ста-

ционарных режимах смещается в область малых значений периода квантования (по сравнению с величиной запаздывания), за счет чего ошибка слежения может быть существенно уменьшена [12].

2. Наряду с указанными выше вопросами изучались вопросы качества работы в стационарных режимах инерционных систем автоматической оптимизации, квантованных по времени, с постоянными по площади управляющими импульсами. При исследовании этих систем возникла необходимость разработки методики оценки качества их работы в процессе слежения. Эта необходимость возникла потому, что при отсутствии возмущений такие системы являются негрубыми, в силу чего они имеют континуальные множества стационарных движений. Конечная цель исследования таких систем — получение различных оценок движения соответствующих реальных систем, стационарные движения которых отличны от движений систем, указанных выше. Разработка этого вопроса показала, что несмотря на негрубость исследуемых моделей, возможно построение оценки качества работы в стационарных режимах реальных систем на основе изучения стационарных движений их моделей. В общем случае для этого необходимо выделение из всего множества стационарных движений множеств порождающих стационарные движения, в окрестности которых имеют место стационарные движения соответствующих реальных систем. Достигается это с помощью известных методов теории бифуркаций, путем отыскания бифуркационных значений некоторого внутреннего параметра негрубой системы. Указанный параметр характеризует разбиение всего множества состояний этой системы на континуальное множество подмножеств, каждое из которых содержит свои стационарные движения. В результате проведенных исследований установлено, что множества порождающих движений также континуальны, как и исходные множества, и в общем случае существенно зависят от класса возмущений, действующих на систему. В силу континуальности порождающих множеств за оценку качества работы систем в процессе слежения предложено брать среднюю по порождающему множеству оценку качества работы системы для отдельных стационарных движений из этого порождающего множества [12, 14, 16, 17]. Классификация возмущений вносит дополнительную специфику в методику усреднения.

Описанная методика дает возможность оценивать указанные системы с точки зрения качества их работы. В ряде публикаций, посвященных исследованию качества процесса слежения в таких системах, утверждалось, что наивыгоднейшими являются простейшие (по форме) стационарные режимы (например, [11, 18]). Однако, детальный анализ ряда таких систем с привлечением описанной методики оценки качества показал, что наименьшая ошибка слежения достигается в этих системах на стационарных режимах достаточно сложной формы, в области малых значений периода квантования, в то время как простейшие стационарные движения существуют лишь в области больших значений периода квантования [12, 14, 16, 17, 19, 20]. Исследование с помощью этой методики стационарных режимов простейших систем с транспортным запаздыванием [12] показало, что наилучшее качество в этих режимах для простейшего закона управления [11] достигается на границе области устойчивости поиска, а для исправленного закона, описанного выше, качество работы может быть существенно повышенено за счет уменьшения периода квантования.

3. При исследовании динамики инерционных систем автоматической оптимизации автоколебательного типа была установлена возможность организации так называемого преимущественного поиска. Преимущест-

венным был назван такой поиск, который происходит преимущественно в области значений входа объекта, расположенной слева (либо справа) от значения, соответствующего экстремуму выхода в статике. Такой способ поиска дает возможность в рамках оптимизации качества выходного продукта достигать экономии расхода входной координаты объекта управления, или наоборот, максимизировать ее расход в процессе управления. Трудности организации такого поиска заключаются в том, что система в процессе работы должна ориентироваться относительно значения входной координаты объекта, соответствующей экстремуму его выхода в статике. Эта величина является неизвестной искомой величиной в процессе поиска и определяется как результат процесса поиска. Поэтому непосредственная ориентация системы относительно этой величины невозможна и пришлось искать косвенные пути такой ориентации. Такие пути были обнаружены и некоторые простейшие из них рассмотрены. Первый предполагает измерение только скорости изменения выхода объекта относительно двух различных пороговых значений, второй — измерение скорости изменения выхода объекта и ее дискретного аналога, третий — введение временной задержки определенного вида. Анализ этих способов на объектах с первым порядком инерционности позволил определить наилучший из них по скорости сходимости поиска и по величине ошибки слежения. Им оказался способ с временной задержкой. При этом было установлено, что за счет организации преимущественного поиска можно добиться улучшения качества решения и основной задачи оптимизации — качества процесса слежения, т. е. уменьшения ошибки слежения [21—23].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. А. Арефьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1249 (1963).
2. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 4, 799 (1966).
3. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 393 (1967).
4. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 405 (1967).
5. Н. Н. Леонов, в сб Ученые записки НИИ ПМК и факультета ВМК ГГУ, Горький, 1967, стр. 28.
6. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 7, 897 (1967).
7. Н. Н. Леонов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 133 (1967).
8. Н. Н. Леонов, К. К. Седова, И. С. Балтовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 341 (1969).
9. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 7, 1018 (1969).
10. Н. Н. Леонов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 192 (1970).
11. Л. Н. Фицнер, в сб. Тр. конференции по теории и применению дискретных автоматических систем, изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 480.
12. Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, № 11, 75 (1969).
13. Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, 26, № 10, 1720 (1965).
14. Н. Н. Леонов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 133 (1967).
15. В. В. Казакевич, Автоматика и телемеханика, № 12, 71 (1966).
16. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 5, 958 (1964).
17. Н. Н. Леонов, К. К. Седова, И. С. Балтовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 352 (1969).
18. K. Manczak, O warunkach istnienia drgan prostych i złożonych w przekaznikowo-impulsowych układach regulacji ekstremalnej, Archiwum automatyki i telemechaniki, t. VII, zeszyt 1—2, 1962, s. 71—88.
19. P. Peterleit, Analyse der stationären Pendelschwingungen eines Diskontinuierlichen Extremalsystems, Messen-Steuern-Regeln, 9, № 8, 269 (1966).
20. P. Peterleit, Zum Verhalten eines Diskontinuierlichen Extremalsystems mit Fehlschaltungsblockierung, Messen-Steuern-Regeln, 10, № 6, 211 (1967).

21. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 11, 1630 (1970).
22. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 11, 1636 (1970).
23. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 371 (1971).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 ноября 1971 г.

ON SOME QUESTIONS OF AUTOMATIC SEARCH FOR INERTIAL PLANTS

Leonov N. N.

This paper summarizes the results of the author's investigations into the influence
of stable controlled plant inertial properties on the automatic search character,

УДК 519.8

ИНФОРМАЦИОННО—СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ

P. Г. Стронгин

Рассматриваются основные положения информационно-статистической теории поиска. Особое внимание уделено подходу к включению априорной информации о минимизируемой функции в математическую модель поиска, что позволяет непосредственно использовать результаты поисковых испытаний для оценки расположения экстремума. Разбираются реализации этого подхода в одномерных и многомерных задачах минимизации функций.

Настоящая работа является обзором* состояния информационно-статистической теории поиска экстремума функций [2–12]. Основная цель, преследовавшаяся при разработке этой теории, состояла в создании единой математической модели процесса поиска экстремума, в рамках которой можно было бы строить эффективные (в заданном смысле) алгоритмы поиска (в принципе) для каждого класса задач оптимизации функций.

Существенная особенность задач поисковой оптимизации состоит в том, что для определения искомого оптимума, кроме априорной информации об оптимизируемой функции (в дальнейшем, для определенности, будем говорить о минимизации), необходима дополнительная информация, которая может быть получена путем проведения испытаний (например, вычисление значений функции в некоторых точках). Отсюда следует, что поиск экстремума естественно рассматривать как некоторую игру с природой, в процессе которой (по некоторому алгоритму-стратегии) последовательно осуществляются испытания, продолжающиеся либо до обнаружения (с заданной точностью) точки минимума, либо до исчерпания средств, отпущеных на поиск.

Первая попытка рассмотрения поиска как игры с природой и формальное определение стратегии поиска принадлежит, по-видимому, Дж. Киферу [13]. На этой основе был получен ряд минимаксных алгоритмов для поиска экстремума одномерной унимодальной функции, определенной на отрезке [13–18].

Однако рассмотрение поиска как игры с природой само по себе еще не создает математического аппарата, позволяющего в произвольной задаче оптимизации использовать (хотя бы в принципе) априорную информацию для построения стратегий поиска более эффективных, чем простой перебор вариантов. Создание такого аппарата возможно лишь в рамках математической схемы, которая (на основе априорной информации о задаче) связывает результаты поисковых испытаний с расположением искомого экстремума. Разумеется, что все описанные в литературе методы поиска экстремума содержат конкретные (иногда трудно формализуемые) априорные предположения относительно минимизируемой функции, в свете которых осуществляется переработка поисковой информации. В большинстве случаев эти предположения имеют досто-

* Основные результаты настоящей работы докладывались на пятом Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам [1] (Горький, май 1971 г.).

верный характер (унимодальность [13–17], выпуклость [18], овражность [19] и т. п.), но иногда учитываются также и вероятностные предположения [20–23]. Следует отметить, что лишь в немногих случаях исходные предположения о функции, используемые в конкретных алгоритмах, позволяют непосредственно связать поисковую информацию с расположением экстремума (как, например, в [13–18], где это обстоятельство сделало возможным построение минимаксных алгоритмов поиска). В большинстве алгоритмов поисковые испытания используются для решения вспомогательных задач, некоторым образом связанных с искомым экстремумом. Такими вспомогательными задачами являются, например, идентификация градиента (особенно в обстановке помех [24, 25]), построение интегральных преобразований минимизируемой функции [26, 27] и т. п. (совершенствование таких алгоритмов осуществляется путем оптимизации решения вспомогательных задач, что приводит к «локально» оптимальным алгоритмам, не гарантируя эффективности в целом).

Таким образом, использование априорных данных играет решающую роль в организации процесса поиска экстремума и, следовательно, для создания общей теории поиска необходимо построить универсальную (т. е. не связанную с конкретными предположениями или с конкретным алгоритмом) схему учета произвольной (в том числе и вероятностной) априорной информации о минимизируемой функции, позволяющую непосредственно связывать результаты поисковых испытаний с расположением экстремума. Такая схема была построена в информационно-статистической теории поиска [2–12], основные результаты которой рассматриваются ниже.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ЗАДАЧАМ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА

Рассмотрим задачу отыскания абсолютного минимума действительной функции $\varphi(x)$, определенной на подмножестве X^* N -мерного пространства. Множество всех функций, определенных на X^* , обозначим через Φ^* (очевидно, что $\varphi \in \Phi^*$).

Пусть известна некоторая априорная информация о минимизируемой функции φ . Эта информация может быть описана путем задания на классе Φ^* вероятностной меры $F(\Phi)$, которая любому подмножеству $\Phi \subset \Phi^*$ сопоставляет вероятность события $\varphi \in \Phi$. При таком описании наличие некоторой достоверной информации означает, что можно указать такой подкласс $\Phi' \subset \Phi^*$ (например, подкласс всех выпуклых функций), для которого $F(\Phi') = 1$ и $F(\Phi^* \setminus \Phi') = 0$.

Условимся считать, что для любого испытания σ , которое может быть проведено для получения дополнительной информации о функции φ , задано соответствие $\sigma(\varphi)$, $\varphi \in \Phi^*$, определяющее исход z этого испытания. Заметим, что функция $\sigma(\varphi)$, вообще говоря, является случайной, поскольку испытания могут сопровождаться помехами (например, для σ , состоящего в измерении значения φ в точке $x \in X^*$ при наличии аддитивной помехи ξ , $z = \varphi(x) + \xi$). Множество всех испытаний обозначим через Σ .

Пусть осуществлено k испытаний $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, сопровождавшихся результатами z_1, \dots, z_k , что дает дополнительную информацию (дополнительные сведения) ω

$$\omega = \omega_k = \{ (\sigma_1, z_1), \dots, (\sigma_k, z_k) \}$$

о функции φ . Эта дополнительная информация учитывается в модели путем пересчета априорного распределения $F(\Phi)$ в апостериорное $F(\Phi | \omega)$.

Накопленная в форме $F(\Phi | \omega)$ информация о функции φ может

быть непосредственно использована для оценки положения экстремума, для чего достаточно вычислить индуцированное $F(\Phi | \omega)$ распределение $\eta(X | \omega)$, сопоставляющее любому множеству $X \in X^*$ вероятность расположения глобального экстремума в точке $x \in X$. При этом

$$\eta(X | \omega) = F(\Phi_X | \omega), \quad (1)$$

где Φ_X содержит все функции из Φ^* , имеющие экстремум в X . Заметим, что при использовании (1) в ситуации, когда F положительна на множестве функций, имеющих глобальный экстремум в нескольких точках, возникают некоторые трудности, которые, однако, преодолимы [2, 5, 6].

Построенная модель позволяет также прогнозировать результаты следующих испытаний, т. е. позволяет оценить вероятность $G(Z | \omega, \sigma)$ того, что испытание σ приведет к результату $z \in Z$.

Различные условия, предъявляемые к решению задачи поиска, обычно можно выразить через функционал от распределения $\eta(X | \omega)$. Например, в случае, когда требуется найти δ -окрестность $U(X^*)$, которая с вероятностью, не меньшей чем $1 - \epsilon$, содержит экстремум, это выражение имеет вид

$$\eta(U | \omega) \geq 1 - \epsilon.$$

Другим примером [2–5] является требование, чтобы энтропия распределения $\eta(X | \omega)$, где X — элементы конечного разбиения множества X^* , не превышала заданной величины ϵ . В общем случае будем считать, что решение задачи определяется условием

$$H[\eta(X | \omega)] \leq \epsilon, \quad (2)$$

где H — заданный функционал, а ϵ — точность.

В такой постановке поиск представляет собой последовательное осуществление испытаний до выполнения условия (2), и различные стратегии будут различаться лишь способом выбора испытаний. При этом можно формулировать (задавая функции потерь) различные условия оптимальности, создающие упорядоченность на множестве всех стратегий, и выводить соответствующие этим условиям наилучшие алгоритмы (т. е. байесовские стратегии, минимизирующие риск).

Наиболее привлекательным условием является минимизация средних потерь на поиск в целом [2, 5]. Однако построение оптимальных в среднем стратегий наталкивается на препятствие, вызванное тем, что априорная информация обычно недостаточна для полного описания вероятностной меры $F(\Phi)$ (ее удается определить лишь с точностью до некоторых параметров) и испытаний $\sigma(\varphi)$, если последние сопровождаются помехами, свойства которых не вполне известны. В результате необходима адаптация модели в процессе поиска, т. е. выбор испытания на каждом шаге фактически производится в рамках новой модели $\{F(\Phi), \Sigma\}$, параметры которой неизвестны на предшествующем шаге.

В связи с этим представляет интерес построение по-шагово оптимальных стратегий. Например, можно потребовать, чтобы очередное испытание осуществлялось в точке наивероятнейшего расположения экстремума (если испытания состоят в измерении значений функции) [7–9], или выбирать испытание, дающее максимум Шенноновской информации о расположении экстремума [2–6] и т. п. [9–10].

Следует также отметить, что поскольку в потери на поиск, кроме стоимости испытаний, входят расходы на принятие решений, то в случаях, когда испытания не слишком трудоемки, оказывается целесообразным упростить модель $\{F(\Phi), \Sigma\}$ (отказавшись от части информации) и условие оптимальности для удешевления стоимости решений в процес-

се поиска. В этом плане интересно, что даже при отсутствии адаптации модели, как показывают некоторые эксперименты [2, 5], по-шагово оптимальные информационные алгоритмы имеют почти такую же среднюю стоимость поисковых испытаний, что и оптимальные в среднем стратегии.

СЛУЧАЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рассмотрим одномерную задачу минимизации и сделаем следующие априорные статистические предположения о минимизируемой функции $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$:

1. Функция $\varphi(x)$ является равномерно непрерывной в смысле теории вероятностей;

2. Распределение вероятностей для относительной разности $|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)|/\Delta x$ не зависит от x (если экстремум не лежит между x и $x + \Delta x$);

3. Наличие у функции $\varphi(x)$ ($k+1$)-го локального экстремума менее вероятно, чем k экстремумов, где $k \geq 1$ (это предположение вероятной «малоэкстремальности» имеет качественный характер).

Указанные предположения еще не определяют меру $F(\Phi)$. Оставшийся произвол может быть использован для упрощения схемы принятия решений. Введение в рассмотрение вероятностной меры $F(\Phi)$ означает, что неизвестная функция $\varphi(x)$ является одной из реализаций случного процесса. Для простоты ограничимся процессом с независимыми приращениями, управляемыми нормальным законом (последнее является следствием предположения 1).

Для дальнейшего оказывается удобным [6] перейти к дискретной постановке, т. е. считать, что задана функция $\varphi(i) = \varphi(x_i)$, где $x_i = a + i\epsilon$ ($0 \leq i \leq n$, $x_n = b$ и ϵ — заданная точность), являющаяся решением (разностного) уравнения

$$\nabla \varphi(i) = \varphi(i) - \varphi(i-1) = \beta_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3)$$

при начальных условиях $\varphi(0) = \beta_0$, где β_i ($0 \leq i \leq n$) есть независимые нормальные случайные величины со стандартами

$$\sigma_0, \sigma_i = cm, m > 0, c > 0 \quad (1 \leq i \leq n) \quad (4)$$

и математическими ожиданиями

$$m_0, m_i = m_i(\alpha) = \begin{cases} -m, & i \leq \alpha, \\ m, & i > \alpha, \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n), \quad (5)$$

которые являются функциями случайной величины α ($0 \leq \alpha \leq n$), имеющей априорное распределение вероятностей $\xi(\alpha)$.

В предположении, что параметр c является малым, модель (3) — (5) удовлетворяет условиям 1—3. Значение $m > 0$ предполагается в общем случае неизвестным и должно быть оценено в процессе поиска (величины σ_0 и m_0 могут быть исключены из модели [1, 9, 10]), а распределение $\xi(\alpha)$ отражает априорные предположения о расположении глобального минимума на множестве точек x_α ($0 \leq \alpha \leq n$).

Для испытаний, состоящих в измерении значений φ , в заданных точках интервала $[a, b]$ на основе модели (3) — (5) в работах [7—9] построен и исследован простой алгоритм глобального поиска (АГП), согласно которому каждое испытание осуществляется в точке наивероятнейшего расположения глобального экстремума. Алгоритм был испытан на больших выборках тестовых функций (отрезки ряда Фурье со случайными коэффициентами) и продемонстрировал высокую надежность и быстродействие [7, 9].

Для случая, когда измерение значений функции сопровождается

аддитивными нормальными помехами, в предположении той же модели (3) — (5) были получены помехоустойчивые алгоритмы глобального поиска (АГПП). В одном из этих алгоритмов [6] на каждом шаге осуществляются испытания, дающие максимум Шенноновской информации о расположении экстремума, а в другом [10, 12] — очередное испытание проводится в точке максимума произведения вероятности расположения экстремума на степень дисперсии значения функции в этой точке. Экспериментальные исследования этих алгоритмов выявили их значительно более высокую надежность по сравнению со стохастической аппроксимацией при заданном числе испытаний [10].

Заметим, что для гладких функций, имеющих в районе экстремума заметно меньшие значения относительной первой разности, чем вдали от экстремума, предположение 2 является не слишком естественным. В таких задачах можно отнести условия 1—3 и модель (3) — (5) не к функции, а к ее выпуклому преобразованию, например, $\varphi^* = \sqrt{\varphi - \varphi_{\min}}$, где φ_{\min} есть наименьшее значение $\varphi(x)$ в $[a, b]$ (поскольку φ_{\min} обычно неизвестно, то вместо φ_{\min} в преобразование можно подставить наименьшее значение φ , достигнутое к данному шагу поиска [9, 11]). Модификация АГП (МАГП), связанная с использованием модели (3) — (5), для описания свойств преобразования функции (а не самой функции) существенно повышает быстродействие поиска (особенно при малых значениях ε) [9].

МИНИМИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Если многомерная функция $\varphi(x)$ зависит от небольшого числа переменных (например, от двух), то минимизация ее может быть эффективно выполнена с помощью одномерных алгоритмов [7, 10], обсуждавшихся в предыдущем разделе, применяемых по многошаговой схеме [11]:

$$\min_{x_1, x_2} \varphi(x_1, x_2) = \min_{x_1} [\min_{x_2} \varphi(x_1, x_2)]. \quad (6)$$

Схема (6) позволяет провести оптимизацию многомерной функции $\varphi(x)$ на основе одномерной модели (3) — (5), что, однако, приводит к потерям поисковой информации (из всех пар (x_1, x_2) , для которых в процессе минимизации по x_2 вычисляется $\varphi(x_1, x_2)$, используются при минимизации по x_1 лишь те, которым соответствует $\min_{x_2} \varphi(x_1, x_2)$. В связи

с этим многошаговая схема становится малоэффективной при числе переменных существенно большем, чем два. Последовательное применение информационного подхода к многомерным задачам предполагает задание многомерной модели $F(\Phi)$. Одна из таких моделей для одноэкстремальных (звездообразных) функций рассмотрена в [4]. На основе этой модели построен алгоритм поиска, осуществляющий испытания, которые на каждом шаге дают максимум информации о расположении экстремума.

Следует отметить, что при построении подобных алгоритмов с ростом размерности задачи возникают трудности реализации даже одношаговых решающих правил. Существование этих трудностей состоит в следующем. Предположим, что испытания представляют собой вычисление значений функции. Поскольку точка x^0 проведения очередного испытания должна обеспечивать оптимальное значение некоторого критерия, по отношению к которому алгоритм является оптимальным, то для определения этой точки необходимо решить задачу

$$Q(x^0) = \max_x Q(x), \quad (7)$$

где $Q(x)$ — показатель эффективности испытания в точке x (например,

вероятность расположения экстремума функции φ в ϵ -окрестности точки x). Но условие (7) само является задачей оптимизации (в общем случае многоэкстремальной) и отыскание x^0 с ростом размерности пространства становится затруднительным, даже если $Q(x)$ вычисляется много проще, чем $\varphi(x)$.

Чтобы избежать отмеченного усложнения, можно наложить ограничения на возможные отклонения точки $(k+1)$ -го испытания от точки k -го испытания. Один из таких алгоритмов описан в [12]. В этом алгоритме глобального поиска для многомерных функций (АГПМ) точка текущего испытания отличается от точки предшествующего испытания значением лишь одной координаты, причем, после каждого испытания номер варьируемой координаты изменяется. На каждом шаге поиска используется своя модель $F(\Phi)$, позволяющая связать результаты всех поисковых испытаний с расположением экстремума вдоль прямой, проходящей через точку предшествующего испытания параллельно координатной оси для изменяемой переменной. Введенная мера $F(\Phi)$ предполагает, что вдоль указанной прямой справедлива модель (3) — (5), а значения функции $\varphi(x)$ в точках, не лежащих на этой прямой, равны значениям в ближайших к ним точках на прямой, искаженным аддитивной нормальной помехой с нулевым средним и дисперсией, монотонно возрастающей при удалении от прямой. Выбор нового значения изменяемой координаты осуществляется таким образом, чтобы достигался максимум произведения вероятности расположения глобального минимума (на множестве точек, достижимых при вариации изменяемой координаты) на некоторую степень значения дисперсии функции в данной точке.

Некоторые эксперименты на тестовых функциях (типа $\varphi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N (x_i^2 - \cos 18x_i)$ из [24] и квадратичных) показывают, что при увеличении размерности пространства на 1 число поисковых испытаний, которые необходимо осуществить для выполнения условия окончания поиска, увеличивается втрое. Алгоритм использовался в некоторых прикладных задачах [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Сtronгин, Информационно-статистический поиск абсолютного минимума многомерных функций. Всесоюзная конференция «Экстремальные задачи и их приложения к вопросам планирования, просектирования и управления сложными системами», Тезисы докл., Горький, 1971.
2. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Сtronгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 17 (1966).
3. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Сtronгин, Автоматика и телемеханика, 17, № 1, 113 (1966).
4. Р. Г. Сtronгин, Поиск экстремума функций многих переменных по принципу максимума информации с автоматически подстраивающейся моделью, Уч. зап. Прикладная математика и кибернетика (Материалы к Всесоюзному межвузовскому симпозиуму по прикладной математике и кибернетике), Горький, 1967.
5. Р. Г. Сtronгин, Некоторые вопросы оптимизации функций многих переменных и поисковые системы управления. Диссертация, ГГУ, Горький, 1967.
6. Р. Г. Сtronгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 118 (1969).
7. Р. Г. Сtronгин, Автоматика и телемеханика, 31, № 7, 63 (1970).
8. Р. Г. Сtronгин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13 № 4, 539 (1970).
9. Р. Г. Сtronгин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 432 (1971).
10. Р. Г. Сtronгин, Алгоритмы для поиска абсолютного минимума, в сб Задачи статистической оптимизации, изд Зинатне, Рига, 1971.
11. Р. Г. Сtronгин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 7, 1067 (1972).
12. Р. Г. Сtronгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 46 (1971).
13. J. Kiefer. Sequential minimax search for a maximum, Proc. Amer. Soc., 4, № 3, 502 (1953).
14. M. Avriel, D. Wilde. Optimal search for a maximum with sequences of simultaneous function evaluations. Manag. Sci., 12, № 9, 722 (1966).

15. J. Beamer, D. Wilde. Time delay in minimax optimization of unimodal functions of one variable. *Manag. Sci.*, № 9, 528 (1969).
16. J. Beamer, D. Wilde. Minimax optimization of unimodal functions by variable block search. *Manag. Sci.*, 16, № 9, 529 (1970).
17. Ф. Л. Черноусько, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 10, № 4, 922 (1970).
18. Ф. Л. Черноусько, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 10, № 6, 1355 (1970).
19. И. М. Гельфанд, Е. Б. Вул, С. Л. Гинзбург, Ю. Г. Федоров, Метод оврагов в задачах рентгеноструктурного анализа, изд. Наука, М., 1966.
20. Н. Kushner. A new method of locating the maximum point of an arbitrary multipeak curve in the presence of noise. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng.*, 86, № 1, 97 (1964).
21. А. О. Converse. The use of uncertainty in a simultaneous search. *Operat. Res.*, 15, № 6, 1088 (1967).
22. Н. М. Емельянова, Автоматика и телемеханика, 18, № 5, 160 (1967).
23. И. Б. Моцкус, Многоэкстремальные задачи в проектировании, изд. Наука, М., 1967.
24. Л. А. Растиригин, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
25. В. В. Налимов, Н. А. Чернова, Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, изд. Наука, М., 1965.
26. В. В. Захаров, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 19 (1970).
27. В. К. Чичинадзе, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 111 (1967).
28. Р. Г. Стронгин, В. П. Малков, Об оптимизации составных конструкций по весу из условий прочности. Всесоюзная конференция «Экстремальные задачи и их приложения к вопросам планирования, проектирования и управления сложными системами», Тезисы докл., Горький, 1971.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

INFORMATION-STATISTIC THEORY OF FUNCTION EXTREMUM SEARCH

R. G. Strongin

The basic theses of the information-statistic theory of search are considered. Emphasized is the approach to incorporating the *a priori* information on the minimized function into the mathematical model of search. This permits the results of search samples to be directly used for estimation of extremum position. Realizations of this approach in one- and multidimensional problems of function minimization are analysed.

УДК 62 — 506.2

О РЕШЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ БИОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ*

Л. Н. Фицнер

Рассмотрены процессы минимизации внешнего раздражения нервно-мышечной системой человека, охваченной внешней искусственной обратной связью

Отмечаются особенности найденного алгоритма управления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Минимизация внешнего раздражения является одной из основных функций биологических систем управления. В связи с этим понятен большой интерес к этой проблеме как физиологов, так и инженеров.

Каким же образом протекают процессы минимизации и как при них взаимодействуют отдельные звенья биологических систем?

Получить ответ на первый вопрос удалось с помощью несложных экспериментов (см. рис. 1).

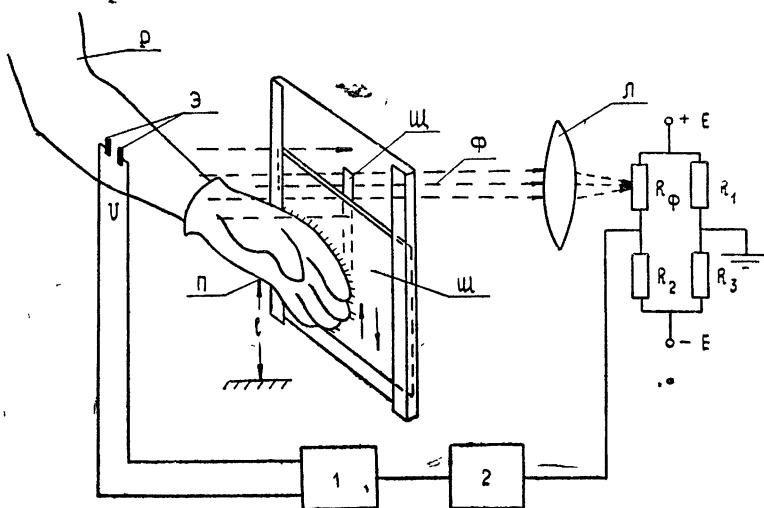


Рис. 1.

Человека раздражали электрическим током. К его коже прикрепляли два электрода Θ , на которые подавали электрическое напряжение $\sim U$. Величина его зависела от положения какой-либо подвижной части тела, например, от положения руки относительно некоторой фиксированной точки (l).

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

При изменении положения руки изменялся световой поток, проходящий через щель Щ, так как длина щели с помощью шторы Ш увеличивается при смещении руки вниз и уменьшается при смещении руки вверх. Штора прикреплена к перчатке П, надетой на руку Р (1 — модулятор, 2 — усилитель).

Световой поток Φ , прошедший через щель Щ и через линзу Л, попадает на фотосопротивление R_Φ . Таким образом, величина R_Φ , а следовательно, и величина $\sim U$ зависят от положения руки Р.

Нервно-мышечная система находила положение l_M , соответствующее сбалансированному состоянию мостовой схемы ($R_\Phi \cdot R_3 = R_1 \cdot R_2$), при котором раздражение было минимальным и равным нулю ($\sim U = 0$). Отклонение руки в любую сторону от найденного положения приводило к увеличению раздражения.

Электроды Э могли прикрепляться к любому участку кожи, в том числе и к коже руки Р, с помощью которой минимизируется раздражение, как показано на рис. 1.

Наблюдаемые движения руки в предварительно обученной системе могут быть разделены на два основных типа.

При больших $\frac{\partial U}{\partial l}$ рука быстро приближается к исходному положению l_M с нулевой конечной скоростью (рис. 2а).

При малых $\frac{\partial U}{\partial l}$ стратегия поиска минимума раздражения становится иной.

Движения к искомому положению l_M более осторожны и сопровождаются колебаниями (рис. 2б).

Рассмотрим, какие задачи должна решать система управления при поиске минимума.

На рис. 3 показана зависимость величины раздражения U от смещения руки l .

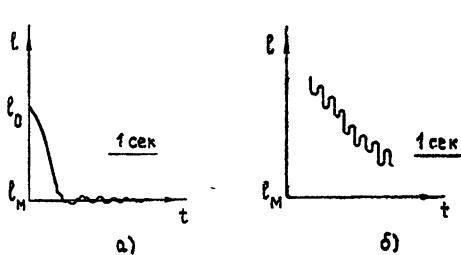


Рис. 2.

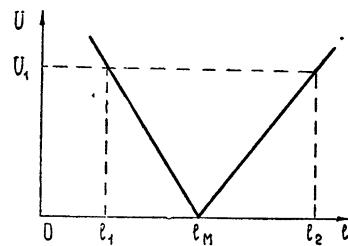


Рис. 3.

При отсутствии априорной информации о $\frac{\partial U}{\partial l}$ поиск минимума невозможен без пробных движений. Действительно, $U = U_1$ как при $l = l_1 < l_M$, так и при $l = l_2 > l_M$. По этой причине для определения направления движения в сторону минимума система управления мышцами должна сначала сместить руку в произвольном направлении. Если это приведет к уменьшению раздражения, то движение следует продолжать в том же направлении. Если же при пробном движении раздражение возрастет — направление движения следует изменить на противоположное.

Уравнение движения руки или иной подвижной части тела, участующей в минимизации раздражения (в дальнейшем будем называть

ее объектом управления или просто объектом), в первом приближении имеет следующий вид (для поступательного движения)

$$m \frac{d^2l}{dt^2} = F, \quad (1)$$

где m — масса объекта, $\frac{d^2l}{dt^2}$ — его ускорение, F — усилия мышц.

Чтобы за минимальное время сместить объект в искомую точку, на него надо сначала действовать максимальной (но допустимой!) силой, направленной в сторону минимума.

Чтобы объект не перешел по инерции искомую точку, т. е. подошел к ней с нулевой скоростью, его надо заранее затормозить противоположной по направлению также максимальной силой. Поэтому система управления должна определять интервалы времени, соответствующие действию указанных двух сил.

И, наконец, при малых $\frac{\partial U}{\partial l}$, т. е. при слабом «полезном» сигнале система должна также определять направление движения на фоне внешних и внутренних случайных помех.

2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Напомним некоторые сведения по строению и функционированию нервной системы человека, имеющие отношение к исследованиям алгоритма минимизации.

Известно, что координированное движение объекта осуществляется под воздействием мышц-антагонистов. Мышцы состоят из волокон, которые иннервируются мотонейронами. К мотонейронам через возбуждающие и тормозные синапсы поступают сигналы от других нейронов и от рецепторов. Приближенно можно считать, что результирующее воздействие на мотонейрон входных сигналов равно алгебраической сумме их эффектов, если принять, что возбуждающий синапс возбуждает реакцию положительного знака, а тормозной — отрицательного.

С увеличением суммарного входного сигнала выходной сигнал мотонейрона возрастает. Он заставляет мышечные волокна сокращаться.

Мотонейроны через особый вид нейронов — клетки Реншоу — могут воздействовать друг на друга и осуществлять возвратное влияние также через клетки Реншоу. Эти цепи взаимодействий представлены на рис. 4. Здесь через МН обозначен мотонейрон, через КР — клетка Реншоу. Возбуждающие синапсы обозначены белыми, а тормозные — черными кружками. Через U_1, \dots, U_m обозначены выходные сигналы мотонейро-

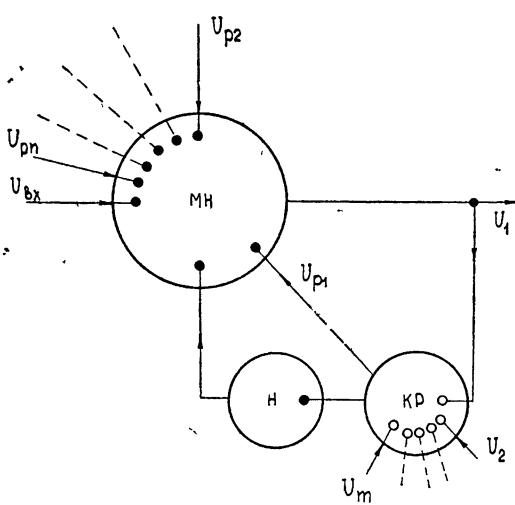


Рис. 4.

нов, через U_{p1}, \dots, U_{pn} — выходные сигналы клеток Реншоу и через

$U_{\text{вх}}$ — входной сигнал мотонейронов. Через Н обозначен вставочный нейрон цепи торможения торможением.

В контуре внешней обратной связи (рис. 1) выходной сигнал каждого рецептора КР связан с величиной раздражения U от электродов Э зависимостью следующего вида:

$$\varphi = c \sqrt{U} = k_1 \sqrt{|l_M - l|}, \quad (2)$$

где c и k_1 — постоянные коэффициенты, U — амплитуда переменного напряжения $\sim U$.

Состояние мышц контролируется моторецепторами. Для координации движения при минимизации раздражения необходимо получать информацию от первичного окончания мышечного веретена и от сухожильного рецептора. Первичное окончание мышечного веретена (в дальнейшем его будем называть просто мышечным веретеном) реагирует лишь на растяжение мышцы. Его выходной сигнал S зависит как от величины $(l - l_0)$, так и от скорости $\frac{dl}{dt}$ растяжения мышцы

$$S = k_2 \sqrt{|l - l_0|} + k_3 \sqrt{\left| \frac{dl}{dt} \right|}. \quad (3)$$

Здесь k_2 , k_3 — постоянные коэффициенты, l_0 — значение l в момент начала нарастания скорости.

Сухожильный рецептор реагирует на механическое напряжение мышцы. Его выходной сигнал возрастает с увеличением напряжения в сухожилии.

На рис. 5 показана схема двух двигательных единиц мышц-антагонистов M и \bar{M} . Здесь же показаны рецепторы, участвующие в формировании управляющего сигнала. Через С на рис. 5 обозначены блоки связи рецептора КР с мотонейронами МН и $\bar{M}\bar{H}$. На рис. 5 опущены связи мотонейронов между собой, обратные связи, охватывающие мотонейроны, а также промежуточные нейроны, через которые поступают сигналы от моторецепторов к мотонейронам. Из рис. 5 видно, что первичные окончания мышечных веретен (MB) и $(\bar{M}\bar{B})$ возбуждают мотонейроны своей мышцы и тормозят мотонейроны мышцы-антагониста. Сухожильные рецепторы (CP и \bar{CP}) тормозят мотонейроны своей мышцы и возбуждают мотонейроны антагониста [1, 2].

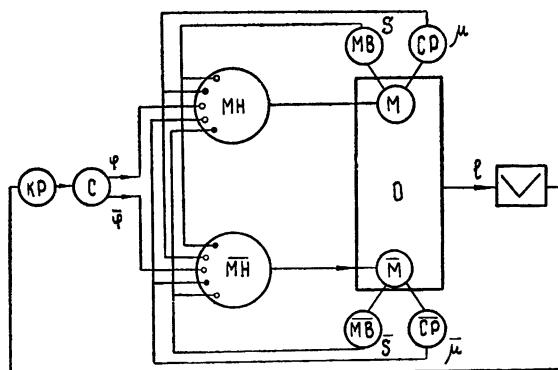


Рис. 5.

Отметим еще одни важные закономерности в поведении нервно-мышечной системы. Они были открыты Сеченовым [3], а затем исследованы

многими учеными, и прежде всего Беритовым и его школой [4]. Суть их, согласно современным представлениям [4], в следующем.

1. Если на входы мотонейронов подействовал возбуждающий сигнал, то мотонейроны сначала возбуждаются, а затем затормаживаются.

2. Торможение рефлекторных движений наблюдается при учащении или усилении раздражения чувствительных нервов.

3. По мере прекращения раздражения общее торможение заменяется общим повышением возбудимости. Оно обуславливает сокращение отдачи при наличии каких-либо посторонних раздражений, производящих возбуждение данной мышцы.

4. Общее торможение вызывается даже при коротких раздражениях кожи или чувствительного нерва, причем оно получается и при подпрогрессивной силе, когда не наступает никакого двигательного эффекта. И в этом случае после периода общего торможения наступала фаза облегчения.

5. Степень облегчения зависит от интенсивности торможения. Облегчение тем значительнее, чем сильнее торможение. Облегчение выявляется на мышцах обычно в сокращении отдачи. По прекращении раздражения те самые мышцы, которые тормозились, производят сокращение. Но так бывает, если двигательные нейроны подвергались какой-либо фоновой импульсации.

6. Состояние повышенной возбудимости после торможения получается в том случае, если состояние торможения проходит быстро по прекращении раздражения. Если же оно прекращается с большой постепенностью, то возбудимость не повышается.

3. АЛГОРИТ ПОИСКА МИНИМУМА

Пользуясь результатами экспериментальных исследований двух основных режимов поиска минимума раздражения биологической системой управления, а также сведениями о характеристиках и взаимосвязях ее отдельных звеньев, мы поставили перед собой задачу найти алгоритм функционирования системы.

Прежде всего рассмотрим формирование управляющего сигнала при сильной зависимости раздражения от смещения объекта.

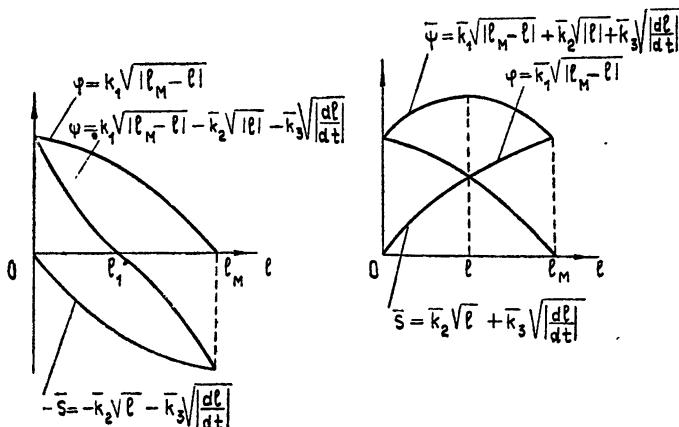


Рис. 6.

На рис. 6 показана зависимость выходного сигнала кожного рецептора (φ) и мышечного веретена (\bar{S}) от растяжения (l) мышцы M (принято, что сокращение мышцы и движение объекта управления происходят

дит из начала координат с нулевой скоростью). Обозначим алгебраические суммы сигналов, поступающих от рецепторов на вход МН, через ψ (рис. 6а) и на вход $\bar{M}H$ (рис. 6б) — через $\bar{\psi}$ и проследим за характером изменения ψ и $\bar{\psi}$ при возрастании l от нуля до l_M . Сигналы с сухожильных рецепторов мышц-антагонистов μ и $\bar{\mu}$, также оказывающие влияние на суммарные входные сигналы мотонейронов, здесь пока не учитываются. Так как объект смещается из начала координат, то в (3) $l_0 = 0$.

В этом случае суммарный сигнал на МН

$$\psi = \varphi - \bar{S} = k_1 \sqrt{|l_M - l|} - \bar{k}_2 \sqrt{|l|} - \bar{k}_3 \sqrt{\left| \frac{dl}{dt} \right|}. \quad (4)$$

Суммарный сигнал на $\bar{M}H$ равен

$$\bar{\psi} = \varphi + \bar{S} = \bar{k}_1 \sqrt{|l_M - l|} + \bar{k}_2 \sqrt{|l|} + \bar{k}_3 \sqrt{\left| \frac{dl}{dt} \right|}. \quad (5)$$

Если движение направлено в сторону минимума, то на начальном участке движения суммарный входной сигнал (ψ) мотонейронов МН агониста уменьшается, а мотонейронов антагониста $\bar{\psi}$ увеличивается.

В соответствии с явлением отдачи при уменьшении входного сигнала на мотонейронах, подвергнутых фоновой импульсации (точнее на сети из мотонейронов, связанных между собой через клетки Реншоу), мотонейроны агониста возбуждаются (см. [5]). Возбуждение будет продолжаться до тех пор, пока суммарный входной сигнал мотонейронов будет возбуждающим, т. е. пока

$$\psi = k_1 \sqrt{|l_M - l|} - \bar{k}_2 \sqrt{|l|} - \bar{k}_3 \sqrt{\left| \frac{dl}{dt} \right|} > 0. \quad (6)$$

Суммарный входной сигнал антагониста $\bar{\psi}$ сначала на первом участке движения будет возрастать. В соответствии с явлением торможения после возбуждения медленное возрастание входного сигнала мотонейронов не приводит к их возбуждению. На втором конечном участке движения, вследствие уменьшения суммарного входного сигнала, мотонейроны антагониста возбудятся, и антагонист будет тормозить движение объекта управления так, чтобы он подошел к минимуму с нулевой конечной скоростью. Значение l , при котором возбуждается антагонист, может быть найдено из уравнения

$$\frac{d\bar{\psi}}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\bar{k}_1 \sqrt{|l_M - l|} + \bar{k}_2 \sqrt{|l|} + \bar{k}_3 \sqrt{\left| \frac{dl}{dt} \right|} \right) = 0. \quad (7)$$

Известно, что усиление мышцы F , обусловленное явлением отдачи, возрастает с увеличением скорости уменьшения раздражения $\left(\frac{d\psi}{dt} \right)$, а также с увеличением самой величины возбуждающего сигнала (ψ), подвергнутого торможению.

Примем

$$F = -c\psi \frac{d\psi}{dt}. \quad (8)$$

Определим максимальное значение скорости движения объекта к минимуму $\left(\frac{dl}{dt} \right)_{\max}$

$$\frac{dl}{dt} = \int_0^t \frac{F}{m} dt = -\frac{c}{m} \int_0^t \psi \frac{d\psi}{dt} dt = -\frac{c}{2m} (\psi_2^2 - \psi_1^2). \quad (9)$$

Здесь m — масса объекта, ψ_1 — значение ψ при $l = 0$; ψ_2 — значение ψ в момент прекращения возбуждения агониста.

Из (4) и (6) получим

$$\begin{aligned} \psi_1 &= k_1 \sqrt{l_M}, \quad \psi_2 = 0, \\ \left(\frac{dl}{dt} \right)_{\max} &= \frac{ck_1^2}{2m} l_M. \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем соотношения между коэффициентами уравнений (4) и (5), при которых конечная скорость движения объекта (при $l = l_M$) равна нулю:

$$\left(\frac{dl}{dt} \right)_{l=l_M} = \frac{ck_1^2 l_M}{2m} - \frac{c}{m} \int_{t_3}^{t_4} -\bar{\psi} \frac{d\bar{\psi}}{dt} dt = \frac{c}{2m} (k_1^2 l_M + \bar{\psi}_4^2 - \bar{\psi}_3^2) = 0. \quad (11)$$

Здесь t_3 и t_4 — время начала и конца возбуждения антагониста, $\bar{\psi}_3$ — значение $\bar{\psi}$ при $\frac{d\bar{\psi}}{dt} = 0$ и $\bar{\psi}_4$ — значения $\bar{\psi}$ при $l = l_M$.

