ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 538.56

ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ИМПЕДАНСНЫХ СИСТЕМ

В. Г. Мышкин

Для пространства, содержащего плоскость с разрывом поверхностного импеданса или плоский полубесконечный импедансный экран, приводятся трехмерные электромагнитные тензоры Грина и находятся их частные формы в случаях, когда одна из корреспондирующих точек лежит на линии неоднородности указанных систем.

1. Приведенные ниже решения задач дифракции для безграничной плоскости с прямолинейным разрывом поверхностного импеданса и для плоского полубесконечного импедансного экрана обобщают известные результаты [1—13] либо на случай трех измерений, либо на случай конечной проводимости объекта. В качестве исходного пункта математической формулировки этих задач использовались, как наиболее удобные, интегральные представления поля, вытекающие из леммы Лоренца. Характерным методическим моментом работы является непосредственное применение в процессе получения решений трехмерных задач дифракции метода факторизации, использовавшегося до сих пор при решении лишь двумерных и квазитрехмерных задач (см., например, [1—9]). Эти решения представляются в виде электрического тензора Грина $\hat{\mathscr{E}}^e = \hat{\mathscr{E}}^e(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}) = [\mathscr{E}^e_{\lambda\mu}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})]^*$, компоненты которого являются μ-составляющими ($\mu = x, y, z$) вектора $\hat{\mathscr{E}}^e_\lambda(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})$ поля, создаваемого в точке $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (\rho, z)$ элементарным электрическим (e_λ -) диполем, находящимся в точке $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\rho_0, z_0)$ и имеющим альтернативные ориентации $\lambda = x, y, z$.

2. Для пространства $z \geqslant 0$, ограниченного плоскостью $z = 0$ с прямолинейным разрывом ΔZ поверхностного импеданса Z ($Z = z_n$ при $y < 0$, $Z = z_p$ при $y > 0$; $\operatorname{Re} z_n \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z_p \geqslant 0$), имеем

$$\hat{\mathscr{E}}^e = \hat{E}^{ne} + \frac{\Delta Y}{(2\pi)^2} \int \hat{N} w^{+\varepsilon}(-\rho, z) d\varkappa, \tag{1}$$

$$\varkappa = (\xi, \eta), \quad -\infty < \xi, \quad \eta < \infty.$$

Здесь $\hat{E}^{ne} = \hat{E}^{ne}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}) = [E^{ne}_{\lambda\mu}(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})]$ — электрический $\hat{E}^{ne}$-тензор Грина для полупространства $z \geqslant 0$, ограниченного плоскостью $z=0$ с однородным поверхностным импедансом $Z = z_n$, $\Delta Y = (y_n - y_p)$ — величина скачка поверхностного адмитанса Y ($y_n = 1/z_n$, $y_p = 1/z_p$). Множитель $\hat{N} w^+ = [\hat{N}_\mu w^+_\lambda]$ имеет тензорный характер. Оператор $\hat{N}_\mu =$

---

* Электрический $\hat{H}^e$-тензор Грина может быть выражен через $\hat{\mathscr{E}}^e$-тензор с помощью уравнений поля Магнитные $\hat{\mathscr{E}}^m$-, $\hat{H}^m$- тензоры находятся с помощью принципа двойственности.

$= \hat{\Phi}_\mu \hat{L}$ представляет собой μ-компоненту оператора $\hat{N} = \hat{\Phi}\hat{L}$. Фактор $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(\varkappa)$ в правой части последнего равенства может быть записан в виде совокупности

$$\hat{\Phi}(\varkappa) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_t(\varkappa) \\ \hat{\Phi}_z(\varkappa) \end{bmatrix} \tag{2}$$

тангенциальной

$$\hat{\Phi}_t(\varkappa) = \frac{\hat{p}_t(\varkappa) + kKy_n\hat{U}}{(k + Ky_n)(K + ky_n)}, \qquad \hat{p}_t(\varkappa) = \begin{bmatrix} k^2 - \xi^2 & -\xi\eta \\ -\eta\xi & k^2 - \eta^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

и нормальной

$$\hat{\Phi}_z(\varkappa) = \frac{\hat{p}_z(\varkappa)}{k + Ky_n}, \quad \hat{p}_z(\varkappa) = [\xi \ \ \eta] \tag{4}$$

компонент ($K^2 = k^2 - \varkappa^2$, $\operatorname{Im} K \geqslant 0$; $\hat{U}$ — единичная матрица).

