ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 538.56 : 519.25

О ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЯ В ДИСКРЕТНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

Методом преобразованного матричного стохастического уравнения исследуются границы применимости уравнения Бете — Солпитера в приближении Фолди. Предполагается, что рассеивающая среда имеет вид шара и состоит из дискретных рассеивателей, удовлетворяющих условиям рэлеевского рассеяния. Полученные условия применимости уравнения Бете — Солпитера в приближении Фолди совпадают с ранее полученными условиями применимости уравнения Дайсона в этом же приближении. Они заключаются в том, что эффективный показатель преломления рассеивающего шара должен мало отклоняться от единицы, а радиус корреляции рассеивателей l (при $k_0 l \ll 1$) — удовлетворять неравенству $nl^2/k_0 \ll 1$, где n — плотность рассеивателей и k_0 — волновое число. Названные условия применимости уравнения Бете — Солпитера в приближении Фолди допускают значения радиуса рассеивающего шара, превосходящие длину экстинкции.

В работе [1] рассматривается стохастическое уравнение общего вида. Оно подвергается преобразованию, которое используется в теории интегральных уравнений для улучшения сходимости последовательных приближений, и преобразованное уравнение решается методом малых возмущений. Этому способу решения стохастического уравнения соответствует в квантовой теории рассеяния борновское приближение в методе искаженных волн [2] (стр. 233). В [1] описанный метод преобразованного стохастического уравнения применяется к исследованию границ применимости уравнения Дайсона в приближении Фолди [3], а в [4]—уравнения Дайсона с учетом парных корреляций рассеивателей.

В данной работе метод преобразованного стохастического уравнения применяется к исследованию границ применимости уравнения Бете—Солпитера. Предполагается, что рассеивающая среда является дискретной, и уравнение Бете-Солпитера берется в приближении Фолди [3], когда его оператор интенсивности равен билинейной комбинации оператора рассеяния изолированного рассеивателя, усредненной по объему рассеивающей среды.

1. ПРЕОБРАЗОВАННОЕ МАТРИЧНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Исходим из полученного в [1] преобразованного стохастического уравнения первого порядка, которое для функции Грина G случайного волнового поля ψ может быть записано в виде

$$G = P_1 + P_1 \widetilde{V} G, \qquad (1)$$

где неслучайная функция Грина P_1 удовлетворяет уравнению

$$P_1 = G_0 + G_0 \overline{V} P_1. \qquad (2)$$

В (1) и (2) через V обозначен эффективный рассеивающий потенциал среды, G_0 — функция Грина для уравнения Гельмгольца в свободном пространстве, черта сверху означает усреднение по ансамблю и волна сверху—флуктуационную часть.

Введем в рассмотрение два вектора-столбца $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{P}_0$, равные

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G \times G^* \\ G \times 1 \\ 1 \times G^* \end{bmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{P}}_0 = \begin{bmatrix} P_1 \times P_1^* \\ P_1 \times 1 \\ 1 \times P_1^* \end{bmatrix}, \tag{3}$$

и две матрицы $\hat{P}_0$ и $\hat{B}$, равные

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} P_1 \times P_1^* & 0 & 0 \\ 0 & P_1 \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times P_1^* \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \tilde{V} \times \tilde{V}^* & \tilde{V} \times 1 & 1 \times \tilde{V}^* \\ 0 & \tilde{V} \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times \tilde{V}^* \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь символ $\times$ означает тензорное или прямое, произведение операторов [5, 6], через единицу обозначен единичный оператор, индекс * указывает на переход к комплексно-сопряженному значению*.