Из (5) и (7) следует

$$\bar{\psi}_3 = \bar{k}_1 \sqrt{l_M - \frac{\bar{k}_2 l_M}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} + \bar{k}_2 \sqrt{\frac{\bar{k}_2^2 l_M}{\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2}} + \bar{k}_3 \sqrt{\frac{dl}{dt}}, \quad (12)$$

$$\bar{\psi}_4 = \bar{k}_2 \sqrt{l_M}. \quad (13)$$

После подстановки (12) и (13) в (11) получим

$$\begin{aligned} \frac{ck_1^2 l_M}{2m} + \frac{c\bar{k}_2^2 l_M}{2m} - \frac{c(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2) l_M}{2m} - \frac{c^2 \bar{k}_1^2 \bar{k}_3^2 l_M}{4m^2} - \frac{c \bar{k}_3 l_M}{m} \sqrt{\frac{(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2) c k_1^2}{2m}} = \\ = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда

$$k_1^2 - \bar{k}_1^2 - \frac{c\bar{k}_3^2 k_1^2}{2m} - k_1 \bar{k}_3 \sqrt{\frac{2c}{m} (\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} = 0, \quad (15)$$

т. е., если коэффициенты уравнений (4) и (5) подчиняются условию (15), то скорость объекта управления в минимуме будет равной нулю.

При убывании ψ мышца-агонист включается в цепь положительной обратной связи. Действительно, увеличение напряжения мышцы приводит к увеличению скорости убывания ψ ; увеличение скорости убывания ψ , в свою очередь, приводит к увеличению напряжения мышцы. Ограничение к беспредельному возрастанию напряжения от мышцы обусловлено действием сигнала μ с сухожильного рецептора [4]. Рассмотрим воздействие μ на ψ , которым раньше (рис. 6а и 6б) пренебрегали.

Через сухожильный receptor CR периодически замыкается контур второй также положительной обратной связи, функционирующий параллельно с указанным основным контуром. При напряжении мышцы-агониста с сухожильного рецептора поступает сигнал μ , который (согласно рис. 5) увеличивает скорость уменьшения ψ ; при этом напряже-

ние мышцы, а следовательно, и μ еще больше возрастает. Однако при исчезновении фоновой импульсации на входе мотонейронов возбуждение отдачи прекращается, и мышца расслабляется. Вследствие этого сигнал μ , оказывающий на ϕ тормозное воздействие, исчезает, и на мотонейронах появляется снова фоновая импульсация. Такого рода колебания усилий мышц будут продолжаться до тех пор, пока уменьшается ψ . Они обычно значительны и видны на электромиограммах [4].

Аналогичным образом действует на ϕ сигнал с сухожильного рецептора антагониста μ .

Рассмотрим теперь, каким же образом выбирается направление движения в сторону минимума.

Через небольшой интервал времени после начала действия раздражения (после подключения U к электродам Э, см. рис. 1) от кожных рецепторов к мотонейронам поступает возбуждающий сигнал, под воздействием которого мышцы-антагонисты одновременно возбуждаются. Объект смещается в сторону действия более сильной мышцы, пусть M . Если такое движение соответствует уменьшению раздражения, то оно будет поощряться. На мотонейроны мышцы-агониста M будет поступать разность сигналов от кожных рецепторов ϕ и от мышечных веретен антагониста \bar{S} (4). Эта разность при больших значениях $\frac{\partial \phi}{\partial l}$ (рассматривается этот случай) быстро уменьшается. Поэтому за возбуждением агониста, обусловленным резким возрастанием возбуждающего сигнала, последует возбуждение отдачи, вызванное уменьшением входных сигналов мотонейронов. Цепь положительной обратной связи через сухожильные рецепторы агониста будет периодически замыкаться.

Входной сигнал у мотонейронов антагониста в этом случае будет возрастать, так как $\left| \frac{\partial \phi}{\partial l} \right| < \left| \frac{\partial S}{\partial l} \right|$, см. рис. 6б и (5). Поэтому после возбуждения антагониста расслабляется.

Если начальное движение под воздействием M направлено в сторону от минимума, т. е. U возрастает, то разность $\phi - \bar{S}$ (4), хотя и будет уменьшаться, но незначительно, так как ϕ и S возрастают одновременно и $\frac{\partial \phi}{\partial l} < \frac{\partial \bar{S}}{\partial l}$. Вследствие этого контур положительной обратной связи через сухожильные рецепторы не начнет функционировать и мышца после возбуждения расслабнет. На мотонейроны антагониста поступает сигнал $\phi + \bar{S}$. Так как ϕ и \bar{S} возрастают, то за возбуждением антагониста последует его торможение. При одновременном расслаблении мышц-антагонистов уменьшаются сигналы с их сухожильных рецепторов. Так как $\mu > \mu$, то согласно схеме рис. 5 входной сигнал мотонейронов антагониста уменьшается, а агониста — возрастает.

Вследствие этого мышца-антагонист подвергается действию возбуждения отдачи, и направление движения изменяется.

Не исключено, что одной из причин возбуждения антагониста и торможения агониста является уменьшение сигнала \bar{S} с мышечного веретена. Имеются данные, что сигнал с мышечного веретена, кроме составляющих, зависящих от смещения и скорости, включает составляющую, зависящую от ускорения. Поэтому при расслаблении антагониста уменьшается сигнал \bar{S} с его мышечного веретена, а следовательно, и сумма сигналов $\phi + \bar{S}$, поступающих на мотонейроны антагониста, в то время как разность сигналов $\phi - \bar{S}$, действующих на мотонейроны агониста, возрастает.

На рис. 2а приведена осциллограмма процесса поиска минимума, при котором начальное движение направлено к минимуму. Нами получены также осциллограммы, на которых первое пробное движение направлено в сторону от минимума.

Рассмотрим решение той же задачи поиска минимума при малых значениях $\frac{\partial U}{\partial t}$.

Мышцы и связанные с ними суставы совершают периодические движения небольшой амплитуды, получившие название физиологического трепора. При действии внешнего раздражения амплитуда колебаний возрастает.

Вследствие действия сигналов с моторецепторов трепор сопровождается возрастанием и убытием входных сигналов мотонейронов мышц-антагонистов. Если величина раздражения U , а следовательно, и сигнал с кожных рецепторов U не изменяются при смещении объекта, то колебания симметричны относительно некоторого среднего положения. Картина будет иной, когда раздражение зависит от смещения объекта. Суммарный входной сигнал, поступающий от рецепторов на входы мотонейронов мышц-антагонистов, будет изменяться в этом случае несимметрично вследствие разных значений сигнала с кожных рецепторов при движениях к минимуму и от минимума. Благодаря возбуждению отдачи появится средняя составляющая движения, направленная в сторону минимума (рис. 2б).

4. ОСОБЕННОСТИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В результате проведенных исследований удалось установить закономерность в поведении нервно-мышечной системы человека при минимизации раздражения. Она состоит в том, что координированное движение в сторону минимума достигается путем возбуждения и торможения мышц-антагонистов в зависимости от характера изменения суммы сигналов, поступающих от рецепторов на мотонейроны, и в соответствии с явлениями торможения после возбуждения и отдачи после торможения.

Найденная закономерность является как бы трамплином для исследования алгоритмов более сложных биологических систем управления. Она имеет и самостоятельное значение для построения технических систем управления. Обратим внимание на следующие ее особенности.

A. Изменение стратегии поиска в зависимости от производной минимизируемой функции. На эту особенность уже обращалось внимание (рис. 2а и 2б). При сильной зависимости величины раздражения от смещения, когда особенно важно уменьшить время процесса минимизации, система достигает минимум без пробного поискового шага или лишь с одним пробным шагом. При слабой зависимости раздражения от смещения процесс поиска сопровождается колебаниями, с помощью которых удается определить направление движения даже при малом отношении полезного сигнала к уровню помех.

B. Квазинвариантность к изменению массы объекта и усилиям мышц. В биологической экстремальной системе, кроме обычной дополнительной обратной связи по скорости, существует дополнительная обратная связь по смещению. При ней непрерывно сравниваются между собой интервал пути, пройденный объектом от точки, в которой скорость равна нулю, с расстоянием до минимума.

Предположим сначала, что система управления содержит только обратную связь по смещению и в (15) коэффициент усиления в цепи обратной связи по скорости $k_3 = 0$.

Тогда условие подхода к минимуму с нулевой конечной скоростью будет иметь вид $k_1 = \bar{k}_1$. В это выражение не входят масса объекта и действующие силы. Поэтому их изменение отразится лишь на времени достижения минимума, но во всех случаях объект управления будет достигать минимум с нулевой конечной скоростью.

Введение обратной связи по скорости наряду с обратной связью по смещению позволяет уменьшить влияние внешних сил, которые могут случайно возникать в процессе движения к минимуму.

В. Переменная величина ограничений по скорости и ускорению. Из (8) и (10) следует, что максимальные значения силы, действующей на объект, и скорость движения зависят от характера решаемой задачи.

Максимальная сила мышцы зависит от величины раздражения, производной раздражения по смещению, а также от производной смещения по времени. Максимальная скорость движения зависит от расстояния, которое должен пройти объект для достижения минимума, а также от производной величины раздражения по смещению.

В известных оптимальных быстродействующих системах автоматического управления величина ограничений принимается постоянной.

Преимущества переменных ограничений на силу и скорость очевидны. Действительно, если расстояния до минимума небольшие, нет оснований развивать большую скорость. При больших расстояниях время движения увеличивается. Для того, чтобы это увеличение было несущественным, необходимо увеличить максимальное значение скорости смещения. Очевидна также необходимость в повышении скорости движения и действующей силы при больших величинах раздражения и при их значительных изменениях от смещения объекта. В этом случае биологическая система идет даже на риск разрыва сухожилия.

Для технических систем переменная величина ограничений также имеет большое значение, так как при ней в обычных случаях развиваются номинальные значения усилий и скорости, не приводящие к быстрому износу оборудования, в аварийных же ситуациях система может работать при максимальных значениях усилий и скоростей.

Г. Особенность биологических систем управления состоит также в том, что в них распространены положительные обратные связи, функционирующие одновременно в нескольких контурах управления.

В заключение отметим, что при построении рассмотренной биологической экстремальной системы не пришлось выдвигать каких-либо предположений о функционировании отдельных звеньев нервно-мышечной системы. Существующих в настоящее время сведений, полученных физиологами, оказалось достаточно. С помощью этих же сведений, а также рассуждений, аналогичных приведенным, удалось объяснить механизм ряда других явлений, известных физиологам [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Гранит, Электрофизиологическое исследование рецепции, ИЛ, М., 1957.
2. Дж. Экклс, Физиология нервных клеток, ИЛ, М., 1959.
3. И. М. Сеченов, О механизмах в головном мозгу лягушки, угнетающих рефлексы спинного мозга, в сб. Физиология нервной системы, вып. 3, изд. Медгиз, М., 1952.
4. И. С. Беритов, Общая физиология мышечной и нервной системы, т. 2, изд. Медгиз, М., 1959.
5. Л. Н. Фицнер, Управление координацией движения, изд. Наука, М., 1971.

Институт проблем управления

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

ON SOLUTION OF EXTREMAL PROBLEMS BY BIOLOGICAL CONTROL SYSTEM

L. N. Fitzner

External stimulation minimizing by a human neuromuscular system under an artificial external feedback is studied.

Specific properties of the obtained control algorithm are indicated.

УДК 681.3 001.2.06

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ*

Д. И. Батищев

Рассматривается процесс проектирования радиотехнических цепей с помощью ЭВМ. Показываются какие задачи, возникающие на разных этапах проектирования, можно свести к задачам нелинейного программирования. Обсуждаются методы поисковой оптимизации, наиболее эффективные для решения этих задач, и возможности использования при этом работы ЭВМ в реальном масштабе времени.

1. Под оптимальным проектированием будем понимать процесс принятия наилучших в том или ином смысле решений, получаемых с помощью ЭВМ. Несмотря на всю сложность и разнообразие радиотехнических цепей (passивные и активные фильтры, усилительные каскады, переключающие элементы, импульсные схемы и т. п.), цикл их проектирования можно характеризовать следующими основными этапами:

1. Формализация задачи проектирования.
2. Выбор принципиальной схемы (конфигурации) цепи.
3. Составление математических моделей и анализ характеристик цепи.
4. Определение оптимальных значений элементов цепи.
5. Разработка топологии схемы.

Общим для всех этих этапов является то, что возникающие на них задачи оптимизации могут быть сформулированы как задача нелинейного программирования

$$\min_{\mathbf{x} \in D} Q(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (1)$$

где

$$D = \{\mathbf{x} \mid \varphi_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \leqslant 0, \quad j = 1, \dots, m\}. \quad (2)$$

При этом формализация задачи проектирования сводится к назначению функции цели $Q(\mathbf{x})$ и технических условий $\varphi_j(\mathbf{x})$. (Примеры, иллюстрирующие выбор конкретных значений вектора \mathbf{x} и функций $Q(\mathbf{x})$, $\varphi_j(\mathbf{x})$ будут приведены дальше).

Такой подход к задачам оптимального проектирования позволяет применять для их численного решения методы поисковой оптимизации [1-3]. Однако надо заметить, что эти методы должны не заменять известные методы, основанные на классической теории электрических цепей, а дополнять их и позволять решать классические задачи анализа и синтеза при помощи нетрадиционных подходов, основанных на использовании ЭВМ.

В настоящее время по вопросам анализа, синтеза и оптимизации радиотехнических цепей, а тем более по методам поисковой оптимизации

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

ции, имеется большое число публикаций*. Поэтому, не останавливаясь на обзоре литературы по этой тематике, рассмотрим более подробно, какие задачи в процессе проектирования радиотехнических цепей можно свести к задаче нелинейного программирования (1) — (2), какова математическая формулировка этих задач, какие методы поисковой оптимизации наиболее эффективны для их решения и каковы возможности использования при этом работы ЭВМ в реальном масштабе времени. Некоторые из этих вопросов обсуждались в [12—13].

2. Процесс выбора принципиальной схемы, удовлетворяющей техническим условиям, будем рассматривать как последовательное решение задачи аппроксимации и задачи реализации.

Пусть, для определенности, $f(\omega)$, $\omega \in E$ — заданная частотная характеристика.

Требуется определить дробно-рациональную функцию комплексного переменного p

$$T(p) = \frac{A_m(p)}{B_n(p)} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k p^k}{\sum_{k=0}^n b_k p^k}, \quad (3)$$

некоторое выражение от которой $F(\omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ наилучшим образом аппроксимирует $f(\omega)$ для всех $\omega \in E$. При этом критерий наилучшего соответствия зависит от типа аппроксимации (гладкая, равноволновая или среднеквадратичная). В случае чебышевской (равноволновой) аппроксимации при фиксированных значениях степеней полиномов $A_m(p)$ и $B_n(p)$ имеем

$$\min_{x \in D} \max_{\omega \in E} |F(\omega, x) - f(\omega)|, \quad (4)$$

где x — вектор варьируемых параметров, включающий в себя значения коэффициентов полиномов $A_m(p)$ и $B_n(p)$ или их нулей; D — область допустимых значений вектора x , определяемая условиями физической и схемной реализуемости. Эти условия накладывают определенные ограничения на расположение нулей и полюсов функции $T(p)$, на соотношения между коэффициентами ее полиномов и т. д. В общем случае эти условия могут быть записаны в виде системы неравенств:

$$\varphi_j(\omega, x) \leq 0 \quad (\omega \in E, j = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Некоторые из неравенств (5) могут не зависеть от частоты ω .

Например [14], при аппроксимации функции $f(\omega)$ ($\omega \in E$) квадратом модуля рабочего коэффициента передачи $F(\omega, x)$ для RC -цепи лестничного типа варьируемыми переменными x являются значения нулей α и полюсов β коэффициента передачи $T(p) = A_m(p)/B_n(p)$, а область D определяется условиями физической (степень числителя меньше степени знаменателя, $B_n(p)$ — полином Гурвица) и схемной (нули α — действительные, отрицательные, любой кратности и полюса β — действительные, простые, отрицательные) реализуемости [7—8].

$$m \leq n; \alpha_k < 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m); \beta_j < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n.$$

* Наиболее полная библиография имеется в следующих работах: по составлению уравнений цепи — в [4—5], по аппроксимации схемных функций — в [6], по методам реализации — в [7—8], по применению методов оптимизации в теории цепей — в [9—10] и по автоматизации расчетов топологии схемы — в [11].

В связи с тем, что минимальное число пассивных элементов для определенного класса схем [15] определяется степенью полиномов $A_m(p)$ и $B_n(p)$, задача (4)–(5) в общем виде формулируется так

$$\min_{x \in D} (m + n), \quad (6)$$

$$\min_{x \in D} \max_{\omega \in E} |F(\omega, x) - f(\omega)| \leq \delta, \quad (7)$$

где δ — требуемая точность аппроксимации.

В этом случае выбор оптимальных значений m, n осуществляется методом отсечений [16], а параметры x , удовлетворяющие условию (7), определяются из решения задачи (4)–(5), относительно численного решения которой необходимо сделать следующие замечания.

1. Для некоторого класса цепей [14] задача (4)–(5) путем замены переменного может быть сведена к задаче минимизации без ограничений. Например, ограничения $a_k \leq 0$ можно исключить заменой переменного $a_k = y_k^2$, а $b_k \leq b_{k+1}$ — заменой переменного $b_k = b_{k+1} \sin^2 y_k$ и т. п.

2. Ограничения типа $\varphi_j(\omega, x) \leq 0$ ($\omega \in E$) могут быть заменены ограничениями $\varphi_j(\omega_j(x), x) \leq 0$, где $\omega_j(x)$ — точка глобального максимума одномерной функции $\varphi_j(\omega, x)$ при фиксированных значениях x : $\varphi_j(\omega_j(x), x) = \max_{\omega \in E} \varphi_j(\omega, x)$.

3. При выборе в качестве варьируемых параметров x нулей полиномов $A_m(p)$ и $B_n(p)$, для обеспечения вещественности коэффициентов a и b , необходимо задавать их конфигурацию в p -плоскости.

По полученной из решения задачи (4)–(5) или (6)–(7) дробно-рациональной функции $T(p)$ на основании специальных теорем, [15] или используя классические методы реализации [7–8], можно получить конкретную структуру цепи с фиксированным числом узлов. Путем введения всевозможных межузловых связей в виде элементов R, L и C из конкретной структуры получим обобщенную структуру с избыточным числом элементов, которая характеризуется некоторым обобщенным параметром $\Phi(p)$. Тогда, сопоставляя $T(p)$ с $\Phi(p)$, получим систему компонентных уравнений, в которой неизвестными величинами x являются значения пассивных и обратимых элементов

$$\begin{aligned} a_k &= \varphi_k(x) & (k = 1, 2, \dots, m), \\ b_i &= \varphi_i(x) & (i = m + 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (8)$$

где a_k, b_i — численные значения коэффициентов функции $T(p)$.

Условия физической реализуемости при решении системы (8) сводятся к требованию положительности компонент вектора x

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l). \quad (9)$$

Система компонентных уравнений (8) является непротиворечивой и имеет неоднозначное решение. Кроме того, от проектируемой цепи требуется не только, чтобы она воспроизводила с заданной точностью функцию $f(\omega)$ ($\omega \in E$), но и была оптимальной относительно некоторой функции цели $Q(x)$. Например, обладала минимальной чувствительностью $S(\omega, x)$ к вариациям параметров в заданном диапазоне частот E и т. п. В связи с этим задача оптимальной реализации формулируется следующим образом

$$\min_{x \in D} \max_{\omega \in E} S(\omega, x), \quad (10)$$

где D — область допустимых параметров, определяемая системой равенств (8) и неравенств (9).

При этом структурные изменения обобщенной цепи сводятся к параметрическим изменениям межузловых элементов: значение $x_j = 0$ соответствует удалению элемента, а $x_j > 0$ — включению элемента между рассматриваемыми узлами.

Другим способом получения эквивалентных по $T(p)$ цепей из обобщенной структуры с фиксированным числом узлов является метод непрерывных эквивалентных преобразований [17], изменения значений элементов в котором описывается системой $3n(n-1)/2$ линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= MR, \quad R(0) = R^0; \quad \frac{dL}{dt} = ML, \\ L(0) &= L^0; \quad \frac{d[C^{-1}]}{dt} = M[C^{-1}], \quad C^{-1}(0) = [C^{-1}]^0. \end{aligned} \quad (11)$$

где n — число узлов обобщенной структуры, t — параметр непрерывного преобразования, M — матрица преобразований, выбранный элементов m_{ij} , которой можно изменять одни значения элементов цепи, сохраняя другие неизменными, $R^0, L^0, [C^{-1}]^0$ — значения элементов исходной обобщенной структуры при $t = 0$.

Условия физической реализуемости сводятся к требованию, чтобы ни один элемент цепи не был отрицательным. В этом случае задача оптимальной реализации имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(t, \{m_{ij}\})} \max_{\omega \in E} S(\omega, R(t, \{m_{ij}\}), L(t, \{m_{ij}\}), C(t, \{m_{ij}\})), \\ \frac{dR}{dt} = MR, \quad \frac{dL}{dt} = ML, \quad \frac{d[C^{-1}]}{dt} = M[C^{-1}], \\ R(t, \{m_{ij}\}) \geq 0, \quad L(t, \{m_{ij}\}) \geq 0, \quad C(t, \{m_{ij}\}) \geq 0, \\ R(0) = R^0, \quad L(0) = L^0, \quad [C^{-1}(0)] = [C^{-1}]^0, \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Аналогично, могут быть сформулированы задачи оптимальной реализации для других способов построения совокупности эквивалентных цепей, например, для метода дискретных непрерывных преобразований [18] и т. п.

3. В задачах машинного проектирования радиотехнических цепей одним из основных вопросов является вопрос создания математических моделей, связывающих частотные, временные и статические характеристики цепи с параметрами ее компонентов и внешними воздействиями. При этом точность математического описания определяется адекватностью моделей активных нелинейных элементов реальным прибором, способом составления компонентных и топологических уравнений цепи и методами их численного решения на ЭВМ. При низкой точности математического моделирования (составление уравнений и их решение) можно получить результаты, которые не соответствуют реальным физическим процессам в цепи.

Математическая модель активного нелинейного элемента представляет из себя эквивалентную схему, полученную из физических соображений [10]. Предположим, что структура эквивалентной схемы задана. Тогда построение модели активного элемента сводится к такому подбору параметров эквивалентной схемы \mathbf{x} , при котором расчетная $F(y, \mathbf{x})$ и экспериментальная (y_j, f_j) характеристики на внешних зажимах активного элемента или простейшей схемы согласуются наилучшим образом, например, в смысле чебышевского критерия.

$$\min_{x \in D} \max_{1 \leq j \leq n} |F(y_j, x) - f_j|, \quad (13)$$

где y — некоторый одномерный параметр: напряжение, частота и т. п.

Расчетная кривая $F(y, x)$ определяется либо из уравнений, характеризующих эквивалентную схему, либо конструируется из нелинейных функций заданного вида с неизвестными параметрами x . Например, при аппроксимации вольтамперной характеристики $F(y, x) = x_1[\exp(x_2y) - 1]$, где $F(y, x)$ и y — ток и напряжение на одном из $p - n$ переходов, соответственно. Область D задается ограничениями, которые могут быть наложены на вид функции $F(y, x)$ или на диапазон изменения параметров x . Например, для обеспечения монотонности или выпуклости (вогнутости) функции $F(y, x)$ могут быть наложены, соответственно, ограничения на первые и вторые производные функции $F(y, x)$

$$\alpha_j^- \leq F'_y(y_j, x) \leq \alpha_j^+ \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

$$\beta_j^- \leq F''_y(y_j, x) \leq \beta_j^+ \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Таким образом, построение модели активного нелинейного элемента свелось к задаче нелинейного программирования (13) — (15).

В общем виде для широкого класса цепей, в которых активные нелинейные элементы заменены эквивалентными схемами, переходный процесс описывается системой дифференциальных уравнений, а установившееся состояние цепи — системой алгебраических (или нелинейных) уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (16)$$

$$y = Cx + Du, \quad (17)$$

где x — независимые переменные состояния цепи (токи и напряжения), y — другие искомые токи и напряжения, u — задающие функции времени независимых источников, A, B, C, D — матрицы, образованные на основании компонентных и топологических матриц схемы.

Эти уравнения могут быть получены автоматически [4] по информации конфигурации принципиальной схемы и значениях ее элементов.

При составлении системы уравнений (16) — (17) задача выбора дерева графа схемы и задача исключения неправильных включений могут быть сформулированы как экстремальные задачи. Так, за счет оптимального разбиения [4] взаимно определяющих ветвей графа на y - и z -ветви можно минимизировать порядок системы (17). При этом в дерево должно входить максимальное число емкостей, а источники тока и напряжения должны перераспределяться между деревом и его дополнением таким образом, чтобы максимизировать число несвязных (отдельных) частей y -графа. В связи с наличием в схеме емкостных контуров и индуктивных звезд приведение системы дифференциальных уравнений к нормальной форме (17) может быть осуществлено [12] при помощи решения системы линейных (нелинейных) уравнений невысокого порядка относительно зависимых переменных состояния. Например, при расчете оконечного каскада (97 ветвей, 51 узел), включающего 3 индуктивных звезды и 4 емкостных контура, процедура приведения дифференциальных уравнений к нормальной форме свелась к решению трех систем линейных уравнений 9, 10 и 16 порядков. К решению системы нелинейных уравнений сводится также задача расчета цепи постоянного тока [19]. В этих случаях решение системы уравнений $f_j(x) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) можно рассматривать как решение задачи минимизации функции

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m f_j^2(x) \quad \text{одним из методов поисковой оптимизации.}$$

Система уравнений (16) обычно решается численно путем замены ее уравнениями в конечных разностях. Например, для класса методов прогноза и коррекции имеем [20]

$$x_{n+1} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + h_n [b_0 \dot{x}_{n+1} + b_1 \dot{x}_n + b_2 \dot{x}_{n-1}]. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что процесс интегрирования системы уравнений (16) определяется значениями параметров a и b формулы численного интегрирования (18). Это позволяет сформулировать задачу выбора параметров $x = (a, b)$ на каждом n -ом шаге как задачу нелинейного программирования

$$\max_{x \in D} h_n(x). \quad (19)$$

Область D определяется из условий выполнения следующих трех требований:

- а) формула (18) устойчива или относительно устойчива, т. е. отношение абсолютной ошибки к решению стремится к нулю;
- б) ошибка отбрасывания формулы (18) не превосходит заданной величины;
- в) ошибки округления меньше некоторого значения.

Эти условия можно записать [20] в виде системы неравенств

$$\varphi_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (20)$$

Считая, что формула (18) является точной для $x = 1, t, t^2, \dots$, задачу (19) — (20) можно свести к однодвухпараметрической экстремальной задаче, для которой известны эффективные методы поисковой оптимизации. Для конкретных классов цепей [21] целесообразно использовать методы анализа, основанные на особенностях конфигурации исследуемой цепи. Это позволяет повысить скорость и точность математического моделирования.

4. В связи с тем, что при выборе принципиальной схемы учитываются все технические условия, имеется возможность за счет варьирования значений элементов x учесть некоторые дополнительные требования. Эта задача аналогична задаче построения моделей активных элементов (13) — (15), так как в ней также известны структура цепи и ее математическое описание. Однако, при определении оптимальных параметров элементов цепи в систему неравенств должны входить условия, которые определяют рассматриваемую схему как радиотехнический элемент того или иного назначения. Например, для переключающего элемента должны выполняться условия работы схемы в режиме отсечки и насыщения, а для усилительного каскада — в линейном режиме и т. п. В процессе оптимизации стремятся определить такое сочетание параметров x , которое обеспечивает экстремальное значение функции цели при выполнении ограничивающих условий [22].

$$\min_x Q(x_1, \dots, x_n), \quad (21)$$

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (22)$$

Например, для логических переключающих элементов [23] в качестве функций $Q(x)$, $\varphi_j(x)$ могут быть выбраны следующие характеристики: средняя потребляемая мощность, коэффициент разветвления по выходу, время переключения и т. д.

Варьируемыми переменными x , кроме значений элементов цепи, могут быть допуски на них или геометрические и физические параметры, характеризующие структуру элементов. В первом случае решается зада-

ча выбора оптимальных значений допусков, а во втором случае — задача уточнения конфигурации принципиальной схемы, полученной на этапе реализации, за счет учета паразитных параметров и потерь в элементах цепи [24].

Часто при проектировании радиотехнических цепей приходится учитывать то, что параметры входящих в них элементов имеют непостоянную величину, а в пределах поля допусков изменяются с заданными законами распределения. В этом случае задача (20) — (21) должна рассматриваться как задача стохастического нелинейного программирования [3]

$$\max_x P\{\varphi_j(z) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_j(x) \leq 0 \\ \end{array} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (24) \right.$$

или

$$\min_x MQ(x), \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_j(x) \leq 0 \\ \end{array} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (26) \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} P\{\varphi_j(z) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m\} \geq p_0, \end{array} \quad (27) \right.$$

где z — случайная реализация вектора x с заданными законами распределения в поле допусков $\pm \delta$,

$$(1 - \delta_k)x_k \leq z_k \leq (1 + \delta_k)x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

В этом случае процесс численного решения задачи (25) — (28) разбивается на два этапа. На первом этапе решается задача нелинейного программирования (25) — (26), а на втором — проверяется неравенство (27) для фиксированных значений x .

Проверка неравенства (27) может быть заменена [25] задачей принятия одной из двух конкурирующих гипотез: $H_0\{P \geq p_0\}$ — гипотезы о том, что схема обладает заданной надежностью, и $H_1\{P < p_0\}$ — гипотезы о том, что схема не обладает заданной надежностью. Решение задачи проверки двух гипотез может быть получено с помощью последовательного критерия отношения вероятностей [26], основными характеристиками которого являются E_p — математическое ожидание числа испытаний и $L(p)$ — вероятность принятия гипотезы H_0 . Эти характеристики зависят от четырех нестатистических параметров $x = (\alpha, \beta, p_1, p_2)$, где α, β — вероятности ошибок первого и второго рода, соответственно, p_1, p_2 — параметры, при которых выполнение условия $P \leq p_1$ ($P > p_2$) делает принятие гипотезы H_0 (H_1) предпочтительнее. Поэтому выбор этих параметров можно рассматривать, например, как решение задачи минимизации риска, связанного с принятием гипотез H_0 и H_1 , при заданном ограничении на число допустимых испытаний:

$$\min_{x \in D} \left(\int_0^{p_1} [1 - L(p)] dp + \int_{p_2}^1 L(p) dp \right), \quad (29)$$

где

$$D = \{x = (p_1, p_2) \mid \max_{0 < p < 1} E_p(x) \leq N, 0 < p_1 < p_0 < p_2 < 1\}. \quad (30)$$

Возможны и другие постановки задачи оптимального выбора нестатистических параметров [25], которые позволяют значительно сократить затраты машинного времени на процесс проектирования радиотехнических цепей.

5. Для радиотехнических цепей в интегральном исполнении процесс машинного проектирования заканчивается этапом разработки топологии схемы, который включает в себя компоновку элементов в модуле, размещение модулей на плате и трассировку соединений между модулями. При этом выполнение критерии оптимальности, которые при решении этих задач носят в основном эвристический характер, и учет ограничивающих условий осуществляется алгоритмически при реализации алгоритмов на ЭВМ. Например, в качестве оптимальной топологии интегрального модуля в [27] принято условие взаимного непересечения и минимальной длины проводников, которые соединяют элементы микросхемы при допустимом размещении последних на подложке, при заданной конфигурации и размерах. Допустимое множество решений определяется технологическими, электрическими и другими технико-эксплуатационными требованиями, выкладываемыми как на геометрическую форму и размеры подложки, так и на взаимное расположение и форму элементов. В связи с тем, что элементы и соединительные проводники, входящие в микросхему, изготавливаются в едином технологическом цикле, их можно рассматривать как геометрические объекты одной природы. Это позволяет задачу компоновки элементов в модуле не разделять на традиционные этапы компоновки и трассировки, а решать как задачу оптимального расположения геометрических объектов на плоскости. При размещении модулей на плате необходимо вводить критерии, которые учитывают в себе требования трассировки. Некоторые из алгоритмов оптимального размещения модулей, реализующие такие критерии, рассмотрены в [11]. Область допустимых решений в задаче трассировки определяется технологическим процессом изготовления интегральной схемы. Так при изготовлении плат методом открытых площадок [27] требуется, чтобы каждая связь была разведена на одном слое, количество слоев было ограничено, контактные площадки имели различную геометрическую форму и размеры и т. д. При выполнении этих условий требуется осуществить трассировку таким образом, чтобы минимизировать общую длину соединительных проводников. Задача одновременной оптимизации конфигурации всех проводников в настоящее время не имеет алгоритмического решения. Поэтому при помощи той или иной модификации алгоритма Ли [11] для задачи трассировки удается получить [11, 27] только локально-оптимальное решение, т. е. решение, которое учитывает положение всех проводников, проложенных на предыдущих шагах, без учета последующих.

6. Большинство методов поисковой оптимизации [1–3] содержит параметры α , значения которых должны быть выбраны экспериментально применительно к конкретному объекту оптимизации. Выбор этих параметров обычно осуществляется в процессе поиска путем уточнения первоначально заданных значений, что снижает эффективность методов. В связи с этим необходимо исследовать особенности поведения функций цели $Q(x)$ и ограничений $\varphi_i(x)$ и на классе тестовых задач Φ [28], отражающих эти особенности, проводить экспериментальное тестирование методов поиска [29]. Это позволяет осуществить [30, 31] выбор оптимальных параметров α для алгоритмов, наиболее эффективно решающих каждую конкретную задачу оптимального проектирования. В качестве критерия эффективности метода поисковой оптимизации может быть использован [29] интегральный показатель—математическое ожидание числа испытаний (вычислений функции φ)

$$N(\alpha, \varepsilon) = \int_{\Phi} \int_D N(\varphi, \alpha, x, \varepsilon) df dF. \quad (31)$$

Здесь $N(\varphi, \mathbf{a}, \mathbf{x}, \epsilon)$ — число вычислений функции $\varphi \in \Phi$ при поиске ее экстремума из начальной точки $\mathbf{x} \in D$ с точностью ϵ . При этом предполагается, что на классе Φ и в множестве начальных условий D , соответственно, определены вероятностные меры $F(\varphi)$ и $f(\mathbf{x})$.

Таким образом, задача выбора оптимальных параметров сводится [30] к минимизации функции $N(\mathbf{a}, \epsilon)$, значения которой вычисляются с большим уровнем помех.

Для математических моделей сформулированных выше задач, имеющих либо многоэкстремальный, либо «овражный» характер, наиболее эффективными оказались следующие алгоритмы: метод Кифера [32] — для поиска локального экстремума одномерных функций; метод кусочно-линейной аппроксимации [33] — для отыскания глобального минимума произвольной кривой; комбинированные алгоритмы поиска [30], переключающие поиск с нелокальных методов в начальной фазе на локальные методы с квадратичной сходимостью в окрестности экстремума, — для минимизации многопараметрических функций и методы штрафов [33], с помощью которых задача нелинейного программирования (1) — (2) может быть сведена к последовательности задач минимизации без ограничений.

7. Использование ЭВМ в диалоговом режиме работы дает возможность объединить сформулированные выше задачи в единую систему автоматического проектирования радиотехнических цепей [33, 34], которая позволяет с помощью простого входного языка менять последовательность решаемых задач, изменять число и тип варьируемых параметров, выбирать в одной и той же задаче оптимизации разные функции цели, контролировать процесс поиска оптимального решения и т. д. Другой важной особенностью этого режима работы является возможность структурного синтеза задач оптимального проектирования. Здесь под структурным синтезом понимается выбор и изменение структурной модели задачи. Например, в задачах аппроксимации — выбор конфигурации нулей и полюсов в p -плоскости или вида аппроксимирующей функции, при эквивалентных преобразованиях — обобщенной схемы цепи, в задачах оптимального выбора параметров — принципиальной схемы, при построении модели активного элемента — эквивалентной схемы и т. д. При этом все структурные изменения в математической модели осуществляются на основании взаимодействия человек — машина через терминал, например, пишущую машину «Консул» [34], а выбор оптимальных значений параметров модели — программным путем при помощи численного решения одной из рассмотренных выше задач нелинейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Растигин, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
- Б. Т. Поляк, Экономика и математические методы, 3, № 6, 37 (1967).
- Д. И. Батищев, Изв. высш. уч. зав — Радиоэлектроника, 13, № 6, 675 (1970).
- В. П. Сигорский, А. И. Петренко, Алгоритмы анализа электронных схем, изд. Техника, Киев, 1970.
- Д. Калахан, Методы машинного расчета электронных схем, изд. Мир. М., 1970.
- А. А. Ланнэ, Оптимальный синтез линейных электрических цепей, изд. Связь, М., 1969.
- А. Ф. Белецкий, Теоретические основы электропроводной связи, ч 3, Связьиздат, 1959.
- Н. Балабанян, Синтез электрических цепей, Госэнергоиздат, М., 1961.
- Г. Темеш, Д. Калахан, ТИИЭР, 55, № 11, 65 (1967).
- Сб. Машинный расчет интегральных схем, под ред. Дж. Гороховица, изд. Мир. М., 1971.
- Сб. Применение вычислительных машин для проектирования цифровых устройств, под ред. Н. Я. Матюхина, изд. Сов. радио, М., 1968.

12. Д. И. Батищев, А. Г. Коротченко, Е. А. Сергеев, Н. М. Шишкина, в сб. Тезисы докладов 27-й научной сессии, посвященной Дню радио и Дню связиста, М., 1971.
13. Д. И. Батищев, П. Д. Басалин, Л. Р. Колдоркина, Е. А. Сергеев Н. М. Шишкина, в сб. Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Экстремальные задачи и их приложения к вопросам планирования, проектирования и управления сложными системами», Горький, 1971, стр. 13
14. Д. И. Батищев, в сб. Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Экстремальные задачи и их приложения к вопросам планирования, проектирования и управления сложными системами», Горький, 1971, стр. 13
15. О. Л. Бандман, Синтез электронных RC-схем, изд. Наука, М., 1966
16. Д. И. Батищев, Уч. зап. Прикладная математика и кибернетика (Материалы к Всесоюезному симпозиуму по прикладной математике и кибернетике), Горький, 1967, стр. 131.
17. Д. А. Калахан, Современный синтез цепей, изд. Энергия, М., 1966
18. Е. Коземчак, M. Murray—Lasso, Bell System Tech. Journal, 48, № 1, 275 (1969).
19. В. М. Бондаренко, Вопросы анализа нелинейных электрических и электронных цепей, изд. Наукова думка, Киев, 1967
20. Р. В. Хемминг, Численные методы, изд. Наука, М., 1968
21. Д. И. Батищев, П. Д. Басалин, в сб. Автоматизация проектирования в электронике, вып. 2, изд. Техника, Киев, 1970, стр. 69
22. Д. И. Батищев, Автоматика и телемеханика, 26, № 1, 140 (1965)
23. Д. И. Батищев, Т. К. Шевякова, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, 11, № 3, 451 (1968).
24. Д. И. Батищев, Г. М. Смыслов, Г. В. Игуменцева, П. Д. Басалин, Изв высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 15, № 12, 1245 (1972)
25. Д. И. Батищев, Изв высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 13, № 3, 401 (1970).
26. А. Вальд, Последовательный анализ, Физматгиз, М., 1960.
27. Д. И. Батищев, В. Ф. Морозов, В. С. Полозов, В. В. Щербаков, Ю. А. Хохлов, в сб. Автоматизация проектирования в электронике, вып. 7, изд. Техника, Киев, 1972, стр. 98
28. Д. И. Батищев, Автоматика и вычислительная техника, № 1, 16 (1968)
29. Д. И. Батищев, в сб. Поиск экстремума, изд. Томского университета, Томск, 1969, стр. 333
30. Д. И. Батищев, Р. И. Бедная, Р. Г. Стронгин, Автоматика и вычислительная техника, № 3, 25 (1972).
31. Д. И. Батищев, А. В. Литвер, Изд высш уч. зав.—Радиофизика, 14, № 3, 472 (1971)
32. J. Kiefer, Proc Amer. Math. Society, 4, № 3, 502 (1953)
33. Д. И. Батищев, П. Д. Басалин, в сб. Машинальное проектирование электронных схем, Тр. МИЭМ вып. 16, ч. III, М., 1971, стр. 45
34. Д. И. Батищев, П. Д. Басалин, Изв высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 15 № 2, 214 (1972).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

OPTIMAL DESIGNING OF RADIO ENGINEERING CIRCUITS

D. I. Batishchev'

Electronic computer-designing of radio engineering circuits is considered. It is shown which problems shaping at various stages of designing are reducible to problems of nonlinear programming. Search optimization methods most effective for the solution of these problems are discussed as well as the possibilities of using on-line modes of electronic computers in these processes.

УДК 519.8 : 54

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ХИМИЧЕСКОЙ НАУКЕ И ТЕХНОЛОГИИ*

Г. М. Островский

В статье рассматриваются основные проблемы задач оптимизации в химической технологии — методы расчета статистических режимов сложных схем, метод определения производных от критерия оптимизации по варьируемым переменным для схем произвольной структуры, основанный на использовании понятия «Сопряженный процесс», рассматриваются вопросы автоматизации программирования задач оптимизации.

В развитии работ по оптимизации химико-технологических процессов можно выделить два этапа. На первом этапе в основном проводились работы по оптимизации отдельных аппаратов. Однако химико-технологические схемы всегда состоят из взаимосвязанных, влияющих друг на друга аппаратов. Оптимизация только одного из аппаратов может привести к тому, что вся схема будет работать далеко не в оптимальном режиме. Этим обстоятельством было вызвано широкое развитие работ по оптимизации сложных схем.

Задачи оптимизации сложных схем имеют свою специфику, связанную с тем, что:

1. Сложная схема, как правило, состоит из большого числа аппаратов, описываемых дифференциальными и конечными уравнениями, так что уже простой расчет всех аппаратов схемы занимает много времени даже на современных вычислительных машинах.

2. Наличие рециклов приводит к необходимости проведения итерационной процедуры для вычисления одного значения критерия при заданных значениях варьируемых параметров.

3. Число M варьируемых параметров, как правило, велико.

4. Наличие большого числа ограничений на переменные в различных аппаратах также усложняет задачу поиска оптимального режима.

Указанные причины приводят к необходимости разработки более эффективных методов расчета оптимальных режимов схем, учитывающих специфику данной задачи [1].

Эффективность методов характеризуется быстродействием, требуемой «памятью» вычислительной машины, алгоритмичностью, позволяющей его применять без каких-либо существенных изменений для определенного класса задач. И, наконец, одна из важных характеристик — это трудоемкость подготовительной работы — программирования, проведения каких-либо математических операций (например, аналитическое определение формул для производных и др.). Очень часто более мощный метод не используется только потому, что требует очень трудоемкой подготовительной работы. В связи с этим важна разработка таких подходов, которая позволила бы большую часть подготовительной работы передать машине, т. е. автоматизация подготовительной работы.

* Доклад, сделанный на V Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам (Горький, май 1971 г.).

Перейдем теперь к рассмотрению основных методов оптимизации сложных химико-технологических схем. Пусть схема состоит из N блоков. Остановимся сначала на математической модели схемы, которая состоит из математических моделей отдельных аппаратов и уравнений связи между аппаратами.

Блоки с сосредоточенными параметрами описываются конечными уравнениями

$$y_i^{(k)} = f_i^{(k)}(x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots, u_r^{(k)}), \quad (1)$$

где $x_j^{(k)}$ ($j = 1, \dots, m$) — входные, $y_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n$) — выходные, $u_s^{(k)}$ ($s = 1, \dots, r$) — управляющие переменные k -го блока, а блоки с распределенными параметрами — обычновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dz_i^{(k)}}{dt} = F_i^{(k)}(z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots, u_r^{(k)}), \quad (2)$$

$$(0 \leq t \leq \bar{t}^{(k)}),$$

где $z_i^{(k)}$ — фазовые переменные объекта, $u_i^{(k)}$ — управления ($u_i^{(k)} \equiv \text{const}$ при $0 \leq t \leq \bar{t}^{(k)}$). Входными переменными блока с распределенными параметрами являются величины

$$x_i^{(k)} \equiv z_i^{(k)}(0), \quad (3a)$$

а выходными переменными

$$y_i^{(k)} \equiv z_i^{(k)}(\bar{t}^{(k)}). \quad (3b)$$

Уравнения связи между аппаратами задаются в виде некоторой таблицы связей, показывающей, как связаны выходные переменные одних аппаратов с входными переменными других. Эта таблица связей представляется в виде ряда соотношений вида

$$y_p^{(q)} = x_g^{(h)}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что требуется минимизировать некоторый критерий Φ , зависящий от управлений на всех блоках $u_i^{(j)}$ и выходных переменных схемы $\bar{y}_s^{(k)}$

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \Phi^{(k)}(u_s^{(k)}, \bar{y}_i^{(k)}). \quad (5)$$

Входные переменные схемы $\bar{x}_i^{(k)}$ будем для простоты изложения считать закрепленными. Обычно на управление в каждом блоке наложены ограничения

$$\Psi_\beta^{(k)}(u_1^{(k)}, \dots, u_r^{(k)}) \leq 0. \quad (6)$$

Часто ограничения (6) имеют следующий простой вид

$$u_i^{(k)} \leq a_i^{(k)}. \quad (7)$$

Иногда имеются ограничения типа равенств на некоторые выходные переменные схемы

$$\bar{y}_i^{(m)} = b_i^{(m)}. \quad (8)$$

Ограничения этого типа возникают, если требуется, например, минимизировать себестоимость целевого продукта при заданной производительности, или когда задан по каким-либо причинам выход побочных продуктов и т. д.

