ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 538.574

СИЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СЛУЧАЙНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

В. И. Шишов

Проведено аналитическое исследование решения дифференциального уравнения для четвертого момента комплексной амплитуды поля сферической волны, распространяющейся в статистически однородной и изотропной случайно преломляющей среде с одним характерным масштабом неоднородностей. Получены приближенные выражения для пространственного спектра флуктуаций интенсивности $\tilde{M}(q)$ и для индекса мерцаний $F = \overline{\Delta I^2}/\bar{I}^2$ в случае как слабых, так и сильных флуктуаций интенсивности. В частности, найдено, что при $\alpha ka^2 \gg 1$ (α—градиент среднего квадрата флуктуаций набега фазы, k — волновое число, a — характерный размер неоднородностей флуктуаций показателя преломления) случайно преломляющая среда фокусирует сферическую волну, т. е. на некотором расстоянии от источника имеется максимум F, причем $r_{\text{фок}} \approx (30a^2/2\alpha)^{1/3}$ и $F_{\text{фок}} \sim e^{-1}\ln(ka^2/r_{\text{фок}})$. На достаточно больших глубинах четвертый момент связан со вторым, так же как и при нормальном законе распределения флуктуаций поля волны.

Флуктуации интенсивности сферической волны, распространяющейся в случайно преломляющей среде, были рассмотрены Татарским в приближении метода плавных возмущений [1], который, как известно [2], описывает только слабые флуктуации интенсивности. В последнее время рядом независимых методов было получено дифференциальное уравнение для четвертого момента поля волны, распространяющейся в случайно преломляющей среде, которое описывает и сильные и слабые флуктуации интенсивности [3–7]. В работах [8, 9] было найдено приближенное решение этого уравнения для случая плоской волны.

В данной работе методика, примененная в [8, 9] при исследовании флуктуаций интенсивности плоской волны, будет распространена на случай сферической волны.

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТВЕРТОГО МОМЕНТА КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ

Рассмотрим следующую задачу. В некотором ограниченном объеме со случайными флуктуациями показателя преломления распространяется сферическая волна Интегральное рассеяние в среде происходит на малые углы. Среда является статистически однородной и изотропной и имеет один характерный масштаб неоднородностей. Это означает, что корреляционную функцию флуктуаций показателя преломления $B_\mu(\Delta \boldsymbol{r})$ при $|\Delta \boldsymbol{r}| \ll a$ можно представить в виде $B_\mu(\Delta \boldsymbol{r}) \approx \overline{\mu^2}[1 - (\Delta r/a)^2]$, а при $|\Delta \boldsymbol{r}| \gg a$ $B_\mu(\Delta \boldsymbol{r}) = \overline{\mu^2}$. Средний квадрат флуктуаций набега фазы на характерном размере одной неоднородности много меньше единицы:

$$\overline{(\Delta S)^2} \approx k^2 \overline{\mu^2} a^2 \ll 1, \tag{1}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\overline{\mu^2}$ — средний квадрат флуктуаций показателя преломления.

Распространение плоской волны в такой среде рассматривалось в работах [3—7], где представляя поле в виде

$$u = E_{\text{пл}} \exp[-ikz]$$

(ось z выбрана вдоль направления распространения волны), строили уравнение для четвертого момента комплексной амплитуды поля $E_{\text{пл}}$. В случае сферической волны более удобно записать поле в виде

$$u = E_{\text{сф}} \frac{1}{r} \exp[-ikr] \tag{2}$$

и использовать сферическую систему координат. Аналогично случаю плоской волны получаем для четвертого момента $E_{\text{сф}}$,

$$\Phi(\xi, \eta, r) = \overline{E_{\text{сф}}(\xi + \xi_1, r) E_{\text{сф}}(\eta + \xi_1, r) E^*(\xi + \eta + \xi_1, r) E^*(\xi_1, r)}, \tag{3}$$

где $\xi = (\xi_\theta, \xi_\varphi)$, $\eta = (\eta_\theta, \eta_\varphi)$ — угловые координаты, следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\alpha f \Phi - \frac{i}{kr^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\theta \partial \eta_\theta} - \frac{i}{kr^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_\varphi \partial \eta_\varphi}; \tag{4}$$

$$\alpha = k^2 \int_0^\infty B_\mu(\Delta r)\, d(\Delta r); \tag{5}$$

$$f = 2 - 2R(r\xi) - 2R(r\eta) + R(r\xi + r\eta) + R(r\xi - r\eta),$$
$$R(r\xi) = \frac{k^2}{\alpha} \int_0^\infty B_\mu(\Delta r, r\xi)\, d(\Delta r). \tag{6}$$