С помощью уравнения (1), а также комплексно-сопряженного уравнения, для вектора-столбца $\boldsymbol{G}$ получается матричное уравнение вида

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P}_0 + \hat{P}_0 \hat{B} \boldsymbol{G}. \tag{5}$$

Уравнение (5) является стохастическим, и к его решению применим метод работы [1]. Запишем для (5) преобразованное матричное стохастическое уравнение второго порядка, решим преобразованное уравнение методом малых возмущений и усредним результат. Это приводит к следующему ряду для среднего значения $\overline{\boldsymbol{G}}$ вектора-столбца $\boldsymbol{G}$:

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{P}_2 + \hat{P}_2 \overline{\tilde{\hat{B}} \hat{P}_1 \tilde{\hat{B}} \hat{P}_2 \tilde{\hat{B}}} \boldsymbol{P}_1 + \ldots \tag{6}$$

Векторы-столбцы $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ и матрицы $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ удовлетворяют уравнениям

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_0 + \hat{P}_0 \hat{b}_1 \boldsymbol{P}_1, \qquad \hat{P}_1 = \hat{P}_0 + \hat{P}_0 \hat{b}_1 \hat{P}_1; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_0 + \hat{P}_0 (\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \boldsymbol{P}_2, \quad \hat{P}_2 = \hat{P}_0 + \hat{P}_0 (\hat{b}_1 + \hat{b}_2) \hat{P}_2. \tag{8}$$

Матрицы $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_2$ равны

$$\hat{b}_1 = \overline{\hat{B}}, \quad \hat{b}_2 = \overline{\tilde{\hat{B}} \hat{P}_1 \tilde{\hat{B}}}. \tag{9}$$

Допустим, что среда состоит из слабых рассеивателей и ее эффективный рассеивающий потенциал V представляется разложением

$$V = (\varepsilon t_1 - \varepsilon^2 t_1 G_0 t_1 + \varepsilon^3 t_1 G_0 t_1 G_0 t_1) \rho(1) + O(\varepsilon^4). \tag{10}$$

В нем ε — малый параметр, t_1 — оператор рассеяния изолированного рассеивателя, координаты центра которого обозначены цифрой 1; по

---

* Обратим внимание на то, что элементами векторов-столбцов (3) и матриц (4) являются операторы. Такие матрицы называются операторными. Подобно блочным матрицам [7], они подчиняются обычным алгебраическим операциям теории матриц.

координатам 1 производится интегрирование. Через $\rho(\boldsymbol{r})$ обозначена микроскопическая плотность центров рассеивателей, равная

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i),$$

где суммирование производится по координатам центров $\boldsymbol{r}_i$ всех рассеивателей.

Микроскопическая плотность центров рассеивателей $\rho(\boldsymbol{r})$ является случайной функцией. Ее моментные и корреляционные функции выражаются через функции распределения и корреляционные функции рассеивателей с помощью соотношений [8].

Подставим разложение (10) для потенциала среды V в элементы матрицы $\hat{B}$. В результате подстановки получаем

$$\hat{B} = \varepsilon \hat{L}_1 + \varepsilon^2 \hat{L}_2 + \varepsilon^3 \hat{L}_3 + O(\varepsilon^4), \tag{11}$$

где из трех матриц $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ и $\hat{L}_3$ среднее значение первой равно нулю, $\overline{\hat{L}_1} = 0$.

С помощью разложения (11) для матрицы $\hat{B}$ мы преобразуем ряд (6) для среднего значения вектора-столбца $\overline{\boldsymbol{G}}$ в разложение с точностью до членов $\tilde{O}(\varepsilon^4)$, где волна над символом означает величину, пропорциональную ε^4, которая считается малой четвертого порядка*. Преобразование ряда (6) произведем в два этапа. На первом этапе найдем приближенные решения уравнений (7) и (8) с помощью матричных уравнений Келлера, а на втором этапе—приближенные решения матричных уравнений Келлера с помощью уравнений Дайсона и Бете—Солпитера в приближении Фолди.

2. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЕЛЛЕРА

Обозначим через $\hat{C}_2$ матрицу, равную

$$\hat{C}_2 = \overline{\hat{L}_2} + \overline{\hat{L}_1 \hat{P}_0 \hat{L}_1}. \tag{12}$$

Ее естественно назвать матрицей Келлера. Матричные уравнения Келлера (второго порядка) для вектора-столбца $\boldsymbol{P}_2'$ и матрицы $\hat{P}_2'$ имеют вид**

$$\boldsymbol{P}_2' = \boldsymbol{P}_0 + \varepsilon^2 \hat{P}_0 \hat{C}_2 \boldsymbol{P}_2', \qquad \hat{P}_2' = \hat{P}_0 + \varepsilon^2 \hat{P}_0 \hat{C}_2 \hat{P}_2'. \tag{13}$$

Используем уравнения Келлера (13) для приближенного решения уравнений (7) и (8). При этом в ядре уравнений (7) матрицу $\hat{b}_1$ будем считать малой второго порядка, $\hat{b}_1 = \tilde{O}(\varepsilon^2)$, а в ядре уравнений (8) матрицу $\hat{b}_1 + \hat{b}_2$ представим в виде разложения

$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 = \varepsilon^2 \hat{C}_2 + \varepsilon^3 (\overline{\hat{L}_1 \hat{P}_0 \tilde{\hat{L}}_2} + \overline{\tilde{\hat{L}}_2 \hat{P}_0 \hat{L}_1} + \overline{\hat{L}_3}) + \tilde{O}(\varepsilon^4). \tag{14}$$

---

* Напомним, что в методе преобразованного стохастического уравнения не всякая величина, пропорциональная ε^α, считается малой порядка α.

** Так как $\overline{\hat{L}_1} = 0$, то ядро аналогичных уравнений Келлера первого порядка равно нулю.

Уравнения (7) решаем непосредственно методом малых возмущений по $\hat{b}_1$. Уравнения (8) предварительно преобразуем с помощью резольвенты* ядра уравнений Келлера (13), после чего решаем тоже методом малых возмущений по малым членам третьего порядка в правой части разложения (14).

Подставим найденные описанным способом решения уравнений (7) и (8) в правую часть ряда (6). Это приводит к следующему разложению вектора-столбца $\overline{\boldsymbol{G}}$:

$$\overline{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{P}_2' + \varepsilon^3 \hat{P}_2' (\overline{\hat{L}_1 \hat{P}_0 \tilde{\hat{L}}_2} + \overline{\tilde{\hat{L}}_2 \hat{P}_0 \hat{L}_1} + \overline{\hat{L}_3}) \boldsymbol{P}_2' + \varepsilon^3 \hat{P}_2' \overline{\hat{L}_1 \hat{P}_0 \hat{L}_1 \hat{P}_2' \hat{L}_1} \boldsymbol{P}_0 + \tilde{O}(\varepsilon^4). \tag{6a}$$

В правую часть разложения (6 а) входят решения уравнений Келлера (13) вместо решений более сложных уравнений (7) и (8), входящих в правую часть ряда (6).

3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ КЕЛЛЕРА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА И БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

Обратимся к решению уравнений Келлера (13). Рассмотрим первое из этих уравнений. Неизвестный вектор-столбец $\boldsymbol{P}_2'$ запишем в виде

$$\boldsymbol{P}_2' = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{P}_2')_{11} \\ P_2 \times 1 \\ 1 \times P_2^* \end{bmatrix}.$$

Тогда рассматриваемое матричное уравнение сводится к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{P}_2')_{11} &= P_1 \times P_1^* + \varepsilon^2 (P_1 t_1 P_1 t_2 P_2 \times P_1^* + \ldots) \langle \tilde{\rho}(1) \tilde{\rho}(2) \rangle + \\ &+ \varepsilon^2 (P_1 \times P_1^*) (t_1 \times t_2^*) (\boldsymbol{P}_2')_{11} \langle \tilde{\rho}(1) \tilde{\rho}(2) \rangle ; \end{aligned} \tag{15}$$

$$P_2 = P_1 + \varepsilon^2 P_1 t_1 P_1 t_2 P_2 \langle \tilde{\rho}(1) \tilde{\rho}(2) \rangle . \tag{16}$$

В уравнении (15) применена сокращенная запись, согласно которой в сумме вида $a \times b^* + b \times a^*$, где a и b — некоторые операторы, вместо второго слагаемого стоит многоточие.