Остановимся более подробно на трех группах методов оптимизации сложных схем — методах спуска (прямых методов), методах, основанных на использовании необходимых условий оптимальности (непрямых методов) и методов декомпозиции.

Рассмотрим вначале первую группу методов. Предположим, что на выходные переменные ограничений типа (8) нет, а ограничения на управления имеют вид (7). В этом случае все управлении u_s^k можно считать независимыми, и поиск можно вести в пространстве управлений. Для поиска могут быть использованы общие методы спуска [2]. Каждый метод спуска характеризуется двумя аспектами — объемом вычислений на каждой итерации и стратегией поиска. С точки зрения объема вычислений на каждой итерации методы подразделяются на методы, требующие вычисления только минимизируемой функции, требующие вычисления, помимо этого, первых производных, и методы, требующие вычисления первых и вторых производных. С точки зрения стратегии поиска к первому типу относятся методы Гаусса — Зейделя, симплекс-метод. Методы второго типа — это метод градиента, наискорейшего спуска и их модификации. И, наконец, методы третьего типа основаны на аппроксимации минимизируемой функции в окрестности рабочей точки квадратичной формой. В связи с тем, что вычисление вторых производных численными методами требует больших затрат машинного времени, а получение аналитических формул очень трудоемко, в последнее время разработан ряд методов, использующих только первые производные, но по скорости сходимости превышающие градиентные методы. Это метод Давидона — Флетчера — Паузэлла, сопряженного градиента и др. [2].

Как видно с точки зрения стратегии поиска, методы, применяемые в химической технологии, те же самые, что и методы, применяемые в других областях науки и техники. Однако, с точки зрения вычисления целевой функции и ее производных, имеются особенности, на которых коротко остановимся.

Рассмотрим сначала вычисление минимизируемой функции, основным этапом которой является расчет схем. В связи с тем, что быстродействие методов спуска является одной из основных их характеристик, минимизировать число вычислений надо с основы, т. е. с алгоритмов расчета статических режимов схем.

Известно [1, 3], что задача расчета статических режимов замкнутых схем сводится к решению некоторой системы нелинейных конечных уравнений

$$f_i(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Специфика ее состоит в том, что порядок ее может быть велик, а вычисление левых частей требует трудоемких вычислений, включая в ряде случаев решение многих систем дифференциальных уравнений. Для построения в некотором смысле наилучшей схемы решения этой системы используется так называемый структурный анализ [1]. Цель его — понизить размерность решаемой системы (9). Структурный анализ решает ряд задач, основные из которых следующие. Первая задача — это выделение в сложной схеме так называемых «комплексов» [1], т. е. совокупностей блоков схемы, охваченных обратными связями. Если в схеме выделены комплексы, то это позволяет разбить задачу расчета всей схемы на ряд задач расчета отдельных комплексов, что существенно понижает размерность решаемой задачи. Различные алгоритмы выделения комплексов изложены в ряде работ [4—6]. Вторая задача структурного анализа — это определение в некотором смысле оптимальной совокупности потоков внутри комплекса, разрыв которых превращает комплекс в замкнутую схему [4—6]. Структурный анализ может решать и ряд других задач, на которых мы здесь не будем останавливаться.

Остановимся теперь на вопросе вычисления первых производных. Численное определение частных производных с помощью соответствующих разностей требует $(M + 1)$ -го вычисления целевой функции, т. е. $(M + 1)$ расчета всей схемы, где M — общее число управлений в схеме. При большом M задача расчета всех частных производных может потребовать очень больших затрат машинного времени. В связи с этим была предложена [1] эффективная процедура вычисления частных производных целевой функции для сложной схемы, основанная на введении понятия «сопряженного» процесса. Эффективность совместного применения уравнений основного и сопряженного процесса тем больше, чем больше число переменных. Эмпирически на нескольких примерах оказалось, что время расчета производных при применении сопряженного процесса примерно в $0,5M$ раз (M — число управляющих переменных).

Задача оптимизации сложных схем значительно усложняется, когда имеются ограничения типа равенств или неравенств (8) на выходные и промежуточные переменные схемы. Основная трудность связана с тем, что в данном случае уже нельзя считать все управление независимыми.

Тогда применяется ряд подходов. Один из них — это применение метода «штрафов» [7], при котором задача с краевыми условиями (8) формально сводится к задаче без краевых условий. Несмотря на кажущуюся простоту этого подхода, он обладает существенным недостатком — целевая функция при достаточно большом штрафном коэффициенте имеет «овраг». Второй подход — это применение метода проектирования градиента [1, 8]. Этот метод в ряде случаев дает хорошие результаты, однако алгоритм его значительно сложнее, чем алгоритмы методов градиента и наискорейшего спуска.

При большом числе ограничений типа равенств и неравенств может оказаться целесообразным перейти к поиску в пространстве фазовых и управляющих переменных [1].

Остановимся здесь подробнее еще на одном приеме [9]. Пусть в общем случае требуется найти минимум функции

$$f(u_1, \dots, u_n) \quad (10)$$

при наличии ограничений типа равенств

$$\varphi_i(u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (11)$$

и типа неравенств

$$\Psi_j(u_1, \dots, u_n) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, p). \quad (12)$$

Будем считать, что в допустимой области, т. е. там, где выполняются условия (11) и (12), функция f имеет единственный глобальный минимум, который находится в точке $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$. Значение функции f в этой точке обозначается через $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = f(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n).$$

Образуем новую целевую функцию следующим образом

$$z = [f(u_1, \dots, u_n) - \lambda]^2 + \sum_{i=1}^m \varphi_i^2(u_1, \dots, u_n) + \sum_{j=1}^p G(\Psi_j), \quad (13)$$

где параметр λ выбран удовлетворяющим условию

$$\lambda < \bar{\lambda}, \quad (14)$$

а функция $G(\Psi)$ определяется следующим образом

$$G(\Psi) = \begin{cases} 0 & (\Psi \leq 0), \\ \Psi^2 & (\Psi > 0). \end{cases} \quad (15)$$

Пусть минимум функции z находится в точке $\bar{u}_1(\lambda), \dots, \bar{u}_n(\lambda)$. Значение z в этой точке обозначим через \bar{z}_λ . Легко видеть, что выполняется неравенство

$$\bar{z}_\lambda > 0. \quad (16)$$

Действительно, если точка $\bar{u}_1(\lambda), \dots, \bar{u}_n(\lambda)$ находится в допустимой области, то

$$z = [f(\bar{u}_1(\lambda), \dots, \bar{u}_n(\lambda)) - \lambda]^2 > 0.$$

Тогда, согласно выбору параметра λ , будет выполняться неравенство (16). Если же точка $u_1(\lambda), \dots, u_n(\lambda)$ будет находиться вне допустимой области, то строго больше нуля будет выражение

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^2 + \sum_{j=1}^p G(\Psi_j),$$

что приводит к выполнению неравенства (16). Пусть теперь выбрано $\lambda = \bar{\lambda}$, в этом случае в точке $u_i = \bar{u}_i$

$$z(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) = 0. \quad (17)$$

На основе указанных соображений может быть построен следующий метод решения первоначальной задачи. Вначале из физических соображений выбирается λ_1 , удовлетворяющее условию (14). Находится минимум функции z (13). Эта операция проводится для последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots .$$

Процесс решения оканчивается для того λ_i , для которого в первую очередь будет выполняться условие (17). Согласно вышеприведенным соображениям точка $\bar{u}_1(\lambda_i), \dots, \bar{u}_n(\lambda_i)$ будет являться решением первоначальной задачи.

Остановимся теперь коротко на непрямых методах. В ряде работ были получены необходимые условия оптимальности статических режимов сложных схем, состоящих из аппаратов, описываемых конечными и обыкновенными дифференциальными уравнениями [1, 10]. Было показано, что задача оптимизации схемы произвольной структуры сводится к решению некоторой сложной краевой задачи для системы уравнений, состоящей из уравнений основного и «сопряженного» процесса, и краевых условий, заданных для каждого из входных и выходных блоков схемы. Для решения ее могут применяться методы Ньютона, Вольфа, квазилинейаризации, метод итераций в пространстве управлений [1].

С другой стороны, существует ряд так называемых декомпозиционных методов оптимизации, в которых в общей задаче оптимизации схемы стремятся выделить задачи оптимизации отдельных аппаратов [1, 2, 11]. Алгоритм декомпозиционного метода обычно состоит (рис. 1) из центрального алгоритма R и местных алгоритмов R_i ($i = 1, \dots, N$) оптимизации отдельных блоков. Работа общего алгоритма протекает следующим образом. Центральный алгоритм посылает каждому местному алгоритму некоторую совокупность параметров $(s_1^{(i)}, \dots, s_n^{(i)})$. Местные алгоритмы проводят оптимизацию отдельных блоков, а результаты оптимизации в виде некоторых совокупностей параметров $(\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_n^{(i)})$ ($i = 1, \dots, N$) посыпают в центральный алгоритм. Центральный алгоритм на основе этой информации изменяет совокупности $s_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, N$)

с точки зрения требований всей схемы и опять посыпает измененные совокупности $s_j^{(t)}$ местным алгоритмам и т. д.

Построение декомпозиционных методов основывается на следующих соображениях. Просто оптимизировать отдельно каждый блок (аппарат или совокупность аппаратов) нельзя, так как, вообще говоря, неизвестно влияние переменных этого блока на другие блоки, а следовательно, и на общий критерий оптимизации. Отсюда и возникает идея при оптимизации отдельных аппаратов либо каким-либо образом учесть, либо исключить взаимовлияние блоков. Так, один из методов основывается на том, что искусственно вводятся цены на все промежуточные переменные (в наших обозначениях это $s_j^{(t)}$) [12]. Это позволяет написать автономный критерий оптимизации для каждого аппарата и при фиксированных $s_j^{(t)}$ проводить оптимизацию каждого аппарата. Итак, в данном случае центральный алгоритм посыпает в местные алгоритмы R_i промежуточные цены $s_j^{(t)}$. От местных алгоритмов центральный алгоритм получает значения входных и выходных переменных, полученных после оптимизации отдельно каждого аппарата (в наших обозначениях $s_j^{(t)}$). Задача центрального алгоритма состоит в том, чтобы, управляя промежуточными ценами $s_j^{(t)}$, согласовать входные и выходные переменные соответствующих блоков.

Рассмотрим теперь коротко второй декомпозиционный метод [1]. Здесь центральный алгоритм посыпает в местные алгоритмы значения входных и выходных переменных. Местный алгоритм R_i проводит оптимизацию i -го блока при фиксированных значениях входных и выходных переменных. Он отсылает в центральный алгоритм значение местного критерия, полученное после местной оптимизации. Задача центрального алгоритма состоит в том, чтобы управляя всеми входными и выходными переменными блоков добиться оптимальной работы всей схемы.

И, наконец, остановимся на проблеме автоматизации расчетов и оптимизации сложных химико-технических схем. Эта проблема имеет большое значение в связи со следующими обстоятельствами. При проектировании новых процессов всегда приходится рассчитывать и оптимизировать различные варианты схем их осуществления. Математическая подготовка и программирование каждого варианта сложной схемы требует длительной и трудоемкой работы. Отсюда возникает важная задача автоматизации этой работы. По существу задача ставится следующим образом: требуется создать программу (будем называть ее организационной), которая позволяла бы рассчитывать статический режим сложной схемы произвольной структуры. Входными данными в организационную программу должны быть математические модели всех аппаратов схемы [1, 2], заданные в виде процедур, и таблица связей [4]. Переход от моделирования одного варианта схемы к другому достигается за счет изменения таблицы связей. Подобные программы созданы в ряде стран [13].

На основе организационной программы расчета сложных схем могут быть построены программы их автоматической оптимизации. Однако, при этом возникает одна важная задача, на которой в заключение остановимся.

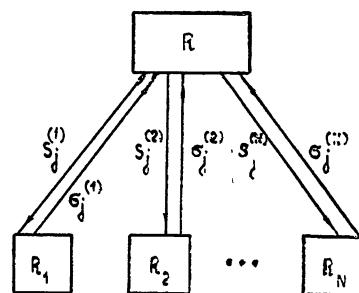


Рис. 1.

Задача эта состоит в определении матрицы частных производных от некоторой системы функций. Эта задача встречается при построении «сопряженного» процесса [1], при использовании уравнений принципа максимума, при решении систем нелинейных уравнений методом Ньютона. Численное, с помощью разностей, определение этих производных приводит к их неточному вычислению и существенно увеличивает время счета. Вывод этих производных вручную и их дальнейшее программирование требует трудоемкой подготовительной работы. Отсюда возникает важная задача построения программ, которые позволяли бы алгоритмически вычислить упомянутую матрицу частных производных. Задаче определения производных посвящено ряд работ [14].

В НИФХИ им. Л. Я. Карпова разработана программа определения матрицы частных производных, основанная на использовании алгоритма «сопряженного процесса».

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Островский, Ю. М. Волин, Методы оптимизации сложных химико-технологических схем, изд. Химия, М., 1970.
2. G. S. G. Beveridge, R. S. Schechter, „Optimization Theory and Practice“, Mc Graw-Hill Book Company.
3. М. Ф. Нагиев, Учение о рециркуляционных процессах в химической технологии, Аз. Гос. Издат., 1965.
4. Leder, Himmelblau, *Adv. Chem. Eng.*, 8, 1970.
5. L. J. Ford Jr., H. P. Hutchinson, *The analysis of Chemical Plant flowsheet*, *Ghem. Eng. Sci.*, v. 24, 1969.
6. Г. М. Островский, Ю. М. Волин, Структурный анализ сложных схем, Тр. 4-й конференции по химическим реакторам, Новосибирск, 1971 (в печати).
7. Дж. Лейтман (под ред.), Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, изд. Наука, Физматгиз, М., 1965.
8. Дж. Денис, Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, М., 1961.
9. Г. М. Островский, Методы оптимизации химических реакторов, Диссертация, М., 1966.
10. Liang-Tseng fan, *The Continuous Maximum Principle*, New York, John Wiley, 1966.
11. L. S. Lasdon, *Optimization Theory for Large Systems*, The Macmillan Company.
12. P. T. Shannon, *Chem. Eng. Edic.*, March, 1963.
13. G. Gruhn, L. Dietrich, H. Reiner *Chem. Techn.*, 23, Heft 1, 1971.
14. Е. Н. Пасхин, «Аналитическое дифференцирование функций на ЭВМ», В сб. Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, 9, 1967.

Научно-исследовательский
физико-химический институт
им. Л. Я. Карпова

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

METHODS OF OPTIMIZATION IN CHEMICAL SCIENCE AND ENGINEERING

G. M. Ostrovski

The article studies the basic problems of optimization problems in chemical engineering: methods for the computation of complex schemes statistic modes, method for the determination of derivatives of varying variables optimization criterion for arbitrary structure schemes that is based on the concept of "the adjoint process", techniques of the limit accounting in problems of optimization, and problems of optimization problems programming automation.

УДК 518 . 517.944/947

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

A. P. Мальцев

Устанавливается сходимость метода прямых для квазилинейного уравнения параболического типа при краевых условиях первого рода, исследуется вопрос о возможности получения периодического по t решения путем решения соответствующей задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получены априорные оценки разностных решений.

Рассмотрим задачу

$$\Phi(x, t, u, u_x) u_{xx} + F(x, t, u, u_x) - u_t = 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \psi^0(t), \quad u(1, t) = \psi^1(t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3)$$

в предположении, что выполняются условия*:

а) $\Phi(x, t, u, p), F(x, t, u, p)$ — непрерывные достаточно гладкие в области $G = \{(x, t, u, p) \in \bar{\Pi} \times E_2\}$ функции;

б) при $(x, t, u, p) \in G \quad \Phi \geqslant \alpha > 0$;

в) при любых $(x, t) \in \bar{\Pi}, |u| < \infty, |p| \leqslant K_0, F_u(x, t, u, p) \leqslant -\sigma < 0$ [или ψ^*] при любых $(x, t) \in \Pi, |u| < \infty, F_u(x, t, u, 0) \leqslant \sigma$];

г) при любых $(x, t) \in \bar{\Pi}, |u| \leqslant M_0$ и произвольных p

$$|F(x, t, u, p)| \leqslant \rho \Phi(x, t, u, p) p^2 + H;$$

д) при $t \in J \quad \psi^j(t) \equiv 0; F(j, 0, 0, 0) = 0 \quad (j = 0, 1)$,
где $K_0, M_0, \sigma > 0, \rho > 0, H$ — некоторые постоянные.

Пусть $0 < \tau < \infty$ — произвольное число. Для приближенного отыскания в прямоугольнике $\bar{\Pi}_{0, \tau}$ решения задачи (1), (2), (3)** заменим ее системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(t) = 0, \\ \dots \dots \dots, \\ \Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x} u_i) D_{\Delta x}^2 u_i + F_i(t, u_i, D_{\Delta x} u_i) - \frac{du_i}{dt} = 0, \\ \dots \dots \dots, \\ u_n(t) = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$u(0) = 0, \quad (5)$$

где n — произвольное натуральное число, $\Delta x = n^{-1}$,

* Ниже мы пользуемся терминологией и обозначениями заметки [1].

** Ради упрощения изложения ниже всюду предполагается, что $\varphi(x) \equiv 0$.

$$u_i(t) = u(x_i, t), \quad x_i = i \Delta x, \quad \Phi_i(t, u, p) = \Phi(x_i, t, u, p),$$

$$F_i(t, u, p) = F(x_i, t, u, p), \quad D_{\Delta x} u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta x},$$

$$D_{\Delta x}^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия а), б), в*) и г), где $0 < \rho \leq 2(M_0 + 1)^{-1}$,

$$M_0 = \frac{1}{\lambda - \sigma} \max_{\bar{\Pi}_{0, \tau}} |F(x, t, 0, 0)| e^{\lambda \tau} \equiv M_0(\tau)$$

($\lambda > \sigma$ — произвольная постоянная). Тогда существует такое $h > 0$, что при любом $0 < \Delta x \leq h$ задача (4), (5) на $[0, \tau]$ имеет решение $u_{\Delta x}(t) \in C_1[0, \tau]$ и

$$\|u_{\Delta x}\|_{C_0[0, \tau]} \leq M_0(\tau).$$

Доказательство. В силу условия г) при любом достаточно большом $|p|$

$$|b| = \left| \int_0^1 F_p(x, t, u, \theta p) d\theta \right| \leq \rho \Phi(x, t, u, p) (|p| + 1). \quad (6)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу (5),

$$u_0(t) = 0,$$

• • • • • ,

$$\begin{aligned} & \frac{2\Phi_i(t, v_i, D_{\Delta x} v_i) + \Delta x b_i(t, v_i, D_{\Delta x} v_i)}{2\Delta x^2} \times \\ & \times u_{i+1} + \frac{2\Phi_i(t, v_i, D_{\Delta x} v_i) - \Delta x b_i(t, v_i, D_{\Delta x} v_i)}{2\Delta x^2} u_{i-1} + \\ & + \left[c_i(t, v_i) - \frac{2\Phi_i(t, v_i, D_{\Delta x} v_i)}{\Delta x^2} \right] u_i - \frac{du_i}{dt} = -F_i(t, 0, 0), \end{aligned} \quad (7)$$

• • • • • ,

$$u_n(t) = 0,$$

где

$$\mathbf{v} \in S \subset C_1[0, \tau], \quad S = \{\mathbf{v}(t) : \mathbf{v}(0) = 0, \quad v_0(t) = v_n(t) = 0,$$

$$\|\mathbf{v}\|_{C_0[0, \tau]} \leq M_0(\tau), \quad \|\mathbf{v}\|_{C_1[0, \tau]} \leq M(\Delta x),$$

$M(\Delta x)$ выбирается так же, как это сделано в [2], и $b_i = \int_0^1 F_{ip}(t, v_i, \theta D_{\Delta x} v_i) d\theta$.

Положим в (7) $u_i = w_i e^{\lambda t}$, $i = \overline{0, n}$. Тогда для системы, к которой удовлетворяет вектор-функция \mathbf{w} (так как $\varphi \geq \alpha > 0$, $0 < \rho \leq 2(M_0 + 1)^{-1}$), будут справедливы рассуждения, аналогичные приводимым при доказательстве лемм 3, 4 и теоремы 2 заметки [2]. Откуда и следует утверждение теоремы.

Аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть функции $\Phi(x, t, u, p)$, $F(x, t, u, p)$ —периодические по t с периодом T ($0 < T < \infty$) и пусть выполнены условия а)–г), где в последнем условии $0 < \rho \leq 2(M_0 + 1)^{-1}$ и $M_0 = \frac{1}{\sigma} \max_{\overline{\Pi}_0 T} |F(x, t, 0, 0)|$. Тогда существует такое $h_0 > 0$, что при любом $0 < \Delta x \leq h_0$ система (4) имеет по крайней мере одно периодическое решение $\overset{o}{u}_{\Delta x}(t) \in C_1(J)$ с периодом T и

$$\|\overset{o}{u}_{\Delta x}\|_{C_0[0, T]} \leq M_0.$$

Теорема 3. Пусть $\overset{o}{u}_{\Delta x} = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ решение задачи (4), (5) на $[0, \tau]$, $\|\overset{o}{u}_{\Delta x}\|_{C_0[0, \tau]} \leq M_0(\tau)$ и пусть выполнены условия а), б), в*), г), д). Тогда существует такое $m > 1$, что при

$$0 < \rho \leq \min \left\{ \frac{2}{M_0+1}, \frac{1}{2M_0m} \right\} \quad (8)$$

для всех $0 < \Delta x \leq h$

$$\|D_{\Delta x} \overset{o}{u}_{\Delta x}\|_{C_0[0, \tau]} \leq K(\alpha, H, m). \quad (9)$$

Доказательство. Следуя работе [3], рассмотрим разность

$$\omega(t, i, j) = u_i(t) - u_j(t) \quad (i \geq j, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n}),$$

которая будет удовлетворять системе уравнений

$$\omega(0, i, j) = 0 \quad (i, j = \overline{0, n}), \quad \omega(t, i, i) = 0 \quad (i = \overline{0, n}), \quad \omega(t, n, 0) = 0,$$

$$\Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, 0)) D_{\Delta x i}^2 \omega(t, i, 0) +$$

$$+ F_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, 0)) - \frac{d \omega(t, i, 0)}{dt} = 0 \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\Phi_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, n, j)) D_{\Delta x j}^2 \omega(t, n, j) -$$

$$- F_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, n, j)) - \frac{d \omega(t, n, j)}{dt} = 0 \quad (j = \overline{1, n-1}),$$

$$\Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, j)) D_{\Delta x i}^2 \omega(t, i, j) +$$

$$+ \Phi_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, i, j)) D_{\Delta x j}^2 \omega(t, i, j) +$$

$$+ F_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, j)) - F_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, i, j)) -$$

$$- \frac{d \omega(t, i, j)}{dt} = 0 \quad (i > j, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad j = \overline{1, n-2}),$$

где

$$D_{\Delta x i} \omega(t, i, j) = \frac{\omega(t, i+1, j) - \omega(t, i-1, j)}{2\Delta x} \quad \text{и}$$

$$D_{\Delta x i}^2 \omega(t, i, j) = \frac{\omega(t, i+1, j) - 2\omega(t, i, j) + \omega(t, i-1, j)}{\Delta x^2}.$$

Положим $\omega(t, i, j) = 2M_0 m f(z(t, i, j))$, где $f(z) = \ln \ln(e+z)$ и $m \geq 1$ — некоторая постоянная. Тогда будем иметь

$$z(0, i, j) = 0 \quad (i, j = \overline{0, n}), \quad z(t, i, i) = 0 \quad (i = \overline{0, n}), \quad z(t, n, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, 0)) \frac{[f_{i+10}, f_{i0}] + [f_{i0}, f_{i-10}]}{2} \times \\
& \times D_{\Delta x i}^2 z(t, i, 0) + 2 \Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, 0)) [f_{i+10}, f_{i0}, f_{i-10}] \times \\
& \times (D_{\Delta x i} z(t, i, 0))^2 + \frac{F_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, 0))}{2M_0 m} - f'_{i0} \frac{dz(t, i, 0)}{dt} = 0, \\
& \Phi_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, n, j)) \frac{[f_{nj+1}, f_{nj}] + [f_{nj}, f_{nj-1}]}{2} D_{\Delta x j}^2 z(t, n, j) + \\
& + 2 \Phi_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, n, j)) [f_{nj+1}, f_{nj}, f_{nj-1}] (D_{\Delta x j} z(t, n, j))^2 - \\
& - \frac{F_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, n, j))}{2M_0 m} - f'_{nj} \frac{dz(t, n, j)}{dt} = 0, \\
& \Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, j)) \frac{[f_{i+1j}, f_{ij}] + [f_{ij}, f_{i-1j}]}{2} D_{\Delta x i}^2 z(t, i, j) + \\
& + \Phi_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, i, j)) \frac{[f_{ij+1}, f_{ij}] + [f_{ij}, f_{ij-1}]}{2} D_{\Delta x j}^2 z(t, i, j) + \\
& + 2 \Phi_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, j)) [f_{i+1j}, f_{ij}, f_{i-1j}] (D_{\Delta x i} z(t, i, j))^2 + \\
& + 2 \Phi_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, i, j)) [f_{ij+1}, f_{ij}, f_{ij-1}] (D_{\Delta x j} z(t, i, j))^2 + \\
& + \frac{F_i(t, u_i, D_{\Delta x i} \omega(t, i, j)) - F_j(t, u_j, -D_{\Delta x j} \omega(t, i, j))}{2M_0 m} - f'_{ij} \frac{dz(t, i, j)}{dt} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f'_{ij} &= \frac{df(z(t, i, j))}{dz}, \quad [f_{i+1j}, f_{ij}] = \frac{f(z(t, i+1, j)) - f(z(t, i, j))}{z(t, i+1, j) - z(t, i, j)}, \\
[f_{i+1j}, f_{ij}, f_{i-1j}] &= \frac{[f_{i+1j}, f_{ij}] - [f_{ij}, f_{i-1j}]}{z(t, i+1, j) - z(t, i-1, j)}.
\end{aligned}$$

Так как $|f_{ij}| \leq 1/m$, $\exp[\exp(-1/m)] - \exp 1 \leq z(t, i, j) \leq \exp[\exp(1/m)] - \exp 1$, то $-2[f_{i+1j}, f_{ij}, f_{i-1j}] - [f_{i+1j}, f_{ij-1}]^2 \geq \exp[-(2 \exp(1/m) + 1/m)] - \delta(m) \sinh \exp(1/m)$,

где $\delta(m)$ — положительная невозрастающая функция, определенная при $m \geq 1$.

Следовательно, выбрав m настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned}
-2[f_{i+1j}, f_{ij}, f_{i-1j}] &\geq [f_{i+1j}, f_{ij-1}]^2, \\
-2[f_{ij+1}, f_{ij}, f_{ij-1}] &\geq [f_{ij+1}, f_{ij-1}]^2,
\end{aligned}$$

в силу условия г), (8) и $f' > 0$ будем иметь

$$z(0, i, j) = 0 \quad (i, j = \overline{0, n}), \quad z(t, i, t) = 0 \quad (i = \overline{0, n}), \quad z(t, n, 0) = 0,$$

$$L_{i0} z(t, i, 0) = \tilde{\Phi}_{i0} D_{\Delta x i}^2 z(t, i, 0) - \frac{dz(t, i, 0)}{dt} \geq C_1,$$

$$\mathbb{L}_{nj} z(t, n, j) \equiv \tilde{\Phi}_{nj} D_{\Delta x_j}^2 z(t, n, j) - \frac{dz(t, n, j)}{dt} \geq C_1,$$

$$\mathbb{L}_{ij} z(t, i, j) \equiv \tilde{\Phi}_{ij} D_{\Delta x_i}^2 z(t, i, j) + \tilde{\Phi}_{ij} D_{\Delta x_j}^2 z(t, i, j) - \frac{dz(t, i, j)}{dt} \geq 2C_1,$$

где

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \Phi_{ij} \frac{[f_{i+1j}, f_{ij}] + [f_{ij}, f_{i-1j}]}{2f'_{ij}} \geq \alpha\gamma > 0,$$

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \Phi_{ij} \frac{[f_{ij+1}, f_{ij}] + [f_{ij}, f_{ij-1}]}{2f'_{ij}} \geq \alpha\gamma > 0,$$

$$\gamma = \min \left\{ \frac{[f_{i+1j}, f_{ij}] + [f_{ij}, f_{i-1j}]}{2f'_{ij}}, \frac{[f_{ij+1}, f_{ij}] + [f_{ij}, f_{ij-1}]}{2f'_{ij}} \right\},$$

$$C_1 = (2M_0 m)^{-1} \beta, \quad \beta = \min \left\{ -\frac{H}{f'_{ij}} \right\}.$$

Рассмотрим, наконец, функцию

$$w(t, i, j) = z(t, i, j) + C \exp[(j-i)\Delta x].$$

Полагая $C = \frac{2|C_1|e}{\alpha\gamma}$, получим, что w удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{aligned} w(0, i, j) &= C \exp(j-i)\Delta x \leq C, \quad w(t, i, i) = C, \\ w(t, n, 0) &= Ce^{-1}, \quad L_{i0} w(t, i, 0) > 0, \\ L_{nj} w(t, n, j) &> 0, \quad L_{ij} w(t, i, j) > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Из системы (10) следует, что

$$\max_{i, j = 0, n} \max_{0 \leq t \leq \tau} w(t, i, j) = C.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_i(t) - u_j(t) &= 2M_0 m \ln \ln (\exp 1 + z(t, i, j)) \leq 2M_0 m \exp(-1) z(t, i, j) \leq \\ &\leq \frac{2M_0 m C}{\exp 1} \{1 - \exp[(j-i)\Delta x]\} \leq \frac{2|\beta|}{\alpha\gamma} (i-j) \Delta x. \end{aligned} \tag{11}$$

Пользуясь симметрией переменных i и j , аналогично устанавливаем, что

$$u_i(t) - u_j(t) \geq -\frac{2|\beta|}{\alpha\gamma} (i-j) \Delta x. \tag{12}$$

Полагая $K(\alpha, H, m) = \frac{2|\beta|}{\alpha\gamma}$, из (11) и (12) получим (9).

Аналогично доказывается

Теорема 4. Пусть $\overset{o}{u}_{\Delta x}(t)$ — периодическое решение системы (4), $\| \overset{o}{u}_{\Delta x} \|_{C_0[0, T]} \leq M_0$, и пусть выполнены условия а) — д). Тогда существует такое $m > 1$, что при

$$0 < \rho \leq \min \left\{ \frac{2}{M_0 + 1}, \frac{1}{2M_0 m} \right\} \text{ для всех } 0 < \Delta x \leq h_0$$

$$\| D_{\Delta x} \overset{\circ}{u}_{\Delta x} \|_{C_0[0, T]} \leq K_0(a, H, m).$$

Пусть $u_{\Delta x}(t)$ — решение задачи (4), (5) и $\overset{\circ}{u}_{\Delta x}(t)$ — периодическое решение системы (4). Доопределим их линейно при $i \Delta x \leq x \leq (i+1) \Delta x$ и обозначим полученные функции соответственно $u_{\Delta x}(x, t)$ и $\overset{\circ}{u}_{\Delta x}(x, t)$. Опираясь на полученные результаты и результаты заметки [2], нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $u(x, t) \in C_{4,1}(\bar{\Pi}_0)^*$ — решение задачи (1) — (3). Тогда

$$\| u_{\Delta x}(x, t) - u(x, t) \|_{C_0[0, 1]} = O(\Delta x^2),$$

где $O(\Delta x^2)$ зависит от τ .

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2, $\Phi = \Phi(x, t, p)$ и $\overset{\circ}{u}(x, t) \in C_{4,1}(\bar{\Pi})^{**}$ — периодическое по t решение задачи (1), (2). Тогда

$$\| \overset{\circ}{u}_{\Delta x}(x, t) - \overset{\circ}{u}(x, t) \|_{C_0[0, 1]} = O(\Delta x^2),$$

где $O(\Delta x^2)$ не зависит от t .

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\Phi = \Phi(x, t, p)$. Тогда при любых $t > 0$ и $0 < \Delta x \leq \min\{h, h_0\}$

$$\| u_{\Delta x}(t) - \overset{\circ}{u}_{\Delta x}(t) \| \leq \| u_{\Delta x}(0) - \overset{\circ}{u}_{\Delta x}(0) \| \exp(-\alpha t),$$

Автор признателен Б. М. Будаку за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 3, 332 (1972).
2. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 11, 1657 (1969).
3. С. Н. Кружков, Тр. Моск. матем. об-ва, 16, 329 (1967).
4. С. Н. Кружков, Дифференц. уравнения, 6, № 4, 731 (1970).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 ноября 1970 г.

ON STRAIGHT LINES METHOD CONVERGENCE FOR SOME PARABOLIC TYPE PROBLEMS

A. P. Maltzev

The convergence of the straight lines method is stated for a parabolic type quasi-linear equation with boundary conditions of the first kind, the possibility is studied of obtaining a solution periodic along t by way of the solution of the corresponding Cauchy problem for an ordinary differential system, *a priori* estimates for difference ratios are obtained.

* Доказательство существования решений $u(x, t)$ и $\overset{\circ}{u}(x, t) \in C_{4,1}$ приводится в работах [3] и [4].

** См. сноску *

УДК 517.9 + 621.396.6.078.6

О НЕАВТОНОМНОЙ ФАЗОВОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ И ГРУБЫЕ ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Л. Н. Белюстина, В. Н. Белых

Рассматривается неавтономная система дифференциальных уравнений, описывающая динамику системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром под действием гармонической помехи с частотой, близкой к эталонной. Доказываются теоремы о существовании и взаиморасположении интегральных многообразий квазистационарной системы 2-го порядка. С помощью полученных утверждений выделяются области параметров, соответствующие различным структурам разбиения фазового пространства рассматриваемой системы. Доказывается существование грубых гомоклинических кривых и инвариантных торов.

1. Задача о воздействии аддитивной гармонической помехи на систему фазовой автоподстройки частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром приводит к исследованию неавтономной системы уравнений вида [1]

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \gamma - F(\varphi) - [\lambda + aF'_\varphi(\varphi)]y + \mu h(\varphi, y, t), \quad (1)$$

$$F(\varphi) = \sin \varphi, \quad h(\varphi, y, t) = \sin \left(\varphi + \frac{\beta}{\lambda} t \right) + a \left(y + \frac{\beta}{\lambda} \right) \cos \left(\varphi + \frac{\beta}{\lambda} t \right),$$

где γ , λ , a , μ и β — положительные параметры системы*.

В настоящей работе рассматривается случай системы (1), когда $\beta/\lambda = \varepsilon$ является малым параметром, $0 < \varepsilon \ll 1$, [4] (частоты эталонного сигнала и помехи близки). При этом система (1) является частным случаем «квазистационарной» системы вида

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{\psi} = \varepsilon, \quad \dot{y} = Q(\varphi, \psi, y, \varepsilon), \quad (A_\varepsilon)$$

где функция Q удовлетворяет условиям

$$Q \in C^2, \quad Q(\varphi + 2\pi, \psi, y, \varepsilon) = Q(\varphi, \psi + 2\pi, y, \varepsilon) = Q(\varphi, \psi, y, \varepsilon). \quad (2)$$

Траектории системы (A_ε) , заданной в цилиндрическом фазовом пространстве $G = C \times \psi \pmod{2\pi}$, где $C = \varphi \pmod{2\pi} \times y$ — двумерный цилиндр, при $\varepsilon \neq 0$ порождают точечное отображение Т цилиндра в себя. При $\varepsilon = 0$ система (A_ε) вырождается в двумерную автономную систему с параметром ψ , принимающим все значения из интервала $[0, 2\pi]$, вида

$$\varphi = y, \quad \dot{y} = Q(\varphi, \psi, y, 0) \quad (\psi — \text{параметр}). \quad (A_0)$$

Движение по траекториям системы (A_0) в пространстве G происходит по цилиндрам $\psi = \text{const} \in [0, 2\pi]$.

* Система (1) в случае малых возмущений ($\mu \ll 1$) рассматривалась в работе [2], а в случае произвольных $F(\varphi)$ и конечных $\mu \in (0, \mu^*)$ — в [3].

Приводимые ниже теоремы 1—3 позволяют при некоторых условиях установить структуры разбиения фазового пространства на траектории системы (A_ϵ) с помощью изучения «вырожденных» поверхностей, образованных особыми траекториями системы (A_0) . В работе эти теоремы используются при исследовании системы (1).

Теорема 1. Пусть система (A_0) при $\forall \psi \in [0, 2\pi)$ имеет простое состояние равновесия \tilde{O} , образующее в пространстве G замкнутую кривую \tilde{L}_0 . Тогда при достаточно малых ϵ система (A_ϵ) в окрестности \tilde{L}_0 имеет единственное периодическое решение \tilde{L}_ϵ с периодом $\tau = 2\pi/\epsilon$, характер устойчивости которого определяется корнями характеристического уравнения состояния равновесия \tilde{O} .

Теорема 2. Пусть система (A_0) при $\forall \psi \in [0, 2\pi)$ имеет грубый предельный цикл с характеристическим показателем $h_s(\psi) \neq 0$, охватывающий либо состояние равновесия, либо цилиндр C , образующий в G тороидальную поверхность W_0 . Тогда при достаточно малых ϵ система (A_ϵ) в окрестности W_0 имеет интегральную тороидальную поверхность W_ϵ , устойчивую (неустойчивую), если $h_s(\psi) < 0$ ($h_s(\psi) > 0$).

Теорема 3. Пусть система (A_0) при $\forall \psi \in [0, 2\pi)$ имеет состояние равновесия O типа седло, образующее в G замкнутую кривую L_0 . Пусть α -сепаратриса седла O при $\forall \psi \in [0, 2\pi)$ пересекает прямую $\varphi = \varphi_0$ (или ось $y = 0$) в точке с координатой $y = z^\alpha(\psi)$ ($\varphi = \tilde{z}^\alpha(\psi)$), а ω -сепаратриса — прямую $\varphi = \varphi_0 \pm 2\pi$ (или ось $y = 0$) в точке с координатой $y = z^\omega(\psi)$ ($\varphi = \tilde{z}^\omega(\psi)$).

1) Если функция $r(\psi) = z^\alpha(\psi) - z^\omega(\psi)$ (или $\tilde{r}(\psi) = \tilde{z}^\alpha(\psi) - \tilde{z}^\omega(\psi)$) ни при одном $\psi \in [0, 2\pi)$ не обращается в нуль, то при достаточно малых ϵ сепаратрисные интегральные поверхности S_ϵ^α и S_ϵ^ω , проходящие через седловое периодическое решение L_ϵ системы (A_ϵ) , проходят в окрестности вырожденных поверхностей S_0^α и S_0^ω , образованных α - и ω -сепаратрисами системы (A_0) , $\forall \psi \in [0, 2\pi)$, и имеют такое же, как S_0^α и S_0^ω , взаимное расположение.

2) Если функция $r(\psi)$ ($\tilde{r}(\psi)$) при некотором $\psi = \psi^*$ имеет простой нуль, соответствующий петле сепаратрисы системы (A_0) , охватывающей (неохватывающей) цилиндр C , то при достаточно малых ϵ система (A_ϵ) имеет грубую гомоклиническую кривую Γ , охватывающую (соответственно неохватывающую) цилиндр C .

Доказательство теорем 1—3 дано в приложении.

Замечание к теореме 3. Если ψ^* является корнем функции $r(\psi)$, то в окрестности гомоклинической кривой Γ существует счетное множество седловых периодических решений [5, 6] вращательного типа, а если функции $r(\psi)$, то колебательного.

2. Для применения теорем 1—3 к системе (1) необходимо провести исследование вырожденной системы вида

$$\dot{\varphi} = y, \quad \psi \text{ — параметр}, \quad (3)$$

$$\dot{y} = \gamma - \sin \varphi - (\lambda + a \cos \varphi)y + \mu [\sin(\varphi + \psi) + ay \cos(\varphi + \psi)],$$

т. е. установить существование и расположение «вырожденных» поверхностей в пространстве G , образованных особыми траекториями системы (3).

Рассмотрим систему (3). При $\mu \neq 1$ с помощью замены

$$\varphi = x + x_0(\psi), \quad y = A(\psi)^{1/2} v, \quad \gamma = A(\psi) \tilde{\gamma},$$

$$\lambda = A(\psi)^{1/2} \tilde{\lambda}, \quad a = \tilde{a} A(\psi)^{-1/2}, \quad t = A(\psi)^{-1/2} \tilde{t}, \quad (4)$$

$$A(\psi) = \sqrt{1 - 2\mu \cos \psi + \mu^2}, \quad x_0(\psi) = \operatorname{arc tg} [\mu \sin \psi (1 - \mu \cos \psi)^{-1}],$$

система (3) преобразуется к виду

$$\frac{dx}{d\tilde{t}} = v, \quad \frac{dv}{d\tilde{t}} = \tilde{\gamma} - (\tilde{\lambda} + \tilde{a} \cos x)v - \sin x. \quad (5)$$

Система (5) совпадает с (1) при $\mu = 0$ и рассмотрена в работах [7-9]. Две бифуркационные поверхности, разбивающие вместе с плоскостью $\tilde{\gamma} = 1$ пространство параметров на области, соответствующие различным качественным структурам разбиения цилиндра x, v на траектории системы (5) с помощью численных методов в параметрах $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\Delta} = \tilde{\lambda}^{-2}$, $n = \tilde{\lambda} \tilde{a}$ подробно построены в работе [7]. Это поверхность $\tilde{\gamma} = \alpha_1(\tilde{\Delta}, n)$, соответствующая бифуркации петли сепаратрисы седла системы (5), охватывающей верхний полуцилиндр, и поверхность $\tilde{\gamma} = \alpha_2(\tilde{\Delta}, n)$, соответствующая бифуркации двойного предельного цикла, охватывающего верхний полуцилиндр. Разбиение плоскости $\tilde{\gamma}, \tilde{\Delta}$ при $n = \text{const} \in (0, 1)$, содержащее четыре области (1, 2, 3, 4) и качественные структуры разбиения цилиндра на траектории системы (5) с соответствующими этим областям обозначениями (1—а и т. д.) представлены на рис. 1.

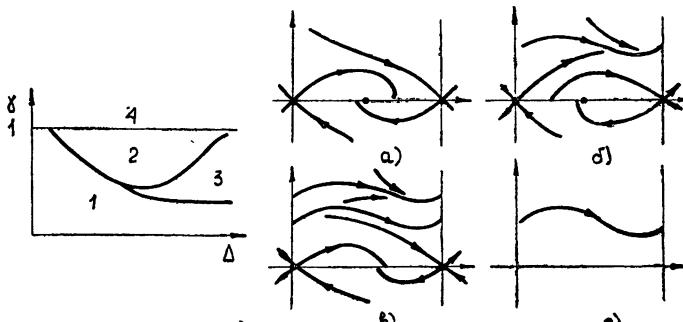


Рис. 1.