Оператор $\hat{L} = \hat{L}(\eta)$ имеет вид

$$\hat{L}(\eta) = \begin{bmatrix} \xi & -\eta \\ \eta & \xi \end{bmatrix} \varkappa^{-2}. \tag{5}$$

Вектор w_λ^+ представляется следующей цепочкой формул:

$$w_\lambda^+ = \omega^+ \times I_\lambda^+, \quad \omega^+ = \omega^+(\eta) = \omega^-(-\eta); \tag{6}$$

$$\omega^-(\eta) = \begin{bmatrix} \sqrt{y_n}\,\psi_n^-(\eta)/\sqrt{y_p}\,\psi_p^-(\eta) \\ \varphi_n^-(\eta)/\varphi_p^-(\eta) \end{bmatrix}^* ; \tag{7}$$

$$I_\lambda^\mp = \mp \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty \pm i\gamma}^{\infty \pm i\gamma} \hat{S}(v, \eta)\,[\Phi_\lambda(v)/\tilde{\varkappa}^2]\,dv, \quad \tilde{\varkappa} = (\xi, v); \tag{8}$$

$$\hat{S}(v, \eta) = \begin{bmatrix} (\xi^2 + v\eta)/(v - \eta) + C_1\xi & -C_2\xi \\ C_2\xi & (\xi^2 + v\eta)/(v - \eta) - C_1\xi \end{bmatrix}; \tag{9}$$

$$C_1 = i \operatorname{th}\delta, \qquad C_2 = 1/\operatorname{ch}\delta,$$
$$\delta = \ln\left[\sqrt{\frac{y_p}{y_n}}\ \frac{\varphi_n^+(i\xi)\,\psi_p^+(i\xi)}{\varphi_p^+(i\xi)\,\psi_n^+(i\xi)}\right]; \tag{10}$$

$$\Phi_\lambda(v) = \omega^-(v) \times f_\lambda(v); \tag{11}$$

$$f_\lambda(v) = ik\,\tilde{\varkappa}^2 N(\tilde{\varkappa})\,\varepsilon_v(\rho_0, z_0),$$

---

* Индекс «+» (или «—») приписывается здесь и в дальнейшем к символам функций, аналитических в области $\operatorname{Im}\eta > -\gamma$ (или $\operatorname{Im}\eta < \gamma$), $0 \leqslant \gamma < \operatorname{Im} k$ комплексной плоскости η; $\varphi_{n,p}^\mp$, $\psi_{n,p}^\mp$ — функции Гринберга—Фока [1], модифицированные подстановкой $k \to \bar{k} = (k^2 - \xi^2)^{1/2}$, $\operatorname{Im}\bar{k} \geqslant 0$; $Y \to (k/\bar{k})Y$, $Z \to (k/\bar{k})Z$. Двухстрочный скобочный символ вида (7) обозначает вектор с соответствующими компонентами Символ «$\times$» в (6) соответствует операции покомпонентного перемножения векторов.

$$\tilde{N}(\tilde{\varkappa}) = \hat{N}'(\tilde{\varkappa}) = [\hat{\Phi}(-\tilde{\varkappa})\hat{L}(v)]' = \hat{L}'(v)\,\hat{\Phi}'(-\tilde{\varkappa})^*,$$

$$\varepsilon_v(\rho_0, z_0) = \exp\{i[\tilde{\varkappa}\rho_0 + K(v)z_0]\}, \tag{12}$$

$$K^2(v) = k^2 - \tilde{\varkappa}^2, \quad \operatorname{Im} K(v) \geqslant 0.$$

Через $\varepsilon(-\rho, z)$ в (1) обозначена функция $\varepsilon(-\rho, z) = \exp[i(-\varkappa\rho + Kz)]$.