Решение второго матричного уравнения (13) ищем в виде

$$\hat{P}_2' = \begin{bmatrix} (\hat{P}_2')_{11} & (\hat{P}_2')_{12} & (\hat{P}_2')_{13} \\ 0 & P_2 \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times P_2^* \end{bmatrix}.$$

Диагональный элемент в первой строке этой матрицы удовлетворяет уравнению

$$(\hat{P}_2')_{11} = P_1 \times P_1^* + \varepsilon^2 (P_1 \times P_1^*) (t_1 \times t_2^*) (\hat{P}_2')_{11} \langle \tilde{\rho}(1) \tilde{\rho}(2) \rangle . \tag{17}$$

---

* Такого рода преобразование неоднократно применяется в [1, 4]. Для уравнений (8) оно заключается в том, что вычитаемый из ядра уравнений оператор S работы [1] полагается равным $S = \varepsilon^2 \hat{P}_0 \hat{C}_2$.

Уравнение для первого недиагонального элемента имеет вид

$$(\hat{P}'_2)_{12} = \varepsilon^2 (P_1 \times P_1^*) \left[t_1 P_1 t_2 P_2 \times 1 + (t_1 \times t_2^*) (\hat{P}'_2)_{12}\right] \langle \tilde{\rho}(1) \tilde{\rho}(2) \rangle, \quad (18)$$

и уравнение для второго недиагонального элемента аналогично (18).

Вводим уравнения Дайсона и Бете—Солпитера в приближении Фолди. Запишем их в виде

$$\begin{gathered} G_1 = G_0 + G_0 t_1 G_1 g_1(1), \\ G_{11} = G_1 \times G_1^* + (G_1 \times G_1^*) (t_1 \times t_1^*) G_{11} g_1(1), \end{gathered} \quad (19)$$

где $g_1(1)$—одночастичная функция распределения центров рассеивателей.

Используем уравнения Дайсона и Бете—Солпитера (19) для приближенного решения уравнений (15)—(18). При этом сначала возьмем уравнение (2) для P_1, преобразуем его с помощью резольвенты ядра уравнения Дайсона (19) и решим методом малых возмущений с точностью до членов $\tilde{O}(\varepsilon^4)$. В точности так же решаем уравнение (16) для P_2. Найденные решения P_1 и P_2 подставляем в уравнения (15) и (17) для $(\dot{P}'_2)_{11}$ и $(\hat{P}'_2)_{11}$, преобразуем эти уравнения с помощью резольвенты ядра уравнения Бете—Солпитера (19) и решаем методом малых возмущений. Наконец, решение уравнения (18) для недиагонального элемента $(\hat{P}'_2)_{12}$ и решение аналогичного уравнения для $(\hat{P}'_2)_{13}$ считаем малыми второго порядка.

Подставляем полученные таким образом приближенные решения уравнений Келлера (13) в правую часть разложения (6 а). В результате приходим к окончательному представлению среднего значения вектора-столбца $\overline{G}$ в виде разложения, члены которого выражаются через решения уравнений Дайсона и Бете—Солпитера (19).

Образуем разность W, равную

$$W = (\overline{G \times G^*} - \overline{G} \times \overline{G}^*) - (G_{11} - G_1 \times G_1^*).$$

Эту разность можно вычислить с помощью разложения для $\overline{G}$, причем ее удобно записать в виде суммы двух слагаемых

$$W = W_1 + W_2,$$

где W_1 пропорционально первой степени плотности рассеивателей и W_2 обращается в нуль вместе с одновременным обращением в нуль двухчастичной $g_2(1\,2)$ и трехчастичной $g_3(1\,2\,3)$ корреляционных функций центров рассеивателей.