Имея в виду это разбиение, свойства функции $A(\psi)^*$, замену (4) и имеющийся в системе (5) поворот векторного поля с изменением $\tilde{\gamma}$, получаем что

1) система (3) при $\mu \neq 1$, $\forall p \in D_1: \gamma < |1 - \mu|$, (p — вектор с компонентами γ, Δ, n, μ) и $\forall \psi \in [0, 2\pi]$ имеет два состояния равновесия: устойчивое, образующее в G замкнутую кривую L_{10} ($\varphi = \varphi_1(\psi)$, $y = 0$), и седло, образующее кривую L_{20} ($\varphi = \varphi_2(\psi)$, $y = 0$), где

$$\varphi_1(\psi) = \operatorname{arc sin} \gamma \cdot A(\psi)^{-1} + x_0(\psi),$$

$$\varphi_2(\psi) = \pi - \operatorname{arc sin} \gamma \cdot A(\psi)^{-1} + x_0(\psi), \quad (6)$$

* Функция $A(\psi)$ на периоде имеет один максимум ($\max A(\psi) = 1 + \mu$) и один минимум ($\min A(\psi) = |1 - \mu|$).

$$\psi_{1,2}(\psi) = \varphi_{1,2}(\psi + 2\pi) \quad (\mu < 1); \quad \psi_{1,2}(\psi + 2\pi) = \varphi_{1,2}(\psi) - 2\pi \quad (\mu > 1).$$

2) система (3), при $\forall p \in D_2 : \gamma > 1 + \mu$, ни при одном ψ не имеет состояний равновесия;

3) при $\forall p \in d_1 : 0 \leq \gamma < |1 - \mu| \alpha_1(|1 - \mu| \Delta, n)$, функция $r_+(\psi, p)$ — разность координат точек пересечения α - и ω -сепаратрис системы (3) на верхнем полуцилиндре с прямой $\varphi = \varphi_1(\psi)$ (см. теорему 3) — всюду отрицательна;

4) при $\forall p \in d_1 : (1 + \mu) \alpha_1((1 + \mu) \Delta, n) > \gamma > |1 - \mu| \alpha_1(|1 - \mu| \Delta, n)$, $\gamma < |1 - \mu|$, функция $r_+(\psi, p)$ имеет два простых нуля;

5) при $\forall p \in d_2 : |1 - \mu| > \gamma > (1 + \mu) \alpha_1((1 + \mu) \Delta, n)$ функция $r_+(\psi, p)$ всюду положительна;

6) при $\forall p \in D_1$ и $\forall \psi \in [0, 2\pi]$ сепаратрисы седла системы (3) на нижнем полуцилиндре взаимно расположены так же, как указано на рис. 1 а, а соответствующая им функция $r_-(\psi, p)$ всюду положительна;

7) при $\forall p \in d_{11} : \gamma < |1 - \mu| \alpha_0(|1 - \mu| \Delta, n)$ и $\forall \psi \in [0, 2\pi]$ система (3) имеет структуру, изображенную на рис. 1 а ($\alpha_0(\tilde{\Delta}, n) = \alpha_1$ при $\tilde{\Delta} < \tilde{\Delta}_1$ и $\alpha_0(\tilde{\Delta}, n) = \alpha_2$ при $\tilde{\Delta} > \tilde{\Delta}_1$);

8) при $\forall p \in \tilde{d}_2 : \gamma > (1 + \mu) \alpha_1((1 + \mu) \Delta, n)$ система (3) имеет устойчивый цикл, образующий в G периодическую по φ и ψ поверхность W_0^ω ;

9) при $\forall p \in d_{12} : (1 + \mu) \alpha_2((1 + \mu) \Delta, n) < \gamma < |1 - \mu| \alpha_1(|1 - \mu| \Delta, n)$, система (3) имеет в G две поверхности W_0^ω и W_0^α , образованные устойчивым и неустойчивым циклами, периодическими по φ и ψ .

Области параметров в приведенных выше утверждениях качественно изображены в плоскости γ, Δ ($n, \mu = \text{const}$) на рис. 2.

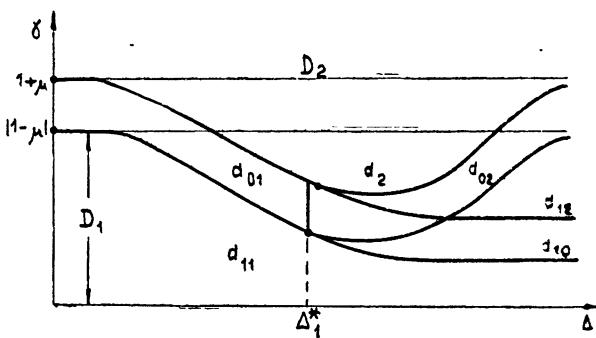


Рис. 2.

Таким образом, нами определены вырожденные поверхности, образованные особыми траекториями системы (3), для ряда областей параметров. Применяя к системе (1) теоремы 1—3, получаем следующее

Предложение 1. При достаточно малых $\varepsilon > 0$

1) система (1) при $p \in D_1$ имеет устойчивое периодическое решение $L_{1\varepsilon}$ с периодом $\tau = 2\pi/\varepsilon$, близкое к L_{10} , и седлообразное периодическое решение $L_{2\varepsilon}$ с периодом τ , близкое к L_{20} ; при $p \in D_2$ $L_{1\varepsilon}$ и $L_{2\varepsilon}$ не существуют;

2) система (1) при $p \in d_{12}$ имеет две тороидальные интегральные поверхности W_ε^ω и W_ε^α , близкие к W_0^ω и W_0^α ; при $p \in \tilde{d}_2$ имеет одну поверхность W_ε^ω ; при $p \in d_{11}$ интегральные поверхности W_ε^ω и W_ε^α отсутствуют;

3) при $p \in d_1$ α -сепаратрисные интегральные поверхности $(S_\varepsilon^\alpha$ и $\bar{S}_\varepsilon^\alpha$)

седлового периодического решения L_{2e} системы (1) стремится к L_{1e} , а ω -сепаратрисные (\bar{S}_e^ω и S_e^ω) — уходят в бесконечность в областях $y > 0$ и $y < 0$; при $p \in d_2$ поверхность S_e^ω стремится к тору W_e^ω , \bar{S}_e^ω к L_{1e} , поверхность S_e^ω , огибая L_{1e} , вместе с поверхностью \bar{S}_e^ω уходит в бесконечность в области $y < 0$; при $p \in d_0$ S_e^ω и S_e^ω пересекаются по двум грубым гомоклиническим кривым, \bar{S}_e^ω стремится к L_{1e} , а \bar{S}_e^ω уходит в бесконечность в области $y < 0$.

Структуры точечного отображения T^* цилиндра C в себя, порождаемого траекториями системы (1) при малых $\varepsilon > 0$, изображены на рис. 3 так, что рис. 3 а соответствует области d_{11} , рис. 3 б — d_2 , рис. 3 в — $d_{01} = d_0 \cap \{\Delta < \Delta_1^*\}$, рис. 3 г — $d_{02} = d_0 \cap \tilde{d}_2$, рис. 3 д — d_{12} , и рис. 3 е — D_2 . Неподвижные точки, изображенные на этих рисунках, порождаются периодическими решениями L_{1e} и L_{2e} в силу (6) колебательного типа при $\mu < 1$ и вращательного типа при $\mu > 1$.

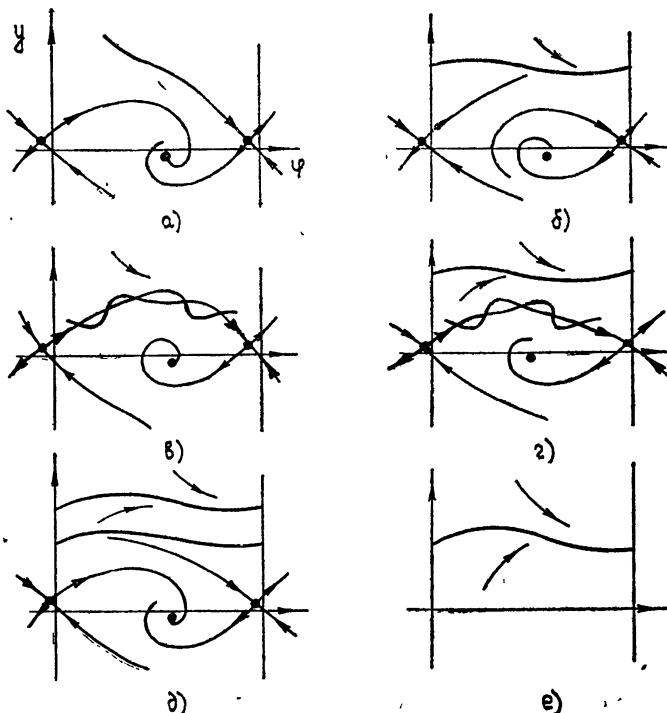


Рис. 3.

3. Установим бифуркации, происходящие в системе (1) при непрерывном изменении вектора p от юдных областей, изображенных на рис. 2, к другим.

1. При переходе с изменением p из области параметров D_1 в область параметров D_2 ($D_1 \rightarrow D_2$) на некотором множестве $\gamma = \gamma_1 \subset D_1 \cup D_2$ происходит исчезновение периодических решений L_{1e} и L_{2e} , так как в силу предложения 1 они существуют при $\forall p \in D_1$ и отсутствуют при $\forall p \in D_2$. Аналогично, основываясь на факте «существования» при од-

* Неподвижные точки отображения T представляют собой сечение $t = \text{const}$ периодических решений, а сепаратрисные и замкнутые инвариантные кривые — сечения сепаратрисных и замкнутых интегральных поверхностей системы (1).

ных параметрах и «несуществования» при других в силу предложения 1 получаем:

2. При переходе $d_{11} \rightarrow d_{01}$ происходит рождение грубых гомоклинических кривых, а при переходе $d_{01} \rightarrow d_2$ исчезновение грубых гомоклинических кривых и рождение тора W_ϵ^ω *.

3. При переходе $d_{12} \rightarrow d_{02}$ происходит исчезновение неустойчивого тора W_ϵ^α с сохранением тора W_ϵ^ω и рождение грубых гомоклинических кривых, а при переходе $d_{02} \rightarrow d_2$ — исчезновение грубых гомоклинических кривых.

4. При переходе $d_{01} \rightarrow d_{02}$ на некотором множестве $\gamma_2 \in d_0$ происходит рождение устойчивого тора W_ϵ^ω при сохранении гомоклинических кривых.

5. При переходе $d_{11} \rightarrow d_{12}$ на некотором множестве $\gamma = \bar{\gamma}_3 \in d_{10}$ происходит рождение двух торов разной устойчивости W_ϵ^α и W_ϵ^ω .

Следует отметить, что локальный характер бифуркаций на множествах γ_1 и γ_3 известен [11, 12], а рождение (исчезновение) гомоклинических кривых, очевидно, связано с касанием сепаратрисных поверхностей S_ϵ^α и S_ϵ^ω .

4. Физическая интерпретация полученных относительно системы (1) результатов состоит в следующем. Периодическое решение $L_{1\epsilon}$ при $\mu < 1$ (колебательное) соответствует режиму подстройки под эталон, а при $\mu > 1$ (вращательное) — под помеху. Поэтому область d_{11} при $\mu < 1$ ($\mu > 1$) соответствует режиму захвата генератора эталоном (помехой). Области d_{12} , d_2 , d_{02} соответствуют режиму «эталон—биения» при $\mu < 1$ и «помеха—биения» при $\mu > 1$. Область D_2 при $\forall \mu > 0$ есть область биений.

При $p \in d_{01}$ почти все траектории системы (1) из области $y > 0$ «просачиваются» в окрестность периодического решения $L_{1\epsilon}$ за время, которое можно считать зависящим от начальных условий случайно. Поэтому область d_{01} есть область «квазизахвата», т. е. захвата за неопределенный промежуток времени.

Таким образом, в отличие от автомной системы ($\mu = 0$), где переход от «захвата» к «незахвату» происходит скачком, здесь возможен непрерывный переход от гарантированного «захвата» (d_{11}) к гарантированному «незахвату» (d_2) через область квазизахвата (d_{01}).

Все приведенные выше области параметров при использовании [7] могут быть определены численно. Например, область d_0 , соответствующая существованию гомоклинической кривой, при $n = 0,03$ и $\Delta = 10$ принимает вид

$$d_0 : (1 + \mu) \alpha_1 ((1 + \mu) \cdot 10; 0,03) > \gamma > |1 - \mu| \alpha_1 (|1 - \mu| \cdot 10; 0,03).$$

При $\mu = 0,1$ в силу [7] $\alpha_1 (11; 0,03) = 0,42$ и $\alpha_1 (9; 0,03) = 0,46$, а при $\mu = 0,5$ — $\alpha_1 (15; 0,03) = 0,37$ и $\alpha_1 (5; 0,03) = 0,57$. Тогда область d_0 при $\mu = 0,1$ записывается в виде неравенства $0,462 > \gamma > 0,414$, а при $\mu = 0,5$ — $0,555 > \gamma > 0,285$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Система (A_ϵ) в окрестности кривой \tilde{L}_0 записывается в виде

$$\dot{\phi} = \epsilon, \quad \dot{u} = a(\phi)u + f(u, \phi, \epsilon),$$

* Эти переходы можно рассматривать как примеры перехода от системы с простым скелетом [10] к системе с бесконечным числом периодических решений.

где u и f — двумерные векторы, $a(\psi)$ — двумерная матрица, собственные значения $k_1(\psi)$ и $k_2(\psi)$ которой есть характеристические числа состояния равновесия \tilde{O} . Тогда согласно [13] (стр. 330) в окрестности \tilde{L}_0 существует близкое к \tilde{L}_0 , единственное при всех $-\infty < \psi < \infty$, решение \tilde{L}_ϵ системы (A_ϵ) , характер устойчивости которого определяется числами $k_1(\psi)$ и $k_2(\psi)$. В силу периодичности \tilde{L}_0 по ψ с периодом 2π и единственности \tilde{L}_ϵ решение \tilde{L}_ϵ периодично по ψ с периодом 2π и по t с периодом $\tau = 2\pi/\epsilon$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\varphi = \zeta(t, \psi)$ и $y = \eta(t, \psi)$ — уравнения предельного цикла периода $\tau_s(\psi)$ с характеристическим показателем $h_s(\psi)$, отличным от нуля. С помощью замены

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \bar{\psi}, \quad \varphi = \zeta(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) - v \eta'_{\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), \\ y &= \eta(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) + v \zeta'_{\bar{\varphi}}(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), \quad \left(\bar{\varphi} = \frac{2\pi}{\tau_s(\psi)} t + \bar{\varphi}_0 \right) \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

система (A_ϵ) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varphi}} &= 1 + g_1(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, v, \epsilon), \\ \dot{\bar{\psi}} &= \epsilon \frac{\tau_s(\psi)}{2\pi}, \\ \dot{v} &= \gamma(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) v + g_2(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, v, \epsilon), \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где

$$g_1(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, 0, 0) = g_2(\bar{\varphi}, \bar{\psi}, 0, 0) = 0,$$

$$\gamma(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = \frac{\tau_s(\psi)}{2\pi} Q'_y(\zeta(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), \eta(\bar{\varphi}, \bar{\psi}), \psi, 0) - 2 \frac{\zeta'_{\bar{\varphi}} \zeta''_{\bar{\varphi}} + \eta'_{\bar{\varphi}} \eta''_{\bar{\varphi}}}{(\zeta'_{\bar{\varphi}})^2 + (\eta'_{\bar{\varphi}})^2}.$$

Тогда согласно [13] (стр. 325) от поверхности W_0 рождается устойчивая (неустойчивая) тороидальная интегральная поверхность, если величина

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) d\bar{\varphi} = \frac{\tau_s(\psi)}{2\pi} h_s(\psi)$$

отрицательна (положительна). Поскольку период $\tau_s(\psi) > 0$, устойчивость интегрального тора системы (A_ϵ) определяется знаком характеристического показателя $h_s(\psi)$ циклов при $\psi \in [0, 2\pi]$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\varphi = \varphi_0(\psi)$, $y = 0$ — уравнения кривой L_0 , образованной седлом O системы (A_0) при $\forall \psi \in [0, 2\pi]$, т. е. $\varphi_0(\psi)$ есть корень уравнения $Q(\varphi, \psi, 0, 0) = 0$. Так как O — седло системы (A_0) , существует $b > 0$ такое, что выполняется условие

$$Q'_\varphi(\varphi, \psi, 0, 0) > 0 \quad \text{при } \forall \psi \in [0, 2\pi], \quad |\varphi_0(\psi) - \varphi| < b. \quad (\text{П.3})$$

Рассмотрим случай, когда при $\forall \psi \in [0, 2\pi]$ α -сепаратриса пересекает прямую $\varphi = \varphi_0$, а ω -сепаратриса — прямую $\varphi = \varphi_0 \pm 2\pi$ (т. е. одну и ту же прямую на цилиндре). Так как S_0^α и S_0^ω до пересечения прямых $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 \pm 2\pi$ не могут пересечь ось $y = 0$, достаточно рассмотреть случай, когда S_0^α и S_0^ω пересекают эти оси в области $y > 0$.

Пусть $y = Y_0^\alpha(\varphi, \psi)$ и $y = Y_0^\omega(\varphi, \psi)$ есть уравнения поверхностей S_0^α и S_0^ω . Так как эти функции определяют интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{d\varphi} = Q(\varphi, \psi, y, 0) y^{-1} \quad (\text{П.4})$$

(доопределенные в точках кривой L_0), функции $Y_0^{\alpha(\omega)}(\varphi, \psi)$ при $y \neq 0$ непрерывно дифференцируемы вместе со своими производными. Легко получить, что при $y = 0, \varphi = \varphi_0(\psi)$ (т. е. на L_0) эти функции также непрерывно дифференцируемы. При этом функция $r(\psi)$ записывается в виде

$$r(\psi) = Y_0^\alpha(\varphi_0, \psi) - Y_0^\omega(\varphi_0 - 2\pi, \psi).$$

По теореме 1 система (A_ε) в окрестности кривой L_0 имеет седло-вое периодическое решение L_ε (мультипликаторы положительны, один больше, а другой меньше единицы), являющееся пересечением двух интегральных поверхностей S_ε^α и S_ε^ω .

Покажем, что при $\varphi \in [\varphi_0 - 2\pi, \varphi_0]$ поверхности S_ε^α и S_ε^ω непрерывно зависят от ε . Для этого рассмотрим две системы с равнениями

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= y, & \dot{y} &= \eta + Q(\varphi, \psi, y, 0), & \psi &\text{ — параметр, } (A_+) \\ \dot{\varphi} &= y, & \dot{y} &= -\eta + Q(\varphi, \psi, y, 0), & \psi &\text{ — параметр, } (A_-) \end{aligned}$$

где параметр $\eta > 0$. Так как системы (A_+) и (A_-) при $\eta = 0$ совпадают с (A_0) , в силу (П.3) существует такое $\bar{\eta}(b) > 0$, что при $\eta \in (0, \bar{\eta})$ системы (A_+) и (A_-) имеют состояния равновесия типа седло O_+ : $\varphi = \varphi_+(\psi)$, $y = 0$ и O_- : $\varphi = \varphi_-(\psi)$, $y = 0$, такие, что

$$\varphi_0(\psi) - b < \varphi_+(\psi) < \varphi_0(\psi) < \varphi_-(\psi) < \varphi_0(\psi) + b, \quad \forall \psi \in [0, 2\pi]. \quad (\text{П.5})$$

Пусть $y = Y_+^{\alpha(\omega)}(\varphi, \psi, \eta)$ и $y = Y_-^{\alpha(\omega)}(\varphi, \psi, \eta)$ — уравнения поверхностей $S_+^{\alpha(\omega)}$ и $S_-^{\alpha(\omega)}$, образованных сепаратрисами седел систем (A_+) и (A_-) соответственно. Так как при $y > 0$ выполняются неравенства

$$\frac{\eta + Q}{y} > \frac{|Q|}{y} > \frac{-\eta + Q}{y},$$

а при $y < 0$ выполняются обратные неравенства, при учете (П.5) получаем неравенства

$$\begin{aligned} Y_+^\alpha(\varphi, \psi, \eta) &> Y_0^\alpha(\varphi, \psi) > Y_-^\alpha(\varphi, \psi, \eta), \\ Y_-^\omega(\varphi, \psi, \eta) &> Y_0^\omega(\varphi, \psi) > Y_+^\omega(\varphi, \psi, \eta), \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

имеющие место при $\forall \eta \in (0, \bar{\eta})$ и обращающиеся в равенства при $\eta = 0$.

Обозначим через $G^\alpha(G^\omega)$ периодическую по ψ область в пространстве G , ограниченную поверхностями S_+^α и S_-^α (S_+^ω и S_-^ω), а через G^0 — пересечение этих областей, $G^0 = G^\alpha \cap G^\omega$. В силу (П.6) имеем

$$\begin{aligned} S_0^\alpha &\subset G^\alpha, \quad S_0^\omega \subset G^\omega, \quad L_0 \subset G^0 \quad (\forall \eta \in (0, \bar{\eta})), \\ G^\alpha &\rightarrow S_0^\alpha, \quad G^\omega \rightarrow S_0^\omega, \quad G^0 \rightarrow L_0 \quad (\eta \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Из (П.7) и непрерывной зависимости периодического решения L_ε от ε следует, что при ε и η , удовлетворяющих неравенствам $\bar{\eta} > \eta > K_1\varepsilon > 0$, $L_\varepsilon \subset G^0$. Тогда в силу (П.7) для доказательства непрерывной зависимости S_ε^α и S_ε^ω от ε при $\varphi \in [\varphi_0 - 2\pi, \varphi_0]$ осталось показать, что при

$\bar{\eta} > \eta > K_2 \varepsilon > 0$, $S_\varepsilon^\alpha \subset G^\alpha$, $S_\varepsilon^\omega \subset G^\omega$ и поверхность $S_\varepsilon^\alpha (S_\varepsilon^\omega)$ пересекает цилиндр $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi = \varphi_0 - 2\pi$) в G . Докажем это.

Рассмотрим функции $R_{+(-)}^\alpha = y - Y_{+(-)}^\alpha$, обращающиеся в нуль на границах G^α . Производные этих функций в силу системы (A_ε) на поверхностях $S_{+(-)}^\alpha$ имеют вид

$$\frac{dR_{+(-)}^\alpha}{dt} = [Q(\varphi, \psi, y, \varepsilon) - Q(\varphi, \psi, y, 0)] \mp \eta - (Y_{+(-)}^\alpha)'_\psi \varepsilon$$

и в силу (2) и ограниченности $(Y_{+(-)}^\alpha)'_\psi *$ при $\bar{\eta} > \eta > K_2 \varepsilon > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left. \frac{dR_+^\alpha}{dt} \right|_{R_+^\alpha = 0} < 0, \quad \left. \frac{dR_-^\alpha}{dt} \right|_{R_-^\alpha = 0} > 0. \quad (\text{П.8})$$

Следовательно, траектории системы (A_ε) не могут выходить из G_ε через поверхности $S_{+(-)}^\alpha$. Отсюда получаем, что $S_\varepsilon^\alpha \subset G^\alpha$.

Аналогично доказывается, что траектории системы (A_ε) не могут входить в G^ω через $S_{+(-)}^\omega$ и, следовательно, $S_\varepsilon^\omega \subset G^\omega$. Так как при $y > 0$ для любого решения системы (A_ε) $\varphi_\varepsilon(t) \in S_\varepsilon^{\alpha(\omega)}$ имеет место неравенство $\dot{\varphi}_\varepsilon(t) > 0$, $S_\varepsilon^{\alpha(\omega)}$ пересекает цилиндр $\varphi = \varphi_0$ ($\varphi = \varphi_0 - 2\pi$) по кривой $y = z^{\alpha(\omega)}(\psi, \varepsilon)$. Таким образом, нами доказана непрерывная зависимость сепаратрисных поверхностей S_ε^α и S_ε^ω от параметра ε при $\forall \varphi \in [\varphi_0 - 2\pi, \varphi_0]$.

Пусть $r_\varepsilon(\psi, \varepsilon) = z^\alpha(\psi, \varepsilon) - z^\omega(\psi, \varepsilon)$. В силу непрерывной зависимости S_ε^α и S_ε^ω от ε имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon(\psi, \varepsilon) = r(\psi) \quad (\text{П.9})$$

равномерно по ψ .

Если $r(\psi) \neq 0$, то в силу (П.9) $r_\varepsilon(\psi, \varepsilon) \neq 0$ при $\forall \psi \in [0, 2\pi]$ при достаточно малых ε . Это означает, что поверхности S_ε^α и S_ε^ω , проходя в окрестности S_0^α и S_0^ω , имеют такое же, как S_0^α и S_0^ω , взаимное расположение.

Если при $\psi = \psi^*$ функция $r(\psi)$ имеет простой нуль

$$r(\psi^*) = 0, \quad r'_\psi(\psi^*) \neq 0, \quad (\text{П.10})$$

то в силу (П.9) по теореме о неявной функции получаем, что при достаточно малых ε в окрестности $\psi = \psi^*$ существует значение $\psi = \psi^{**}(\varepsilon)$, являющееся простым корнем уравнения $r_\varepsilon(\varepsilon, \psi) = 0$. Это означает, что при достаточно малых ε сепаратрисные поверхности S_ε^α и S_ε^ω имеют грубое пересечение, т. е. система (A_ε) имеет грубую гомоклиническую кривую, охватывающую цилиндр.

Доказательство теоремы для случая, когда S_0^α и S_0^ω пересекают ось $y = 0$, аналогично** проведенному.

* Производные $(Y_{+(-)}^\alpha)'_\psi$ непрерывны при $\forall \varphi \in [\varphi_0 - 2\pi, \varphi_0]$.

** При этом производные $(Y_{+(-)}^{\alpha(\omega)})'_\psi$ не являются равномерно непрерывными, так как при $y \rightarrow 0$ ($\varphi \neq \varphi_0(\psi)$) они могут стремиться к бесконечности. Считая в этом случае G^α и G^ω определенными до пересечения с цилиндрами в $G | y | = \delta$ и затем осуществляя предельный переход при $\delta \rightarrow 0$, получаем неравенства (П.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
2. Л. Н. Белюстина, Тр. V межд. конф. по нелинейным колебаниям, 2, Киев, 1970.
3. Л. Н. Белюстина, В. Н. Бelyх, Всесоюз. конференция по качественной теории дифф. уравнений, Тезисы докл., Свердловск, 1971.
4. Л. Н. Белюстина, В. Н. Бelyх, Всесоюз конференция по качественной теории дифф. уравнений, Рязань, 1971.
5. Л. П. Шильников, Мат. сб., 74 (116), № 3, 378 (1967)
6. Ю. И. Неймарк, У летняя математическая школа, изд. АН УССР, Киев, 1968
7. Л. Н. Белюстина, В. В. Быков, К. Г. Кивелева, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 4, 561 (1970).
8. Н. Н. Баутин, ПММ, 34, № 5, 850 (1970).
9. Л. Н. Белюстина, В. Н. Бelyх, Качественное исследование динамической системы второго порядка на цилиндре, Дифф. уравнения (в печати).
10. Ю. И. Неймарк, Тр. V межд. конф. по нелинейным колебаниям, 2, Киев, 1970.
11. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, (41), 2 (95), 5—6 (146), (1958).
12. А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 7, 967 (1971).
13. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3, 311, 321 (1967).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 июля 1971 г.

ON NONAUTONOMOUS PHASE SYSTEM OF EQUATIONS WITH SMALL
PARAMETER POSSESSING INVARIANT TORI AND CRUDE
HOMOCLINIC CURVES.

L. N. Beljustina, V. N. Belykh

A nonautonomous differential system is considered that describes the dynamics of a phase-lock system with a proportionally integratting filter under a harmonic interference of frequency close to the standard one. Existence and mutual arrangement theorems for integral manifolds of a second order quasi-stationary system are proved. Using the obtained statements parameter regions are singled out that correspond to various phase space decomposition structures of the system considered. The existence of crude homoclinic curves and invariant tori is proved.

УДК 531.391

ЯВЛЕНИЕ ЗАХВАТЫВАНИЯ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

B. A. Мельникова

Рассматривается поведение автоколебательной системы с двумя степенями свободы под действием внешней гармонической силы, частота которой близка к одной из собственных частот системы. Написаны укороченные уравнения при аппроксимации нелинейности кубическим полиномом и отсутствии синхронного взаимодействия. Построены амплитудно-частотные характеристики для различных областей плоскости параметров системы и выделены устойчивые ветви.

Вопросу синхронизации автоколебательных систем посвящено много работ [1–10]. В работе [1] рассмотрено явление захватывания лампового генератора в случае мягкого возбуждения, в работах [2–6] случай жесткого и сложно-жесткого возбуждения. Имеется ряд работ, где исследуется параметрическая синхронизация, синхронизация на дробных частотах [8–10]. В приведенных работах генератор рассматривается как система с одной степенью свободы. Переход на высокие частоты и применение распределенных систем заставляет учитывать несколько степеней свободы автоколебательной системы. При синхронизации генератора со многими степенями свободы появляется ряд новых эффектов, которые не могут быть объяснены в одночастотном приближении. Захватывание частоты в двухконтурном автогенераторе в случае, когда нормальные частоты близки, рассмотрено в работе [11]. В предлагаемой работе исследуется синхронизация генератора автоколебаний с двумя степенями свободы, когда возможно возбуждение на двух частотах, сильно отличающихся и некратных друг другу*. Рассмотрению вынужденных колебаний в двухконтурном генераторе посвящена также работа [12], где считается, что частота внешней ЭДС далека от обеих нормальных частот, либо совпадает с одной из собственных частот линейной системы. В настоящей работе исследуется случай, когда частота вынуждающей силы близка к одной из собственных частот системы. Эта задача является более актуальной, так как дает возможность построить зависимость амплитуды вынужденных колебаний от расстройки между частотой внешней ЭДС и собственной частотой системы и определить полосу захватывания.

1. ПОВЕДЕНИЕ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как следует из работы [13], поведение динамической системы, содержащей одну сосредоточенную нелинейность, может быть описано в нормальных координатах системой дифференциальных уравнений

* Термин «не кратны друг другу», согласно работе [13], означает, что соотношение $\alpha\omega_0 = \beta\omega_1$ должно выполняться при $\alpha \div \beta - 1 > N$, где N — старшая степень аппроксимирующего полинома,

$$v_v - p_v v_v = -\mu \frac{b(p_v)}{a'(p_v)} f(v) + \frac{d(p_v)}{a'(p_v)} E, \quad (1)$$

$$v = \Sigma v_v,$$

где v_v — нормальные комплексные координаты, $f(v)$ — нелинейная функция, несодержащая линейной составляющей, $a(p)$, $b(p)$, $d(p)$ — некоторые функции оператора p , p_v — корни характеристического уравнения $a(p) = 0$, E — внешний гармонический или квазигармонический сигнал, μ — малый безразмерный параметр.

Будем считать, что характеристическое уравнение имеет две пары комплексно-сопряженных корней с действительными частями порядка $\mu (p_v = \mu \delta_v + j \Omega_v)$, где $v = 0, 1$, а остальные корни обладают большой отрицательной действительной частью. В этом случае, согласно работе [14], решение системы (1) можно искать в виде

$$v_v = z_v \exp(j\omega_v t), \quad \text{где } \omega_v = \Omega_v + \mu \tilde{\xi}_v, \quad z_v = z_v(\mu t).$$

Здесь $\tilde{\xi}_v$, при $v = 1$ — расстройка между собственными частотами нелинейной системы и ее линейного приближения, при $v = 0$ — величина, характеризующая расстройку между частотой внешней ЭДС и собственной частотой линейного приближения системы.

Предположим также, что внешний сигнал $E = \tilde{\mu} \tilde{\epsilon} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$, где $\omega_0 = \Omega_0 \mu \tilde{\omega} \tilde{\xi}_0$. Ограничеваясь простейшим случаем, будем считать $f(v) = (a/6) v^3$.

Тогда, согласно работе [13], если Ω_0 и Ω_1 такие, что можно пренебречь синхронным взаимодействием, получим следующую систему укороченных уравнений*

$$\dot{z}_0 = \left[(\tilde{\delta}_0 + j \tilde{\xi}_0) - a_3 B_0 \left(\frac{z_0 z_0^*}{2} + z_1 z_1^* \right) \right] z_0 + A_0 \tilde{\epsilon},$$

$$\dot{z}_1 = \left[(\tilde{\delta}_1 + j \tilde{\xi}_1) - a_3 B_1 \left(z_0 z_0^* + \frac{z_1 z_1^*}{2} \right) \right] z_1,$$

где

$$B_v = \frac{b(p_v)}{a'(p_v)}, \quad A_v = \frac{d(p_v)}{a'(p_v)}.$$

Полагая $z_v = \rho_v \exp(j\varphi_v)$, $B_v = \bar{B}_v + j\tilde{B}_v$, $A_0 = A_0^0 \exp(j\Theta_0)$, запишем систему укороченных уравнений для амплитуд ρ_0 и ρ_1 и фаз φ_0 и φ_1

$$\dot{\rho}_0 = \tilde{\delta}_0 \rho_0 - a_3 \bar{B}_0 \rho_0 \left(\frac{\rho_0^2}{2} + \rho_1^2 \right) + A_0^0 \tilde{\epsilon} \cos(\Theta_0 - \varphi_0),$$

$$\dot{\varphi}_0 = \tilde{\xi}_0 - a_3 \tilde{B}_0 \left(\frac{\rho_0^2}{2} + \rho_1^2 \right) + \frac{A_0^0 \tilde{\epsilon}}{\rho_0} \sin(\Theta_0 - \varphi_0), \quad (2)$$

$$\dot{\rho}_1 = \tilde{\delta}_1 \rho_1 - a_3 \bar{B}_1 \rho_1 \left(\rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right),$$

$$\dot{\varphi}_1 = \tilde{\xi}_1 - a_3 \tilde{B}_1 \left(\rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right).$$

* Два других уравнения, комплексно-сопряженные с приведенными, опущены.

Поведение автономной системы с двумя степенями свободы детально исследовано в работе [15]. Однако, чтобы сделать более ясным физический смысл дальнейшего исследования, приведем основные результаты, относящиеся к поведению автономной системы.

Если положить $\epsilon = 0$, то 1-е и 3-е уравнения системы (2) не будут зависеть от фаз φ_0 и φ_1 и могут быть исследованы отдельно

$$\dot{\rho}_0 = \rho_0 \left[\tilde{\delta}_0 - a_3 \bar{B}_0 \left(\frac{\rho_0^2}{2} + \rho_1^2 \right) \right],$$

$$\dot{\rho}_1 = \rho_1 \left[\tilde{\delta}_1 - a_3 \bar{B}_1 \left(\rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right) \right].$$

В этой системе, вообще говоря, возможны следующие четыре состояния равновесия:

а) $\bar{\rho}_0 = 0, \bar{\rho}_1 = 0$ — состояние существует при всех значениях параметров и устойчиво при $\tilde{\delta}_0 < 0$ и $\tilde{\delta}_1 < 0$ (область Γ_1 на рис. 1);

б) $\bar{\rho}_0 = 0, \bar{\rho}_1 = \frac{2\tilde{\delta}_1}{a_3 \bar{B}_1} = 2\delta_1^*$ — это состояние существует при $\delta_1 > 0$ и устойчиво при $\delta_0 < 2\delta_1$ (на рис. 1 эта область отмечена горизонтальной штриховкой, она включает в себя области Γ_2, Γ_3 и Γ_4);

в) $\bar{\rho}_1 = 0, \bar{\rho}_0^2 = \frac{2\tilde{\delta}_0}{a_3 \bar{B}_0} = 2\delta_0$ — состояние существует при $\delta_0 > 0$, и для устойчивости необходимо выполнение неравенства $\delta_1 < 2\delta_0$ (эта область на рис. 1 выделена вертикальной штриховкой и включает в себя области Γ_3, Γ_4 и Γ_5);

г) $\bar{\rho}_0^2 = \frac{2}{3} (2\delta_1 - \delta_0), \bar{\rho}_1^2 = \frac{2}{3} (2\delta_0 - \delta_1)$ — это состояние равновесия существует при выполнении двойного неравенства $\frac{\delta_0}{2} < \delta_1 < 2\delta_0$ и всегда неустойчиво.

Таким образом, при выборе параметров в области Γ_1 автономная система не возбуждена, в области Γ_2 она возбуждается на частоте ω_1 , при переходе из области Γ_2 в Γ_3 и затем в Γ_4 система остается возбужденной на частоте ω_1 , но появляется возможность для возбуждения и на частоте ω_0 . При переходе в область Γ_5 , т. е. на границе $\delta_1 = \delta_0/2$ колебания частоты ω_1 становятся неустойчивыми и срываются. Устанавливаются колебания с частотой ω_0 . При обратном изменении параметров системы, т. е. при переходе из области Γ_5 в Γ_4 и Γ_3 , колебания с частотой ω_0 исчезнут на границе $\delta_1 = 2\delta_0$.

Описанное здесь явление «затягивания» рассмотрено в работе [15].

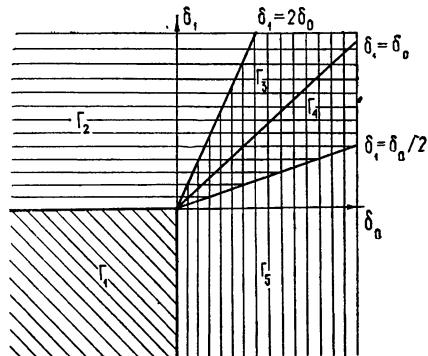


Рис. 1.

* В дальнейшем будем считать $\bar{B}_0 > 0$ и $\bar{B}_1 > 0$; в противном случае — бесконечность устойчива и, следовательно, кубическая аппроксимация нелинейности неправильна,

2. НЕАВТОНОМНАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим задачу при учете внешнего воздействия ($\varepsilon \neq 0$). Заметим, что первые три уравнения системы (2) не зависят от фазы φ_1 и могут быть исследованы отдельно. Состояния равновесия определяются системой уравнений

$$\left[\tilde{\delta}_0 - a_3 \bar{B}_0 \left(\frac{\rho_0^2}{2} + \rho_1^2 \right) \right] \rho_0 + A_0^0 \tilde{\varepsilon} \cos(\Theta_0 - \varphi_0) = 0,$$

$$\tilde{\xi}_0 - a_3 \tilde{B}_0 \left(\frac{\rho_0^2}{2} + \rho_1^2 \right) + \frac{A_0^0 \tilde{\varepsilon}}{\rho_0} \sin(\Theta_0 - \varphi_0) = 0,$$

$$\left[\tilde{\delta}_1 - a_3 \bar{B}_1 \left(\rho_0^2 + \frac{\rho_1^2}{2} \right) \right] \rho_1 = 0.$$

Исключив разность фаз ($\Theta_0 - \varphi_0$), получим уравнения, связывающие ρ_0 , ρ_1 и $\tilde{\xi}_0$

$$\tilde{\delta}_0^2 + \tilde{\xi}_0^2 - 2a_3 (\tilde{\delta}_0 \bar{B}_0 + \tilde{\xi}_0 \tilde{B}_0) (\rho_0^2/2 + \rho_1^2) + a_3^2 (\bar{B}_0^2 + \tilde{B}_0^2) (\rho_0^2/2 + \rho_1^2) = \frac{A_0^0 \tilde{\varepsilon}^2}{\rho_0^2},$$

$$(3)$$

$$\rho_1 [\tilde{\delta}_1 - a_3 \bar{B}_1 (\rho_0^2 + \rho_1^2/2)] = 0.$$

Второе уравнение системы (3) может быть удовлетворено в двух случаях 1) $\rho_1 = 0$ и 2) $[\tilde{\delta}_1 - a_3 \bar{B}_1 (\rho_0^2 + \rho_1^2/2)] = 0$.

Рассмотрим эти случаи отдельно, а соответствующие им режимы работы неавтономной системы назовем 1-ым и 2-ым режимами.

1. Подставляя $\rho_1 = 0$ в первое уравнение системы (3), получим связь между ρ_0 и $\tilde{\xi}_0$

$$\tilde{\xi}_0 = (a_3 \tilde{B}_0 \rho_0^2)/2 \pm \{(A_0^0 \tilde{\varepsilon}^2)/\rho_0^2 - [\tilde{\delta}_0 - (a_3 \bar{B}_0 \rho_0^2)/2]^2\}^{1/2}.$$

Первое слагаемое в полученном уравнении определяет наклон амплитудно-частотных характеристик. Для упрощения задачи будем считать $\tilde{B}_0 = 0$. Тогда, после перехода к новым переменным и параметрам

$$r_0 = \rho_0^2, \quad r_1 = \rho_1^2, \quad \tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_0 / (a_3 \bar{B}_0),$$

$$(4)$$

$$\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_1 / (a_3 \bar{B}_1), \quad \tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_0 / (a_3 \bar{B}_0), \quad \varepsilon = \frac{A_0^0 \tilde{\varepsilon}^2}{a_3^2 \bar{B}_0^2},$$

уравнение амплитудно-частотных характеристик запишется в виде

$$\tilde{\xi}_0^2 = \varepsilon/r_0 - [\tilde{\delta}_0 - r_0/2]^2. \quad (5)$$

Нетрудно усмотреть, что уравнение семейства амплитудно-частотных характеристик в случае $r_1 = 0$ совпадает с уравнением, полученным в работе [1]. Однако, разбиение плоскости r_0 , $\tilde{\xi}_0$ на области, соответствующие различным типам состояний равновесия, будет несколько иным. Действительно, характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$(-p + \delta_1 - r_0) \left[\gamma^2 p^2 + 2\gamma(r_0 - \delta_0)p + \delta_0^2 + \xi_0^2 - 2\delta_0 r_0 + \frac{3}{4} r_0^2 \right] = 0$$

и, следовательно, к известным из работы [1] границам устойчивости: $r_0 > \delta_0$ и $\delta_0^2 + \xi_0^2 - 2\delta_0 r_0 + \frac{3}{4} r_0^2 > 0$ — добавляется еще одна граница $r_0 > \delta_1$.

На рис. 2 приведено семейство амплитудно-частотных характеристик (5) и разбиение его на ветви, соответствующие различным типам состояний равновесия для случая $\delta_0 > \delta_1 > 0$. Область устойчивости заштрихована*.

В случае $\delta_1 > \delta_0 > 0$ границей устойчивости будет прямая $r_0 = \delta_1$, которая не связана с положением эллипса. При $\delta_1 > 2\delta_0$ она проходит выше эллипса и является единственной границей устойчивости. В этом случае, как следует из рис. 1, при отсутствии внешней ЭДС система на частоте ω_0 не возбуждается.

2. Рассмотрим второй возможный режим работы системы ($\rho_1 \neq 0$). Используя обозначения (4), запишем уравнения амплитудно-частотных характеристик в виде

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= \frac{\epsilon}{\delta_1 - \frac{r_1}{2}} - \left[\delta_0 - \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \frac{3}{2} r_1 \right) \right]^2, \\ \xi_0^2 &= \frac{\epsilon}{r_0} - \left[\delta_0 - 2 \left(\delta_1 - \frac{3}{4} r_0 \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Характеристики существуют при значениях $\delta_1 > 0$, когда при отсутствии внешней ЭДС система возбуждена на частоте ω_1 . Качественный вид кривых для случая $\delta_0 < 2\delta_1$ (в дальнейшем отношение δ_0/δ_1 будем обозначать через α) приведен на рис. 3. При значении $\alpha > 2$ амплитудно-частотные характеристики $r_0 = r_0(\xi_0)$ и $r_1 = r_1(\xi_0)$ не имеют вертикальных касательных. Области существования амплитудно-частотных характеристик $r_0 \leq \delta_1$, $r_1 \leq 2\delta_1$ определяются из уравнения

$$r_0 + \frac{r_1}{2} = \delta_1. \quad (7)$$

Для исследования устойчивости линеаризуем систему (2) и исключим $\cos(\Theta_0 - \varphi_0)$ и $\sin(\Theta_0 - \varphi_0)$, используя уравнения для равновесных состояний. Характеристическое уравнение запишем в виде

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0,$$

где

* В дальнейшем на всех рисунках область устойчивости амплитудно-частотных характеристик будет штриховаться.

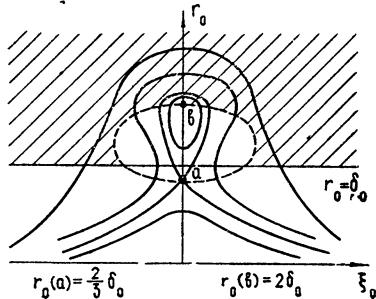


Рис. 2.

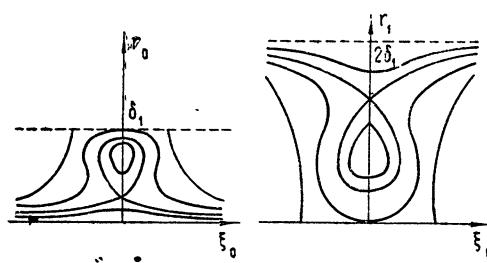


Рис. 3.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 2a_3\bar{B}_0[2\delta_1 - \delta_0 + \gamma\delta_1 - (1+\gamma)r_0], \\
 C_2 &= a_3^2\bar{B}_0^2 \left[\xi_0^2 + \delta_0^2 + \frac{3}{4}\delta_1^2 - 2\delta_0\delta_1 + \right. \\
 &\quad \left. + 2(\delta_1 - r_0) \left(\frac{10}{8}\delta_1 - \delta_0 - 2\gamma\delta_0 - 2\gamma\delta_1 \right) + 12\left(\frac{1}{16} + \gamma\right)(\delta - r_0)^2 \right], \\
 C_3 &= 2a_3^3\bar{B}_1\bar{B}_0^2(\delta_1 - r_0) \left[\xi_0^2 + (2\delta_1 - \delta_0)^2 + \frac{27}{4}r_0^2 - 6(2\delta_1 - \delta_0)r_0 \right], \quad \gamma = \frac{\bar{B}_1}{\bar{B}_0}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Состояние равновесия будет устойчивым, если выполняются неравенства: 1) $C_1 > 0$, 2) $C_3 > 0$, 3) $C_1C_2 - C_3 > 0$. Из приведенных неравенств следует, что через точки пересечения первой и второй границ устойчивости проходит и третья граница.