Представление (1) решения рассматриваемой задачи относится к области пространства $r \in R_n$, для которой геометрооптическое изображение источника лежит в полуплоскости $y < 0$, $z = 0$. Чтобы получить решение для дополнительной области $r \in R_p$, необходимо выделить из интеграла I_γ^+ в (8), входящего в (1) через (6), вычет подынтегральной функции в полюсе $v = \eta$.

3. Для пространства, содержащего полуплоскость $y < 0$, $z = 0$, на обеих гранях которой задан поверхностный импеданс $Z = z_p$ ($\operatorname{Re} z_p \geqslant 0$), имеем

$$\hat{\mathscr{E}}^e = \hat{E}^e - \frac{1}{(2\pi)^2}\int (y_p \hat{P}a^+ - z_p\hat{Q}b^+)\,\varepsilon(-\rho, |z|)\,d\varkappa. \tag{13}$$

Здесь $\hat{E}^e = \hat{E}^e(r_0, r) = [E^e_{\lambda\mu}(r_0, r)]$ ($\lambda, \mu = x, y, z$) — электрический $\hat{E}^e$-тензор Грина свободного пространства. Величины $\hat{P}a^+ = [\hat{P}_\mu a_\lambda^+]$, $\hat{Q}b^+ = [\hat{Q}_\mu b_\lambda^+]$ также имеют тензорный характер, причем $\hat{P}_\mu = p_\mu \hat{L}$ и $\hat{Q}_\mu = \hat{q}_\mu \hat{L}$ — μ-компоненты соответствующих операторов $\hat{P} = \hat{p}\hat{L}$ и $\hat{Q} = \hat{q}\hat{L}$, где

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} k^2 - \xi^2 & -\xi\eta \\ -\eta\xi & k^2 - \eta^2 \\ \xi K s(z) & \eta K s(z) \end{bmatrix} (kK)^{-1}, \quad \hat{q} = \begin{bmatrix} 0 & -kKs(z) \\ kKs(z) & 0 \\ \eta k & \xi k \end{bmatrix} (kK)^{-1}, \tag{14}$$

$$s(z) = \operatorname{sgn} z.$$

Вектор a_λ^+ является аналогом** вектор-функции w_λ^+ предыдущей задачи, вычисленной при $y_n \to 0$ (с учетом того, что при этом условии $\varphi_n^\mp = K^\mp$, $K^\mp = (\bar{k} \mp \eta)$; $\sqrt{y_n}\,\psi_n^\mp = \sqrt{\bar{k}}$) по формулам (6)—(11). При этом роль функции $f_\lambda(v)$ в равенстве (11) должна выполнять функция $g_\lambda(v)$, определяемая формулами

$$g_\lambda(v) = \frac{ik}{2}\tilde{\varkappa}^2 P_0(\tilde{\varkappa})\,\varepsilon_v(\rho_0, |z_0|),$$

$$P_0(\tilde{\varkappa}) = \hat{P}_0'(\tilde{\varkappa}) = [\hat{p}_0(-\tilde{\varkappa})\hat{L}(v)]' = \hat{L}'(v)\hat{p}_0'(-\tilde{\varkappa}), \tag{15}$$

---

* Символ ′ означает операцию транспонирования матрицы соответствующего оператора.

** Проявляющаяся здесь связь между решениями рассматриваемой и предыдущей задач отражает тот известный факт (см. [14, 15]), что задача дифракции для плоскости со скачком $\Delta Z = z_n - z_p$ поверхностного импеданса может рассматриваться в качестве «ключевой» по отношению к задаче для импедансной полуплоскости. Это означает, что решение последней из них может быть сконструировано формальным путем из решений первой задачи, найденных для двух предельных значений параметра z_n ($z_n = 0$, $z_n = \infty$).

в которых индекс «0» у символа P, p означает, что в соответствующих выражениях, кроме того, произведена подстановка $z \to z_0$.