Слагаемые W_1 и W_2 представляются следующими разложениями:

$$\begin{gathered} W_1 = \varepsilon^2 (G_{11} - G_1 \times G_1^*) \left[t_1 (G_1 - G_0) t_1 G_1 \times 1 + \ldots\right] g_1(1) - \\ - \varepsilon^3 G_{11} (t_1 G_0 t_1 \times t_1^* + \ldots) (G_{11} - G_1 \times G_1^*) g_1(1) + \varepsilon^3 G_{11} \times \\ \times \left[t_1 (G_1 - G_0) t_1 \times t_1^* + \ldots\right] (G_1 \times G_1^*) g_1(1) + \varepsilon^3 (G_{11} - G_1 \times G_1^*) \times \\ \times \left[t_1 (G_1 - G_0) t_1 (G_1 - G_0) t_1 G_0 \times 1 + \ldots\right] g_1(1) + \tilde{O}(\varepsilon^4); \end{gathered} \quad (20)$$

$$\begin{gathered} W_2 = \varepsilon^2 (G_{11} - G_1 \times G_1^*) (t_1 G_1 t_2 G_1 \times 1 + \ldots) g_2(12) + \\ + \varepsilon^2 G_{11} (t_1 \times t_2^*) G_{11} g_2(1\,2) + \tilde{O}(\varepsilon^3). \end{gathered} \quad (21)$$

В разложении для W_2 мы выписали (в целях экономии места) только члены второго порядка малости; оценка невыписанных членов третьего порядка*, способом следующего раздела, показывает, что они, как и должно быть, меньше выписанных членов второго порядка.

До сих пор рассматривались функция Грина G и ее билинейная комбинация $G \times G^*$. Переход к волновому полю ψ и его билинейной комбинации $\psi \times \psi^*$ осуществляется путем умножения G на j и $G \times G^*$ на $j \times j^*$, где j — плотность источников поля. Умножая разность W на $j \times j^*$, получаем разность между точным значением корреляционной функции волнового поля и значением, вычисленным с помощью уравнений Дайсона и Бете—Солпитера в приближении Фолди:

$$W(j \times j^*) = (\overline{\psi \times \psi^*} - \overline{\psi} \times \overline{\psi^*}) - [(\psi \times \psi^*)_1 - \psi_1 \times \psi_1^*], \tag{22}$$

где обозначено

$$\psi_1 = G_1 j, \quad (\psi \times \psi^*)_1 = G_{11}(j \times j^*).$$

Разложения для разности корреляционных функций (22), члены которого выражаются через решения уравнений Дайсона и Бете—Солпитера в приближении Фолди получаются из разложений (20) и (21) путем их умножения на $j \times j^*$.

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ НОРМА ДЛЯ НЕСЛУЧАЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Как и в [1], предположим, что рассеивающая среда имеет вид шара радиуса R_0, и поместим начало координат в его центре. Будем считать, что падающее поле $\psi_0(\boldsymbol{r})$ есть плоская волна $\psi_0(\boldsymbol{r}) = \exp(ik_0 \boldsymbol{s}_0 \boldsymbol{r})$. Это означает, что плотность источников поля $j(\boldsymbol{r})$ сосредоточена в бесконечности.

Зададимся функциональным пространством неслучайных функций $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ от двух точек пространства $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$. На каждую из функций $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ наложим ограничение, согласно которому она убывает в бесконечности $r_1 = r_2 = r \to \infty$, как $1/r^2$, $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = O(1/r^2)$. Определим норму $\|\Phi\|$ в заданном функциональном пространстве равенством

$$\|\Phi\| = \lim_{(r \to \infty)} (r^2/R_0^2) \left| \int_{4\pi} \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})\, d^2 \boldsymbol{s} \right|, \tag{23}$$

где интегрирование производится по всевозможным направлениям единичного вектора $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}/r$.

Определенную норму можно назвать энергетической. Действительно, в частном случае, когда функция $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ равна среднему значению билинейной комбинации рассеянного шаром поля $\psi_s(\boldsymbol{r})$, $\Phi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \overline{\psi_s(\boldsymbol{r}_1)\psi_s^*(\boldsymbol{r}_2)}$, норма (23) пропорциональна отношению среднего значения потока энергии поля, рассеянного шаром во всех направлениях, к потоку энергии падающего поля через геометрическое сечение шара.

В этом частном случае, в силу оптической теоремы для оператора рассеяния, норма (23) не превосходит нормы среднего значения рассеянного поля $\overline{\psi_s}(\boldsymbol{r})$, определенной в [1], $\|\overline{\psi_s \times \psi_s^*}\| \leqslant \|\overline{\psi_s}\|$.