Построим области устойчивости в плоскости характеристик $r_0\xi_0$ (в плоскость r_1, ξ_0 их можно перенести, используя линейную связь (7) между r_1 и r_0). Подставляя выражение (8) в уравнения границ, получим

$$1) \quad \frac{r_0}{\delta_1} = \frac{2+\gamma-\alpha}{1+\gamma} \quad \text{— в плоскости } r_0\xi_0 \text{ это прямая};$$

$$2) \quad \frac{3\xi_0^2}{(2\delta_1 - \delta_0)^2} + \frac{81 \left[r_0 - \frac{4}{9}(2\delta_1 - \delta_0) \right]^2}{4(2\delta_1 - \delta_0)^2} = 1 \quad \text{— эта кривая в}$$

плоскости $r_0\xi_0$ представляет собой эллипс, который, как нетрудно показать, является геометрическим местом точек вертикальных касательных к амплитудно-частотным характеристикам. Он расположен в области существования амплитудно-частотных характеристик при $-\frac{5}{2} < \alpha < 2$;

$$3) \quad \xi_0^2 = \frac{b_0r_0^3 + b_1r_0^2 + b_2r_0 + b_3}{2(r_0 - 2\delta_1 + \delta_0)},$$

где

$$b_0 = -\frac{3}{2}(4\gamma + 1)^2, \quad b_1 = \frac{11}{2}(2\delta_1 - \delta_0) + 12\gamma(5\delta_1 - 2\delta_0) + 8\gamma^2(8\delta_1 - \delta_0),$$

$$b_2 = -6(2\delta_1 - \delta_0)^2 - 8\gamma(10\delta_1^2 + \delta_0^2 - 7\delta_1\delta_0) + 8\gamma^2\delta_1(2\delta_0 - 7\delta_1),$$

$$b_3 = 2(2\delta_1 - \delta_0)^3 + 8\gamma\delta_1(2\delta_1 - \delta_0)^2 + 8\gamma^2\delta_1^2(2\delta_1 - \delta_0).$$

Качественный ход этой кривой приведен на рис. 4. Заметим, что при увеличении α асимптота кривой смещается вниз, и при $\alpha=2$ вся плоскость ξ_0r_0 становится неустойчивой (область G_7 на рис. 5). На рис. 5 в плоскости параметров α, γ выделены области различного взаимного расположения границ устойчивости. В области, обозначенной горизонтальной штриховкой ($\gamma > \frac{2-\alpha}{1-2\alpha}$), первая граница устойчивости пересекается с эллипсом. В области с наклонной штриховкой третья граница устойчивости пересекается с эллипсом один раз, с вертикальной штриховкой* — два раза, а с двойной — три. Граница $\alpha=1$, обозначенная на

* Соответствующая граница определяется уравнением

$$(\alpha-2)^2(1-2\gamma) + \gamma^2(1+\alpha)^2 = 0.$$

рис. 5, также является существенной, так как при этом происходит слияние первой границы устойчивости, границы существования амплитудно-частотных характеристик $r_0 = \delta_1$ и асимптоты к третьей границе устойчивости.

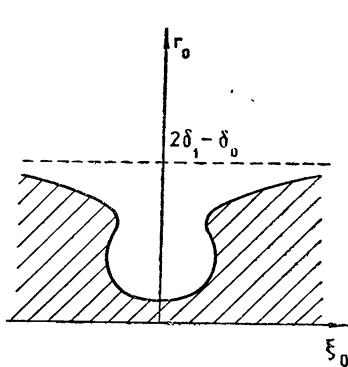


Рис. 4.

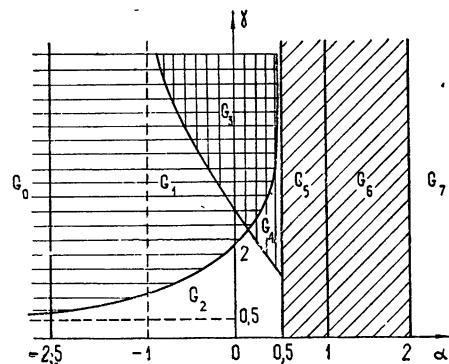


Рис. 5.

Проведенный анализ показывает, что первая граница устойчивости всегда идет выше либо границы существования $r_0 = \delta_1$, либо асимптоты к третьей границе устойчивости, поэтому она никаких ограничений по устойчивости не вносит и в дальнейшем на плоскость ξ_0 r_0 не наносится.

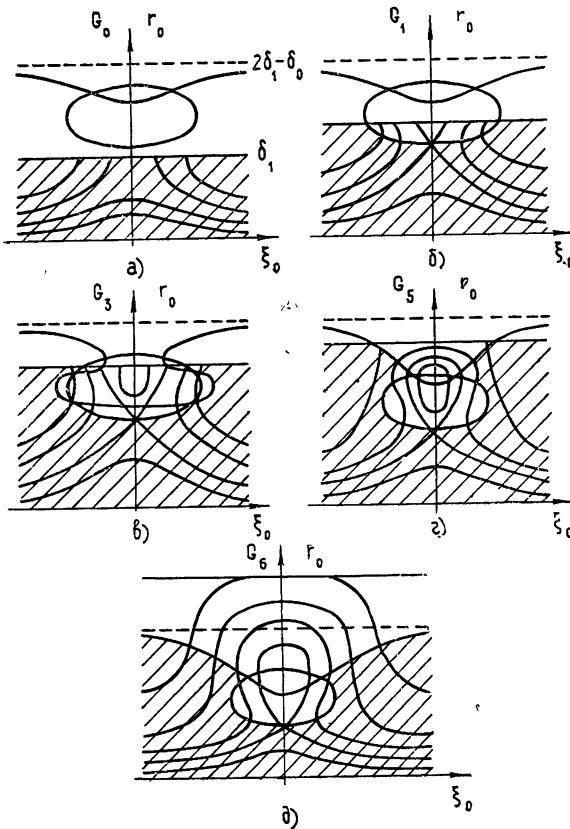


Рис. 6.

На рис. 6 приведен вид амплитудно-частотных характеристик (6), а также нанесены вторая, третья границы устойчивости и граница существования $r_0 = \delta_1$ для различных областей плоскости параметров α, γ (рис. 5).

Проведенное построение показало, что для областей G_1 и G_2 , G_3 и G_4 вид амплитудно-частотных характеристик и расположение границ устойчивости в области существования качественно тождественны.

На основе вышеприведенного на рис. 7 приведен общий вид амплитудно-частотных характеристик при учете 1-го и 2-го режимов работы. Выше границы $r_0 = \delta_1$ расположены ветви амплитудно-частотных характеристик, относящиеся только к 1-му режиму (при $r_0 > \delta_1$ — 2-й режим не существует). Ниже этой границы существует как 1-й, так и 2-й режим. Однако, амплитудно-частотные характеристики, относящиеся к 1-му режиму при $r_0 < \delta_1$, всегда неустойчивы и на рисунках не изображены.

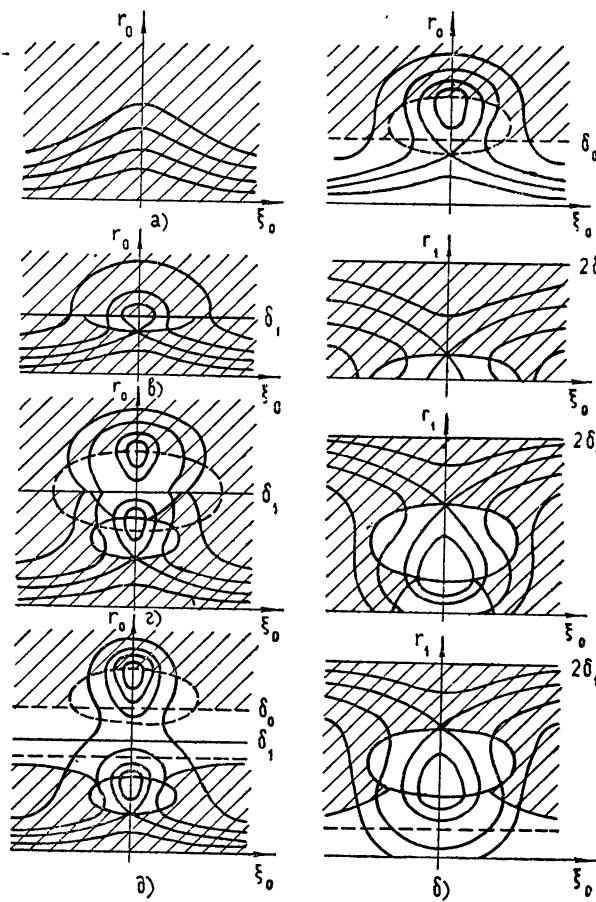


Рис. 7.

Пользуясь этими рисунками, сопоставим поведение неавтономной системы с поведением соответствующей ей автономной системы..

1. Пусть параметры системы выбраны в области G_1 (рис. 1 (в автономном режиме система по обеим частотам не возбуждена)). В этом случае возможен лишь 1-й режим работы неавтономной системы (2-й невозможен, так как $\delta_1 < 0$), т. е. при действии на систему внешней ЭДС с частотой, близкой к Ω_0 , r_1 остается равным нулю, а зависимость r_0 от

ξ_0 изображена на рис. 7 а. Поведение такой системы аналогично тому, что имеет место в линейной системе.

2. Если параметры системы выбраны в области G_5 (автономная система возбуждена на частоте ω_0), то для неавтономной системы возможен лишь 1-й режим работы (при $\alpha > 2$ и $\delta_1 > 0$ 2-й режим неустойчив, а при $\delta_1 < 0$ он не существует). Амплитудно-частотные характеристики в этом случае получаются такими же, что и при рассмотрении явления захватывания в случае мягкого возбуждения генератора [1] и приводятся на рис. 7 б.

3. При выборе параметров в области G_2 (система на частоте ω_0 не возбуждена, а на ω_1 — возбуждена) возможен и 1-й и 2-й режимы работы неавтономной системы. Семейство амплитудно-частотных характеристик для областей G_1 рис. 5 приведено на рис. 7 в. Для малых амплитуд вынуждающей силы при уменьшении ξ_0 по абсолютной величине наблюдается плавное нарастание r_0 и спад r_1 . Для больших значений амплитуд при уменьшении ξ_0 * r_0 будет увеличиваться сначала плавно, а затем, при достижении эллипса, скачком. В то же время r_1 будет уменьшаться сначала плавно, а затем скачком до нулевого значения. При обратном изменении ξ_0 будет наблюдаться явление затягивания — скачок будет происходить при большем значении ξ_0 . Для еще больших значений амплитуд внешней ЭДС при уменьшении ξ_0 получается плавное нарастание r_0 и плавный спад r_1 до нуля. Аналогичное поведение системы при изменении расстройки будет наблюдаться и при значениях параметров, находящихся в областях G_0, G_2, G_3, G_4 (рис. 5).

4. Если значения параметров выбрать в пределах области G_3 (на плоскости α, γ ей соответствует область G_5), то автономная система в зависимости от начальных условий будет возбуждена либо на частоте ω_0 , либо на частоте ω_1 . Для неавтономной системы семейство амплитудно-частотных характеристик изображено на рис. 7 г. Пусть до прихода внешней ЭДС система была возбуждена на частоте ω_1 , тогда для малых амплитуд вынуждающей силы при уменьшении ξ_0 будет наблюдаться плавный спад r_1 и нарастание r_0 . Для больших значений амплитудно-частотные характеристики в некотором интервале расстроек имеют по три устойчивых равновесных значения для r_0 и r_1 . На этих кривых при уменьшении ξ_0 плавное изменение r_0 и r_1 дважды будет чередоваться со скачкообразным.

Если система до подачи внешнего сигнала была возбуждена на частоте ω_0 , то при увеличении ξ_0 от нуля r_1 остается равным нулю, пока r_0 не достигнет эллипса, а затем после скачка наблюдается плавное убывание r_0 и нарастание r_1 .

5. При выборе параметров в области G_4 (ей соответствует область G_6 рис. 5) состояние автономной системы будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Вид амплитудно-частотных характеристик для неавтономной системы приводится на рис. 7 д. Поведение неавтономной системы будет зависеть от состояния автономной. Если система возбуждена на частоте ω_1 , то при подаче внешнего сигнала малой амплитуды при уменьшении ξ_0 наблюдается плавное нарастание r_0 и плавный спад r_1 . Если система возбуждена на частоте ω_0 , то при увеличении расстройки от нулевого значения r_1 остается равным нулю, пока r_0 не достигнет границы устойчивости. Для выяснения дальнейшего поведения системы необходимо, кроме равновесных режимов, рассмотреть периодические режимы, определяемые системой укороченных уравнений (2).

* В дальнейшем под термином уменьшение или увеличение ξ_0 будет пониматься уменьшение или увеличение ξ_0 по абсолютной величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. А н д р о н о в, А. А. В и т т, Ж. прикл. физики, 7, 4, 3 (1930).
2. В. И. Ко р о л е в, Л. В. П о с т н и к о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 3, 407 (1969).
3. В. И. Ко р о л е в, Л. В. П о с т н и к о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 11, 1711 (1969).
4. Ю. Б. Ко б з а р е в, ЖТФ, 5, вып. 2, 217 (1935).
5. Е. Н. С е к е р с к а я, ЖТФ, 5, вып 2, 253 (1935).
6. Л. И. М а н д е л ъ шт а м м, М. Д. П а п а л е к с и, ЖТФ, 4, вып. 1, 98 (1934).
7. Н. В. Б у т е н и н, Элементы теории нелинейных колебаний, Судпромгиз, Л., 1962.
8. А. С. Т а р а н т о в и ч, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 7, 1046 (1968).
9. В. Ф. С к у п о й, Радиотехника, 23, № 8, 100 (1968).
10. В. И. Ко р о л е в, Л. В. П о с т н и к о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 8, 1249 (1970).
11. А. М. Ш а у м я н, П. Н. З а н а д в о р о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 2, 267 (1959).
12. А. Г. М а и ё р, Ученые записки ГГУ, 6, 25 (1939).
13. Л. В. П о с т н и к о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 3, 414 (1971).
14. Н. Н. Б о г о л ю б о в, Ю. А. М и т р о п о л ь с к и й, Асимптотические методы в теории колебаний, Физматгиз, М., 1963
15. А. А. А н д р о н о в, А. А. В и т т, ЖТФ, 4, 1, 122 (1934)

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
15 февраля 1971 г.ENTRAINMENT EFFECT IN AUTOOSCILLATIONS SYSTEM
WITH TWO DEGREES OF FREEDOM*Melnikova V. A.*

The article considers the behaviour of an autooscillations system with two degrees of freedom under external harmonic force the frequency of which is close to one of the system's natural frequencies. Shortened equations are written under the nonlinearity approximation by cubic polynomial and in the absence of synchronous interaction. Amplitude-frequency characteristics for various regions of the system's parameter plane are plotted and stable branches are singled out.

УДК 62—501

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛЯРНО-КООРДИНАТНОГО КОМПЕНСАТОРА

A. B. Филиппов

В работе приведены уравнения, описывающие движения двумерной нелинейной системы, рассмотрено преобразование их к виду, удобному для анализа на устойчивость, исследованы условия существования устойчивых режимов и указано на необходимость параметрического регулирования каналов в зависимости от амплитуды напряжения обратной связи.

Среди двумерных систем автоматического регулирования важное место занимают полярно-координатные компенсаторы, которые широко применяются в технике измерений комплексных сопротивлений и напряжения переменного тока. Особенностью их является использование полярной системы координат при формировании сигнала обратной связи.

Функциональная схема системы полярного типа, предназначенной для измерения малых напряжений высокой частоты, показана на рис. 1.

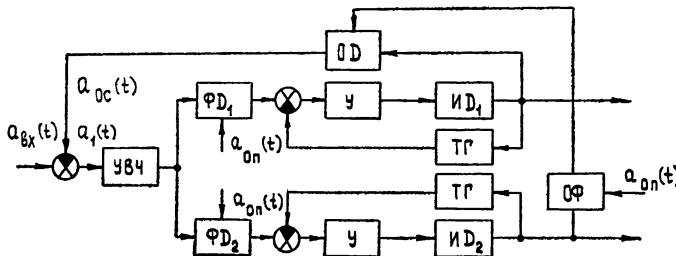


Рис. 1.

В цепь обратной связи канала измерения амплитуды включен образцовый делитель напряжения (ОД), а канала фазы — образцовый фазовращатель (ОФ). Сигнал $a_1(t)$, обусловленный ошибкой измерения, усиливается в УВЧ и воздействует на два фазовых детектора (ФД), которые осуществляют разложение вектора на оси прямоугольной системы координат, заданной опорными напряжениями $a_{0n}(t)$.

Исполнительные двигатели (ИД), отрабатывая сигналы рассогласования, изменяют положения подвижных частей образцовых мер, сводя ошибку компенсации к нулю. Местные обратные связи с тахогенераторами (ТГ) улучшают динамические свойства измерительных каналов.

В дальнейшем будем полагать, что образцовый делитель имеет линейную статическую характеристику и не вносит фазового сдвига в компенсирующий сигнал, а постоянные времени фильтров фазовых детекторов и двигателей каналов соответственно равны (рис. 2).

Допустим, что на вход системы подано напряжение

$$a_{вх}(t) = a_0 \sin \omega_0 t,$$

а в цели обратной связи действует

$$a_{oc}(t) = (a_0 + \Delta a) \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

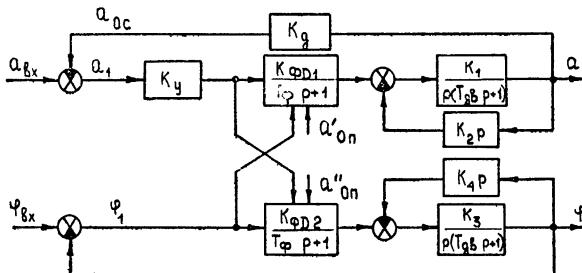


Рис. 2.

тогда составляющие сигнала ошибки на оси опорной системы координат (рис. 3) будут иметь вид

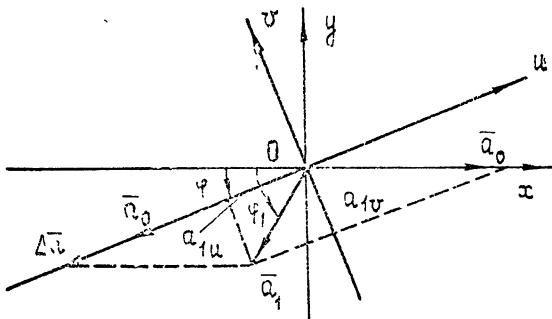


Рис. 3.

$$\begin{aligned} a_{1u} &= [a_0 - (a_0 + \Delta a) \cos \varphi] \cos \varphi - (a_0 + \Delta a) \sin \varphi \sin \varphi = \\ &= \sqrt{a_0^2 + (a_0 + \Delta a)^2 - 2a_0(a_0 + \Delta a) \cos \varphi} \times \\ &\times \cos \left\{ \arctg \left[- \frac{(a_0 + \Delta a) \sin \varphi}{a_0 - (a_0 + \Delta a) \cos \varphi} \right] - \varphi \right\} = a_0 \cos \varphi - a_0 - \Delta a, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{1v} &= -(a_0 + \Delta a) \sin \varphi \cdot \cos \varphi - [a_0 - (a_0 + \Delta a) \cos \varphi] \sin \varphi = \\ &= \sqrt{a_0^2 + (a_0 + \Delta a)^2 - 2a_0(a_0 + \Delta a) \cos \varphi} \cdot \sin \left\{ \arctg \left[- \frac{(a_0 + \Delta a) \sin \varphi}{a_0 - (a_0 + \Delta a) \cos \varphi} \right] - \varphi \right\} = -a_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Исключая промежуточные переменные и учитывая (1), получим систему дифференциальных уравнений относительно Δa и φ , описывающих движения полярно-координатного компенсатора

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \Delta a}{dt^3} + \frac{T_\Phi(1+k_1 k_2) + T_{dv}}{T_{dv} T_\Phi} \frac{d^2 \Delta a}{dt^2} + \frac{1+k_1 k_2}{T_{dv} T_\Phi} \frac{d \Delta a}{dt} - \\ - \frac{k_d k_y k_5}{T_{dv} T_\Phi} (a_0 \cos \varphi - a_0 - \Delta a) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} + \frac{T_\Phi(1+k_3k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1+k_3k_4}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{k_y k_6 a_0}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \sin\varphi = 0,$$

где $k_5 = k_{\Phi\Delta}$, $k_1 = k_{\Phi\Delta}$, k_3 , k_y — коэффициент усиления УВЧ, k_Δ — коэффициент передачи образцового делителя (ОД), T_Φ , $T_{\text{дв}}$ — постоянные времена фильтра $\Phi\Delta$ и двигателя соответственно.

$$\text{Обозначив } \Delta a = x_1 \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3,$$

$$\varphi = y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3$$

и представив $\sin y_1$ и $\cos y_1$ двумя первыми членами ряда Тейлора, запишем (2) в форме Коши

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - x_2 &= 0, \\ \frac{dx_2}{dt} - x_3 &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} + \frac{T_\Phi(1+k_1k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}T_\Phi} x_3 + \frac{1+k_1k_2}{T_{\text{дв}}T_\Phi} x_2 + \\ + \frac{k_\Delta k_y k_5}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \left(x_1 + \frac{1}{2} a_0 y_1^2 \right) &= 0, \\ \frac{dy_1}{dt} - y_2 &= 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_3 &= 0, \\ \frac{dy_3}{dt} + \frac{T_\Phi(1+k_3k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}T_\Phi} y_3 + \frac{1+k_3k_4}{T_{\text{дв}}T_\Phi} y_2 + \\ + \frac{a_0 k_y k_6}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \left(y_1 - \frac{1}{6} y_1^3 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Известно, что для снижения ошибок измерения амплитуды и фазы входного напряжения следует, насколько это возможно, увеличивать коэффициенты усиления каналов. Тогда величины

$$\frac{T_\Phi(1+k_1k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \text{ и } k_\Delta k_y k_5,$$

$$\frac{T_\Phi(1+k_3k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}T_\Phi} \text{ и } a_0 k_y k_6$$

становятся близкими по значению и их разность можно внести под малый параметр. Учитывая это, перепишем систему (3)

$$\frac{dx_1}{dt} - x_2 = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} - x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} + k_{\Delta} k_y k_5 x_3 + \frac{1 + k_1 k_2}{T_{\Delta B} T_{\Phi}} x_2 + \frac{k_{\Delta} k_y k_5}{T_{\Delta B} T_{\Phi}} x_1 &= \epsilon f_3(x_3, y_1), \\ \frac{dy_1}{dt} - y_2 &= 0, \\ \frac{dy_2}{dt} - y_3 &= 0, \\ \frac{dy_3}{dt} + a_0 k_y k_6 y_3 + \frac{1 + k_3 k_4}{T_{\Delta B} T_{\Phi}} y_2 + \frac{a_0 k_y k_6}{T_{\Delta B} T_{\Phi}} y_1 &= \epsilon f_6(y_1, y_3). \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} f_3(x_3, y_1) &= -\frac{a_0 k_{\Delta} k_y k_5}{2 T_{\Delta B} T_{\Phi}} y_1^2 + \left[k_{\Delta} k_y k_5 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_1 k_2) + T_{\Delta B}}{T_{\Delta B} T_{\Phi}} \right] x_3, \\ f_6(y_1, y_3) &= \frac{a_0 k_y k_6}{6 T_{\Delta B} T_{\Phi}} y_1^3 + \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_3 k_4) + T_{\Delta B}}{T_{\Delta B} T_{\Phi}} \right] y_3, \end{aligned}$$

ϵ — малый параметр.

В рассматриваемой постановке задачи ϵ может иметь чисто символьический характер, означающий малость правых частей подсистем (4).

Для определения условий существования стационарных режимов выполним преобразование системы (4) к новым переменным асимптотическим методом Крылова—Боголюбова. [1–3].

Переменные x_i и y_i , относительно которых составлена система (4), в свою очередь, определяются текущими значениями апериодических составляющих, амплитудами колебательных составляющих и фазами. Причем амплитуды колебательных и значения апериодических составляющих изменяются медленно в сравнении с изменением фаз колебаний. При изучении устойчивости компенсатора нас прежде всего будут интересовать «медленные» составляющие. Особенность и достоинство асимптотического метода состоит в том, что он позволяет разделить сложные движения на «быстрые» и «медленные» и получить приближенные уравнения этих движений, порядок которых ниже исходного. Благодаря этому становится возможным аналитическое исследование сложных нелинейных систем.

Итак, при $\epsilon = 0$ решения подсистем (4) будут иметь вид

$$x_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} c_k \exp(\lambda_k t), \quad y_i = \sum_{k=1}^3 \sigma'_{ik} c'_k \exp(\lambda'_k t).$$

Здесь $c_k = \text{const}$, $c'_k = \text{const}$, а λ_k и λ'_k — корни характеристических определителей первой и второй подсистем.

Допустим, что

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\alpha_1, \quad \lambda_{2,3} = \pm j\omega_1, \\ \lambda'_1 &= -\alpha_2, \quad \lambda'_{2,3} = \pm j\omega_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 1,$$

$$\sigma_{21} = \lambda_1, \quad \sigma_{22} = \lambda_2, \quad \sigma_{23} = \lambda_3,$$

$$\sigma_{31} = \lambda_1^2, \quad \sigma_{32} = \lambda_2^2, \quad \sigma_{33} = \lambda_3^2.$$

Коэффициенты a'_{ik} определяются аналогично.

При $\epsilon \neq 0$ решения подсистем (4) ищем в виде рядов

$$x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} c_k \exp(\lambda_k t) + \sum_{r=1, 2, \dots} \epsilon^r u_{ir}(c_k, c'_k, \psi_1, \psi_2), \quad (5)$$

$$y_i = \sum_{k=1}^3 a'_{ik} c'_k \exp(\lambda'_k t) + \sum_{r=1, 2, \dots} \epsilon^r v_{ir}(c'_k, \psi_2),$$

где $\psi_1 = \omega_1 t$, $\psi_2 = \omega_2 t$; u_{ir} , v_{ir} — периодические функции углов ψ_1 , ψ_2 , а c_k и c'_k определяются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dc_k}{dt} &= \sum_{m=1, 2, \dots} \epsilon^m W_{km}(c_k, c'_k, t), \\ \frac{dc'_k}{dt} &= \sum_{m=1, 2, \dots} \epsilon^m W'_{km}(c'_k, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Для однозначности решения задачи функции u_{ir} и v_{ir} должны отвечать следующим требованиям

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{ir} d\psi_1 d\psi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{ir} d\psi_1 d\psi_2 = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{ir} \exp(\pm j\psi_1) d\psi_1 d\psi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{ir} \exp(\pm j\psi_2) d\psi_1 d\psi_2 = 0.$$

Это означает, что нулевые и первые гармоники включаются в основные части решений подсистем (4).

Далее, дифференцируя решения (5) с учетом (6), разлагая нелинейные функции $f_i(x_k, y_k)$ в ряды Тейлора в окрестности точек x_k^0 и y_k^0 и подставляя полученные выражения в исходную систему, будем иметь ряд уравнений с одинаковыми степенями ϵ . Так, для ϵ в первой степени получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i1}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 [a_{ik} u_{k1} + a'_{ik} W_{k1} \exp(\lambda_k t)] &= f_i(x_k^0, y_k^0), \\ \frac{\partial v_{i1}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 [a'_{ik} v_{k1} + a''_{ik} W'_{k1} \exp(\lambda'_k t)] &= f_i(y_k^0), \end{aligned} \quad (8)$$

где a_{ik} , a'_{ik} — коэффициенты подсистем (4).

Системы (8) достаточно для решения задачи в первом приближении. Учитывая (7) и представляем $f_i(x_k^0, y_k^0)$ двукратными рядами Фурье, получим из (8) уравнения относительно W_{k1} и W'_{k1} для нулевых и первых гармоник решения (4).

$$\begin{aligned} W_{11} \exp(-\alpha_1 t) + W_{21} \exp(j\psi_1) + W_{31} \exp(-j\psi_1) &= 0, \\ -\alpha_1 W_{11} \exp(-\alpha_1 t) + j\omega_1 W_{21} \exp(j\psi_1) - j\omega_1 W_{31} \exp(-j\psi_1) &= 0, \\ \alpha_1^2 W_{11} \exp(-\alpha_1 t) - \omega_1^2 W_{21} \exp(j\psi_1) - \omega_1^2 W_{31} \exp(-j\psi_1) &= Q_{00} + Q_{10} \exp(j\psi_1) + Q_{-10} \exp(-j\psi_1). \end{aligned} \quad (9)$$

$$W'_{11} \exp(-\alpha_2 t) + W'_{21} \exp(j\psi_2) + W'_{31} \exp(-j\psi_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} -\alpha_2 W'_{11} \exp(-\alpha_2 t) + j\omega_2 W'_{21} \exp(j\psi_2) - j\omega_2 W'_{31} \exp(-j\psi_2) &= 0, \\ \alpha_2^2 W'_{11} \exp(-\alpha_2 t) - \omega_2^2 W'_{21} \exp(j\psi_2) - \omega_2^2 W'_{31} \exp(-j\psi_2) &= G_{00} + \quad (10) \\ &+ G_{01} \exp(j\psi_2) + G_{0-1} \exp(-j\psi_2). \end{aligned}$$

Здесь $Q_{00}, Q_{10}, Q_{-10}, G_{00}, G_{01}, G_{0-1}$ — коэффициенты комплексных двойкратных рядов Фурье, которые определяются следующим образом

$$\begin{aligned} Q_{00} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3(x_3^0, y_1^0) d\psi_1 d\psi_2 = -\frac{a_0 k_x k_y k_z}{2 T_{\text{дв}} T_\Phi} \times \\ &\times [c_1'^2 \exp(-2\alpha_2 t) + 2c_2' c_3'] + \left[k_x k_y k_z - \frac{T_\Phi(1+k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] \times \\ &\times \alpha_1^2 c_1 \exp(-\alpha_1 t), \\ G_{00} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_6(y_1^0, y_3^0) d\psi_1 d\psi_2 = \frac{a_0 k_y k_z}{6 T_{\text{дв}} T_\Phi} [c_1'^3 \exp(-3\alpha_2 t) + \\ &+ 6c_1' c_2' c_3' \exp(-\alpha_2 t)] + \left[a_0 k_y k_z - \frac{T_\Phi(1+k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] \times \\ &\times \alpha_2^2 c_1' \exp(-\alpha_2 t), \\ Q_{10} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_3(x_3^0, y_1^0) \exp(-j\psi_1) d\psi_1 d\psi_2 = \\ &= - \left[k_x k_y k_z - \frac{T_\Phi(1+k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] \omega_1^2 c_2, \\ G_{01} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_6(y_1^0, y_3^0) \exp(-j\psi_2) d\psi_1 d\psi_2 = \frac{a_0 k_y k_z}{2 T_{\text{дв}} T_\Phi} \times \\ &\times [c_1'^2 c_2' \exp(-2\alpha_2 t) + c_2'^2 c_3'] - \left[a_0 k_y k_z - \frac{T_\Phi(1+k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] \omega_2^2 c_2'. \end{aligned}$$

При нахождении W_{k1} и W'_{k1} из систем алгебраических уравнений (9) и (10) берутся решения по составляющим $Q_{00}, Q_{10}, Q_{-10}, G_{00}, G_{01}, G_{0-1}$ правых частей соответственно. Так, например,

$$W_{11} = \frac{R_{11}}{D},$$

где D — определитель системы (9)

$$D = \exp(-\alpha_1 t) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha_1 & j\omega_1 - j\omega_1 & \\ \alpha_1^2 - \omega_1^2 - \omega_1^2 & \end{vmatrix} = -2j\omega_1(\alpha_1^2 + \omega_1^2) \exp(-\alpha_1 t),$$

а R_{11} — замещенный определитель, который получается из D заменой первого его столбца первым столбцом правой части, т. е.

$$R_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & j\omega_1 - j\omega_1 \\ Q_{00} - \omega_1^2 - \omega_1^2 \end{vmatrix} = -2j\omega_1 Q_{00}.$$

Тогда

$$W_{11} = \frac{Q_{00} \exp(\alpha_1 t)}{\alpha_1^2 + \omega_1^2},$$

аналогично

$$\begin{aligned} W'_{11} &= \frac{G_{00} \exp(\alpha_2 t)}{\alpha_2^2 + \omega_2^2}, \quad W_{21} = -\frac{Q_{10}}{2(\alpha_1^2 + \omega_1^2)} - j \frac{\alpha_1 Q_{10}}{2\omega_1(\alpha_1^2 + \omega_1^2)}, \\ W'_{21} &= -\frac{G_{01}}{2(\alpha_2^2 + \omega_2^2)} - j \frac{\alpha_2 G_{01}}{2\omega_2(\alpha_2^2 + \omega_2^2)}, \\ W'_{31} &= -\frac{Q_{-10}}{2(\alpha_1^2 + \omega_1^2)} + j \frac{\alpha_1 Q_{-10}}{2\omega_1(\alpha_1^2 + \omega_1^2)}, \\ W'_{31} &= -\frac{G_{0-1}}{2(\alpha_2^2 + \omega_2^2)} + j \frac{\alpha_2 G_{0-1}}{2\omega_2(\alpha_2^2 + \omega_2^2)}. \end{aligned}$$

Так как функции правых частей (6) в первом приближении определены, представим систему в полном виде.

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= \varepsilon W_{11} = -\frac{\varepsilon a_0 k_x k_y k_z \exp(\alpha_1 t)}{2 T_{\text{дв}} T_{\Phi} (\alpha_1^2 + \omega_1^2)} [c_1'^2 \exp(-2\alpha_2 t) + 2c_2' c_3'] + \\ &\quad + \frac{\varepsilon \alpha_1^2 c_1}{(\alpha_1^2 + \omega_1^2)} \left[k_x k_y k_z - \frac{T_{\Phi}(1 + k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \right], \\ \frac{dc'_1}{dt} &= \varepsilon W'_{11} = \frac{\varepsilon a_0 k_x k_y k_6}{6 T_{\text{дв}} T_{\Phi} (\alpha_2^2 + \omega_2^2)} [c_1'^3 \exp(-3\alpha_2 t) + 6c_1' c_2' c_3'] + \\ &\quad + \frac{\varepsilon \alpha_2^2 c_1'}{\alpha_2^2 + \omega_2^2} \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \right], \quad (11) \\ \frac{dc_2}{dt} &= \varepsilon W_{21} = \frac{\varepsilon \omega_1^2 c_2}{2(\alpha_1^2 + \omega_1^2)} \left[k_x k_y k_5 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \right] + \\ &\quad + j \frac{\varepsilon \alpha_1 \omega_1 c_2}{2(\alpha_1^2 + \omega_1^2)} \left[k_x k_y k_5 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \right], \\ \frac{dc'_2}{dt} &= \varepsilon W'_{21} = -\frac{\varepsilon}{2(\alpha_2^2 + \omega_2^2)} \left\{ \frac{a_0 k_y k_6}{2 T_{\text{дв}} T_{\Phi}} [c_1'^2 c_2' \exp(-2\alpha_2 t) + c_2'^2 c_3'] - \right. \\ &\quad \left. - \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \right] \omega_2^2 c_2' \right\} - j \frac{\varepsilon \alpha_2}{2\omega_2(\alpha_2^2 + \omega_2^2)} \left\{ \frac{a_0 k_y k_6}{2 T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \times \right. \\ &\quad \times [c_1'^2 c_2' \exp(-2\alpha_2 t) + c_2'^2 c_3'] + \left. \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_{\Phi}(1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_{\Phi}} \right] \omega_3^2 c_2' \right\}. \end{aligned}$$

Для перехода к действительным переменным в решении системы (4) запишем первое приближение в форме

$$\begin{aligned}x_1 &= c_1 \exp(-\alpha_1 t) + a_x \cos [\omega_1 t + \theta_1(t)], \\y_1 &= c'_1 \exp(-\alpha_2 t) + a_y \cos [\omega_2 t + \theta_2(t)]\end{aligned}$$

и обозначим

$$c_x = c_1 \exp(-\alpha_1 t), \quad c_y = c'_1 \exp(-\alpha_2 t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{dc_x}{dt} &= -\alpha_1 c_x + \frac{dc_1}{dt} \exp(-\alpha_1 t), \\ \frac{dc_y}{dt} &= -\alpha_2 c_y + \frac{dc'_1}{dt} \exp(-\alpha_2 t).\end{aligned}\tag{12}$$

Учитывая, что $c_2 = n_1 + jm_1$, $c_3 = n_1 - jm_1$, $c'_2 = n_2 + jm_2$, $c'_3 = n_2 - jm_2$, $\frac{da_x^2}{dt} = 8 \left(n_1 \frac{dn_1}{dt} + m_1 \frac{dm_1}{dt} \right)$, $\frac{da_y^2}{dt} = 8 \left(n_2 \frac{dn_2}{dt} + m_2 \frac{dm_2}{dt} \right)$,

и подставляя (11) в (12), будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{dc_x}{dt} &= -c_x \left\{ \alpha_1 - \frac{\epsilon \alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \omega_1^2} \left[k_d k_y k_5 - \frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) + T_{dv}}{T_{dv} T_\Phi} \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{\epsilon a_0 k_d k_y k_5}{2 T_{dv} T_\Phi (\alpha_1^2 + \omega_1^2)} \left(c_y^2 + \frac{1}{2} a_y^2 \right), \\ \frac{dc_y}{dt} &= -c_y \left\{ \alpha_2 - \frac{\epsilon \alpha_2^2}{\alpha_2^2 + \omega_2^2} \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{dv}}{T_{dv} T_\Phi} \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{\epsilon a_0 k_y k_6}{6 T_{dv} T_\Phi (\alpha_2^2 + \omega_2^2)} \left(c_y^2 + \frac{3}{2} a_y^2 \right), \\ \frac{da_x}{dt} &= -\frac{\epsilon \omega_1^2}{2 (\alpha_1^2 + \omega_1^2)} \left[\frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) + T_{dv}}{T_{dv} T_\Phi} - k_d k_y k_5 \right] a_x, \\ \frac{da_y}{dt} &= -\frac{\epsilon a_y}{2 (\alpha_2^2 + \omega_2^2)} \left\{ \frac{a_0 k_y k_6}{2 T_{dv} T_\Phi} \left(c_y^2 + \frac{1}{4} a_y^2 \right) - \left[a_0 k_y k_6 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{dv}}{T_{dv} T_\Phi} \right] \omega_2^2 \right\}.\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь a_x и a_y — амплитуды колебательных составляющих, а c_x и c_y — апериодические составляющие медленных движений. Третье уравнение интегрируется независимо от остальных. Система (13) является первым приближением исходной системы уравнений (4) в части медленных движений. Благодаря этому можно утверждать, что, например, состоянию равновесия $c_x = c_y = a_x = a_y = 0$ в фазовом пространстве c_x , c_y , a_x , a_y в первом приближении отвечает состояние равновесия $x_i = y_i = 0$ в пространстве $x_i = y_i$ [4]. С помощью системы (13) исследуем характер движений полярно-координатного компенсатора. Для сокращения записи введем обозначения:

$$q_1 = \alpha_1 - \frac{\epsilon \alpha_1^2}{\alpha_1^2 + \omega_1^2} \left[k_d k_y k_5 - \frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) + T_{dv}}{T_{dv} T_\Phi} \right],$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= \frac{\epsilon a_0 k_d k_y k_5}{2 T_{\text{дв}} T_\Phi (\alpha_1^2 + \omega_1^2)}, \\
 q_3 &= \alpha_2 - \frac{\epsilon \alpha_2^2}{\alpha_2^2 + \omega_2^2} \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right], \\
 q_4 &= \frac{\epsilon a_0 k_y k_6}{6 T_{\text{дв}} T_\Phi (\alpha_2^2 + \omega_2^2)}, \\
 q_5 &= \frac{\epsilon \omega_1^2}{2 (\alpha_1^2 + \omega_1^2)} \left[\frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} - k_d k_y k_5 \right], \\
 q_6 &= \frac{\epsilon}{2 (\alpha_2^2 + \omega_2^2)}, \\
 q_7 &= \frac{a_0 k_y k_6}{2 T_{\text{дв}} T_\Phi}, \quad q_8 = \omega_2^2 \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right].
 \end{aligned}$$

Стационарные режимы определяются группами корней алгебраических уравнений [4]

$$\begin{aligned}
 -q_1 c_x - q_2 c_y^2 - \frac{1}{2} q_2 a_y^2 &= 0, \\
 c_y \left(q_3 - q_4 c_y^2 - \frac{3}{2} q_4 a_y^2 \right) &= 0, \\
 q_5 a_0 &= 0, \\
 q_6 a_y \left(q_7 c_y^2 + \frac{1}{4} q_7 a_y^2 - q_8 \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Продифференцировав правые части уравнений (13) по c_x , c_y , a_x и a_y соответственно, получим

$$\begin{aligned}
 \Phi'(c_x) &= -q_1, \\
 \Phi'(c_y) &= -q_3 + 3q_4 c_y^2 + \frac{3}{2} q_4 a_y^2, \\
 \Phi'(a_x) &= -q_5, \\
 \Phi'(a_y) &= -q_6 q_7 c_y^2 - \frac{3}{4} q_6 q_7 a_y^2 + q_6 q_8.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Согласно утверждению А. М. Ляпунова, состояние равновесия будет устойчиво, если правые части (15) меньше нуля. Подставляя корни уравнений (14) в (15), установим, при каких условиях полярно-координатный компенсатор будет устойчивым.

1. Режим $c_{x1} = c_{y1} = a_{x1} = a_{y1} = 0$ существует при

$$\begin{aligned}
 k_d k_y k_5 &< \frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi}, \\
 a_0 k_y k_6 &< \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi}
 \end{aligned}$$

и является рабочим режимом компенсатора,

При $k_d k_y k_5 > \frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi}$ состояние равновесия канала измерения амплитуды неустойчиво и колебания будут возрастать.

2. Режим $c_{x2} = -2 \frac{q_2 q_8}{q_1 q_7}, c_{y2} = a_{x1} = 0, a_{y2}^2 = \frac{4q_8}{q_7}$ существует при

$$a_0 k_y k_6 > \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi},$$

$$k_d k_y k_5 < \frac{T_\Phi (1 + k_1 k_2) T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi}$$

и определяет автоколебания в канале измерения фазы с частотой первой гармоники ω_2 и амплитудой

$$a_y^2 = 8T_{\text{дв}} T_\Phi \omega_2^2 \left[1 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{a_0 k_y k_6 T_{\text{дв}} T_\Phi} \right].$$

В канале амплитуды будет постоянное рассогласование, обусловленное a_y .

3. Режим $c_{x3} = -\frac{q_2 q_3}{q_1 q_4}, c_{y3}^2 = \frac{q_3}{q_4}, a_{x1} = a_{y3} = 0$.

Система устойчива при

$$-2\alpha_2 + \frac{\epsilon \alpha_2^2}{\alpha_2^2 + \omega_2^2} \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] < 0,$$

4. Режим $c_{x4} = -\frac{4}{5} \frac{q_2 q_8}{q_1 q_7} - \frac{1}{5} \frac{q_2 q_3}{q_1 q_4}, c_{y4}^2 = \frac{6}{5} \frac{q_8}{q_7} - \frac{1}{5} \frac{q_3}{q_4}$,

$$a_{x1} = 0, a_{y4}^2 = \frac{4}{5} \frac{q_3}{q_4} - \frac{4}{5} \frac{q_8}{q_7}$$

существует при $(2\omega_2^2 + \alpha_2^2) \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] > \frac{\alpha_2 (\alpha_2^2 + \omega_2^2)}{\epsilon}$

(в противном случае $a_{y4}^2 < 0, c_{y4}^2 < 0$ и задача лишена смысла).

Режим определяет автоколебания в канале измерения фазы с частотой ω_2 в случае, если

$$-\alpha_2 + \frac{\epsilon (\alpha_2^2 + 2\omega_2^2)}{\alpha_2^2 + \omega_2^2} \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] < 0,$$

$$-0,6 \alpha_2 + 0,2 \frac{\epsilon (3\alpha_2^2 + 2\omega_2^2)}{\alpha_2^2 + \omega_2^2} \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] < 0.$$

Амплитуда автоколебаний определяется

$$a_y^2 = 1,6 (\omega_2^2 + 3\alpha_2^2) \left[a_0 k_y k_6 - \frac{T_\Phi (1 + k_3 k_4) + T_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}} T_\Phi} \right] + 4,8 \frac{\alpha_2}{\epsilon} \times \\ \times (\alpha_2^2 + \omega_2^2).$$

При невыполнении двух последних условий, колебания в канале измерения фазы будут возрастать.

Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова позволило снизить порядок уравнений движения компенсатора с шестого до третьего и исследовать режимы, присущие этой двумерной системе.

Для обеспечения устойчивости компенсатора необходимо выполнить условия первого режима. Выполнение этих условий без дополнительных мер возможно только в узком диапазоне амплитуд входных сигналов, так как в левую часть второй подсистемы (4) входит a_0 .

Расширение динамического диапазона компенсатора может быть достигнуто регулированием коэффициентов передачи УВЧ (k_y) и образцового делителя напряжения (k_d) в зависимости от a_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1955.
2. Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, изд. Наука, М., 1969.
3. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления, под ред. Ю. И. Топчева, изд. Машиностроение, М., 1970.
4. Н. В. Бутенин, Элементы теории нелинейных колебаний, Судпромгиз, Л., 1962.

Ленинградский институт точной
механики и оптики

Поступила в редакцию
5 октября 1970 г.

INVESTIGATION INTO POLAR COORDINATES COMPENSATOR STABILITY

A. V. Filippov

Equations describing motions of a two-dimensional nonlinear system are presented and their transformation into the form suitable for a stability analysis is considered. Existence conditions for steady regimes are studied and the necessity of a parametric regulation of channels according to the feedback voltage amplitude is indicated.