В свою очередь, выражение для вектора b_λ^+ может быть получено из формул типа (6)—(11) для векторной функции a_λ^+ с помощью подстановки $y_p \rightleftarrows z_p$ ($\varphi_p^\mp \rightleftarrows \psi_p^\mp$) и замены функции $g_\lambda(v)$ функцией $h_\lambda(v)$, определяющейся равенствами

$$h_\lambda(v) = \frac{ik}{2}\tilde{\varkappa}^2 Q_0(\tilde{\varkappa})\,\varepsilon_v(\rho_0, |z_0|),$$
$$Q_0(\tilde{\varkappa}) = \hat{Q}_0'(\tilde{\varkappa}) = [\hat{q}_0(-\tilde{\varkappa})\hat{L}(v)]' = \hat{L}'(v)\hat{q}_0'(-\tilde{\varkappa}). \tag{16}$$

Представление (13) решения задачи с сопутствующими ему формулами относится к «области света» ($r \in I_p = I_p^{(+)} + I_p^{(-)}$), границы которой определяются из простых геометрооптических соображений. Соответствующие формулы для «области отражения» ($r \in R_p$) и «области тени» ($r \in S_p$) находятся из (13), если выделить из интегралов типа (8) вычеты, связанные с полюсами $v = \eta$ подынтегральных функций.

4. Общие решения (1)—(12) или (13)—(16) задач об излучении элементарных диполей в присутствии плоскости со скачком поверхностного импеданса или импедансной полуплоскости, выражающиеся аналитически через тройные интегралы Фурье, могут служить основой для получения асимптотических представлений поля при $kr_0 \gg 1$ и $kr \gg 1$, в том числе для решения частных задач, рассматривающихся ранее [1–9]. Результат (13)—(16) для импедансного экрана приводит при $z_p \to 0$ к решениям задач, полученным в работах [10–13] для идеально проводящей полуплоскости.

Из тех же выражений (1)—(12) или (13)—(16) могут быть вычислены поля элементарных источников, лежащих на линии разрыва импеданса или на ребре полуплоскости, а также поля в точках этой линии, создаваемые диполями, находящимися в произвольной точке r_0 пространства, или найдены оценки степени роста полевых функций вблизи линии неоднородности, если они являются сингулярными.

В частности, для компонент $\mathscr{E}^e_{x\mu}$ ($\mu = x, y, z$) вектора $\vec{\mathscr{E}}^e_x$ поля e_x-диполя, находящегося в точке x_0 ($y_0 = z_0 = 0$) линии разрыва импеданса, из (1)—(12) следуют выражения

$$\mathscr{E}^e_{x\tau} = \frac{ik}{(2\pi)^2}\int \hat{L}(\Omega\times F_x)\,\varepsilon(x_0)\,\varepsilon(-\rho, z)d\varkappa \quad (\tau = x, y),$$
$$\mathscr{E}^e_{xz} = \frac{ik}{(2\pi)^2}\int \frac{C_2\xi}{\sqrt{y_n y_p}\,\psi_n^-\psi_p^+}\,\varepsilon(x_0)\,\varepsilon(-\rho, z)\,d\varkappa, \tag{17}$$

в которых $\varepsilon(x_0) = \exp(i\xi x_0)$ и

$$\Omega = \begin{bmatrix} K/\sqrt{y_n y_p}\,\psi_n^-\ \psi_p^+ \\ k/\varphi_n^-\ \varphi_p^+ \end{bmatrix}, \quad F_x = \begin{bmatrix} C_2\xi \\ C_1\xi - \eta \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Полагая в (1)—(12) $\lambda = y$, $z_0 = 0$, а также $y_0 \to -0$ или $y_0 \to +0$ мы приходим к соответствующим выражениям для полей e_y-диполей:

$$\mathscr{E}^e_{y\tau} = \frac{ik}{(2\pi)^2}\left\{\begin{matrix} \sqrt{y_p/y_n} \\ \sqrt{y_n/y_p} \end{matrix}\right\}\int \hat{L}(\Omega\times F_y)\,\varepsilon(x_0)\,\varepsilon(-\rho, z)d\varkappa, \quad \tau = x, y, \tag{19}$$

$$\mathscr{E}^e_{yz} = \frac{ik}{(2\pi)^2}\begin{Bmatrix} z_n \\ z_p \end{Bmatrix}\int \frac{C_1\xi + \eta}{\psi_n^- \psi_p^+}\varepsilon(x_0)\varepsilon(-\rho, z)\,d\varkappa,$$