Рассмотрим некоторые соотношения, оказывающиеся весьма полезными при оценке нормы (23).

Вслед за [9] введем оператор некогерентного рассеяния U шара, равный

$$U = \overline{T \times T^*} - \overline{T} \times \overline{T^*},$$

* Члены третьего порядка, содержащие трехчастичную корреляционную функцию рассеивателей, нами не оценивались.

где T — оператор рассеяния шара. Обозначим через $\Sigma_{погл}$ величину, равную

$$\Sigma_{погл} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_{4\pi} d^2 s\, U(k_0 s, r_1'; k_0 s, r_2')\, d^3 r_1'\, d^3 r_2' G_0(r_1' - r_1'') G_0^*(r_2' - r_2'')\, d^3 r_1''\, d^3 r_2'' J(r_1'', r_2''), \tag{24}$$

где $U(p, r_1'; q, r_2')$ есть фурье-образ ядра $U(r_1, r_1'; r_2, r_2')$ по первым аргументам r_1 и r_2, s — единичный вектор. Функцию $J(r_1, r_2)$ назовем «двухточечной плотностью» источников поля, а $\Sigma_{погл}$ — «сечением поглощения» когерентного излучения.

Чтобы оправдать данное величине $\Sigma_{погл}$ название, рассмотрим частный случай плоской падающей волны, когда двухточечная плотность источников $J(r_1, r_2) = j(r_1) j^*(r_2)$. В этом случае величина $\Sigma_{погл}$ равна

$$\Sigma_{погл} = -(1/k_0)\, \mathrm{Im}\, \overline{T}(k_0 s_0, k_0 s_0) - \frac{1}{(4\pi)^2} \int\limits_{4\pi} d^2 s\, |\overline{T}(k_0 s, k_0 s_0)|^2, \tag{25}$$

где $\overline{T}(p, q)$ — фурье-образ среднего значения ядра $\overline{T}(r, r')$ оператора рассеяния шара. Согласно [10], правая часть равенства (25) имеет вид разности двух положительных членов, из которых первый есть сечение ослабления среднего поля и второй—сечение его рассеяния; левая часть равенства есть сечение «поглощения» среднего поля. На самом деле истинное поглощение у нас отсутствует, и слово «поглощение» означает переход энергии когерентного излучения в энергию некогерентного излучения*.

Вернемся к общему выражению (24) для сечения поглощения. С помощью оптической теоремы для оператора рассеяния, а также с помощью точных формальных уравнений

$$\overline{G} = G_0 + G_0 M \overline{G}, \quad \overline{G} = G_0 + G_0 \overline{T} G_0,$$

где M — точное значение массового оператора, величину $\Sigma_{погл}$ можно преобразовать к следующему виду:

$$\Sigma_{погл} = -\frac{1}{k_0} \int [\mathrm{Im}\, M(r_1, r_2)]\, d^3 r_1\, d^3 r_2\, \overline{G}(r_1, r_1') \times \overline{G}^*(r_2, r_2')\, d^3 r_1'\, d^3 r_2' J(r_1', r_2'). \tag{26}$$

Эта формула позволяет вычислить сечение поглощения когерентного излучения, если известно среднее значение функции Грина.

5. ОЦЕНКА ЧЛЕНОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОСТИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПО НОРМЕ

С помощью нормы (23) можно сформулировать и оценить условия применимости уравнения Бете—Солпитера в приближении Фолди.

Запишем неравенство

$$\| W(j \times j^*) \| / \| (\psi \times \psi^*)_1 - \psi_1 \times \psi_1^* \| \ll 1. \tag{27}$$

Его левая часть представляет собой относительное отклонение точного значения корреляционной функции поля от значения в приближении

* В [11] вопрос о таком переходе энергии рассматривается в условиях задачи о поле источника в неограниченной рассеивающей среде.

Фолди. Поэтому неравенство (27) мы принимаем за условие применимости уравнения Бете—Солпитера в названном приближении.