УДК 519.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА ВРЕМЕНИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРИОРИТЕТАМИ

B. Ф. Билюба, B. P. Савельев

Рассматривается алгоритм оптимального разделения с приоритетами ресурса времени в одной задаче обслуживания, для случая неравных коэффициентов приоритетов.

В работах [1-3] и др. рассматривалась задача оптимального обслуживания потока объектов при фиксированной зоне обслуживания. При этом одна задача оптимального распределения с приоритетами ресурса времени сведена к следующей задаче выпуклому программированию [3].

На множестве G векторов $T = (\tau_1, \dots, \tau_M)$ евклидова пространства E_M , определяемом соотношениями

$$\sum_{k=1}^M \tau_k = t_M^h - t_1^h, \quad (1)$$

$$t_{k+1}^h - t_1^h \leq \sum_{l=1}^k \tau_l \leq t_k^h - t_1^h \quad (k = 1, \dots, M-1), \quad (2)$$

$$\tau_k \geq \tau_{\min} \quad (k = 1, \dots, M), \quad (3)$$

$$t_k^h \leq t_{k+1}^h, \quad t_k^h \leq t_{k+1}^h, \quad t_{k+1}^h < t_k^h \quad (k = 1, \dots, M-1), \quad (4)$$

где h — начало, k — конец времени пребывания k -го объекта в зоне обслуживания, найти оптимальный вектор T^0 , удовлетворяющий условию

$$F(T^0) = \min_{T \in G} F(T), \quad (5)$$

где

$$F(T) = \sum_{k=1}^M C_k f(\tau_k) \quad (f(\tau_k) \in C_{[0, \infty)}^2), \quad (6)$$

$C_k f(\tau_k)$ — является функцией эффективности обслуживания k -го объекта,

$$f'(\tau_k) < 0, \quad f''(\tau_k) > 0, \quad 0 < C_k < \infty \quad (k \in \{1, \dots, M\}). \quad (7)$$

Для случая равных коэффициентов приоритетов C_k и $\tau_{\min} = 0$ в работе [3] проведено исследование модифицированного алгоритма μ , γ -сечений для нахождения точного решения задачи на конечное число шагов, не превосходящее M .

Ниже проводится исследование задачи и обобщение алгоритма для случая неравных приоритетов при условии, что соотношения (3), (6) изменены на

$$\tau_k > 0 \quad (k = 1, \dots, M), \quad (3a)$$

$$f(\tau_k) \in C_{(0, \infty)}^2 \quad (\lim_{\tau_k \rightarrow 0} f'(\tau_k) = -\infty) \quad (6a)$$

Определение 1. Задача математического программирования, отличающаяся от постановки (1) — (7) отсутствием ограничений (2), (4), называется базисной, а соответствующее решение $T^b(\tau_1^b, \dots, \tau_M^b)$ — базисным.

Определение 2. Вектор T называется допустимым в базисной задаче, если он удовлетворяет ограничениям (1), (3 а).

Утверждение 1. Для того, чтобы допустимый вектор T^b был базисным решением, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$C_k f'(\tau_k^b) = C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^b) \quad (k = 1, \dots, M-1). \quad (8)$$

Необходимость. Равенства (8) являются необходимым условием стационарности точки T^b , доставляющей условный экстремум функции (6) при условии (1), и легко устанавливаются с помощью множителя Лагранжа.

Достаточность. В силу условия (7) целевая функция (6) является строго выпуклой. Следовательно [4], базисное решение единственное. Поэтому допустимое решение, удовлетворяющее (8), не может не быть базисным.

Замечание. Существование базисного решения устанавливается с помощью соотношений (1), (6 а), (8).

Из утверждения 1 следует, что базисное решение может быть получено решением системы нелинейных уравнений (1), (8).

Для удобства рассмотрения введем переменные

$$\omega_k = t_1^h + \sum_{l=1}^k \tau_l \quad (k = 1, \dots, M-1), \quad \omega_0 = t_1^h, \quad \omega_M = t_M^h. \quad (9)$$

Утверждение 2. Если допустимый вектор T^0 задачи (1) — (2), (3 а), (4) — (5), (6 а), (7) является оптимальным решением, то необходимо выполнение следующих предложений:

- 1) если $\omega_k^0 = t_{k+1}^h$, то $C_k f'(\tau_k^0) \geq C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^0)$;
- 2) если $\omega_k^0 = t_k^h$, то $C_k f'(\tau_k^0) \leq C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^0)$;
- 3) если $t_{k+1}^h < \omega_k^0 < t_k^h$, то $C_k f'(\tau_k^0) = C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^0)$

и обратно,

- 4) если $C_k f'(\tau_k^0) > C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^0)$, то $\omega_k^0 = t_{k+1}^h$;
- 5) если $C_k f'(\tau_k^0) < C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^0)$, то $\omega_k^0 = t_k^h$;
- 6) если $C_k f'(\tau_k^0) = C_{k+1} f'(\tau_{k+1}^0)$, то $t_{k+1}^h \leq \omega_k^0 \leq t_k^h$.

Доказательство (10) проводится способом от противного, а (11) есть следствие (10).

Лемма 1. Пусть вектор $T^0(\varepsilon)$ есть оптимальное решение задачи (1) — (2), (3 а), (4) — (5), (6 а), (7) при условии, что t_M^h в (1) заменено на $t_M^h(\varepsilon) = t_M^h + \varepsilon$, а вектор $T^0(\delta)$ есть оптимальное решение рассматриваемой задачи при условии, что t_k^h в (1), (2), (4) заменено на $t_k^h(\delta) = \max \{t_k^h, t_1^h + \delta\}$,

где $0 < \varepsilon < \infty$, $0 < \delta < t_1^h - t_1^h$ $(k = 1, \dots, M)$.

Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\tau_M^0(\varepsilon) > \tau_M^0, \quad (12)$$

$$\tau_1^0(\delta) \leq \tau_1^0. \quad (13)$$

Доказательство. 1) Предварительно установим, что если предположить

$$\tau_k^0(\varepsilon) \leq \tau_k^0 \quad (k = M, M-1, \dots, m), \quad (14)$$

то или а) это невозможно или б)

$$\tau_{m-1}^0(\varepsilon) \leq \tau_{m-1}^0, \quad (15)$$

где $m = M, \dots, 2$.

В силу (2), (9) доказательство разбивается на две имеющиеся возможности:

а) $\omega_{m-1}^0 = t_{m-1}^k$. Тогда из условия (2) для вектора $T^0(\varepsilon)$ следует

$$t_1^h + \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k^0(\varepsilon) \leq t_{m-1}^k = \omega_{m-1}^0 = t_1^h + \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k^0. \quad (16)$$

Суммируя неравенства (14) и (16) и воспользовавшись условием (1) для вектора $T^0(\varepsilon)$, получим

$$t_M^k + \varepsilon = t_1^h + \sum_{k=1}^M \tau_k^0(\varepsilon) \leq t_1^h + \sum_{k=1}^M \tau_k^0 = t_M^k \quad \text{или } \varepsilon \leq 0,$$

что противоречит положительности ε . Следовательно, предположение (14) в этом случае невозможно;

б) $\omega_{m-1}^0 < t_{m-1}^k$. Покажем, что имеет место (15). Для этого предположим противное, т. е. $\tau_{m-1}^0(\varepsilon) > \tau_{m-1}^0$. Тогда из свойства (7) функции $f(\tau_k)$ и необходимых условий (10) оптимальности вектора T^0 следует, что

$$C_{m-1} f'(\tau_{m-1}^0(\varepsilon)) > C_{m-1} f'(\tau_{m-1}^0) \geq C_m f'(\tau_m^0) \geq C_m f'(\tau_m^0(\varepsilon)),$$

откуда по необходимому условию (11) оптимальности вектора $T^0(\varepsilon)$ получим, что $\omega_{m-1}^0(\varepsilon) = t_m^h$. С другой стороны, $\omega_{m-1}^0(\varepsilon) = t_M^k + \varepsilon - \sum_{k=m}^M \tau_k^0(\varepsilon)$ в соответствии с соотношениями (9) для $T^0(\varepsilon)$. Используя (14), получим

$$\sum_{k=m}^M \tau_k^0(\varepsilon) = t_M^k + \varepsilon - \omega_{m-1}^0(\varepsilon) \leq \sum_{k=m}^M \tau_k^0 = t_M^k - \omega_{m-1}^0,$$

откуда следует неравенство $t_m^h > \omega_{m-1}^0$, что противоречит (2) и завершает доказательство случая б).

Далее, если предположить, что неравенство (12) неверно, то или в случае а) это невозможно, или в случае б) методом математической индукции устанавливаем из (14) и (15), что $\tau_k^0(\varepsilon) \leq \tau_k^0 (k = 1, \dots, M)$.

Однако это приводит к соотношению $t_M^k + \varepsilon = \sum_{k=1}^M \tau_k^0(\varepsilon) + t_1^h \leq t_1^h + \sum_{k=1}^M \tau_k^0$, откуда следует, что $\varepsilon \leq 0$. Последнее неравенство противоречит условию леммы. Следовательно, случай б) также невозможен, а неравенство (12) справедливо.

2) Доказательство (13) проводится аналогично.

Лемма 2. Пусть $T^0(-\varepsilon)$ есть оптимальное решение задачи (1)–(2), (3 а), (4)–(5), (6 а), (7) при условии, что t_k^k заменено на $t_k^k(-\varepsilon) = \min\{t_M^k - \varepsilon, t_k^k\}$, $0 < \varepsilon < t_M^k - t_M^h$, а $T^0(-\delta)$ есть оптимальное решение рассматриваемой задачи при условии, что t_1^h заменено на $t_1^h(-\delta) = t_1^h - \delta$, $0 < \delta < \infty$.

Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\tau_M^0(-\varepsilon) \leq \tau_M^0,$$

$$\tau_1^0(-\delta) > \tau_1^0.$$

Доказательство проводится как и для леммы 1.

Теорема. Пусть вектор T^6 является базисным решением, а вектор T^0 – оптимальным решением задачи (1)–(2), (3 а), (4)–(5), (6 а), 7 и

$$\mu_k = \omega_{k-1}^6 - t_k^h, \quad (17)$$

$$\nu_j = \min \mu_k \quad (k \in \{2, \dots, M\}), \quad (18)$$

$$\nu_k = t_k^k - \omega_k^6, \quad (19)$$

$$\nu_i = \min \nu_k \quad (k \in \{1, \dots, M-1\}). \quad (20)$$

Тогда, если

1) $\mu_j \geq 0$ и $\nu_i \geq 0$, то необходимо

$$\omega_k^0 = \omega_k^6 \quad (k = 1, \dots, M-1); \quad (21)$$

2) $\mu_j < 0$, то необходимо

$$\omega_{j-1}^0 = t_j^h; \quad (22)$$

3) $\nu_i < 0$, то необходимо

$$\omega_i^0 = t_i^k. \quad (23)$$

Доказательство. 1) Из (9), (19) и неравенств $\mu_j \geq 0$, $\nu_i \geq 0$ следует, что вектор T^6 удовлетворяет ограничениям (2), а условия (1), (3 а) выполняются из определения базисного решения. Тогда вектор $T^6 \in G$, где область G принадлежит области определения базисного решения G^6 . Поэтому справедливо соотношение

$$F(T^6) = \min_{T \in G \cap G^6} F(T),$$

т. е. вектор T^6 есть оптимальное решение рассматриваемой задачи. В силу единственности оптимального решения T^0 следует равенство $T^0 = T^6$, или (21).

2) Пусть $\mu_j < 0$. Предположим, что равенство (22) не выполняется, т. е. $\omega_{j-1}^0 \neq t_j^h$. Тогда из (2) следует, что $t_j^h < \omega_{j-1}^0 \leq t_{j-1}^k$. Далее, пользуясь необходимыми условиями (10) оптимальности вектора T^0 , получим

$$C_{j-1} f'(\tau_{j-1}^0) \leq C_j f'(\tau_j^0). \quad (24)$$

С другой стороны, покажем, что неравенство (24) невозможно. Для этого приведем следующее предварительное рассмотрение:

а) из (1), (9), (17) и того факта, что $\mu_j < 0$, следует

$$\sum_{k=1}^{j-1} \tau_k^6 < t_j^h - t_1^h, \quad (25)$$

$$\sum_{k=j}^M \tau_k^6 > t_M^h - t_j^h, \quad (26)$$

а из (18) при $2 \leq l \leq j-1$ получим, что

$$\sum_{k=l}^{j-1} \tau_k^6 \leq t_j^h - t_l^h \quad (27)$$

и при $j+1 \leq l \leq M$

$$\sum_{k=j}^{l-1} \tau_k^6 \geq t_l^h - t_j^h; \quad (28)$$

б) рассмотрим две задачи вида (1) — (7), для которых соотношения (1), (2), (7) заменены, соответственно, на следующие:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \tau_k = t_j^h - t_1^h; \quad (1a)$$

$$t_{k+1}^h - t_1^h \leq \sum_{l=1}^k \tau_l \leq \tilde{t}_k^h - t_1^h \quad (k = 1, \dots, j-2); \quad (2a)$$

$$F(T_1) = \sum_{k=1}^{j-1} C_k f(\tau_k), \quad (7a)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{t}_k^h &= \min \{t_j^h, t_k^h\} \quad (k = 1, \dots, j-1), \\ \sum_{k=j}^M \tau_k &= t_M^h - t_j^h; \end{aligned} \quad (16)$$

$$t_{k+1}^h - t_j^h \leq \sum_{l=j}^k \tau_l \leq t_k^h - t_j^h \quad (k = j, \dots, M-1), \quad (26)$$

$$F(T_2) = \sum_{k=j}^M C_k f(\tau_k). \quad (76)$$

Пусть вектор $T^1 = (\tau_1^1, \dots, \tau_{j-1}^1)$ есть оптимальное решение первой, а $T^2 = (\tau_j^2, \dots, \tau_M^2)$ — оптимальное решение второй задачи. Тогда покажем, что

$$\tau_{j-1}^1 \geq \tau_{j-1}^6. \quad (29)$$

Предположим противное, т. е. $\tau_{j-1}^1 < \tau_{j-1}^6$. Из (27) при $l = j-1$ и (9) легко видеть, что $t_{j-1}^h < \omega_{j-2}^1$. Далее покажем, что если при $n = j-1, \dots, m$ ($m = j-1, \dots, 2$)

$$\tau_n^1 < \tau_n^6, \quad (30)$$

$$t_n^h < \omega_{n-1}^1, \quad (31)$$

то эти же неравенства выполняются и при $n = m-1$.

Действительно, из (31) при $n = m$ следует по необходимому условию (10) оптимальности вектора T^1 , что

$$C_{m-1} f'(\tau_{m-1}^1) \leq C_m f'(\tau_m^1),$$

откуда, используя (7), (8) и (30) при $n = m$, получаем искомое неравенство (30) при $n = m - 1$.

Для доказательства неравенства (31) при $n = m - 1$ воспользуемся (27) при $l = m - 1$ и получим $\sum_{k=m-1}^{j-1} \tau_k^6 \leq t_j^h - t_{m-1}^h$, откуда с помощью (30) при $n = j - 1, \dots, m - 1$, а также (1 а) и (9) легко видеть справедливость неравенства (31) при $n = m - 1$.

Таким образом, в предположении $\tau_{j-1}^1 < \tau_{j-1}^6$ методом математической индукции доказываются неравенства $\tau_k^1 < \tau_k^6$ ($k = 1, \dots, j - 1$).

Затем (1 а) преобразуется $t_j^h - t_1^h = \sum_{k=1}^{j-1} \tau_k^1 < \sum_{k=1}^{j-1} \tau_k^6$, что противоречит (25) и завершает доказательство (29);

в) аналогичным образом устанавливается неравенство

$$\tau_j^2 \leq \tau_j^6. \quad (32)$$

После доказательства предварительных утверждений а) — в) можно получить из уравнений (8) для базисного решения и свойств (7) функции $f(\tau_k)$ следующее соотношение:

$$C_{j-1} f'(\tau_{j-1}^1) \geq C_{j-1} f'(\tau_{j-1}^6) = C_j f'(\tau_j^6) \geq C_j f'(\tau_j^2). \quad (33)$$

Далее, пользуясь леммой 2 при $\epsilon = \omega_{j-1}^0 - t_j^h > 0$ для первой задачи и при $\delta = \epsilon$ для второй задачи, а также рассматривая оптимальное решение T^0 как суперпозицию (T_1^0, T_2^0) оптимальных решений T_1^0 и T_2^0 для первой и второй задач при условии, что t_j^h в (1 а), (2 а), (1 б), (2 б) заменено на ω_{j-1}^0 , получим окончательное неравенство в виде

$$C_{j-1} f'(\tau_{j-1}^0) \geq C_{j-1} f'(\tau_{j-1}^1) \geq C_j f'(\tau_j^2) > C_j f'(\tau_j^0). \quad (34)$$

Однако неравенство (34) противоречит (24).

Следовательно, предположение $\omega_{j-1}^0 \neq t_j^h$ верно, что завершает доказательство равенства (22).

3) В случае $\nu_i < 0$ доказательство равенства (23) проводится аналогично, с использованием леммы 1.

З а м е ч а н и е 1. Для более общего случая, когда целевая функция (6) имеет вид $F(T) = \sum_{k=1}^M f_k(\tau_k)$, где функции $f_k(\tau_k)$ принадлежат тому же классу, что и $f(\tau_k)$, теорема остается в силе. При этом формулировка и доказательства утверждений могут быть повторены с заменой $C_k f(\tau_k)$ на $f_k(\tau_k)$.

З а м е ч а н и е 2. После нахождения базисного решения T^6 теорема позволяет организовать пошаговую процедуру определения решения T^0 задачи (1), (2), (3 а), (4) — (5), (6 а), (7) таким образом, что на каждом шаге находится либо оптимальное решение $T^0 = T^6$ в случае выполнения условий 1), либо происходит понижение размерности M рассматриваемой задачи в случаях 2) или 3). В последнем варианте алгоритм заканчивается, когда $M = 1$, и задача вырождается в тригонометрическую. При этом число шагов не превышает размерности задачи.

З а м е ч а н и е 3. Поскольку базисное решение может быть найдено решением системы рекуррентных уравнений (2) и (8), либо точно,

в случае достаточно простого аналитического вида функций $f_k(\tau_k)$, либо с заданной точностью, в противном случае, то оптимальное решение T^0 может быть найдено, соответственно, либо точно, либо приближенно с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Кукеков, А. А. Первозванский, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 80 (1968).
2. В. Ф. Билюба, Н. М. Белослудцев, Ю. И. Неймарк, В. П. Савельев, М. А. Шелковников, Тр. симпозиума «Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов», 4, 28, Киев, 1969.
3. В. Ф. Билюба, в сб. «Методы управления большими системами», изд. ИГУ, Иркутск, 1970.
4. Д. Хедли, Нелинейное и динамическое программирование, изд. Мир, М., 1967.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 июня 1970 г.

INVESTIGATION INTO OPTIMAL TIME-RESOURCE SHARING IN ONE PROBLEM OF SERVICE WITH PRIORITIES

V. F. Beelyuba, V. P. Saveljev

An algorithm is considered for the optimal time-resource sharing in one problem of service with priorities for the case of unequal priority coefficients.

УДК 62—506

**ПРОСТОЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ**

P. Г. Стронгин

Предлагается простой алгоритм для поиска глобального минимума действительной функции нескольких переменных, основанный на многошаговом использовании предложенного ранее [1, 2] быстроходного алгоритма для одномерного глобального поиска. Приводятся результаты испытания алгоритма на многоэкстремальных тестовых функциях, выбираемых случайным образом из некоторого семейства. Описывается приложение метода к задаче отыскания наилучшего Чебышевского приближения.

Задача отыскания глобального экстремума функции нескольких переменных привлекает внимание многих авторов. Обычно при решении этой задачи средствами поисковой оптимизации в алгоритм поиска в той или иной форме вводится элемент случайности [3—9]. Значительно реже вместо введения случайности предлагается использовать идею перебора [10].

Метод глобального поиска, предлагаемый в настоящей работе, не связан с введением случайности или перебора, а основан на схеме многошаговой оптимизации, согласно которой задача поиска глобального экстремума (в дальнейшем, для определенности, рассматривается задача минимизации) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ сводится к последовательности одномерных задач глобальной минимизации [11], т. е.

$$\min_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) = \min_{x_1} \dots \min_{x_n} f(x_1, \dots, x_n).$$

При этом для решения возникающих одномерных задач рекомендуется использовать простой алгоритм глобального поиска [1], полученный в рамках информационно-статистического подхода к задачам поиска экстремума [12—14]. Высокая эффективность и надежность указанного одномерного алгоритма [1, 2, 14] обеспечивают эффективность предлагаемого многошагового метода для поиска глобального экстремума функций, зависящих от небольшого числа переменных.

ОДНОМЕРНЫЙ ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОИСК

Алгоритм глобального поиска (АГП), предложенный в [1, 14] для минимизации одномерной действительной функции $\varphi(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, состоит в следующем. Первые два испытания (т. е. измерения или вычисления значения функции φ) производятся на концах отрезка $[a, b]$. Любое следующее $k+1$ -е испытание проводится в точке

$$x = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \frac{z_t - z_{t-1}}{2m}, \quad (1)$$

где t определяется из

$$R(t) = \max_{1 \leq s \leq k} R(s), \quad (2)$$

причем

$$R(s) = m(x_s - x_{s-1}) + \frac{(z_s - z_{s-1})^2}{m(x_s - x_{s-1})} - 2(z_s + z_{s-1}) \quad (3)$$

и $z_s = \varphi(x_s)$ ($0 \leq s \leq k$) есть результаты испытаний, проведенных в точках x_s , нумерация которых удовлетворяет условию

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Величина m (аналог константы Липшица), входящая в выражения (1) и (3), оценивается по формуле.

$$m = \begin{cases} rM & (M > 0) \\ 1 & (M = 0) \end{cases}, \quad (4)$$

где

$$M = \max_{1 \leq s \leq k} \left| \frac{z_s - z_{s-1}}{x_s - x_{s-1}} \right|, \quad (5)$$

и r (предполагается, что $r > 1$) является параметром поиска. Поиск прекращается, если после выбора числа t из (2) выполняется условие

$$x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon, \quad (6)$$

где ε —заданная точность поиска. При этом в качестве оценки для точки глобального минимума выбирается точка x , ($0 \leq v \leq k$), для которой справедливо, что $z_v \leq z_s$ ($0 \leq s \leq k$).

Данный алгоритм глобального поиска построен в предположении [13, 14], что неизвестная минимизируемая функция φ является реализацией некоторой случайной функции, причем математическое ожидание этой случайной функции в окрестности точки x^* глобального экстремума пропорционально величине $|x - x^*|$. Однако для гладких функций, экстремум которых находится внутри отрезка $[a, b]$, более естественно предположить, что изменение среднего значения соответствующей случайной функции в окрестности глобального экстремума пропорционально $(x - x^*)^2$. Заметим, что неадекватность статистического описания в районе экстремума замедляет сходимость АГП в случае малых ε (высокая точность) [1, 2], поскольку поисковые измерения в конечном счете сосредотачиваются в окрестности глобального экстремума.

Второе обстоятельство, которое следует учитывать, связано с использованием формулы (5) для оценки относительной разности M , входящей в (1) и (3) через m . Если максимум абсолютного значения производной (или относительной разности) минимизируемой функции $\varphi(x)$ имеет место вдали от глобального экстремума, то использование (5) для оценки M приводит, как показано в [1, 2], к увеличению числа поисковых испытаний в окрестности глобального экстремума (фактически происходит сканирование этой окрестности).

Для преодоления указанных недостатков предлагается применять АГП (т. е. (1)–(6)) не к самой функции $\varphi(x)$, а к ее преобразованию

$$\Phi(x) = F(u(x)), \quad (7)$$

где

$$u(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi_{\min}}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}},$$

$$\varphi_{\min} = \min_{x \in [a, b]} \varphi(x), \quad \varphi_{\max} = \max_{x \in [a, b]} \varphi(x)$$

и $F(u)$ — выпуклая функция, причем при $u \rightarrow 0$ $F(u)$ пропорционально \sqrt{u} , а при $u \rightarrow 1$ $dF(u)/du \rightarrow 0$. В качестве функции $F(u)$ в настоящей работе использовалось выражение

$$F(u) = \sqrt{1 - (u - 1)^2}.$$

Заметим, что точки глобального минимума функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ совпадают. Однако φ_{\min} и φ_{\max} , входящие в (7), заранее обычно неизвестны. Поэтому вместо преобразования $\Phi(x)$ на каждом $k+1$ -м шаге поиска используется преобразование

$$\Phi_k(x) = F(u_k(x)),$$

где

$$u_k = u_k(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi_{\min}^k}{\varphi_{\max}^k - \varphi_{\min}^k},$$

$$\varphi_{\min}^k = \min_{0 < s < k} \varphi(x_s), \quad \varphi_{\max}^k = \max_{0 < s < k} \varphi(x_s).$$

Использование преобразования $\Phi_k(x)$ (т. е. подстановка $z_s = \Phi_k(x_s)$ ($0 \leq s \leq k$) в (1), (3) и (5)) целесообразно лишь в случае, если экстремум находится не на границе области, т. е. если выполняются неравенства

$$\varphi_{\min}^k \neq \varphi(x_0) = \varphi(a), \quad \varphi_{\max}^k \neq \varphi(x_k) = \varphi(b).$$

В противном случае преобразование не используется, и в (1), (3), (5) подставляется $z_s = \varphi(x_s)$. Описанную модификацию АГП будем называть модифицированным алгоритмом глобального поиска (сокращенно МАГП).

ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Описанный выше одномерный модифицированный алгоритм глобального поиска может быть использован для минимизации функций нескольких переменных. Подробно рассмотрим его применение для поиска глобального экстремума функций двух переменных. Обобщение на случай большого числа переменных проводится аналогично.

Рассмотрим задачу отыскания абсолютного минимума неизвестной функции $f = f(x, y)$ двух переменных, определенной в области Q (т. е. $(x, y) \in Q$) двухмерного евклидова пространства. Пусть глобальный минимум функции $f(x, y)$ находится в точке $(x^*, y^*) \in Q$, т. е.

$$f(x^*, y^*) = \min_{(x, y) \in Q} f(x, y). \quad (8)$$

Тогда справедливо [11], что

$$f(x^*, y^*) = \min_{x \in P_1} \varphi_1(x) = \min_{y \in P_2} \varphi_2(y), \quad (9)$$

где

$$P_1 = \{x : (x, y) \in Q\}, \quad P_2 = \{y : (x, y) \in Q\}$$

— проекции множества Q соответственно на ось x и ось y , а

$$\varphi_1(x) = \min_{y \in S_1(x)} f(x, y), \quad \varphi_2(y) = \min_{x \in S_2(y)} f(x, y) \quad (10)$$

— одномерные функции, определенные на этих проекциях, причем

$$S_1(x) = \{y : (x, y) \in Q\} \text{ и } S_2(y) = \{x : (x, y) \in Q\}$$

есть сечения множества Q .

Из (8) и (9) следует, что задача отыскания глобального экстремума функции $f(x, y)$ сводится к минимизации одномерной функции $\varphi_1(x)$ (или $\varphi_2(y)$), вычисление каждого значения которой, в свою очередь, согласно (10), также содержит одномерную задачу минимизации. Для решения этих одномерных задач может быть использован МАГП. Заметим, что при минимизации по разным координатам значения ϵ и r могут быть выбраны различными.

В [2] показано, что при минимизации с помощью АГП любой непрерывной одномерной функции для любого $\delta > \epsilon > 0$ существует столь большое значение параметра r , что после выполнения условия остановки (6) точки, в которых проводились поисковые испытания, образуют δ -сеть в интервале определения минимизируемой функции. Это утверждение, очевидно, остается справедливым и при минимизации по схеме (9), (10) двухмерных функций, определенных в односвязных областях. Таким образом, увеличивая r , можно достичь сколь угодно высокой надежности глобального поиска (что, конечно, приведет к увеличению числа поисковых испытаний, предшествующих выполнению условия остановки [2]).

Указанная двухшаговая схема оптимизации может быть использована для отыскания точек минимакса и максимины функции $f(x, y)$, что позволяет, в частности, определять существование седловых точек на основе проверки соотношения

$$\max_{x \in P_1} \min_{y \in S_1(x)} f(x, y) = \min_{y \in P_2} \max_{x \in S_2(y)} f(x, y).$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА

Описанный выше метод многошагового использования МАГП (сокращенно МАГП-М) для поиска глобального минимума функций нескольких переменных был спрограммирован для ЭВМ БЭСМ-3М и применен для минимизации некоторых тестовых функций двух переменных, описанных в литературе. При этом значения ϵ и r при минимизации по разным переменным были одинаковы.

В качестве первого примера рассмотрим функцию [4]

$$f_1(x, y) = - \left(1 + 8x - 7x^2 + \frac{7}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) (y^2 e^{-y})$$

$$(0 \leq x \leq 6, \quad 0,1 \leq y \leq 8).$$

Линии постоянного уровня этой функции изображены на рис. 1 а (глобальный минимум находится в точке (4, 2)). При минимизации данной функции с точностью $\epsilon = 0,1$ по схеме $\min_x \min_y f_1$ поиск прекратился через 106 шагов при $r = 1,1$ и через 121 шаг при $r = \sqrt{2}$. При минимизации по схеме $\min_y \min_x f_1$ число шагов составило соответственно 90 и 100. Во всех случаях фактическая точность отыскания глобального экстремума была не хуже 0,01.

При $r = \sqrt{2}$ в области $0,75 \leq x \leq 4,75, 0,1 \leq y \leq 8$ для этой функции была найдена точка максимины ($\max_x \min_y f_1$) и точка минимакса ($\min_y \max_x f_1$), что потребовало по 90 шагов при $\epsilon = 0,1$ и по 156 шагов

при $\epsilon = 0,01$. Совпадение найденных точек (с точностью по координате не хуже 0,001) означает наличие седла функции f_1 в данной точке.

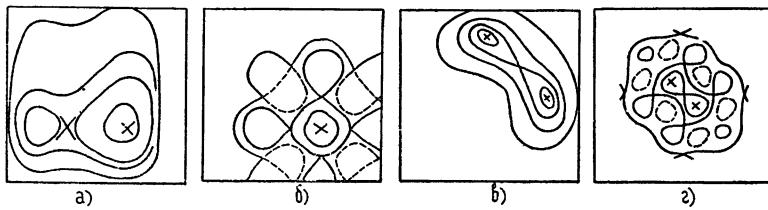


Рис. 1. Расположение линий постоянного уровня тестовых функций $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$ и $f_4(x, y)$ (соответственно а, б, в и г) в районе глобального экстремума (отмечен крестиком). Пунктирные линии соответствуют зонам „притяжения“ локальных максимумов.

Другим примером функции, имеющей единственный глобальный экстремум, является [7]

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= x^2 + y^2 - \cos 18x - \cos 18y, \\ -0.625 &\leq x \leq 0.125, \quad -0.25 \leq y \leq 0.5. \end{aligned}$$

Линии постоянного уровня этой функции представлены на рис. 1 б (глобальный минимум находится в точке $(0,0)$). Минимизация $f_2(x, y)$ по схеме $\min_x \min_y f_2$ (все приведенные ниже примеры решались по этой же схеме) при $r = \sqrt{2}$ и $\epsilon = 0,005$ закончилась после 240 испытаний, причем фактическая точность обнаружения глобального экстремума была не хуже 0,0005.

При решении систем уравнений путем минимизации суммы квадратов невязок, минимизируемая функция может иметь несколько глобальных экстремумов, соответствующих различным решениям. Например, в [15] рассмотрена система уравнений

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + y = 1,$$

решение которой сводится к минимизации

$$f_3(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + (x + y - 1)^2, \quad -2 \leq x, y \leq 2.$$

Линии постоянного уровня функции $f_3(x, y)$ иллюстрируются рис. 1 в (функция имеет два глобальных минимума в точках $(1,0)$ и $(0,1)$).

Функция [9]

$$f_4(x, y) = x^2 + y^2 + 40 \sin x \cdot \sin y, \quad -10 \leq x, y \leq 10,$$

линии постоянного уровня которой показаны на рис. 1 г, также имеет два глобальных минимума.

Результаты минимизации f_3 и f_4 при различных ϵ и r представлены в табл. 1, где столбцы с обозначениями (x_1^*, y_1^*) и (x_2^*, y_2^*) содержат найденные оценки для глобальных минимумов, а в столбец с обозначением k занесено число поисковых испытаний, предшествовавших выполнению условия остановки. Из приведенных данных следует, что при малых значениях r ($r = \sqrt{2}$) отыскивается лишь один глобальный экстремум, а при увеличении r (до $r = 2$ и $r = 3$) находятся оба экстремума, но при этом возрастает число поисковых испытаний. Таким образом, полученные экспериментальные результаты согласуются с теоретическими оценками, изложенными в [2].

Таблица 1.

$f_i(x, y)$	ϵ	r	x_1^*, y_1^*	x_2^*, y_2^*	k
$f_3(x, y)$	0,01	$\sqrt{2}$	не найден	-0,001; 1,002	228
	0,001	"	"	-0,000; 0,999	441
	0,0001	2	1,000; 0,000	0,000; 1,000	596
	0,01	3	0,999; 0,000	-0,001; 1,000	463
$f_4(x, y)$	0,1	$\sqrt{2}$	-1,464; 1,484	не найден	178
	0,05	"	-1,491; 1,494	1,486; -1,488	201
	0,1	2	-1,485; 1,488	"	399
	0,05	"	"	"	527

Испытание МАГП-М на тестовых функциях f_1, \dots, f_4 позволяет сопоставить предлагаемый метод с другими процедурами глобальной минимизации, описанными в литературе. Однако оценка эффективности метода поисковой минимизации на основании минимизации нескольких произвольно выбранных тестовых функций представляется недостаточной. Более совершенным методом оценки является минимизация случайных выборок функций из некоторой генеральной совокупности с заданными вероятностными свойствами. Одна из таких совокупностей многоэкстремальных функций двух переменных предложена в [16]. Однако вычисление значений функций из этой совокупности является достаточно трудоемким и, кроме того, расположение глобального экстремума этих функций неизвестно, что затрудняет оценку надежности метода, испытываемого на такой совокупности.

В связи с этим в настоящей работе использована другая система получения случайных выборок многоэкстремальных функций двух переменных, свободная от недостатков, отмеченных выше. Функции этой системы определены в прямоугольнике $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, где a и b — целые числа. Каждая функция системы полностью определяется заданием s пар целых чисел α_j, β_j ($0 \leq \alpha_j \leq a$, $0 \leq \beta_j \leq b$, $1 \leq j \leq s$), которые являются реализациями независимых, равномерно распределенных случайных величин. Каждая α_j, β_j ($0 \leq j \leq s$) рассматривается как комплексный корень $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ полинома степени $2s$, т. е.

$$P_{2s}(x + iy) = \prod_{j=1}^s \{[(x - \alpha_j)^2 - y^2 + \beta_j^2] + i[2y(x - \alpha_j)]\},$$

и в качестве тестовой функции берется сумма абсолютной величины полинома и некоторой унимодальной функции, имеющей минимум в точке (α_1, β_1) . Например,

$$f(x, y) = |P_{2s}(x + iy)| + g[(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2], \quad (11)$$

где коэффициент g определяет относительную глубину глобального и локальных минимумов. Заметим, что значения s и g могут либо задаваться, либо выбираться случайным образом. Функции, полученные по предложенной схеме, будут многоэкстремальными, причем их глобальный минимум расположен в точке (α_1, β_1) .

Метод глобального поиска МАГП-М был использован для минимизации случайной выборки, содержащей двадцать функций $f(x, y)$ из (11) при $a = b = 10$, $s = 3$, $g = 1000$, $\epsilon = 0,05$ и $r = 2$. Среднее число поисковых испытаний составило 550, а выборочный стандарт — 229 (данные округлены до большего целого). Фактическая точность отыскания гло-

бального экстремума во всех реализациях оказалась значительно выше заданной.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ есть действительная функция, определенная на конечном множестве $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ точек числовой прямой. Рассмотрим задачу приближения $f(x)$ функциями из класса

$$F(a, \omega, x) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi_j(x, \omega_j) + \sum_{j=m+1}^n a_j \varphi_j(x), \quad (12)$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ есть элементы соответственно n -мерного (E_n) и m -мерного (E_m) евклидова пространства, а $\varphi_j(x, \omega_j)$ ($1 \leq j \leq m$) и $\varphi_j(x)$ ($m+1 \leq j \leq n$) — заданные одномерные функции. Элементом наилучшего приближения функции $f(x)$ в классе функций (12) назовем функцию $F(a^*, \omega^*, x)$, удовлетворяющую условию

$$\max_{x \in X} |F(a^*, \omega^*, x) - f(x)| = \min_{\omega \in E_m} \min_{a \in E_n} \max_{x \in X} |F(a, \omega, x) - f(x)|.$$

В случае, когда $m = 0$ (т. е. $\varphi_j (1 \leq j \leq n)$ являются функциями лишь переменной x), задача отыскания наилучшего приближения $F(a^*, x)$ может быть решена методами линейного программирования [17]. Поэтому вектора $a^* \in E_n$, определяющий функцию $F(a^*, \omega, x)$, такую, что

$$\max_{x \in X} |F(a^*, \omega, x) - f(x)| = \min_{a \in E_n} \max_{x \in X} |F(a, \omega, x) - f(x)|, \quad (13)$$

можно найти путем решения соответствующей задачи линейного программирования [17] с помощью симплекс-метода. Тогда задача отыскания наилучшего приближения $F(a^*, \omega^*, x)$ сводится к определению точки $\omega^* \in E_m$ (и соответствующего ей вектора $a^* = a^*(\omega^*)$), в которой достигается глобальный минимум функции

$$\Delta(\omega) = \max_{x \in X} |F(a^*, \omega, x) - f(x)| = \min_{a \in E_n} \max_{x \in X} |F(a, \omega, x) - f(x)|, \quad (14)$$

причем минимизация $\Delta(\omega)$ может быть выполнена с помощью описанной выше процедуры МАГП-М. Заметим, что вычисление каждого значения функции $\Delta(\omega)$ предполагает решение задачи линейного программирования (для определения $a^* = a^*(\omega)$ из (13)).

В качестве иллюстрации рассмотрим функцию

$$f(x) = x + \sin x + \sin 1.5 x,$$

определенную на множестве равноотстоящих точек x_1, \dots, x_{41} , причем

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{41} = 4\pi.$$

Элемент $F(a^*, \omega, x)$ наилучшего приближения этой функции в классе функций

$$\begin{aligned} F(a, \omega, x) = & a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 \sin \omega_1 x + \\ & + a_5 \cos \omega_1 x + a_6 \sin \omega_2 x + a_7 \cos \omega_2 x \end{aligned}$$

отыскивался путем минимизации (с помощью МАГП-М) квадрата соответствующей функции $\Delta(\omega)$ из (14) в треугольной области $0 \leq \omega_1 \leq 4$,

$0 \leq \omega_2 \leq \omega_1^+$. При $r = \sqrt{2}$ и точности $\epsilon = 0,02$ поиск закончился после 188 вычислений значения $\Delta^2(\omega)$. Найденный при этом элемент приближения характеризуется параметрами:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,004; \quad a_2 = 0,999; \quad a_3 = 0,000; \\ a_4 &= 1,014; \quad a_5 = 0,025; \quad a_6 = 1,009; \quad a_7 = -0,039; \\ \omega_1 &= 1,496; \quad \omega_2 = 1,006; \quad \Delta = 0,009. \end{aligned}$$

Заметим, что соответствующая данному примеру функция $\Delta(\omega)$ является многоэкстремальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Стронгин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 4, 539 (1970).
2. Р. Г. Стронгин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 3, 432 (1971).
3. И. Н. Бочаров, А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, 23, № 3, 289 (1962).
4. H. E. Zellnik, N. E. Zondak, R. S. Davis, Chem. Eng. Progr., 58, № 8, 35 (1962).
5. G. J. Miltz, K. S. Fu, IEEE Trans., v. AC-11, № 3, 379 (1966).
6. Э. М. Вайсборд, Д. Б. Юдин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 5, 3 (1968).
7. Л. А. Растигина, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
8. И. Б. Моцкис, Многоэкстремальные задачи в проектировании, изд. Наука, М., 1967.
9. Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапорт, Об оптимизации независимыми детерминированными и стохастическими автоматами, Уч. зап. ГГУ и НИИ ПМК. Прикладная математика и кибернетика (Материалы к Всесоюзному межвузовскому симпозиуму по прикладной математике и кибернетике), Горький, 1967.
10. J. D. Hill, IEEE Trans., v. SSC-5, № 1, 2 (1969).
11. Ч. Кэрр, Ч. Хаув, Количественные методы принятия решений в управлении и экономике, изд. Мир, М., 1966.
12. Ю. И. Неймарк, Р. Г. Стронгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 17 (1966).
13. Р. Г. Стронгин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 118 (1969).
14. Р. Г. Стронгин, Автоматика и телемеханика, 31, № 7, 63 (1970).
15. Х. Розенброк, С. Стори, Вычислительные методы для инженеров-химиков, изд. Мир, М., 1968.
16. Д. С. Хилл, Д. Н. Гиббсон, Способ автоматической оптимизации многоэкстремальных функций, в кн. Теория самонастраивающихся систем управления, изд. Наука, М., 1969.
17. I. Vargodale, A. Young. Numer. Math., 8, 295 (1966).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 февраля 1971 г.

SIMPLE SEARCH - ALGORITHM FOR GLOBAL EXTREMUM OF FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES AND ITS USE IN FUNCTIONS APPROXIMATION PROBLEM

Strongin R. G.

A simple search-algorithm for a global minimum of a real function of several variables is suggested. This algorithm is based on multistep use of the previously proposed [1, 2] high-speed algorithm for a one-dimensional global search. The results of the algorithm's testing on a randomly chosen subfamily of multiextremum functions are presented. An application of this method to the problem of the best Chebyshev approximation solution is described.

* Для решения входящих в вычисление $\Delta(\omega)$ задач линейного программирования использовалась составленная И. Б. Казаковой программа для ЭВМ БЭСМ-3М, реализующая метод, изложенный в [17].

УДК 517.944/947

ИЗУЧЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ТРАНСПОРТНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ПЕРЕКРЕСТКАХ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

М. А. Федоткин, Б. Я. Княжицкий

На специализированной физической модели методом Монте-Карло изучается процесс движения пуассоновских транспортных потоков на перекрестке, управляемом автоматом с фиксированным ритмом переключения. Процесс убытия машин из очереди в модели был принят непрерывным с постоянной интенсивностью потока насыщения. Определяются характеристики установившегося режима на перекрестке и оптимальные параметры автомата.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В математическом аспекте задачи исследования динамики функционирования процесса движения неоднородного городского транспорта на управляемом перекрестке со сложной геометрией переезда и создания методов оптимизации таких процессов приводят к рассмотрению систем нелинейных стохастических уравнений большого порядка, аналитическое решение которых в приемлемое время чрезвычайно затруднительно [1-5]. Поэтому оказывается целесообразным исследовать процесс движения транспортных потоков на перекрестке, воспроизводя его поведение на физической модели.

В данной работе при помощи аналоговой вычислительной машины (АВМ) типа МН-7 с использованием электронных и релейных схем моделировались реальные условия движения пуассоновских потоков автомобилей через перекресток, регулирование процесса движения через который осуществлялось автоматом с фиксированным ритмом переключения. Порядок обслуживания таким автоматом потоков машин, прибывающих к перекрестку в различных направлениях, подробно описывался в работах [1, 2]. Процесс убытия машин из очереди в период действия зеленой светофорной фазы в модели был принят непрерывным с постоянной интенсивностью потока насыщения. Несколько известно авторам, аналитическое решение такой математической модели транспортного движения на перекрестке отсутствует. Физическая модель обеспечивает отображение логики функционирования автомата-светофора в реальном масштабе времени и позволяет исследовать методом Монте-Карло стохастические процессы движения транспорта на перекрестках.

При изменении интенсивностей потока насыщения и входного потока на созданной физической модели изучались такие характеристики движения установленвшегося режима, как закон распределения числа машин в очереди у перекрестка, закон распределения времени τ , пребывания машин на перекрестке и статистические средние этих распределений.

В процессе моделирования были исследованы различные режимы светофорной сигнализации на отдельном перекрестке. Это дало возмож-

ность найти оптимальные длительности светофорных циклов и отдельных фаз, обеспечивающие снижение среднего времени $\bar{\tau}$ пребывания машин на перекрестке. Полученные на физической модели оптимальные параметры жесткого управления светофорами сопоставлялись с результатами аналитических рассмотрений в работах [1, 3]. В качестве примера в работе находятся оптимальные параметры автомата, регулирующего транспортные потоки на перекрестке улиц Белинского и Студеной в г. Горьком.

2. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Функциональная схема моделирования системы регулирования уличного движения на перекрестке автомобилей с фиксированным ритмом переключения представлена на рис. 1 и состоит из следующих элементов.