Здесь B_μ — корреляционная функция флуктуаций показателя преломления. Уравнение (4) получено в предположении малости величин ξ и η при условии $\sin\xi_\theta = \sin\eta_\theta = 1$, $\operatorname{ctg}\xi_\theta = \operatorname{ctg}\eta_\theta = 0$. В качестве начального условия следует принять

$$\Phi\big|_{r=0} = 1. \tag{7}$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ИТЕРАЦИОННОГО РЯДА

Уравнение (4) удобно исследовать в полуспектральном представлении. Для этого введем функцию

$$M(\omega, \eta, r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, r) \exp[-i(\xi\omega)]\, d^2\xi. \tag{8}$$

После преобразования Фурье (4) принимает вид интегро-дифференциального уравнения, которое можно перевести в чисто интегральное с учетом начального условия (7):

$$M(\omega, \eta, r) = \delta(\omega) \exp\left[-\alpha \int_0^r \gamma(r'\eta) dr'\right] +$$
$$+ \alpha \int_0^r dr_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\omega_1\, \psi(\omega - \omega_1, \eta_1, r_1) \times \tag{9}$$

$$\times \exp\left[-\alpha D(\omega,\ \eta_1,\ r_1) + \alpha D(\omega_1,\ \eta_1,\ r_1)\right] M(\omega_1,\ \eta_1,\ r_1),$$

где

$$\gamma(r\,\eta) = 2 - 2R(r\,\eta), \quad D(\omega,\ \eta,\ r) = \int\limits_0^r \gamma\left\{\left[\eta + \frac{\omega}{k}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\right] r'\right\} dr'; \tag{10}$$

$$\psi(\omega,\ \eta,\ r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[2R(r\,\xi) - R(r\,\xi + r\,\eta) - R(r\,\xi - r\,\eta)\right] \times$$
$$\times \exp\left[-i(\xi\,\omega)\right] d^2\,\xi. \tag{11}$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде итерационного ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \alpha^n,$$
$$M_0 = \delta(\omega) \exp\left[-\alpha \int\limits_0^r \gamma\,(r'\,\eta) dr'\right]. \tag{12}$$

Для n-го коэффициента имеем

$$M_n(\omega,\ \eta,\ r) = \int\limits_0^r dr_1 \ldots \int\limits_0^{r_{n-1}} dr_n \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\,\omega_1 \ldots \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\,\omega_{n-1} \times$$
$$\times \exp(-\alpha L_n) \prod_{i=1}^{n} \left\{\psi(\omega_{i-1} - \omega_i,\ \eta_i,\ r_i)\right\}; \tag{13}$$

$$\eta_i = \eta + \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{i} \omega_{l-1} \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_{l-1}}\right); \tag{14}$$

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{r_{i+1}}^{r_i} \gamma\left\{r_i\left[\eta_i + \frac{1}{k}\omega_i\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_i}\right)\right]\right\} dr'. \tag{15}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ M_n ПРИ БОЛЬШИХ n

Функции $\psi(\Delta\,\omega_i,\ \eta_i,\ r_i)$ зависят от ω_l $(l = 1, 2, \ldots, i)$ двояким образом: непосредственно от $\Delta\omega_i = \omega_{i-1} - \omega_i$ и косвенно через η_i, причем зависимость ψ от $\Delta\,\omega_i$ является сильной, а от ω_l через η_i — слабой.

Представим $\psi(\Delta\omega_i,\ \eta_i,\ r_i)$ в виде

$$\psi(\Delta\,\omega_i,\ \eta_i,\ r_i) = \gamma(r_i\,\eta_i)\, p(\Delta\,\omega_i,\ \eta_i,\ r_i), \tag{16}$$

где функции $p_i = p(\Delta\omega_i,\ \eta_i,\ r_i)$ обладают следующим свойством:

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} p(\Delta\omega_i,\ \eta_i,\ r_i) d^2(\Delta\,\omega_i) = 1. \tag{17}$$

В интеграле (13) существенная область интегрирования по переменным ω_i определяется множителями p_i, а существенная область интегрирования по переменным r_i определяется множителями $\gamma(r_i\ \eta_i)$.