Оценивая левую часть неравенства (27), будем считать, как и в [1, 4], что рассеивающий шар состоит из рэлеевских рассеивателей с амплитудой рассеяния a, радиусом r_0 и плотностью n. Относительно радиуса корреляции l рассеивателей предположим, что он мал по сравнению с длиной волны, $k_0 l \ll 1$. При вычислении функции Грина G_1 и поля ψ_1, удовлетворяющих уравнению Дайсона в приближении Фолди, заменяем это уравнение на уравнение Гельмгольца с эффективным волновым числом, которое решаем в приближении геометрической оптики, пренебрегая отражением и преломлением волн на границе шара.

Члены разложения для разности корреляционных функций (22), стоящей в числителе левой части неравенства (27), можно представить, как это следует из разложений (20) и (21), в виде

$$(G_0 \times G_0^*)\, U_1 (G_0 \times G_0^*)\, J \tag{28}$$

или

$$(G_1 \times G_1^*)\, J, \tag{29}$$

где U_1 — оператор некогерентного рассеяния в приближении Фолди, определяемый соотношением

$$G_{1\,1} - G_1 \times G_1^* = (G_0 \times G_0^*)\, U_1 (G_0 \times G_0^*).$$

Например, умножая в разложении (20) первый член третьего порядка на $j \times j^*$, получаем члены вида (28) и (29) с двухточечной плотностью источников J, равной

$$J = (t_1 G_0 t_1 \times t_1^*)\, [(\psi \times \psi^*)_1 - \psi_1 \times \psi_1^*]\, g_1(1).$$

Аналогично из первого члена второго порядка в разложении (21) получаем член вида (28) с

$$J = (t_1 G_1 t_2 \psi_1 \times j^*)\, g_2(1\,2).$$

Стоящая в знаменателе левой части неравенства (27) корреляционная функция поля в приближении Фолди может быть представлена в виде (28) с $J = j \times j^*$.

Для членов вида (29) норма (23) оценивается путем непосредственного вычисления.

Норма членов вида (28) выражается через сечение поглощения соотношением

$$\| (G_0 \times G_0^*)\, U_1 (G_0 \times G_0^*)\, J \| = |\Sigma_{\text{погл}}| / R_0^2. \tag{30}$$

Сечение поглощения оцениваем с помощью формулы (26), заменяя в ней точные значения массового оператора и средней функции Грина на их значения в приближении Фолди. В трех случаях, когда двухточечная плотность источников имеет вид

$$J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_1)\, \boldsymbol{j}^*(\boldsymbol{r}_2); \tag{31}$$

$$J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = J_1(\boldsymbol{r}_1)\, \boldsymbol{j}^*(\boldsymbol{r}_2); \tag{32}$$

$$J(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = J_0(\boldsymbol{r}_1)\, \delta^3(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \tag{33}$$

где плотности $J_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $J_0(\boldsymbol{r})$ сосредоточены внутри рассеивающего шара, для сечения поглощения получаются следующие равенство и оценки:

$$\Sigma_{\text{погл}} \approx \pi R_0^2 \qquad (R_0 \gg d_1); \tag{31a}$$

$$|\Sigma_{\text{погл}}| \sim (R_0^4 / k_0 d_1) \max |J_1|; \tag{32a}$$

$$|\Sigma_{\text{погл}}| \sim R_0^3 \max|J_0|. \tag{33a}$$

Приближенное равенство (31 а) получено в предположении, что радиус R_0 шара велик по сравнению с длиной экстинкции d_1 в приближении Фолди.

На основании (30) и (31 а) норма корреляционной функции поля в приближении Фолди приближенно равна

$$\|(\psi \times \psi^*)_1 - \psi_1 \times \psi_1^*\| \approx \pi \qquad (R_0 \gg d_1). \tag{34}$$

Нормы членов разложения для разности корреляционных функций (22) оцениваются с помощью (32 а) и (33 а).