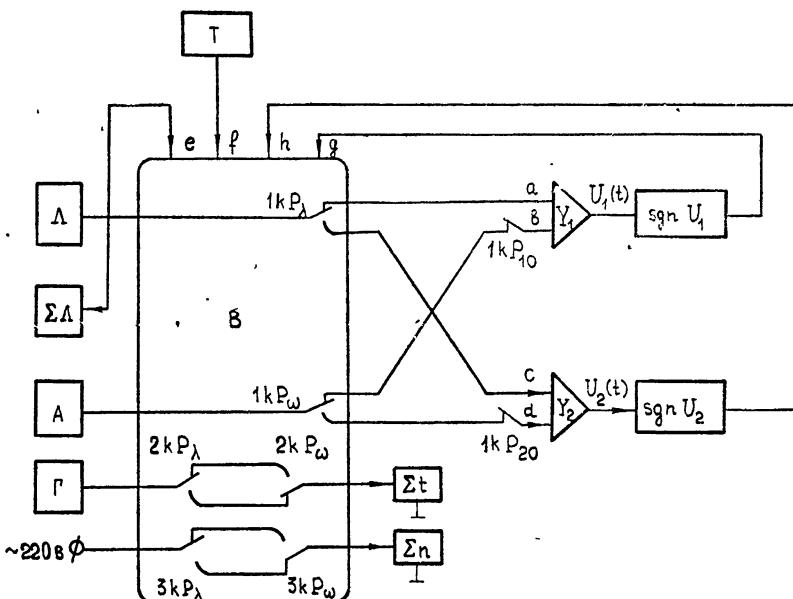


Рис. 1.

Датчик случайных импульсов напряжения (блок А). Потоки прибывающих к перекрестку автомобилей воспроизводятся блоком А в виде последовательности одинаковых по форме и амплитуде кратковременных импульсов отрицательной полярности. В блоке А радиоактивный элемент малой активности излучает γ -кванты, регистрируемые счетчиком Гейгера—Мюллера типа СИ 13Г. Со счетчика Гейгера—Мюллера импульсы последовательно поступают на усилитель, катодный повторитель, каскад усилителей и на ждущий мультивибратор. При этом минимальный интервал времени между двумя импульсами частиц радиоактивного вещества, регистрируемыми блоком А как два отдельных импульса, составляет около 0,3 сек. Поступающие с мультивибратора отрицательной полярности импульсы, интервалы времени между которыми имеют случайные законы распределения, воздействуют на контакты $1 kP_\lambda$ блока В. На основании изучения экспериментальных наблюдений за потоком импульсов на выходе блока А была принята гипотеза о показательном распределении длительностей интервалов между импульсами. В качестве примера рассмотрим проверку с помощью кри-

терия χ^2 -квадрат гипотезы о пуассоновском потоке импульсов, если статистическое среднее числа появленияй импульсов на выходе блока Λ равно 0.14 имп/сек . С этой целью из статистической табл. 1, полученной в результате проведения $n = 400$ независимых испытаний асинхронного счета числа появленияй импульсов за каждые 30 сек, определим меру χ^2 расхождения теоретического и статистического распределений по известной формуле $\chi^2 = \sum_{i=0}^{10} (m_i - np_i)^2 / np_i \approx 3.79$, где i — число появленияй импульсов на выходе блока Λ в интервале времени 30 сек, m_i — наблюдаемое число 30-секундных интервалов с этим числом появленияй импульсов, np_i — математическое ожидание числа 30-секундных интервалов с этим числом появленияй импульсов, вычисленное из распределения Пуассона.

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	5	21	49	74	84	73	48	27	11	6	2
np_i	5.99	25.19	52.90	74.03	77.76	65.32	45.72	27.43	14.40	6.72	2.82

По табл. 4 [6] для $\chi^2 = 3.79$ и для числа степеней свободы, равного 3, находим, что с вероятностью $p \approx 0.90$ за счет случайных причин степень расхождения окажется не менее 3.79.

Накопитель импульсов, имитирующих входной поток автомобилей (блок $\Sigma\Lambda$). Для получения статистического среднего числа входных импульсов в единицу времени служит электромагнитный счетчик А-440 блока $\Sigma\Lambda$, который подсчитывает общее число импульсов, поступающих с блока Λ за время испытаний.

Автомат-светофор (блок А). Блок A — это система управления светофорной сигнализацией в соответствии с заданными правилами обслуживания машин различных направлений, состоящая из электронного реле времени и релейного коммутатора. Автомат в некоторые последовательные моменты времени либо имитирует разрешение в течение $\tau_{зел}$ или $\tau_{кр}$ единиц времени на проезд через перекресток машинам одного потока и одновременно имитирует запрещение на проезд машинам другого потока, либо имитирует запрещение в течение $\tau_{ж}$ единиц времени на проезд машинам всех направлений. Автомат меняет свои сигналы (фазы) периодически, независимо от случайного движения транспорта. Итак, порядок переезда машин через перекресток моделируется блоком A , выходом которого является постоянное напряжение U_ω со знаком, обратным знаку импульсов блока Λ . Это напряжение только во время действия зеленой фазы автомата поступает на контакты $1 kP_\omega$ блока B с эталонного делителя напряжения машины МН-7.

Имитатор очереди автомобилей у перекрестка (блоки Y_1 и Y_2). В качестве наиболее рационального и простого аналога очереди автомобилей у перекрестка в модели используются операционные усилители Y_1 и Y_2 машины МН-7, работающие в режиме интегрирования. Через контакты $1 kP_\lambda$ блока B на один из входов усилителя Y_1 или усилителя Y_2 поступает напряжение, соответствующее поступлению входных импульсов с блока Λ . При большом коэффициенте передачи операционных усилителей приезду машин к перекрестку соответствует единичный

скачок напряжения $U_1(t)$ на выходе усилителя Y_1 , либо напряжения $U_2(t)$ на выходе усилителя Y_2 на величину $\Delta U = 5,9$ в, принятую за сигнал длины очереди в одну машину. Через контакты $1 kP_{\omega}$ блока B по второму входу усилителя Y_1 , либо усилителя Y_2 в зеленую фазу автомата поступает постоянное напряжение U_{ω} , определяемое интенсивностью ω переезда автомобилей через перекресток. Следовательно, отъезду машин из очереди в модели соответствует линейное убывание напряжения на выходе усилителя Y_1 , либо усилителя Y_2 . Таким образом, с помощью напряжения $U_1(t)$ на выходе усилителя Y_1 и напряжения $U_2(t)$ на выходе усилителя Y_2 обеспечивается модельное воспроизведение длины очереди автомобилей на перекрестке в момент времени t . Типичная форма одной из реализаций случайной функции $U_1(t)$ и случайной функции $U_2(t)$ при $\lambda = 0,08$ имп/сек, $\omega = 0,62$ имп/сек, $\tau_{\text{ж}} = 4$ сек, $\tau_{\text{зел}} = 32$ сек и $\tau_{\text{кр}} = 48$ сек изображена на рис. 2.

Идентичные по схеме блоки $\text{sign } U_1$ и $\text{sign } U_2$ содержат по операционному усилителю машины МН-7, двойному диоду и реле, выходом которых являются контакты $1 kP_{10}$ и соответственно $1 kP_{20}$. Между моментами поступления импульсов с блока Λ напряжение $U_1(t)$ на выходе операционного усилителя Y_1 или напряжение $U_2(t)$ на выходе операционного усилителя Y_2 линейно убывает с угловым коэффициентом, определяемым интенсивностью потока насыщения, и может становиться отрицательным. Поскольку длина очереди автомобилей у перекрестка может быть лишь неотрицательной, то контакты $1 kP_{10}$, либо $1 kP_{20}$ блоков $\text{sign } U_1$, либо, соответственно, $\text{sign } U_2$ разрывают вторые входы усилителей Y_1 , либо, соответственно, Y_2 как только $U_1(t) \leqslant 0$, либо, соответственно, $U_2(t) \leqslant 0$.

Блок G необходим при подсчете времени пребывания машин на перекрестке и является принадлежащим машине МН-7 датчиком импульсов с интервалом следования, равным одной секунде.

Генератор периодических импульсов (блок T) разрешает в некоторые последовательные моменты времени производить вычисление времени пребывания некоторой заявки в системе массового обслуживания и включает в себя схему развертки осциллографа И-5М. В модели, как правило, период следования импульсов блока T составляет около 0,9 от длительности $\tau = \tau_{\text{зел}} + \tau_{\text{кр}} + 2\tau_{\text{ж}}$ автомата. Это обстоятельство обеспечивает равномерную по периоду автомата выборку заявок на замер времени пребывания в системе.

Вычислительно-управляющее устройство (блоки Σt , Σn и B) предназначено для накопления необходимой статистической информации о качестве управления транспортными потоками и принятия на ее основе решения о выборе оптимальной программы работы автомата-светофора с жестким переключением. Блок Σt является электромагнитным счетчиком импульсов типа А-440 и определяет суммарное время пребывания в системе массового обслуживания некоторых выборочных заявок. Электромагнитный счетчик импульсов типа А-440 блока Σn подсчитывает число заявок, отобранных для определения времени пребывания в системе. Нетрудно видеть, что по показаниям электромагнитных счетчиков блока Σt и Σn можно определить среднее время $\bar{\tau}_j$ пребывания произвольной заявки в системе массового обслуживания. Блок B представляет собой релейное логическое устройство, используемое для управления работой блоков Σt и Σn , контактов реле P_{λ} и P_{ω} . Одновременно с этим блок B фиксирует момент поступления некоторой заявки в систему и момент, когда эта заявка покидает систему.

Остановимся теперь на существе работы специализированной физической модели. Взаимодействие между элементами и последовательность работы физической модели удобно пояснить на примере отдельной реализации случайной функции (рис. 2), описывающей динамику

стохастического процесса регулирования транспортного потока на перекрестке за некоторый промежуток времени от t_0 до t_{13} . Ради определенности за исходное состояние физической модели примем такой момент времени t_0 , когда отсутствует ток в управляющих обмотках реле P_λ и P_ω блока B и блок A на интервале времени от t_0 до t_3 имитирует запрещение на обслуживание требований. Пусть также напряжение

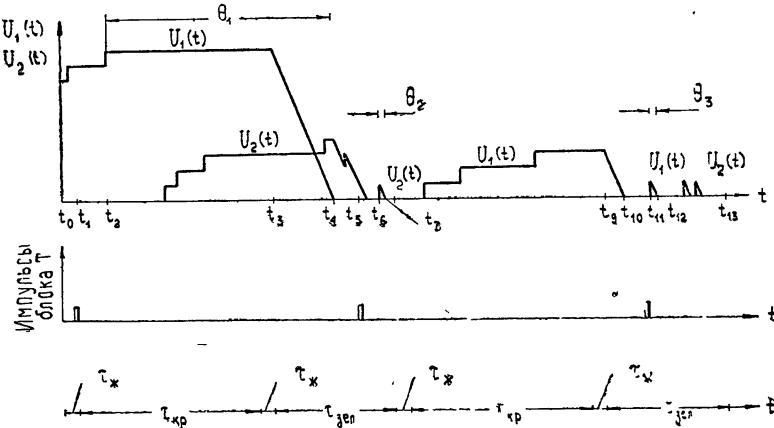


Рис. 2.

$U_2(t_0)$ на выходе усилителя Y_2 равно нулю. В этом случае в управляющей обмотке реле P_{20} блока sign U_2 течет ток, и, следовательно, контакты $1 \ kP_{20}$ разомкнуты. В момент времени t_1 импульс блока T воздействует на релейно-логическое устройство B , и как только первый поступивший после момента времени t_1 импульс очередной заявки блока Λ записывается в момент времени t_2 на усилителе Y_1 , срабатывает реле P_λ блока B . Этим, во-первых, блок B фиксирует момент времени t_2 поступления импульса заявки и, во-вторых, этот блок не реагирует на импульсы блока T до тех пор, пока поступившая в момент времени t_2 заявка не будет полностью обслужена автоматом. При этом через контакты $2 \ kP_\lambda$ импульсы блока Γ поступают в блок Σt и электромагнитный счетчик А-440 отсчитывает время пребывания данной заявки в системе. Одновременно с этим через контакты $3 \ kP_\lambda$ осуществляется питание блока Σn от сети переменного тока напряжением 220 в. Таким образом, длина очереди машин на перекрестке, как случайная функция времени, разделяется условно на две части. Первая часть (начало очереди) и, соответственно, вторая часть (конец очереди) образуются в форме напряжений на выходе усилителя Y_1 в течение времени от t_0 до t_2 включительно и, соответственно, на выходе усилителя Y_2 после момента времени t_2 . В зеленую фазу за интервал времени от t_3 до t_8 автомат имитирует разрешение на проезд машинам некоторого потока. Поэтому в течение времени от t_3 до t_4 через нормально замкнутые контакты $1 \ kP_\omega$ блока B по второму входу усилителя Y_1 поступает постоянное напряжение U_ω блока A , и напряжение $U_1(t)$ на выходе усилителя Y_1 линейно убывает до нуля. В момент времени t_4 , когда на выходе усилителя Y_1 напряжение $U_1(t) \leq 0$, срабатывает реле P_{10} блока sign U_1 , после чего контакты $1 \ kP_{10}$ разрывают второй вход усилителя Y_1 и сохраняют нулевое значение $U_1(t)$ при $t \geq t_4$. При наличии тока в управляющих обмотках реле P_λ блока B и реле P_{10} блока sign U_1 срабатывает реле P_ω , и блок B фиксирует момент окончания обслуживания заявки, поступившей в систему в момент времени t_2 . Теперь через контакты $1 \ kP_\omega$ напряжение U_ω блока A поступает по второму входу усилителя Y_2 и в промежутках между поступлениями

импульсов блока Λ напряжение $U_2(t)$ на выходе усилителя Y_2 линейно убывает. При срабатывании реле P_ω контакты $2kP_\omega$ разрывают цепь поступления импульсов времени блока Γ , и блок Σt заканчивает подсчёт времени пребывания заявки, поступившей в момент времени t_2 . Показание электромагнитного счетчика блока Σt за промежуток времени от t_2 до t_4 увеличилось на величину времени $\Theta_1 = 60$ сек пребывания заявки в системе массового обслуживания. В момент времени t_4 контакты $3kP_\omega$ разрывают цепь питания блока Σn , и значение электромагнитного счетчика блока Σn увеличивается на единицу. Если в течение времени от t_2 до t_4 блок B не реагирует на импульсы блока T , то при срабатывании реле P_ω релейно-логическое устройство модели снимает эту блокировку.

Перейдем теперь к описанию второго цикла работы физической модели. После момента времени t_4 очередь требований формируется только на выходе усилителя Y_2 в виде напряжения $U_2(t)$. Пусть в последовательные моменты времени t_5 и t_6 , соответственно, поступают очередной импульс блока T на вход релейно-логического устройства B и очередной импульс заявки блока Λ на первый вход усилителя Y_2 . Как только вновь поступившее после момента времени t_5 требование записалось на усилителе Y_2 , релейно-логическое устройство модели разрывает цепь питания управляющей обмотки реле P_λ , блокирует вход блока B от импульсов блока T и, наконец, фиксирует момент времени t_6 поступления импульса заявки. Отсутствие тока в управляющей обмотке реле P_λ блока B приводит к записи поступающих после момента времени t_6 импульсов блока Λ на усилителе Y_1 , к суммированию электромагнитным счетчиком блока Σt времени Θ_2 пребывания заявки в системе, поступившей в момент t_6 , и к замыканию цепи питания электромагнитного счетчика блока Σn . При этом начало и конец очереди заявок формируются на усилителе Y_2 и, соответственно, на усилителе Y_1 . В течение времени от t_6 до t_7 напряжение $U_2(t)$ на выходе усилителя Y_2 убывает до нулевого значения. Поэтому при $U_2(t_7) < 0$ в момент времени t_7 срабатывает реле P_{20} блока $\text{sign } U_2$ и размыкает контакты $1kP_{20}$. Одновременно релейно-логическое устройство B разрывает цепь питания управляющей обмотки реле P_ω . При отсутствии тока в управляющей обмотке реле P_ω контакты $2kP_\omega$ разрывают цепь поступления импульсов времени блока Γ на вход блока Σt и контакты $3kP_\omega$ разрывают цепь питания электромагнитного счетчика блока Σn . Следовательно, в момент t_7 показания электромагнитных счетчиков блоков Σt и Σn увеличиваются на величину $\Theta_2 = 1,6$ сек и, соответственно, на единицу. Итак, после момента t_8 физическая модель приходит в исходное состояние. В заключение описания работы физической модели необходимо отметить следующее. На промежутке времени от t_8 до t_9 автомат запрещает обслуживание заявок рассматриваемого потока и на промежутке времени от t_9 до t_{13} вновь разрешает проезд через перекресток. На интервалах времени от t_7 до t_{11} и от t_{12} до t_{13} очередь машин моделируется только на усилителе Y_1 или на усилителе Y_2 , так как в это время релейно-логическое устройство B не подсчитывает время пребывания заявок в системе.

3. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Суть метода в основном сводится к следующему. Прежде всего важно отметить, что управление независимыми пуассоновскими потоками машин автоматом с фиксированным ритмом переключения позволяет в целом изучить на модели процесс транспортного движения на перекрестке, рассматривая лишь образование очереди по каждому потоку Π_j ($j = 1, 2, \dots, m$) отдельно. Ради определенности в качестве

исходных данных задачи выберем некоторый поток с номером j , λ_j — интенсивность входного потока Π_j , ω_j — интенсивность j -го потока насыщения, $\tau_{\text{зел}} = \tau_j$ — длительность зеленой фазы для потока Π_j , $\tau_{\text{ж}}$ — длительность желтой фазы и τ — длительность периода работы автомата. Пусть $x_j(t)$ означает наибольшее целое число, не превосходящее значения величины $[U_1(t) + U_2(t)]/\Delta U$. В связи с этим под состоянием физической модели в момент времени t будем понимать значение $x_j(t)$, имитирующее длину очереди ожидающих переезда через перекресток машин потока Π_j в момент времени t . Обозначим через t_{0j} , $t_{0j} + \tau$, $t_{0j} + 2\tau$, ... специальные последовательные моменты времени, непосредственно следующие за моментами окончания разрешения переезда через перекресток для машин потока Π_j . Тогда, используя изложенный в работах [1-5] метод, нетрудно показать, что изучение случайного процесса $\{x_j(t), t \geq 0\}$, описывающего эволюцию числа машин в очереди потока Π_j , сводится к рассмотрению случайного процесса $\{x_j(t_{0j} + n\tau), n = 0, 1, 2, \dots\}$ — цепи Маркова со счетным числом состояний, эргодической при условии $\lambda_j\tau - \omega_j\tau_j < 0$. Пусть в начале каждой реализации случайного процесса $\{x_j(t_{0j} + n\tau), n = 0, 1, 2, \dots\}$ выбирается некоторое начальное состояние $x_j(t_{0j})$ физической модели и затем за время $[t_{0j}, t_{0j} + M\tau]$ выбрасывается достаточно большой начальный отрезок этой реализации. При этом за время $[t_{0j}, t_{0j} + M\tau]$ устанавливается стационарный режим переезда машин через перекресток. Обозначим через $p_j^*(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\{x_j(t_{0j} + n\tau) = k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) стационарное распределение марковского процесса $\{x_j(t_{0j} + n\tau), n = 0, 1, 2, \dots\}$. Если теперь фиксировать выборочные значения случайной функции $x_j(t)$ в последовательные моменты времени $t_{0j} + (M+1)\tau$, $t_{0j} + (M+2)\tau$, ..., $t_{0j} + (M+N)\tau$, то в силу эргодичности случайного процесса $\{x_j(t_{0j} + n\tau), n = 0, 1, 2, \dots\}$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p \left\{ \left| \frac{m_j(k)}{N} - p_j^*(k) \right| > \varepsilon \right\} = 0, \quad (1)$$

где $m_j(k)$ — число тех случаев, когда случайная функция $x_j(t)$ в последовательные моменты времени $t_{0j} + (M+1)\tau$, $t_{0j} + (M+2)\tau$, ..., $t_{0j} + (M+N)\tau$ приняла значение k . На основании центральной предельной теоремы для марковских процессов случайная величина $m_j(k)/N$ при достаточно больших N имеет асимптотически нормальное распределение, поэтому значения неизвестных стационарных вероятностей $p_j^*(0)$, $p_j^*(1)$, $p_j^*(2)$, ... можно аппроксимировать соответственно значениями $m_j(0)/N$, $m_j(1)/N$, $m_j(2)/N$, ... Для получения в результате моделирования оценки $m_j(k)/N$ с точностью ε и доверительной вероятностью α достаточно осуществить выборку объема

$$N = t_a^2 / 4\varepsilon^2, \quad (2)$$

где t_a — квантиль интегральной функции нормированного нормального распределения, соответствующий заданному уровню вероятности $(1 + \alpha)/2$. Следуя изложенной методике, выберем параметры модели, соответствующие реальным физическим условиям ($\lambda_j = 0,3 \text{ м/сек}$, $\omega_j = 1 \text{ м/сек}$, $\tau = 53,3 \text{ сек}$, $\tau_j = 18 \text{ сек}$, $\tau_{\text{ж}} = 4 \text{ сек}$) транспортного движения на перекрестке и определим на АВМ стационарный закон распределения длины очереди машин в конце зеленой фазы автомата. При измерении напряжения $U_1(t_{0j} + n\tau) + U_2(t_{0j} + n\tau)$ и последующем вычислении $x_j(t_{0j} + n\tau)$ получена выборка объема $N = 400$. Непосред-

ственno по этой выборке получаем приближенные значения для вероятностей $p_j^*(0) = m_j(0)/N = 0,565$, $p_j^*(1) = m_j(1)/N = 0,072$, $p_j^*(2) = m_j(2)/N = 0,06$ и математического ожидания $M_j^* = \sum_{k=0}^{16} km_j(k)/N = 2,23$ длины

очереди машин в конце зеленой фазы автомата. Пользуясь соотношением (2), можно утверждать, что при выборке объема $N = 400$ с доверительной вероятностью $\alpha = 0,95$ истинные значения вероятностей $p_j^*(k)$ будут отличаться от смоделированных не более, чем на величину $\epsilon = t_\alpha / 2\sqrt{N} = 0,049$, где $t_\alpha = 1,96$ (см. табл. 1 [6]). С целью сопоставления и проверки точности результатов, полученных на физической модели, приведем результаты аналитического решения для вероятностей $p_j^*(0) = 0,574$, $p_j^*(1) = 0,071$, $p_j^*(2) = 0,065$ и математического ожидания $M_j^* = 2,22$ числа ожидающих переезда машин в конце зеленой фазы автомата.

Пусть теперь $(\Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_s)$ — показание электромагнитного счетчика блока Σt в результате проведения независимых измерений времен пребывания в системе r заявок, отобранных равномерно по периоду τ . Тогда при выборке объема r и доверительной вероятности α среднее арифметическое

$$\bar{\Theta}_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \Theta_i \quad (3)$$

есть среднее время $\bar{\gamma}_j$ пребывания в системе произвольной заявки с точностью

$$\epsilon = t_\alpha \sigma / \sqrt{r}, \quad (4)$$

где σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины γ_j , определяемое приближенным значением

$$\sigma = \left[\sum_{i=1}^s (\Theta_i - \bar{\Theta}_s)^2 / (s-1) \right]^{1/2} \quad (5)$$

по ориентировочной выборке объема $s \ll r$.

Все сказанное выше относительно методики определения па физической модели среднего времени $\bar{\gamma}_j$ пребывания произвольной машины потока Π_j на перекрестке проиллюстрируем на примере со следующими конкретными условиями движения на перекрестке: $\lambda_j = 0,2$ м/сек, $\omega_j = 1$ м/сек, $\tau = 50$ сек, $\tau_j = 16$ сек, $\tau_x = 4$ сек. На модели было сделано 200 независимых измерений времени пребывания заявок в системе и результаты неполной выборки последовательно указаны в табл. 2 (в сек).

Таблица 2

4.9	12.9	24.2	21.8	2.5	22.8	35.6	32.2	8.4	11.9
1	30.2	1	19.8	31.2	1	1	4.9	31.2	34.1
14.8	1	19.8	1	19.8	27.7	35.1	1	1	24.7
35.6	3.5	1	25.7	29.2	6.4	1	28.7	31.7	4.9
34.6	4	7.4	1	8.4	28.7	17.8	8.9	1	19.8
20.8	30.7	28.7	24.7	1	30.7	8.9	33.7	5.9	19.8
34.6	1	16.8	29.7	35.1	1	31.2	1	22.3	1
21.8	1	23.3	38.6	31.7	1	32.2	42.6	1	27.2
22.8	28.2	1	38.6	1	28.7	1	1	4.9	38.1
1	37.6	34.1	21.3	34.6	27.2	30.7	1	18.8	1

Таблица заполнялась по строчкам. Из табл. 2 по формулам (3) и (5) находим приближенные значения математического ожидания

$\bar{\tau}_j = 17,46$ сек и дисперсии $\sigma_j^2 = 184,88$ сек² времени τ_j пребывания произвольной заявки потока P_j в системе. Для сравнения приведем вычисленное по формуле (п.2.1) работы [3] теоретическое значение $\bar{\tau}_j$, равное 17,5 сек. По формуле (4) имеем, что при доверительной вероятности $\alpha = 0,90$ выборка объема $r = 200$ аппроксимирует значение среднего времени пребывания $\bar{\tau}_j$ произвольной заявки потока P_j с точностью $\epsilon = 1,56$. Подобным образом на модели могут быть вычислены и другие характеристики установившегося процесса движения транспорта на управляющем перекрестке, например, математическое ожидание длины очереди в моменты окончания обслуживания машин рассматриваемого потока и закон распределения времени пребывания заявки в системе, поступившей на перекресток в произвольный момент времени.

Теперь, после того, как дана общая методика испытаний на модели, представим ряд примеров, иллюстрирующих конкретные пути использования разработанной специализированной физической модели. На описанной выше модели просчитывались характеристики $(p_j^*(k), M_j^*, \bar{\tau}_j)$ транспортного движения на перекрестках для ряда значений $\lambda_1, \lambda_2, \tau, \tau_1, \omega_1, \omega_2$ и $\tau_k = 4$ сек. В табл. 3 приведены условия транспортного движения на одном из таких перекрестков и некоторая выборка из полученных результатов счета. Для сравнения в этой таблице наряду с экспериментальными значениями $\bar{\tau}_j$, полученными методом статистических испытаний на модели, приведены теоретические значения $\bar{\tau}_j$, вычисленные по формуле (п. 2.1) работы [3]. При сравнении экспериментальных значений $\bar{\tau}_j$ с соответствующими теоретическими значениями $\bar{\tau}_j$ обнаружено некоторое различие этих значений, что обусловлено не только точностью вычислений $\bar{\tau}_j$ на модели и по формулам, но и отличием математических моделей, описанных в данной работе и работах [1, 3]. Что касается несовпадений, имеющих место между некоторыми теоретическими значениями $\bar{\tau}_j$ табл. 3 и соответствующими значениями $\bar{\tau}_j$ табл. 3 работы [3], то это объясняется только повышенной точностью вычислений $\bar{\tau}_j$ в табл. 3 данной работы.

Таблица 3

λ_j	τ	τ_1	Экспериментальные		Теоретические	
			$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_2$	$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_2$
$\lambda_1 = 0,1 \text{ м/сек}$ $\lambda_2 = 0,3 \text{ м/сек}$	20	4	9,55	8,60	9,49	8,56
		6	12,40	6,16	12,85	6,45
		8	10,77	8,23	10,79	8,24
	30	10	8,52	10,20	9,28	11,10
		6	20,60	4,50	20,73	5,09
		8	16,50	5,75	16,60	6,29
	40	10	14,00	7,20	13,87	7,55
		12	11,90	8,90	12,29	9,05

Одним из основных показателей качества работы автомата по управлению транспортными потоками является среднее время $\bar{\tau}$ пребывания машины произвольного потока на перекрестке, определяемое по формуле

$$\bar{\tau} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{\tau}_j / \sum_{j=1}^m \lambda_j. \quad (6)$$

Теперь проиллюстрируем использование приведенной табл. 3 и найдем оптимальные параметры τ и $\tau_1 = \tau_{\text{зел}}$ автомата-светофора, при которых среднее время $\bar{\tau}$ пребывания машины произвольного потока на четырехстороннем перекрестке с $\omega_1 = \omega_2 = 1 \text{ м/сек}$ принимает минимальное значение. Путем непосредственного перебора случаев и сравнения величин из табл. 3 по формуле (6) находим, что среднее время $\bar{\tau}$ пребывания машины произвольного потока на этом перекрестке минимально при $\tau = 30 \text{ сек}$ и $\tau_1 = 6 \text{ сек}$ и равно $7,72 \text{ сек}$.

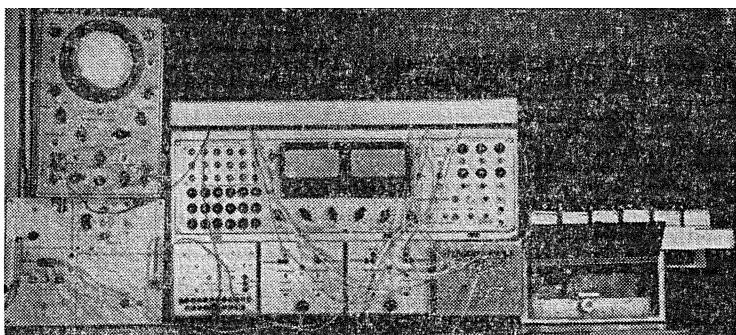


Рис. 3.

Показанный на рис. 3 опытный образец модели и предлагаемая в этой работе методика в течение 1968—1969 гг. прошли практическую проверку на конкретных задачах по определению оптимальных параметров автоматов с фиксированным ритмом переключения, регулирующих уличное движение на некоторых перекрестках г. Горького. В связи с этим заслуживают внимания результаты изучения на модели транспортного движения на перекрестке улиц Белинского и Студеной. Изучение условий транспортного движения на этом перекрестке показало, что распределение числа машин в каждом потоке соответствует закону Пуассона с параметром $\lambda_1 = 0,26 \text{ м/сек}$ по ул. Белинского и параметром $\lambda_2 = 0,065 \text{ м/сек}$ по ул. Студеной. В результате измерений на перекрестке было получено, что интенсивности потоков насыщения по ул. Белинского и ул. Студеной соответственно равны $\omega_1 = 0,64 \text{ м/сек}$ и $\omega_2 = 0,32 \text{ м/сек}$. Реализовав на модели искусственную работу рассматриваемого перекрестка, нетрудно получить результаты табл. 4. Из этой таблицы находим, что для $\tau_{\text{ж}} = 4 \text{ сек}$ среднее время пребывания произвольной машины на этом перекрестке минимально при оптимальных параметрах $\tau = 45 \text{ сек}$, $\tau_1 = 24 \text{ сек}$ автомата и равно $12,32 \text{ сек}$.

Таблица 4

τ	τ_1	$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_2$
40	20	13.25	20.90
	21	10.00	22.70
	22	9.20	29.60
45	23	11.90	20.05
	24	10.10	21.20
	25	9.35	26.80
50	26	12.60	21.30
	27	10.52	24.00
	28	10.40	25.21

Довольно интересным является то обстоятельство, что работа действующего в этом районе автомата с параметрами $\tau = 63 \text{ сек}$, $\tau_1 = 28 \text{ сек}$, $\tau_{\text{ж}} = 4 \text{ сек}$, которые были установлены в 1969 г. эмпирическим путем, обеспечивает среднюю задержку произвольной машины на этом перекрестке не менее 25 сек.

По результатам исследований транспортного движения на специализированной физической модели можно сделать следующие выводы.

1. Оптимальное управление транспортными потоками на перекрестке

требует применения возможно более коротких по длительности периодов автомата с фиксированным ритмом переключения. Нижняя граница продолжительности периода автомата определяется условием ($\lambda_j \tau_j - \omega_j \tau_j < 0$ для $j = 1, 2, \dots, m$) существования установившегося режима на перекрестке и условием ($\tau_j \geq \tau_{jk}$ для всех $j = 1, 2, \dots, m$) безопасности движения транспорта. Следовательно, в процессе минимизации среднего времени пребывания произвольной машины на перекрестке путем прямого перебора случаев общее число рассматриваемых возможностей в действительности значительно уменьшается из-за ограниченности областей изменения параметров $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}$.

2. При постановке эксперимента возникали трудности в измерении характеристик системы массового обслуживания вследствие периодического изменения со временем интенсивности импульсов блока А. Однако, как показали расчеты, при большом объеме статистических данных влияние периодического изменения интенсивности на результаты вычислений характеристик не столь велико.

3. Характеристики и оптимальные параметры системы массового обслуживания, полученные экспериментально на модели, хорошо совпадают с аналогичными характеристиками и оптимальными параметрами, полученными расчетным путем по формулам из работ [1, 3]. Очень интересным является тот факт, что оптимальные параметры автомата с фиксированным ритмом переключения зависят от закона переезда машин через перекресток значительно слабее, чем предполагалось.

4. Структура рассмотренной модели является достаточно простой, однако при желании данная специализированная физическая модель может успешно использоваться в качестве типового узла при синтезе универсальных аналоговых моделей, предназначенных для изучения и оптимизации движения на нескольких связанных перекрестках с различными законами прибытия машин и переезда через перекресток.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Ю. И. Неймарку за предложение темы и за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, М. А. Федоткин, Автоматика и телемеханика, 28, № 3, 73 (1966).
2. М. А. Федоткин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 7, 912 (1967).
3. Ю. И. Неймарк, М. А. Федоткин, А. М. Преображенская, Изв. АН СССР, сер. техн. киберн., № 5, 129 (1968).
4. М. А. Федоткин, Изв. АН СССР, сер. техн. киберн., № 3, 66 (1969).
5. М. А. Федоткин, Теория вероятностей и ее применения, 14, № 3, 488 (1969).
6. Г. Хан, С. Шапиро, Статистические модели в инженерных задачах, изд. Мир, М., 1969.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 ноября 1970 г.

INVESTIGATION AND OPTIMIZATION OF CROSS TRAFFIC USING SPECIALIZED PHYSICAL MODEL

M. A. Fedotkin, B. Ya. Knyazhytzky

A process of Poisson traffic flows at a crossing controlled by a fixed switching rhythm automaton is investigated by the Monte-Carlo method using a specialized physical model. The model process of vehicles departure from the queue was assumed continuous with a constant intensity of saturation flow. Steady-state regime characteristics of the crossing and optimal parameters of the automaton are determined.

УДК 62—50

**СРАВНЕНИЕ КАЧЕСТВА ЭМПИРИЧЕСКИХ И ОПТИМАЛЬНЫХ
АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ В ЗАДАЧАХ
МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНОГО ВЫБОРА**

Б. А. Гришанин, Д. Д. Мамаев

Выводится выражение скорости сходимости алгоритмов адаптации в случае двухальтернативного выбора решения и на его основе проводится сравнение скоростей сходимости двух важных алгоритмов теории адаптации. Выводятся условия совпадения этих скоростей. Приводится обобщение полученных результатов на многоальтернативный случай.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжается начатое в [1, 2] изучение условий совпадения качества основных алгоритмов теории адаптации, проводимое асимптотическими методами теории адаптации.

Как и в [2], рассматривается случай информационных небайесовских систем

$$[C(x, u); P(dy|x, \vartheta); P(dx|\vartheta)]$$

$(C(x, u)$ — заданная функция штрафов, $\vartheta = (\vartheta^{(1)}, \dots, \vartheta^{(r)})$ — неизвестные параметры семейств распределений $P(dy|x, \vartheta)$, $P(dx|\vartheta)$), для которых требуется построить алгоритм адаптации $u_n = \gamma_n(y_1, \dots, y_n, y)$, зависящий, помимо наблюдений y_1, \dots, y_n независимых реализаций случайной величины y , еще и от «будущей» информации y . В случае известных параметров ϑ оптимальный алгоритм $\gamma_\vartheta(y)$, естественно, не зависит от y_1, \dots, y_n и отыскивается минимизацией

$$R(\gamma|\vartheta) = \iint C(x, \gamma(y)) P(dy|x, \vartheta) P(dx|\vartheta) = \min_{\gamma}. \quad (1)$$

Однако, в рассматриваемом здесь случае параметры ϑ заранее неизвестны и требуется адаптация, т. е. учет наблюдений y_1, \dots, y_n . Алгоритмы адаптации $\gamma_n(y_1, \dots, y_n, y)$ могут быть теперь найдены из минимизации вида

$$R_n(\gamma|\vartheta_n) \equiv \iint C(x, \gamma(y)) P(dy|x, \vartheta_n) P(dx|\vartheta_n) = \min_{\gamma}, \quad (2)$$

аналогичной (1), но где вместо неизвестного значения параметров ϑ взята некоторая «разумная» оценка ϑ_n этих параметров, найденная на основе наблюдений y_1, \dots, y_n .

Минимизация среднего риска (1), (2), как это хорошо известно из теории решений, приводит к минимизации условного риска

$$r(u|y, \vartheta) \equiv \int_u C(x, u) P(dx|y, \vartheta) = \min; \quad (3)$$

$$\left(P(dx|y, \vartheta) = \frac{P(dy|x, \vartheta) P(dx|\vartheta)}{P(dy|\vartheta)}; P(dy|\vartheta) = \int_y P(dy|x, \vartheta) P(dx|\vartheta) \right),$$

которая дает алгоритм $u = \gamma_\vartheta(y)$ и алгоритмы $u_n = \gamma_n(y_1, \dots, y_n, y)$, получаемые подстановкой в (3) $\vartheta = \vartheta_n$.

Различные алгоритмы $\gamma_n(y_1, \dots, y_n, y)$, определяемые минимизацией (2), будут отличаться по способу вынесения оценки ϑ_n неизвестных параметров ϑ . Здесь будем рассматривать только два типа алгоритмов, один из которых—оптимальный алгоритм $\hat{\gamma}_n$ —основан на оценке максимума правдоподобия $\hat{\vartheta}_n = \hat{\Theta}_n(y_1, \dots, y_n)$, а другой—эмпирический алгоритм $\hat{\gamma}_n$ —основан на эмпирической оценке $\hat{\vartheta}_n$. Оценка $\hat{\vartheta}_n$ выносится по следующей схеме (см. также [2], раздел 4).

Выберем некоторую систему $\varphi^T(y) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_s(y))$ линейно-независимых функций и запишем для нее вектор математических ожиданий

$$m(\vartheta) = \int \varphi(y) P(dy | \vartheta). \quad (4)$$

Здесь ϑ неизвестны.

Вычисляя на основе наблюдений y_1, \dots, y_n эмпирическое среднее

$$\bar{m}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(y_i) \quad (5)$$

и приравнивая (4) и (5), получаем систему уравнений

$$m(\vartheta) = \bar{m}_n \quad (6)$$

для параметров ϑ , разрешимую по крайней мере при больших n . Ее решение $\hat{\vartheta}_n$ и есть эмпирическая оценка параметров ϑ .

Нашей целью будет сравнение качества

$$\Delta R_n = \int \Delta r_n(y, \vartheta) P(dy | \vartheta), \quad (7)$$

где

$$\Delta r_n(y, \vartheta) = M[r(\gamma_n(y_1, \dots, y_n, y) | y, \vartheta) - r(u_\vartheta | y, \vartheta) | \vartheta], \quad (8)$$

двух указанных типов алгоритмов при больших n ($u_\vartheta = \gamma_\vartheta(y)$ входящее в (8)—решение, выносимое по формуле (3) в случае известного ϑ).

В отличие от [2], где подобная задача решалась для случая евклидова пространства U решений u , в настоящей работе рассматривается случай многоальтернативного выбора, когда u принимает значения из некоторого конечного множества $U_m = u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_m$ и, в частности, двухальтернативный случай $u \in U_2 = u_1 \cup u_2$.

1. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ В ДВУХАЛЬТЕРНАТИВНОМ СЛУЧАЕ

Будем, как и в [2], под скоростью сходимости алгоритмов γ_n понимать асимптотический вид качества (7) при $n \rightarrow \infty$, т. е. определяем ее как главный член асимптотического разложения качества.

В рассматриваемом двухальтернативном случае функция штрафов имеет вид

$$C(x, u) = \begin{cases} C_1(x) & (u = u_1), \\ C_2(x) & (u = u_2). \end{cases} \quad (1.1)$$

Алгоритмы $u_n = \gamma_n(y_1, \dots, y_n, y)$ определяются соотношением

$$u_n = \begin{cases} u_1 & (y \in \Omega_{1,n}), \\ u_2 & (y \in \Omega_{2,n}), \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\Omega_{1,n}(y_1, \dots, y_n)$ и $\Omega_{2,n}(y_1, \dots, y_n)$ — две непересекающиеся области, на которые разбилось пространство Y случайной величины y ; в одной из них ($y \in \Omega_{1,n}$) принимает решение $\gamma_n(y_1, \dots, y_n, y) = u_1$, а в другой ($y \in \Omega_{2,n}$) — решение $\gamma_n(y_1, \dots, y_n, y) = u_2$.

Условный риск $r(\gamma_n(\cdot)|y, \vartheta)$ записывается таким образом

$$r(\gamma_n(y_1, \dots, y_n, y) | y, \vartheta) = \begin{cases} r_1(y, \vartheta_n) \equiv \int C_1(x) P(dx | y, \vartheta_n); & y \in \Omega_{1,n}; \\ r_2(y, \vartheta_n) \equiv \int C_2(x) P(dx | y, \vartheta_n); & y \in \Omega_{2,n}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Граница S_n , разделяющая области $\Omega_{1,n}$ и $\Omega_{2,n}$, определяется условием

$$f(y, \vartheta_n) \equiv r_1(y, \vartheta_n) - r_2(y, \vartheta_n) = 0 \quad \text{на } S_n. \quad (1.4)$$

Пусть S_0 — оптимальная разделяющая граница, соответствующая случаю известных значений параметров ϑ и определенная условием

$$\begin{aligned} f(y, \vartheta) &= r_1(y, \vartheta) - r_2(y, \vartheta) = 0 \quad \text{на } S_0, \\ (r_{1,2}(y, \vartheta)) &= \int C_{1,2}(x) P(dx | y, \vartheta). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае условные риски $r(y, \vartheta_n)$ и $r(y, \vartheta)$ отличаются лишь в областях, заключенных между границами S_n и S_0 , и выражение для качества (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta R_n &= M \int_{S_0}^{\delta n y_s} \int_0^{\delta n} f(y, \vartheta) P(ds | f, \vartheta) \frac{P(df | \vartheta)}{dn} dn = \\ &= M \int_{S_0}^{\delta n} \int_0^{\delta n} f(y, \vartheta) P(ds | f, \vartheta) p(f | \vartheta) \frac{df}{dn}(y, \vartheta) dn, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где интегрирование производится сначала по цилиндрическим при малых δn областям, имеющим площадь основания ds и высоту $|\delta n| y_s$, а затем по всей границе S_0 . Здесь $\delta n(y_s)$ — расстояние между границами S_0 и S_n , измеряемое по нормали к S_0 , исходящей из точки $y \in S_0$, а dn — элемент этого расстояния; ds — площадь элемента поверхности S_0 .

Разлагая внутренний интеграл в (1.6) в ряд по δn (при этом используется формула

$$\int_0^\alpha \varphi(x) dx = \varphi(\alpha) \alpha + \frac{1}{2} \varphi'(0) \alpha^2 + \dots = \varphi(0) \alpha + \frac{3}{2} \varphi'(0) \alpha^2 + \dots$$

при $\varphi(n) = f(y, \vartheta) P(ds | f, \vartheta) p(f | \vartheta) \frac{df}{dn}(y, \vartheta)$ и $\alpha = \delta n$) и отбрасывая члены выше второго порядка малости по δn , будем иметь

$$\Delta R_n = \frac{3}{2} M \int_{S_0} \delta n(y_s)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[f(y, \vartheta) \frac{df}{dn}(y, \vartheta) p(f | \vartheta) P(ds | f, \vartheta) \right] \right\}_{f=0}, \quad (1.7)$$

где производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по нормали к границе S_0 , восстановленной из точки $y_s \in S_0$.

Здесь учтено, что интегрирование по поверхности S_0 первого члена разложения, линейного по $\delta n(y)$, дает в силу (1.5) нуль.

Для вычисления дисперсии $M \delta n^2$ случайной величины δn , входящей в (1.7), обратимся к уравнениям (1.4), (1.5) для границ S_n и S_0 . Отбрасывая члены порядка δn^2 и выше, будем иметь

$$f(y, \vartheta_n) |_{S_0} \approx f(y, \vartheta_n) |_{S_n} + \frac{\partial f(y, \vartheta_n)}{\partial n} \Big|_{S_n} \delta n. \quad (1.8)$$

Учитывая (1.4) и заменяя здесь производную $\frac{\partial f}{\partial n}(y, \vartheta_n) |_{S_n}$ на $-\frac{\partial f}{\partial n}(y, \vartheta) |_{S_0}$ (что никак не скажется на точность соотношения (1.8)), получаем

$$\delta n \approx - \frac{\frac{\partial f(y, \vartheta_n)}{\partial n}}{\frac{\partial f}{\partial n}(y, \vartheta) |_{S_0}}, \quad (1.9)$$

и таким образом,

$$M \delta n^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial n}(y, \vartheta) |_{S_0} \right]^{-2} M(f(y, \vartheta_n) |_{S_0})^2. \quad (1.10)$$

Учитывая, наконец, что

$$f(y, \vartheta_n) = f(y, \vartheta) + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}(y, \vartheta) \Delta \vartheta_n + \dots \quad (1.11)$$

$$(\Delta \vartheta_n = \vartheta_n - \vartheta),$$

окончательно получаем

$$M \delta n^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial n}(y, \vartheta) |_{S_0} \right]^{-2} \frac{\partial f(y_s, \vartheta)}{\partial \vartheta} M(\Delta \vartheta_n \Delta \vartheta_n^T) \frac{\partial f(y_s, \vartheta)}{\partial \vartheta^T}. \quad (1.12)$$

В этом выражении удержаны члены до второго порядка малости по $\Delta \vartheta_n$ включительно.

