ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 538.311

К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ЗАДАННЫМ ИСТОЧНИКАМ В ВИДЕ ТОКОВ

Б. Г. Беляев

Произведен анализ известных [1—12] интегральных формул, определяющих электромагнитное поле по заданным источникам в виде токов. Отмечены характерные неточности в интерпретации этих формул, указано на ограниченность области применимости их. Приведены также новые формулы, позволяющие решать задачи более широкого класса.

Расчет электромагнитного поля по заданным источникам в виде электрических и магнитных токов является одним из базовых элементов теории электромагнитного поля и теории антенн. При этом, как правило, вначале определяют электродинамические векторные потенциалы, а затем находят поля E, H дифференцированием последних [1—12].

Однако в ряде случаев (например, при составлении интегральных уравнений, при решении дифракционных задач приближенными методами) формулы, определяющие E, H, удобнее иметь в таком виде, в котором операции дифференцирования предшествуют операциям интегрирования. Такие формулы содержатся в работах [1, 5—7, 10, 12], но, к сожалению, с определенными неточностями, которые затрудняют их правильное применение. Например, в [10] приведена без вывода формула (2—17)

$$E_M = \frac{1}{4\pi i \omega\xi}\int\limits_V \{ (I^э \nabla)\,\mathrm{grad}\,\psi + k^2 I^э \psi - i\omega\xi\,[I^м, \mathrm{grad}\,\psi] \}\, dV, \qquad (1)$$

где $I^э$, $I^м$ — объемные плотности электрических и магнитных токов, $\psi = [\exp(-ikr)]/r$, E_M — поле в точке наблюдения M. При этом утверждается, что «формулы (2—17) позволяют определить поле системы токов в любой точке пространства». В действительности же, формула (1) справедлива для тех точек пространства, где отсутствуют источники. Не оговаривается в [10] и тот факт, что формула (1) верна, если операции дифференцирования идут по переменным интегрирования, а не по координатам точки M.

В ряде случаев необходимые уточнения можно сделать при более внимательном изучении приводимой последовательности выкладок. Так, можно заключить, что в [1] (стр. 410) в формуле (19)

$$E_M = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left\{ \frac{\rho^э}{\xi}\,\mathrm{grad}\,\psi - i\omega\mu I^э \psi - [I^м, \mathrm{grad}\,\psi] \right\} dV, \qquad (2)$$

где

$$\rho^э = -\frac{1}{i\omega}\,\mathrm{div}\, I^э,$$

переменной дифференцирования является переменная интегрирования из того, что соотношение (15) (стр. 410)

$$\int_V \mathrm{rot}\, \boldsymbol{I} \psi\, dV = \int_S [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{I}] \psi\, dS + \int_V [\boldsymbol{I}, \mathrm{grad}\, \psi]\, dV,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, заключающей объем V, верно лишь в том случае, если переменные дифференцирования и интегрирования одни и те же.

Иногда встречаются ошибки в знаках и коэффициентах [7, 12]. Например, в [7] на стр. 60 и 64 формулы (2.23) и (2.37) имеют вид

$$\boldsymbol{E}_M = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{1}{i\omega\xi_0} (\boldsymbol{I}^э \nabla)\, \mathrm{grad}\, \psi - i\omega\mu_0 \boldsymbol{I}^э \psi + [\boldsymbol{I}^м, \mathrm{grad}\, \psi] \right\} dV.$$

При этом из вывода формулы (2.23) следует, что операции дифференцирования идут по координатам элемента объема, а вывод формулы (2.37) предполагает, что операции дифференцирования идут по координатам точки наблюдения. При таких условиях формулы (2.23) и (2.37) должны были бы различаться; отсутствие такового связано с ошибками, допущенными при выводе формулы (2.23).

Представление поля в виде (2) справедливо, как будет показано далее, без ограничения на координаты точки наблюдения. Но при этом, в отличие от случаев применимости (1), должно выполняться дополнительно условие непрерывности распределения тока в пространстве. Подобные условия, как правило, также не оговариваются.