где

$$F_y = \begin{bmatrix} C_1\xi + \eta \\ C_2\xi \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Что касается функций поля e_z-диполя при $y_0 \to \mp 0$, $z_0 = 0$, то они неограниченно возрастают, как $\ln|y_0|$.

Компоненты вектора $\vec{\mathscr{E}}^e_x$ поля e_x-диполя, находящегося на ребре импедансной полуплоскости, выражаются формулами (17), (18), в которых необходимо положить $y_n \to 0$, заменить z на $|z|$ и добавить общий множитель 1/2.

Выражения для составляющих $\mathscr{E}^e_{y\mu}$ ($\mu = x, y, z$) вектора $\vec{\mathscr{E}}^e_y$ поля e_y-диполя при $y_0 \to +0$ и $z_0 = \pm 0$ могут быть найдены из (19), (20) при $z_n \to 0$ с заменой $z \to |z|$ и учетом общего множителя $s(z_0)/2$. Если e_y-диполь приближается к ребру со стороны свободного пространства ($y_0 \to -0$, $z_0 = 0$), поле неограниченно возрастает, как $|y_0|^{-1/2}$. Вектор-функция $\vec{\mathscr{E}}^e_z$ поля e_z-диполя в точке $y_0 = \pm 0$, $z_0 = \pm 0$ также сингулярна.

На основе формул (17)—(20) с помощью двукратного применения метода перевала может быть произведено вычисление поля рассматриваемых элементарных источников в области излучения. Результаты расчета диаграмм направленности в пространственной и поверхностной компонентах поля излучения по таким формулам в случае чисто индуктивного поверхностного импеданса даны в виде графиков в работе [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Грибнер, В. А. Фок, сб. Исследования по распространению радиоволн, изд. АН СССР, 1948, стр. 69.
2. T. B. A. Senior, Proc. Roy. Soc., A 213, 436 (1952).
3. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, 27 (1958).
4. Н. Т. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, 163 (1958).
5. T. B. A Senior, Appl. Sci. Res., B8, 35 (1959).
6. P. C. Clemmov, Phil. Trans. Roy. Soc., 246 A, 1 (1959).
7. Ю. А. Кузнецов, Радиотехника и электроника, 8, 1385 (1963).
8. В. Л. Миронов, В. Г. Мышкин, Радиотехника и электроника, 12, 1211 (1967).
9. В. Л. Миронов, В. Г. Мышкин, Изв. высш. уч. зав.— Физика, 1, 147 (1967).
10. T. B. A. Senior, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 4, 101 (1953).
11. Ю. В. Вандакуров, ЖЭТФ, 24, 3 (1954).
12. Betty D. Woods, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 10, 90 (1957).
13. Л. Н. Захаров, А. А. Леманский, Ю. П. Винниченко, Радиотехника и электроника, 13, 31 (1968).
14. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 4, № 5, 795 (1961).
15. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
16. А. Г. Дмитренко, В. Г. Мышкин, Изв. высш. уч. зав.— Физика, 4, 50 (1969).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
19 апреля 1971 г.,
после объединения
2 февраля 1972 г.

THREE-DIMENSIONAL DIFFRACTION PROBLEMS FOR PLANE SEMI-INFINITE IMPEDANCE SYSTEMS

V. G. Myshkin

Three-dimension electromagnetic Green's tensors are given for a space containing a plane with the surface impedance discontinuity or a plane semi-infinite impedance screen. Their partial forms are found in the cases when one of the corresponding points lies on the inhomogeneity line of the given system.