Подставляя (1.12) в (1.7), находим выражение для скорости сходимости в виде

$$\Delta R_n = \frac{3}{2} \int_{S_0} \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \vartheta} M(\Delta \vartheta_n \Delta \vartheta_n^T) \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \vartheta^T} \{p(f | \vartheta) P(ds | f, \vartheta)\}_{f=0}, \quad (1.13)$$

где у переменной $y = y_s$ опущен для краткости индекс s , означающий принадлежность к поверхности S_0 . Соотношение (1.13) может быть использовано при сравнении качества алгоритмов адаптации, соответствующих различным способом вынесения оценок ϑ_n параметров ϑ .

2. УСЛОВИЯ СОВПАДЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ $\hat{\gamma}_n$ И $\bar{\gamma}_n$

Сравним скорости сходимости двух типов алгоритмов $\hat{\gamma}_n$ и $\bar{\gamma}_n$, описанных во введении.

Для этого, как видно из (1.13), нам потребуется знание матриц $M(\Delta \vartheta_n \Delta \vartheta_n^T)$, соответствующих оценкам $\hat{\vartheta}_n$ и $\bar{\vartheta}_n$, которые, как это показывалось в [2], асимптотически имеют вид

$$M(\Delta \hat{\vartheta}_n \Delta \hat{\vartheta}_n^T) = \hat{K}_n = \frac{1}{n} I^{-1}(\vartheta) \quad (\Delta \hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n - \vartheta), \quad (2.1)$$

где

$$I(\vartheta) = - \int \frac{\partial \ln P(dy|\vartheta)}{\partial \vartheta^T} \frac{\partial \ln P(dy|\vartheta)}{\partial \vartheta} P(dy|\vartheta) \quad (2.2)$$

— информационная матрица Фишера;

$$\begin{aligned} M(\Delta \bar{\vartheta}_n \Delta \bar{\vartheta}_n^T) &= \bar{K}_n = \frac{1}{n} \left(\frac{dm}{d\vartheta} \right)^{-1} K_\varphi \left(\frac{dm^T}{d\vartheta^T} \right)^{-1} \\ (\Delta \bar{\vartheta}_n &= \bar{\vartheta}_n - \vartheta), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$K_\varphi = \int [\varphi(y) - m(\vartheta)] [\varphi(y) - m(\vartheta)]^T P(dy|\vartheta) \quad (2.4)$$

— корреляционная матрица функций $\varphi(y)$, а $m(\vartheta)$ определяется соотношением (4).

Рассмотрим разность скоростей сходимости $\Delta \bar{R}_n$ и $\Delta \hat{R}_n$, получаемых из (1.13) подстановкой туда (2.3) и (2.1) соответственно

$$\begin{aligned} \Delta \bar{R}_n - \Delta \hat{R}_n &= \frac{3}{2} \int_{S_0} \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \vartheta} \left[\left(\frac{dm}{d\vartheta} \right)^{-1} K_\varphi \left(\frac{dm^T}{d\vartheta^T} \right)^{-1} - I^{-1}(\vartheta) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \vartheta^T} \{ p(f|\vartheta) P(ds|f, \vartheta) \}_{f=0} = \\ &= \frac{3}{2} \int_{S_0} \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial m} F \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial m^T} \{ p(f|\vartheta) P(ds|f, \vartheta) \}_{f=0}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$F = K_\varphi - \frac{dm}{d\vartheta} I^{-1}(\vartheta) \frac{dm^T}{d\vartheta^T}. \quad (2.6)$$

Матрица F в силу многомерного неравенства Крамера—Рао [3] является неотрицательно определенной и, следовательно, ее собственные значения F_k неотрицательны.

Пусть V — унитарное преобразование, приводящее F к диагональному виду

$$VFV^T = \begin{vmatrix} F_1 & & 0 & & \\ & F_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & F_k & \\ 0 & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

и $\tilde{m}(\vartheta) = Vm(\vartheta)$.

Разность (2.5) при этом можно представить в виде

$$\Delta \bar{R}_n - \Delta \hat{R}_n = \frac{3}{2} \int_{S_0} \sum_k F_k \left(\frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \tilde{m}_k} \right)^2 \{ p(f|\vartheta) P(ds|f, \vartheta) \}_{f=0}. \quad (2.7)$$

Необходимым и достаточным условием обращения этой разности в нуль (т. е. условием совпадения скоростей сходимости алгоритмов $\bar{\gamma}_n$ и $\hat{\gamma}_n$) является равенство

$$F_k = 0 \quad (2.8)$$

для тех номеров k , при которых

$$\left. \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \tilde{m}_j} \right|_{S_0} \neq 0. \quad (2.9)$$

Параметры \tilde{m}_j , для которых (2.9) не выполняется, т. е. выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial f(y, \vartheta)}{\partial \tilde{m}_j} \right|_{S_0} = 0, \quad (2.10)$$

означающее, что оптимальная граница S_0 от параметров \tilde{m}_j не зависит, целесообразно не рассматривать.

Поэтому выполнение равенства (2.10) на множестве ненулевой меры $P(ds|f, \vartheta)$ в общем случае невозможно лишь в некоторых изолированных точках ϑ , и его можно не принимать во внимание, поскольку представляет интерес лишь средняя разность

$$\int (\Delta \bar{R} - \Delta \hat{R}) P(d\vartheta)$$

для несингулярных распределений $P(d\vartheta)$.

В результате так же, как и в случае евклидова пространства решений [2], необходимым и достаточным условием совпадения качеств эмпирического и оптимального алгоритма при всех $P(d\vartheta)$ является условие

$$F(\vartheta) = 0 \quad (2.11)$$

при всех ϑ . Иными словами, условием указанного совпадения является эффективность оценок $\varphi(y)$ параметров $m(\vartheta)$.

3. МНОГОАЛЬТЕРНАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ

Не представляет труда обобщение изложенной теории на многоальтернативный случай, когда решение u принимает значения из конечного множества $U_m = u_1 U u_2 U \dots U u_m$. В этом случае матрица штрафов задается в виде

$$C(x, u) = \begin{cases} C_1(x) & (u = u_1) \\ \vdots & \vdots \\ C_m(x) & (u = u_m) \end{cases} \quad (3.1)$$

и алгоритмы $u^{(n)} = \gamma_n(y_1, \dots, y_n, y)$ определяются соотношением

$$u^{(n)} = \begin{cases} u_1 & (y \in \Omega_{1, n}), \\ \vdots & \vdots \\ u_m & (y \in \Omega_{m, n}), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\Omega_{1, n}(y_1, \dots, y_n), \dots, \Omega_{m, n}(y_1, \dots, y_n)$ — система непересекающихся областей, на которые разбивается пространство Y случайной величины y .

Подобно (1.3) условный риск $r(\gamma_n(\cdot) | y, \vartheta)$ записывается в виде

$$r(\gamma_n(\cdot) | y, \vartheta) = \begin{cases} r_1(y, \vartheta_n) \equiv \int C_1(x) P(dx | y, \vartheta) & (y \in \Omega_{1, n}), \\ \vdots & \vdots \\ r_m(y, \vartheta_n) \equiv \int C_m(x) P(dx | y, \vartheta) & (y \in \Omega_{m, n}) \end{cases} \quad (3.3)$$

и граница раздела $S_{ij,n}$ областей $\Omega_{i,n}$ и $\Omega_{j,n}$ ($i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$) определяется условием

$$f_{ij}(y, \vartheta) = r_i(y, \vartheta_n) - r_j(y, \vartheta_n) = 0 \text{ на } S_{ij,n}. \quad (3.4)$$

Оптимальная граница раздела этих областей $S_{ij,0}$ определяется соотношением

$$f_{ij}(y, \vartheta) = r_i(y, \vartheta) - r_j(y, \vartheta) = 0 \text{ на } S_{ij,0}, \quad (3.5)$$

аналогичным (1.5).

Так же, как и в разделе 1, находим следующее выражение для качества ΔR_n алгоритмов $\gamma_n(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \Delta R_n = & \frac{3}{2} \sum_{i < j} \int_{S_{ij,0}} \frac{\partial f_{ij}(y, \vartheta)}{\partial \vartheta} M(\Delta \vartheta_n, \Delta \vartheta_n^T) \frac{\partial f_{ij}(y, \vartheta)}{\partial \vartheta^T} \times \\ & \times \{ p(f_{ij} | \vartheta) P(ds_{ij} | f_{ij}, \vartheta) \}_{f_{ij}=0}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где суммирование идет по всевозможным разделяющим границам $S_{ij,0}$. Разность $\Delta \bar{R}_n - \Delta \hat{R}_n$ скоростей сходимости алгоритмов $\bar{\gamma}_n$ и $\hat{\gamma}_n$ в рассматриваемом случае, как легко видеть, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \bar{R}_n - \Delta \hat{R}_n = & \frac{3}{2} \sum_{i < j} \int_{S_{ij,0}} \sum_k F_k \left(\frac{\partial f_{ij}(y, \vartheta)}{\partial \tilde{m}_k} \right)^2 \times \\ & \times \{ p(f_{ij} | \vartheta) P(ds_{ij} | f_{ij}, \vartheta) \}_{f_{ij}=0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

(ср. (2.7)), откуда вытекает условие совпадения скоростей сходимости эмпирического $\bar{\gamma}_n$ и оптимального $\hat{\gamma}_n$ алгоритмов адаптации, тождественное с (2.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Гришанин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 3, 454 (1972)
2. Б. А. Гришанин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 3, 462 (1972)
3. С. Р. Рао, Линейные статистические методы и их применение, изд. Наука, М., 1968

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 ноября 1970 г.

QUALITATIVE COMPARISON OF EMPIRICAL AND OPTIMAL ALGORITHMS OF ADAPTATION IN MULTIALTERNATIVE CHOICE PROBLEMS

B. A. Grishanin, D. D. Mamayev

The expression for convergence rate of adaptation algorithms in the case of a two-alternative choice of solution is derived and basing on it a comparison of convergence rates of two algorithms, important in the adaptation theory, is carried out. Conditions for these rates equality are derived. A generalization of the obtained results to a multialternative case is given.

УДК 519.2

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ КОНТРОЛЯ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА КОЛЛЕКТИВОМ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

В. А. Добрыден

Рассмотрена задача фиксации моментов и путей переходов полумарковского процесса коллективом ненадежных наблюдателей, работающих непрерывно во времени. При различных допущениях относительно надежности наблюдателей и возможности их группирования для совместного контроля избранного пути построены стратегии контроля (управления коллективом наблюдателей), минимизирующие средний штраф, налагаемый на коллектив за каждый незафиксированный переход.

Полумарковские процессы (ПМП), введенные Леви и Смитом [1, 2], оказались достаточно точной и удобной математической моделью широкого класса современных технических систем. Оптимизация режимов работы и обслуживания таких систем ставит ряд новых задач, до настоящего времени не рассматривавшихся в литературе. В данной работе изучается задача такого рода, имеющая многообразные интерпретации в теории контроля и управления, теории надежности и массового обслуживания, теории восстановления и т. д. [3–5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется ПМП $\xi(t)$ с конечным множеством состояний ξ_i , $i \in I = \{1(1)m\}^*$. Введем обозначения: t^k — момент k -го перехода процесса $\xi(t)$ (здесь k — индекс, будем полагать $k=1(1)\infty$, $t^1=0$); $\xi_i^k = \xi(t)$ при $t^k < t < t^{k+1}$ — состояние процесса $\xi(t) = \xi_i$, в интервале между k -м и $(k+1)$ -м переходами; $\tau_i^k = t^{k+1} - t^k$ — время пребывания $\xi(t)$ в состоянии ξ_i^k . Если значение k или i несущественно, соответствующий индекс будем опускать. ПМП $\xi(t)$ задан матрицей $F = \|F_{ij}(\tau)\|_m^m$, где $F_{ij}(\tau)$ — невырожденная [6] функция распределения независимой непрерывной случайной величины η_{ij} . Реализации ПМП формируются при этом следующим образом [4]. Если $\xi^k = \xi_i$, то в момент t^k «разыгрываются» значения случайных величин η_{ij} в соответствии с i -й строкой матрицы F и принимается:

$$\begin{aligned}\tau_i^k &= \min_{r \in I} [\eta_{ir}] = \eta_{ij}, \\ \xi^{k+1} &= \xi_j.\end{aligned}\tag{1}$$

Имеется система контроля, представляющая собой множество P контролирующих органов (наблюдателей) π_v , $v \in N = \{1(1)n\}$, управляемых общим программным блоком. Каждый из наблюдателей работает непрерывно во времени, причем может контролировать только один путь l_{ij} перехода $\xi_i \rightarrow \xi_j$ одновременно. Надежность наблюдателей

* Здесь и в дальнейшем для указания состава множеств индексов используется современное обозначение [6]: $i = A(B)C$ означает, что i пробегает значения A , $A + B$, $A + 2B, \dots, C$ (аналогично тому, как задаются множества значений параметра цикла в АЛГОЛ-60: $i := A \text{ step } B \text{ until } C$).

описывается матрицей размерности $m \times n$: $p = \|p_{ij}(\tau)\|$, $i \in I$, $v \in N$, где $p_{ij}(\tau)$ — вероятность фиксации перехода из состояния ξ_i , если он имеет место при $\tau_i = \tau$, а соответствующий путь перехода контролируется наблюдателем π_v . Относительные возможности группирования наблюдателей для совместного контроля одного и того же пути выполняется одно из следующих допущений:

1) каждый из путей перехода l_{ij} может контролироваться только одним любым наблюдателем одновременно;

2) возможен одновременный контроль любого из путей перехода произвольным подмножеством наблюдателей,

а относительные надежности наблюдателей — одно из следующих:

1) $\bigvee_{v \in N} (p_{iv}(\tau) \equiv p_i(\tau))$, т. е. наблюдатели идентичны;

2) наблюдатели неравнодежны (предыдущее условие не выполняется).

Система штрафов задается матрицей $G = \|G_{ij}(\tau)\|_1^m$, где $G_{ij}(\tau)$ — размер штрафа, налагаемого на систему контроля за каждый незадфиксированный переход $\xi_i \rightarrow \xi_j$, имеющий место при $\tau_i = \tau$.

В моменты $t = t^k + 0$ (после каждого перехода) коллектив информации о текущем состоянии ξ_i^k процесса $\xi(t)$.

Требуется определить стратегии управления коллективом наблюдателей стратегии контроля ПМП, минимизирующие при различных сочетаниях указанных выше допущений средний штраф за пропуск перехода.

Частный случай поставленной задачи (при $n = 1$), возникающий в теории надежности, рассмотрен в работе [8]. В работе [9] получено решение для произвольного числа наблюдателей, полагаемых абсолютно надежными ($\bigvee_{i \in I} \bigvee_{v \in N} p_{iv}(\tau) \equiv 1$).

2. ЦЕЛЕВЫЕ ФУНКЦИИ

Получим целевые функции, к которым приводит принятие различных допущений относительно надежности наблюдателей и возможности их группирования для контроля избранного пути.

При бездействии системы контроля средний штраф за переход по пути l_{ij} при условии, что переход из состояния ξ_i совершается при $\tau_i = \tau$, может быть записан в виде [8]

$$R_{ij}(\tau) = G_{ij}(\tau) q_{ij}(\tau),$$

где $q_{ij}(\tau)$ — вероятность события (переход из состояния ξ_i , имеющий место при $\tau_i = \tau$, является переходом в состояние ξ_j). В работе [8] показано, что

$$q_{ij}(\tau) = \frac{f_{ij}(\tau) \prod_{r \neq j} [1 - F_{ir}(\tau)]}{\sum_{s=1}^m \left\{ f_{is}(\tau) \prod_{r \neq s} [1 - F_{ir}(\tau)] \right\}}.$$

Средний штраф за переход из состояния ξ_i , совершающийся при $\tau_i = \tau$, определяется формулой [8]

$$R_i(\tau) = \sum_{j=1}^m R_{ij}(\tau). \quad (2)$$

Функционирование системы контроля, эффективность которого при прочих равных условиях определяется принимаемыми допущениями

относительно надежности и возможности группирования наблюдателей, позволяет уменьшить значение $R_i(\tau)$.

Допущения 1—1. Определение. Назовем стратегией контроля ПМП матрицу

$$X = \|\chi_{ij}(\tau)\|_1^m, \quad (3)$$

где $\chi_{ij}(\tau)$ — индикатор контролируемости пути l_{ij} , т. е.

$$\chi_{ij}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если при } t = t^k + \tau \leq t^{k+1}, \quad \tau > 0, \\ & \text{путь } l_{ij} \text{ контролируется,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ввиду полумарковости процесса $\xi(t)$ строки матрицы X (будем называть их i -стратегиями) не зависят друг от друга и от значения k (номера перехода ПМП), поэтому в дальнейшем будем считать значение i произвольным, но фиксированным, а вместо „момент $t = t^k + \tau \leq t^{k+1}$, $\tau > 0$ “, где значение k произвольно“, будем для краткости говорить „момент τ “. Это замечание справедливо для всех рассмотренных ниже стратегий и в дальнейшем подразумевается без специальных оговорок.

Контроль пути l_{ij} в момент τ приводит к уменьшению среднего штрафа за пропуск перехода $\xi_i \rightarrow \xi_j$ при $\tau_i = \tau$ до величины

$$R_{ij}^1(\tau) = G_{ij}(\tau) q_{ij}(\tau) [1 - p_i(\tau) \chi_{ij}(\tau)],$$

следовательно, целевая функция может быть записана в виде

$$\begin{aligned} R_i^1(X) &= \sum_{j=1}^m R_{ij}^1(\tau) = \\ &= \sum_{j=1}^m R_{ij}(\tau) [1 - p_i(\tau) \chi_{ij}(\tau)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через $L_i = \{l_{ij} : R_{ij}(\tau) \neq 0\}$ множество путей перехода из состояния ξ_i , контроль которых в момент τ может уменьшить средний штраф (2). Пусть количество элементов множества L_i равно m_i . Будем предполагать, что при рассматриваемых значениях i и τ выполняется условие

$$m_i > n, \quad (5)$$

так как в противном случае решение задачи тривиально

$$l_{ij} \in L_i \Rightarrow \chi_{ij}(\tau) = 1,$$

при этом некоторые наблюдатели остаются в резерве.

При выполнении условия (5) областью определения функции (4) при фиксированном значении τ является множество n -сочетаний из m_i элементов.

Допущения 1—2. Определение. Назовем стратегией контроля ПМП матрицу размерности $m \times n$

$$J = \|j_{i,v}(\tau)\| \quad (i \in I, \quad v \in N), \quad (6)$$

где $j_{i,v}(\tau)$ — второй индекс пути l_{ij} , контролируемого в момент τ наблюдателем π_v .

На элементы строк матрицы J наложено естественное ограничение: любой из индексов $j \in I$ может встретиться в строке не более одного

раза. Пусть $I_i = \{j : l_{ij} \in \Delta_i\}$, $I_{ii} = J_i(\Pi)$, где J_i — инъективное отображение $\Pi \rightarrow I_i$, определяемое i -стратегией (6). При этом, очевидно,

$$j \in I_{ii} \Rightarrow p_{iJ_i^{-1}(j)}(\tau) \neq 0,$$

$$j \notin I_{ii} \Rightarrow p_{iJ_i^{-1}(j)}(\tau) = 0,$$

т. е. вероятность фиксации перехода по неконтролируемому пути равна нулю. Контроль пути l_{ii} наблюдателем π_i , $v = J_i^{-1}(j)$, приводит к уменьшению среднего штрафа на этом пути за переход из ξ_i в момент τ до величины

$$R_{ij}^{1,2}(\tau) = R_{ij}[1 - p_{iJ_i^{-1}(j)}(\tau)],$$

следовательно, целевая функция может быть записана в виде

$$R_i^{1,2}(J) = \sum_{j=1}^m R_{ij}^{1,2}(\tau). \quad (7)$$

При фиксированном значении τ областью определения функции (7) является множество инъективных отображений Π в I_i , т. е. множество n -перестановок из m_i элементов.

Допущение 2—1. Определение. Назовем стратегией контроля ПМП матрицу

$$N = \|n_{ij}(\tau)\|_1^m, \quad (8)$$

где $n_{ij}(\tau)$ — число наблюдателей, контролирующих путь l_{ij} в момент τ .

На выбор величин $n_{ij}(\tau)$ налагается очевидное ограничение

$$\sum_{j=1}^m n_{ij}(\tau) \leq n. \quad (9)$$

Целевая функция может быть записана в виде

$$R_i^{2,1}(N) = \sum_{j=1}^m R_{ij}^{2,1}(\tau), \quad (10)$$

где

$$R_{ij}^{2,1}(\tau) = R_{ij}(\tau)[1 - p_i(\tau)]^{n_{ij}(\tau)}.$$

При фиксированном значении τ областью определения функции (10) является множество размещений n одинаковых предметов (наблюдателей) по m_i различным ячейкам (путям), содержащее $\frac{(m_i + n - 1)!}{n!(m_i - 1)!}$ элементов [7].

Допущение 2—2. Стратегией контроля служит в этом случае матрица (6) при отсутствии ограничений, налагаемых на число вхождений элемента j в ее строки (естественно, это число не превосходит n).

Проведем факторизацию множества N отношением эквивалентности B , которое определим следующим образом

$$(v_1, v_2) \in N_{ij} \Leftrightarrow j_{lv_1}(\tau) = j_{lv_2}(\tau), \quad (11)$$

где N_{ij} — элемент фактор-множества N/B , содержащий индексы наблюдателей, контролирующих в момент τ путь l_{ij} .

Обозначим через L_{2i} множество путей, контролируемых в момент τ . Ясно, что i -стратегия (6) определяет биективное отображение $L_{2i} \rightarrow N/B$, причем l_{ij} не принадлежит $L_{2i} \Rightarrow N_{ij} = \emptyset$.

Средний штраф на пути l_{ij} за пропущенный переход из ξ_i при $\tau_i = \tau$ выразится тогда формулой

$$R_{ij}^2(\tau) = R_{ij}(\tau) \prod_{v \in N_{ij}} [1 - p_{iv}(\tau)], \quad (12)$$

а целевая функция приобретает вид

$$R_i^2(J) = \sum_{j=1}^m R_{ij}^2(\tau), \quad (13)$$

где множества N_{ij} в выражении (12) определяются согласно (11) i -стратегией J .

При фиксированном значении τ область определения функции (13) представляет собой множество размещений n различных предметов по m_i различным ячейкам, содержащее m_i^n элементов.

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ

Построение матриц X , J и N , элементами которых служат функции времени, представляет собой вариационную задачу, однако, полу-марковость процесса $\xi(t)$ и принятая система штрафов приводят к целевым функциям, обладающим марковским свойством: при любом значении τ оптимальное распределение наблюдателей по путям полностью определяется значениями $q_{ij}(\tau)$, $G_{ij}(\tau)$ и $p_{iv}(\tau)$ независимо от предыстории процесса. Это обстоятельство сводит вариационную задачу отыскания оптимальных стратегий (3), (6), (8) к задаче минимизации функций (4), (7), (10), (13) при фиксированном произвольном значении τ . Ниже получены эффективные процедуры поиска строго оптимальных стратегий для целевых функций (4), (7), (10) и квазиоптимальной—для целевой функции (13).

Целевая функция (4). На множестве L_i введем отношение слабого порядка (рефлексивное и транзитивное), которое определим следующим образом:

$$R_{ir}(\tau) \leq R_{is}(\tau) \Rightarrow (l_{ir}, l_{is}) \in T. \quad (14)$$

На том же множестве введем отношение линейного порядка Γ , на выбор которого наложим ограничение:

$$(l_{ir}, l_{is}) \notin E \Rightarrow [(l_{ir}, l_{is}) \in T \Leftrightarrow (l_{ir}, l_{is}) \in \Gamma], \quad (15)$$

где E — отношение эквивалентности, порожденное отношением T [8]. Благодаря ограничению (15) отношение Γ сохраняет линейный порядок, устанавливаемый отношением T среди элементов, не имеющих подобных. Отметим, что способ упорядочения элементов, принадлежащих классу эквивалентности L_i/E , содержащему более одного элемента, в принятой постановке задачи не существен. В качестве примера дадим следующее возможное определение отношения Γ :

$$(R_{ir}(\tau) < R_{is}(\tau) \vee R_{ir}(\tau) = R_{is}(\tau) \wedge r < s) \Rightarrow (l_{ir}, l_{is}) \in \Gamma.$$

Назовем отношение линейного порядка Γ , удовлетворяющее выражению (15), согласованным с отношением слабого порядка T . Обозначим через $M[L_i, \Gamma]$ подмножество множества L_i , линейно упорядоченного отношением Γ , состоящее из максимального и $n-1$ непосредственно предшествующих ему элементов. Тогда оптимальная стратегия (3) определится следующим образом:

$$l_{ij} \in M[L_i, \Gamma] \Rightarrow \chi_{ij}(\tau) = 1,$$

т. е. поиск экстремума (4) сводится к элементарной процедуре формирования множества $M[L_i, \Gamma]$.

Целевая функция (7). Введем на множестве Π отношение Γ_π линейного порядка, согласованное с отношением слабого порядка T_π , определяемым выражением (14) при подстановке $p_{ij}(\tau)$ вместо $R_{ij}(\tau)$ и (π_r, π_s) вместо (l_{ir}, l_{is}) . Будем считать элементы цепей Π и L_i пронумерованными, причем максимальный элемент является первым.

Теорема 1. Оптимальная стратегия J определяется выражением

$$S(\pi_v) = l_{ir} \Rightarrow j_{ir}(\tau) = r,$$

где S — биективное отображение $\Pi \rightarrow M[L_i, \Gamma]$, ставящее в соответствие k -му элементу цепи Π k -й элемент цепи L_i .

Доказательство. Очевидно, каждая i -стратегия S_a при фиксированном значении τ задает инъективное отображение $\Pi \rightarrow L_i$. Пусть при этом образ Π в L_i не совпадает с $M[L_i, \Gamma]$. Тогда

$$\exists_{s \in I} l_{is} \notin S_a(\Pi) \wedge l_{is} \in M[L_i, \Gamma]$$

и, следовательно, i -стратегия S_b , отличающаяся от S_a только тем, что

$$S_a(\pi_v) = l_{ir} \notin M[L_i, \Gamma] \Rightarrow S_b(\pi_v) = l_{is} \in M[L_i, \Gamma],$$

по крайней мере, не увеличивает значение целевой функции (7). Таким образом, отображение S , определяющее оптимальную стратегию J , следует искать среди биективных отображений $\Pi \rightarrow M[L_i, \Gamma]$.

Зададим отображение S таблицей

$$\left[\begin{array}{cccc} \pi^1 & \pi^2 & \dots & \pi^n \\ l^1 & l^2 & \dots & l^n \end{array} \right], \quad (16)$$

где через π^r и l^r обозначены элементы, занимающие r -ю позицию в цепях Π и L_i соответственно.

Обозначим через π^{rs} элемент π^r , занимающий s -ю позицию в результате произвольной перестановки (понимаемой здесь как оператор [6]) элементов строки π таблицы (16), порядок элементов π^r которой назовем натуральным. При этом, очевидно, все элементы строки π (16) имеют обозначение π^{rr} , $r \in N$. Любое биективное отображение $\Pi \rightarrow M[L_i, \Gamma]$ может быть представлено таблицей (16), в которой нарушен натуральный порядок элементов. Назовем возвратом влево перестановку элементов строки π с нарушенным натуральным порядком, отображающую $\pi^{rs} \rightarrow \pi^{rr}$, $\pi^{ar} \rightarrow \pi^{as}$ при $s, a < r$; $s, a \in N$.

Утверждение 1. Произвольное биективное отображение $\Pi \rightarrow M[L_i, \Gamma]$ может быть преобразовано в S конечным числом $w \leq n$ возвратов влево.

Укажем процедуру, реализующую требуемое преобразование: найти в строке π таблицы произвольного биективного отображения S_1 $\Pi \rightarrow M[L_i, \Gamma]$ элемент π^{1s} и осуществить возврат влево: $\pi^{1s} \rightarrow \pi^{11}$, $\pi^{11} \rightarrow \pi^{rs}$; найти, далее, среди $n - 1$ правых элементов строки π таблицы S_1 элемент π^{2k} и осуществить возврат влево: $\pi^{2k} \rightarrow \pi^{22}$, $\pi^{22} \rightarrow \pi^{bk}$ и т. д., последовательно осуществляя возвраты влево элементов π^r , $r = 1(1)n$. Через $w \leq n$ возвратов влево получим натуральный порядок элементов строки π , т. е. отображение S .

Утверждение 2. Возврат влево по крайней мере не увеличивает значения целевой функции (7).

Согласно определению возврата влево справедливы неравенства: $p_r \geq p_a$, $R_r > R_s$, где p_r — значение вероятности $p_{ij}(\tau)$ наблюдателя $\pi_j = \pi'$, а R_r — значение $R_{ij}(\tau)$ пути $l_{ij} = l'$. Запишем $p_r = p_a + \Delta p$, $R_r = R_s + \Delta R$, где $\Delta p > 0$, $\Delta R \geq 0$.

Значения целевой функции (7), получаемые при натуральном порядке элементов и при их перестановке, обратной возврату влево, отличаются на величину

$$\delta = R_r(1 - p_r) + R_s(1 - p_a) - R_r(1 - p_a) - R_s(1 - p_r),$$

откуда

$$-\delta = \Delta p \Delta R \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Из утверждений 1 и 2 следует, что отображение S доставляет минимум целевой функции (7), т. е. теорема 1 доказана.

Целевая функция (10). Пусть вначале все наблюдатели бездействуют. Упорядочим линейно множество L_i отношением Γ_1 , согласованным с отношением T_1 , которое определим выражением (14) при замене $R_{ij}(\tau)$ на $R_{ij}^{21}(\tau)$ (при бездействующих наблюдателях, когда $\forall_{j \in I} n_{ij}(\tau) = 0$, отношения Γ и Γ_1 совпадают). Разместим одного из наблюдателей на максимальном пути полученной цепи, т. е. теперь $n_{i_1}(\tau) = 1$, $\forall_{j \in I} n_{ij}(\tau) = 0$, если путь l_{i_1} максимальен.

Проведем повторное упорядочение множества L_i отношением Γ_1 , используя новые значения $R_{ij}^{21}(\tau)$. При этом позиция элемента l_{i_1} может измениться. Разместим одного из бездействующих наблюдателей на максимальном пути полученной цепи. Повторяя n раз указанные операции, получим однозначное распределение наблюдателей по путям, т. е. i -стратегию N в момент τ .

Теорема 2. Описанная выше процедура приводит к оптимальной стратегии N .

Доказательство. Распределение n наблюдателей по m_i путям может рассматриваться как точка в m_i -мерном евклидовом пространстве, причем значение каждой координаты определяется выражением

$$H_{ij}(\tau) = \sum_{k=1}^{n_{ij}(\tau)} h_{ij}^k(\tau),$$

где

$$h_{ij}^k(\tau) = R_{ij}(\tau) p_i(\tau) [1 - p_i(\tau)]^{k-1}, \quad (17)$$

и на значения $n_{ij}(\tau)$ наложено ограничение (9).

Величина $h_{ij}^k(\tau)$ может интерпретироваться как величина k -го шага, $k = 1$ (1) $n_{ij}(\tau)$ по j -й координате, обусловленного размещением k -го (по количеству) наблюдателя на пути l_{ij} . Легко заметить, что минимум функции (10) совпадает с максимумом функции

$$H_i(\tau) = \sum_{j=1}^m H_{ij}(\tau), \quad (18)$$

представляющей собой путь, проделанный изображающей распределение точкой из начала координат за n шагов, определяемых выражением (17).

Поскольку $0 \leq p_{ij}(\tau) \leq 1$, k -й шаг по j -й координате не превосходит $(k-1)$ -го шага по этой же координате, причем его величина не зависит от числа и величин шагов по другим координатам. Отсюда сле-

дует, что для максимизации (18) следует в множестве Z всех возможных шагов выбрать такое подмножество Z^* из n шагов, чтобы ни один шаг, принадлежащий $Z \setminus Z^*$, не преоосходил любого шага, принадлежащего Z^* . Но именно этот принцип выбора шагов реализуется при выполнении описанной выше процедуры построения i -стратегии N , что и доказывает теорему 2.

Целевая функция (13). В этом случае не удается указать способ поиска строго оптимальной стратегии контроля ПМП, более эффективный по сравнению с методом прямого перебора вариантов. Можно, однако, воспользоваться процедурой поиска, аналогичной вышеописанной и дающей результат, близкий к оптимальному.

Линейно упорядочим множество L_i при бездействующих наблюдателях отношением Γ_2 , согласованным с отношением T_2 , определяемым выражением (15) при подстановке $R_{ij}^{2,2}(\tau)$ вместо $R_{ij}(\tau)$. Как и в предыдущем случае значение целевой функции определяется при этом выражением (2). Множество наблюдателей Π упорядочим отношением Γ_π , как при минимизации целевой функции (7). Разместим максимального наблюдателя π_r (в отношении Γ_π) на максимальном (в отношении Γ_2) пути l_{is} . При этом s -е слагаемое в (2) уменьшается до величины, определяемой выражением (12), где $\bigvee_{j \neq s} N_{ij} = \emptyset$, $N_{is} = \{r\}$.

Повторно упорядочим множество L_i отношением Γ_2 , используя новые значения $R_{ij}(\tau)$, и снова разместим на максимальном пути максимального в цепи $\Pi \setminus \{\pi_r\}$ наблюдателя. Повторяя указанные операции n раз получим однозначное распределение наблюдателей по путям, т. е. i -стратегию J .

Нетрудно видеть, что получаемое в результате решение является в некотором смысле экстремальным: перестановка любого наблюдателя не приводит к уменьшению значения целевой функции.

Представляет интерес степень близости описанной эвристической стратегии к оптимальной (обозначим их J_d и J_0 соответственно, индекс i будем считать фиксированным и поэтому опустим). Рассмотрим разность

$$\Delta = R^{2,2}(J_d) - R^{2,2}(J_0).$$

Величина $R^{2,2}(J_d) = R_d$ вычисляется элементарно согласно описанной выше процедуре. Величину $R^{2,2}(J_0) = R_0$ можно оценить снизу следующим образом.

Введем вектор $Q = \{Q_i\}$, $i \in I$, где $Q_i = \prod_{v \in N_i} q_v$, $q_v = 1 - p_v$, а N_i — множество индексов наблюдателей π_v , контролирующих i -й путь из текущего состояния процесса $\xi(t)$. Обозначим $Q = \prod_{i \in I} Q_i = \prod_{v \in N} q_v$. Тогда

целевая функция (13) может быть записана в виде

$$R^{2,2}(J) = \sum_{i \in I} R_i Q_i.$$

Введем далее множество Q_w векторов $Q^* = \{Q_i^*\}$, $i \in I$, где величины Q_i^* удовлетворяют, как и Q_i , условию $\prod_{i \in I} Q_i^* = Q$, но лишены ограничения дискретности, т. е. $Q_i \in [0, 1]$.

Легко видеть, что

$$\Delta \leq R_d - R^*,$$

где

$$R^* = \min_{Q^* \in Q_w} R(Q^*) \leq R_0.$$

Величина R^* и соответствующий вектор Q_0^* легко находятся с помощью множителя Лагранжа. В результате получаем

$$Q_{0i}^* = \frac{1}{R_i} \left(Q \prod_{i \in I} R_i \right)^{1/n}, \quad (19)$$

$$R^* = \left(n Q \prod_{i \in I} R_i \right)^{1/n}. \quad (20)$$

Из (19) — (20) следует, что при оптимальном решении в случае отсутствия ограничения дискретности ожидаемые штрафы на всех путях одинаковы и равны $\left(Q \prod_{i \in I} R_i \right)^{1/n}$, а оптимальная вероятность пропустить переход на i -м пути обратно пропорциональна исходному среднему штрафу R_i .

Заметим, что задача наилучшего приближения R_d к R_0 может быть сформулирована как задача о наилучшем приближении непрерывных величин Q_i^* дискретными величинами Q_i . С этой точки зрения становится ясным, что величина Δ достаточно мала. Что касается существования простого алгоритма построения стратегии J_0 , то уже в простейшем случае $m = 2$ таковой отсутствует [1]*, а получение точных оценок близости квазиоптимальных стратегий к оптимальным представляет собой самостоятельную нетривиальную задачу.

Приведем простой пример, иллюстрирующий неоптимальность стратегии J_d и ее близость к J_0 . Пусть $n = 5$, $m = 2$, $q_i = 2^{-k_i}$, $R_1 = R_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 4$, $k_4 = 5$, $k_5 = 7$. Оптимальное решение, обеспечивающее $R_0 = 2^{-11}$, имеет вид $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{3, 4\}$. Стратегия J_d дает $N_1 = \{5, 1\}$, $N_2 = \{2, 3, 4\}$, $R_d = 2^{-11} + 2^{-13}$, т. е. $\Delta = 2^{-13}$.

В принятой постановке задачи линейный порядок среди путей перехода, эквивалентных в отношении среднего штрафа, и среди наблюдателей, эквивалентных в отношении надежности, не влиял на значения соответствующих целевых функций и поэтому не конкретизировался. Необходимость учета этого порядка может, однако, возникнуть, например, в том случае, когда наблюдатели могут не только пропускать переходы, ПМП, но и давать «ложные тревоги». При этом оптимальные стратегии могут сильно отличаться от полученных в настоящей работе. Так, например, может оказаться целесообразным «отключение» некоторых или даже всех наблюдателей на определенных интервалах времени, «безопасных» в отношении штрафов за переход.

Следует также указать интересную возможность контроля каждым наблюдателем некоторого подмножества близких в том или ином смысле путей с вероятностью фиксации перехода, зависящей от расстояния от пути, занимаемого наблюдателем, до пути, по которому совершается переход.

Автор признателен Г. К. Кладову и Э. М. Лифшицу за ценнное обсуждение квазиоптимальной стратегии.

* На это обстоятельство автору указал Э. М. Лившиц. Ему же принадлежит приводимый ниже пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Levy. Processes semi-markoviens. Proc. Jnt. Congress Math., Amsterdam, 3, 1954.
2. W. L. Smith, Proc. Roy. Soc., ser. A, 232 (1955).
3. И. И. Ежов, В С Королюк, Кибернетика, № 5, 85 (1967).
4. В С Королюк, А. А. Томусяк, Кибернетика, № 5, 55 (1965).
5. Д Р. Кокс, В. Л. Смит, Теория восстановления, изд Сов радио, М, 1967.
6. Дж Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963
7. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2, изд Мир, М., 1967.
8. В А Добрыдень, Оптимальная стратегия фиксации отказов в системах одного класса, в сб. Тр ФТИНТ АН УССР, Вычислительная математика и вычислительная техника, вып. 2, Харьков, 1971.
9. В А Добрыдень, Изв АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 47 (1971).
10. Дж Кемени, Дж. Снелл, Конечные цепи Маркова, изд Наука, М., 1970
11. Э. М Лившиц, Оценки точности приближенного решения некоторых оптимизационных задач СПУ, в сб. Тр зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, Дрогобыч, 1968, вып 3, М, 1969.

Украинский заочный политехнический институт

Поступила в редакцию
19 апреля 1971 г.OPTIMAL STRATEGIES FOR SEMIMARKOVIAN PROCESS CONTROL
BY OBSERVERS COLLECTIVE*V. A Dobryden*

The article considers a problem of fixing of moments and transition paths of a semimarkovian process by a collective of unreliable observers working continuously in time. Under various assumptions as to reliability of observers and possibility to group them for a simultaneous control of the chosen path constructed are control (observers collective control) strategies that minimize the average fine imposed on the collective for each unfixed transition.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 519.82

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА ДИНАМИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

B. A. Таланов, B. N. Шевченко

В предлагаемой работе рассматривается модель, которая в терминах динамических транспортных сетей [1] может быть описана следующим образом. Пусть $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ — номер источника с общим объемом s_i единиц некоторого продукта, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ — номер стока с общим объемом r_j потребления, $v \in \{1, 2, \dots, t\}$ — номер временного такта, и известно, что в v -й такт по сети перевозится k_v единиц продукта. Пусть, далее, в v -й такт i -й источник может выдать не более $u_{i,v}$ единиц продукта, а j -й сток может потребить не более $v_{j,v}$ единиц. Заметим, что таким способом можно задать номера тактов, в которые сток или источник не работает. Нас будет интересовать вопрос о существовании потока.

Вводя переменные τ_{ijv} — поток от i -го источника к j -му стоку в v -й такт, приходим к следующей системе ограничений

$$\begin{aligned} \sum_{i,v} \tau_{ijv} &= r_j, & \sum_i \tau_{ijv} &\leq u_{i,v}, \\ \sum_{i,v} \tau_{ijv} &= s_i, & \sum_i \tau_{ijv} &\leq v_{j,v}, \\ \sum_{i,j} \tau_{ijv} &= k_v, & \tau_{ijv} &\geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $v = 1, 2, \dots, t$.

Вопрос о совместности системы (1) сведем к аналогичному вопросу для систем

$$\begin{aligned} \sum_v x_{iv} &= s_i, \\ \sum_l x_{lv} &= k_v, \\ 0 < x_{iv} &\leq u_{i,v} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \sum_v y_{jv} &= r_j, \\ \sum_j y_{jv} &= k_v, \\ 0 < y_{jv} &\leq v_{j,v}, \end{aligned} \tag{3}$$

где x_{iv} и y_{jv} — новые переменные; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$; $v = 1, 2, \dots, t$.

Лемма. Система ограничений (1) совместна тогда и только тогда, когда совместны (2) и (3).

Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Пусть x_{iv}^0 и y_{jv}^0 удовлетворяют ограничениям (2) и (3). Тогда $\sum_{i=1}^m x_{iv}^0 =$
 $= \sum_{j=1}^n y_{jv}^0 = k_v$, и, следовательно, транспортная задача

$$\begin{aligned} \sum_l \tau_{ijv} &= x_{iv}^0, \\ \sum_l \tau_{ijv} &= y_{jv}^0, \quad (\tau_{ijv} \geq 0) \end{aligned} \tag{4}$$

совместна и имеет решение τ_{ijv}^0 , которое, как нетрудно видеть, удовлетворяет всем условиям системы (1).

Теорема. Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^n r_j = \sum_{i=1}^m s_i = \sum_{v=1}^t k_v \tag{5}$$

и для всякого $\Theta' \subseteq \Theta = \{1, 2, \dots, t\}$ выполнялись

$$\sum_l \min \{s_l, \sum_{v \in \Theta'} u_{lv}\} \geq \sum_{v \in \Theta'} k_v, \tag{6}$$

$$\sum_l \min \{r_j, \sum_{v \in \Theta'} v_{jv}\} \geq \sum_{v \in \Theta'} k_v. \tag{7}$$

Доказательство следует из доказанной выше леммы и теоремы Гейла [2].

Замечание 1. Если правые части системы (1) целочисленны, то условия (5) — (7) необходимы и достаточны для существования целочисленного решения в (1).

Замечание 2. Если $u_{lv} = v_{jv} = 1$, то условия (6) и (7) можно переписать в следующем виде

$$\sum_l \min \{s_l, \mu\} \geq \sum_{v=1}^{\mu} k_{lv}, \quad (\mu \in \Theta), \tag{6a}$$

$$\sum_l \min \{r_j, \mu\} \geq \sum_{v=1}^{\mu} k_{lv}, \quad (\mu \in \Theta), \tag{7a}$$

где i_1, i_2, \dots, i_t есть перестановка из элементов $1, 2, \dots, t$ такая, что $k_{i_1} \geq k_{i_2} \geq \dots \geq k_{i_t}$.

В заключение рассмотрим задачу нахождения $\max_{i, j, v} c_{ijv} \tau_{ijv}$ при ограничениях (1) и при условии, что целевые коэффициенты c_{ijv} не зависят от одного из индексов i или j . Пусть для определенности c_{ijv} не зависят от j , т. е. $c_{ijv} = c_{iv}$, тогда достаточно найти решение в системе (2), максимизирующее $\sum_{i, v} c_{iv} x_{iv}$, произвольное решение системы (3) и решение системы (4), где правые части уже определены.

Рассмотренную выше модель можно применить к задаче распределения учебной нагрузки групп между преподавателями и составления соответствующего расписания при ограниченном числе аудиторий. Для этого достаточно проинтерпретировать s_i как нагрузку i -го преподавателя, r_j как нагрузку j -й группы, k_v как число аудиторий в v -й такт. С помощью чисел u_{iv} и v_{jv} можно задать номера тактов, в которые преподаватель или группа не может работать.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, Потоки в сетях, М., 1966.
- К. Берж, Теория графов и ее применения, М., 1962.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 ноября 1971 г.