Приведем формулы типа (1), (2), справедливые в случае, если заданные токи имеют вид кусочно-непрерывных функций, и позволяющие определять поле в любой точке пространства, за исключением тех точек, где токи имеют разрыв:

$$\boldsymbol{E}_M = \frac{1}{4\pi i\omega\xi_0} \int_V \{(\boldsymbol{I}^э \nabla)\, \mathrm{grad}\, \psi + k^2 \boldsymbol{I}^э \psi - i\omega\xi_0 [\boldsymbol{I}^м, \mathrm{grad}\, \psi]\}\, dV - \frac{1}{3 i\omega\xi_0} \boldsymbol{I}^э; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}_M = \frac{1}{4\pi i\omega\xi_0} \int_V \{-\mathrm{div}\, \boldsymbol{I}^э\, \mathrm{grad}\, \psi + k^2 \boldsymbol{I}^э \psi - i\omega\xi_0 \times [\boldsymbol{I}^м, \mathrm{grad}\, \psi]\}\, dV - \frac{1}{4\pi i\omega\xi_0} \int_{S_p} \mathrm{grad}\, \psi (\boldsymbol{I}^э d\boldsymbol{S}), \tag{4}$$

S_p — поверхность, где функция тока $\boldsymbol{I}^э$ имеет разрыв.

Интегрирование в (4) ведется по обеим сторонам поверхности S_p; переменные дифференцирования и интегрирования одни и те же; при интегрировании по объему учитываются только те точки, где ток $\boldsymbol{I}^э$ непрерывен. В том случае, когда точка M совпадает с одной из точек источника, тройные интегралы в формулах (3), (4) понимаются как несобственные, т. е. $\int_V = \lim_{R_0 \to 0} \int_{V-V_0}$ (V_0 — объем, содержащийся в сфере σ_0 малого радиуса R_0 с центром в точке M).

Формула (3) может быть выведена, например, методом векторного потенциала. Известно, что поле $\boldsymbol{E}$ в свободном пространстве связано с векторными потенциалами следующим образом:

$$\boldsymbol{E}_M = \frac{1}{i\omega\xi_0} \left(k^2 \boldsymbol{A}^э + \mathrm{grad}_M\, \mathrm{div}_M\, \boldsymbol{A}^э - i\omega\xi_0\, \mathrm{rot}_M\, \boldsymbol{A}^м\right), \tag{5}$$

где

$$A^{э\,(м)} = \frac{1}{4\pi}\int_V I^{э\,(м)}\,\psi\,dV.$$

Можно рассматривать значение векторного потенциала в точке источника, при этом

$$A^{э\,(м)} = \frac{1}{4\pi}\lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0} I^{э\,(м)}\,\psi\,dV. \qquad (6)$$

Подставим (6) в (5) и рассмотрим возможность внесения дифференциальных операторов под знак несобственного интеграла. Проще всего свести эту задачу к известной задаче дифференцирования потенциала объемных масс.

В [13] доказано, что при внесении операции дифференцирования под знак несобственного интеграла появляется дополнительно интеграл по сфере σ_0, который оказывается при непрерывной плотности массы μ равным нулю. Однако при двойном дифференцировании вида $\frac{\partial^2}{\partial x_M^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y_M^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z_M^2}$ несобственного интеграла типа потенциала объемных масс вычисление поверхностного интеграла по сфере σ_0 дает результат, отличный от нуля:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_M^2}\lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0}\mu(N)\frac{1}{r_{MN}}\,dV = \frac{\partial}{\partial x_M}\lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0}\mu(N)\frac{\partial}{\partial x_M}\times$$
$$\times\frac{1}{r_{MN}}\,dV = \lim_{R_0\to 0}\left[\int_{V-V_0}\mu(N)\frac{\partial^2}{\partial x_M^2}\frac{1}{r_{MN}}\,dV + \int_{\sigma_0}\mu(N)\frac{x_M - x_N}{r_{MN}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial x_M}\frac{1}{r_{MN}}\right)dS\right] = \lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0}\mu(N)\frac{\partial^2}{\partial x_M^2}\frac{1}{r_{MN}}\,dV + \frac{4\pi}{3}\mu(M).$$