В итоге всех оценок оказывается, что наибольший вклад в разложение для разности корреляционных функций (22) дают: из членов разложения (20)—первый и второй, из членов разложения (21)—первый. Нормы этих главных членов разложений (20) и (21), умноженных на $j \times j^*$, по порядку величины равны

$$\|(G_{11} - G_1 \times G_1^*)[t_1(G_1 - G_0)t_1\psi_1 \times j^*]g_1(1)\| \sim [|M_1(k_0)|/k_0^2](R_0/d_1)^2; \tag{35}$$

$$\|G_{11}(t_1 G_0 t_1 \times t_1^*)[(\psi \times \psi^*)_1 - \psi_1 \times \psi_1^*]g_1(1)\| \sim (|a|/r_0)(R_0/d_1) \times \times \max[(|\psi|^2)_1 - |\psi_1|^2]; \tag{36}$$

$$\|(G_{11} - G_1 \times G_1^*)(t_1 G_1 t_2 \psi_1 \times j^*)g_2(1\,2)\| \sim (nl^2/k_0)(R_0/d_1)^2, \tag{37}$$

где $M_1(k_0)$ — фурье-образ ядра массового оператора в приближении Фолди.

В правую часть (36) входит средний квадрат флуктуаций поля в приближении Фолди. Его величину можно оценить с помощью асимптотики корреляционной функции поля на большой оптической глубине [12]. Согласно такой оценке, величина среднего квадрата флуктуаций поля в приближении Фолди порядка единицы.

Подстановка приближенного равенства (34) и оценок (35)—(37) в неравенство (27) приводит к условиям применимости уравнения Бете—Солпитера в приближении Фолди. Чтобы эти условия допускали значения радиуса R_0 рассеивающего шара, превосходящие длину экстинкции d_1, следует потребовать, чтобы в правых частях оценок (35)—(37) коэффициенты при отношении R_0/d_1 и его квадрат были малы по сравнению с единицей. Из них коэффициент $|M_1(k_0)|/k_0^2$ мал, $|M_1(k_0)|/k_0^2 \ll 1$, в силу нашего предположения (см. [1]) о том, что эффективный показатель преломления рассеивающего шара мало отклоняется от единицы; коэффициент $|a|/r_0$ мал, $|a|/r_0 \ll 1$, так как рассеиватели являются рэлеевскими. Наконец, требуя, чтобы был мал коэффициент в правой части (37), получаем неравенство

$$nl^2/k_0 \ll 1. \tag{38}$$

Это неравенство было получено в [1] из условия применимости уравнения Дайсона в приближении Фолди.

В данной работе при построении матричного стохастического уравнения (5) мы исходили из преобразованного стохастического уравнения первого порядка (1). Можно исходить также из преобразованного стохастического уравнения второго порядка, что, по-видимому, будет удобно при исследовании границ применимости уравнения Бете—Солпитера с учетом корреляций рассеивателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **15**, № 1, 66 (1972).
2. Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, изд Мир, М, 1969.
3. L. L. Foldy, Phys. Rev., **67**, № 3—4, 107 (1945).
4. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
5. Л. Шварц, Математические методы для физических наук, изд. Мир, М., 1965
6. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 5, 719 (1968).
7. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.
8. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
9. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, ЖЭТФ, **45**, вып. 4 (10), 1136 (1963).
10. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
11. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, **55**, вып. 2 (8), 567 (1968).
12. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 6, 894 (1969).

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию 2 августа 1971 г.

APPLICATION OF THE EQUATION FOR THE FIELD CORRELATION FUNCTION TO DISCRETE SCATTERING MEDIUM

Yu. N. Barabanenkov

The applicability limits of Bethe—Salpeter's equation in Foldy's approximation is investigated by the transformed matrix stochastic equation method. The scattering medium is assumed to have the form of a sphere and it consists of discrete scatterers satisfying the conditions of Rayleigh scattering. The applicability conditions of Bethe—Salpeter's equation in Foldy's approximation obtained coincide with those of Dyson's equation in this approximation obtained earlier. The conditions involve that the effective refractive index of the scattering sphere must be close to unity and the scatter correlation radius l (at $k_0 l \ll 1$) must satisfy the inequality $nl^2/k_0 \ll 1$ where n is the scatterer density and k_0 is the wave number. These applicability conditions of Bethear—Salpeter's equation in Foldy's approximation admit the values of the scattering sphere radius exceeding the extinction length.