В дальнейших вычислениях мы используем то обстоятельство, что в n-кратном интеграле типа

$$I_n = \int\limits_0^r dr_1 \ldots \int\limits_0^{r_{n-1}} dr_n \exp(-\alpha L_n) \prod_{i=1}^n \{\gamma(r_i \eta_i)\} \tag{18}$$

переменные r_i в существенной области интегрирования слабо меняются вблизи некоторых средних значений $\langle r_i \rangle$, так что $|r_i - \langle r_i \rangle| \ll \langle r_i \rangle$. Вынесем в (13) функции p_i за знак интеграла по r_i, заменив в них все r_i на $\langle r_i \rangle$. После такой замены интегрирование (13) по r_i сводится к интегрированию (18). Позднее будет показано, что основной вклад в ряд (12) вносят члены с n, для которых

$$\begin{gathered} n_1 - \sqrt{n_1} \leqslant n \leqslant n_1 + \sqrt{n_1}, \\ n_1 = E[L_{n_1}], \end{gathered} \tag{19}$$

где $E[x]$ — целая часть x.

Оценим интеграл I_n, полагая, что n находится в области (19). Рассматривая (18) как некоторый функционал от $r_i - \langle r_i \rangle$ и проводя разложение по степеням $r_i - \langle r_i \rangle$, получаем в нулевом приближении

$$I_n^{(0)} = \frac{(L_{0,\,n})^n}{n!} \exp(-\alpha L_{0,\,n}), \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} L_{0,\,n} = \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{\langle r_{i+1} \rangle}^{\langle r_i \rangle} \gamma \left\{ r' \left[\langle \eta_i \rangle + \frac{\omega_i}{k} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{\langle r_i \rangle} \right) \right] \right\} dr', \\ \langle \eta_i \rangle = \eta + \sum_{l=1}^{i} \omega_{l-1} \left(\frac{1}{\langle r_l \rangle} - \frac{1}{\langle r_{l-1} \rangle} \right). \end{gathered} \tag{21}$$

Величина $\langle r_i \rangle$ с учетом (19) определяется соотношением

$$\langle (\Delta r_i) \rangle = \langle (r_i - r_{i+1}) \rangle \approx \frac{1}{\alpha \gamma(\langle r_i \rangle \langle \eta_i \rangle)}. \tag{22}$$

Оценка следующих членов разложения показала, что $I_n^{(0)}$ является приближенным значением I_n по порядку величины при $\max\{|\langle r_i \rangle \langle \eta_i \rangle|\} < a$, а при условии $\max\{\langle r_i \rangle \langle \eta_i \rangle\} \gg a$ — с точностью до малой величины $\max\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \left| a \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} \right|_{x = \max\{|\langle r_i \rangle \langle \eta_i \rangle|\}}\right\}$. Ошибка замены r_i на $\langle r_i \rangle$ во всех множителях p_i имеет порядок $1/\sqrt{n}$. Итак, с указанной выше точностью имеем

$$M_n \approx M_n^{(0)} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\omega_1 \ldots \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\omega_{n-1} \frac{(L_{0,\,n})^n}{n!} \exp(-\alpha L_{0,\,n}) \prod_{i=1}^{n} \{p_i\}. \tag{23}$$

Теперь можно перейти к оценке ряда (12) при различных значениях аргументов и параметров.

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ

Рассмотрим выражение для $M(\omega, \eta, r)$ при $\eta = 0$. При этом вместо ω введем пространственную частоту q, которая имеет более прямой физический смысл:

$$q = \omega/r. \tag{24}$$

Функция

$$\widetilde{M}(q, r) = r^2 M \ (\omega = q r, r) \tag{25}$$

является пространственным спектром флуктуаций интенсивности.

Из оценки M_n при больших n следует, что ряд (12) является некоторым разложением по степеням $\alpha L_{0,n}$. При $\alpha L_{0,1} \ll 1$ основной вклад в ряд (12) вносят первые два члена, поскольку $L_{0,n}$ слабо зависит от n, а множитель $1/n!$ обеспечивает малость членов при $n \geqslant 2$.