В нашем случае можно выделить из объема V малый объем V_1, включающий в себя объем V_0 и имеющий линейные размеры, много меньшие λ. Выражая в интеграле по объему $V_1 - V_0$ ток через его декартовые составляющие, получим интегралы, эквивалентные потенциалу объемных масс. Благодаря этому можно внести операторы $\mathrm{grad}_M\,\mathrm{div}_M$, rot_M под знак интеграла, добавив в случае внесения $\mathrm{grad}_M\,\mathrm{div}_M$ уже известные поверхностные интегралы:

$$\mathrm{grad}_M\,\mathrm{div}_M\lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0} I^э\,\psi\,dV = \lim_{R_0\to 0}\left\{\int_{V-V_0}\mathrm{grad}_M\,\mathrm{div}_M\,(I^э\psi)\,dV +\right.$$
$$+\int_{\sigma_0}\left[\boldsymbol{i}\,I_x^э(x_M - x)^2 + \boldsymbol{j}\,I_y^э(y_M - y)^2 + \boldsymbol{k}\,I_z^э(z_M - z)^2\right]\times \qquad (7)$$
$$\left.\times\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\,dS\right\}.$$

Если ток $I^э$ в точке M непрерывен, то вычисление поверхностного интеграла в (7) при $R_0 \to 0$ дает

$$\mathrm{grad}_M\,\mathrm{div}_M\lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0} I^э\,\psi\,dV = \lim_{R_0\to 0}\int_{V-V_0}(I^э\,\nabla)\,\mathrm{grad}\,\psi\,dV - \frac{4\pi}{3}I^э. \qquad (8)$$

Соотношение (8) приводит к формуле (3). Формула (4) может быть получена, если после внесения операторов div_M под знак интеграла в (5) проинтегрировать по частям интеграл $\int\limits_{V-V_0} \mathrm{div}_M (\Gamma^э \psi)\, dV$. Для этого нужно перенести операцию div с точки M на точку источника и выделить из объема V малый объем ΔV в окресности поверхности S_p, где ток имеет разрыв:

$$\int\limits_{V-V_0} \mathrm{div}_M (\Gamma^э \psi)\, dV = \int\limits_{V-V_0-\Delta V} \mathrm{div}_M (\Gamma^э \psi)\, dV = \int\limits_{V-V_0-\Delta V} [-\mathrm{div}(\Gamma^э \psi) + \psi\, \mathrm{div}\, \Gamma^э] dV =$$

$$= \int\limits_{\sigma_0} \Gamma^э \psi\, dS + \int\limits_{S_p} \Gamma^э \psi\, dS + \int\limits_{V-\Delta V-V_0} \psi\, \mathrm{div}\, \Gamma^э\, dV.$$

Интеграл по сфере σ_0 стремится к нулю при $R_0 \to 0$. Получившийся в (9) несобственный интеграл имеет в малом объеме V_1 ту же особенность, что и векторный потенциал; поэтому оператор grad_M можно внести под знак интеграла без добавления поверхностных интегралов по сфере σ_0. В результате получается формула (4).

Автор выражает глубокую признательность Е. Н. Васильеву и В. В. Бодрову за обсуждение работы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Стреттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948
2. Л. Д. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957
3. Д. Д. Гольдштейн, Н. Н. Зернов, Электромагнитные поля и волны, изд. Сов. радио, М, 1956.
4. Б. Я. Брунов, М. М. Гольденберг, И. Г. Кляцкин, Л. А. Цейтлин, Теория электромагнитного поля, Госэнергоиздат, М.—Л., 1962
5. А. А. Семенов, Теория электромагнитных волн, изд. МГУ, 1962.
6. Г. З. Айзенберг, Антенны ультракоротких волн, Связьиздат, М, 1957.
7. А. З. Фрадин, Антенны сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. Г. Т. Марков, Антенны, Госэнергоиздат, М.—Л., 1960.
9. А. Л. Драбкин, В. Л. Зузенко, Антенно-фидерные устройства, изд. Сов. радио М., 1961.
10. М. С. Жук, Ю. Б Молочков, Проектирование антенно-фидерных устройств, изд Энергия, М., 1966.
11. В. В. Никольский, Антенны, изд. Связь, М., 1966.
12. Сканирующие антенные системы СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1966.
13. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1966.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 31 июля 1970 г., после доработки 10 декабря 1971 г.

CALCULATION OF AN ELECTROMAGNETIC FIELD ACCORDING TO THE GIVEN CURRENT SOURCES

B. G. Belyaev

The analysis has been made of the known [1—13] integral formulas which determine the electromagnetic field according to the given current sources. The typical inaccuracies in interpreting these formulas are noted; the limitations of their applicability are pointed out. New formulas giving allowance for solving the wider-class problems are also given.