Итак, при

$$\alpha L_{0,1} = \alpha \int_0^{\langle r_1 \rangle} \gamma(r' \langle \eta_1 \rangle) dr' + \alpha \int_{\langle r_1 \rangle}^{r} \gamma \left[rq \left(1 - \frac{r'}{r}\right)\right] dr' \ll 1; \tag{26}$$

$$\widetilde{M}(q, r) = \delta(q) + \alpha \int_0^r \sin^2 \left[q^2 \frac{r}{k} \left(\frac{r}{r'} - 1\right)\right] R_1 \left(q \frac{r}{r'}\right) dr', \tag{27}$$

где $R_1(q)$ — фурье-преобразование функции $R(r\xi)$ по $r\xi$. Выражение (27) можно получить методом плавных возмущений. Неравенство (26) определяет область применимости метода плавных возмущений при вычислениях флуктуаций интенсивности.

Рассмотрим случай $\alpha L_{0,1} \gg 1$. При больших $\alpha L_{0,1}$ основной вклад в ряд (12) дают члены с большими n. Пользуясь формулой Стирлинга, получаем при $|n - \alpha L_{0,n}| \ll \alpha L_{0,n}$

$$\frac{(\alpha L_{0,n})^n}{n!} \exp[-\alpha L_{0,n}] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \alpha L_{0,n}}} \exp\left[- \frac{(n - \alpha L_{0,n})^2}{2\alpha L_{0,n}}\right]. \tag{28}$$

Из выражения (28) следует, что основную роль играют члены, у которых значения n удовлетворяют условию (19).

Заменяя в слабо зависящих от n множителях n на n_1 (в том числе полагая кратность интеграла по q_i равной n_1), получаем после суммирования по n

$$\widetilde{M}(q, r) \approx \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\omega_1 \dots \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\omega_{n_1} r^2 \prod_{i=1}^{n_1} p(\Delta\omega_i, \langle \eta_i \rangle). \tag{29}$$

Зависимость p_i от ω_e через $\langle \eta_i \rangle$ является слабой. В нулевом приближении можно заменить $\langle \eta_i \rangle$ на некоторые эффективные средние $\eta_i^{(0)}$, после чего (29) можно проинтегрировать, используя результаты теории предельных законов распределения сумм случайных величин.

В соответствии с [10, 11] имеем

$$\widetilde{M}(q, r) \approx \widetilde{M}_{\text{ас}}(q, r) = \frac{1}{2\pi B_{n_0}^2} \exp[-q^2/2B_{n_0}^2]; \tag{30}$$

$$B_{n_0}^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n_0} b_i^2, \tag{31}$$

$$b_i^2 = \frac{1}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{\omega}, \ \eta_i^{(0)}) \omega^2 \, d^2 \boldsymbol{\omega},$$

где n_0 удовлетворяет соотношению (19), в котором все $\langle \eta_i \rangle$ заменены на $\eta_i^{(0)}$. Однако определить n_0 с помощью (19) нельзя, поскольку при выводе формулы (22) для $\langle r_i \rangle$ выражение (19) уже использовали. Величину n_0 можно найти из соотношения

$$r = \sum_{i=1}^{n_0} \Delta r_i \approx \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\alpha \gamma (\langle r_i \rangle \eta_i^{(0)})}, \tag{32}$$

причем величины $\boldsymbol{\omega}_i$ входящие в $\eta_i^{(0)}$, имеют порядок

$$\omega_i^2 \sim r^2 q^2 + \sum_{e=1}^{i} \left(\frac{r_e}{a} \right)^2. \tag{33}$$

При $\langle r_n \rangle \eta_n^{(0)} < a$ получаем

$$B_{n_0}^2 \approx \frac{c}{a^2} \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \approx \begin{cases} \dfrac{1}{30} c \alpha q^2 r^3 / k^2 a^4 & \left(\dfrac{1}{30} \alpha q^2 r^3 / k^2 a^4 \leqslant 1 \right) \\ \dfrac{c}{a^2} (1 + a^2 q^2) \left[\left(\dfrac{2\alpha}{k^2 a^4} \right)^{1/3} r - \left(\dfrac{1}{aq} \right)^{2/3} + \ln(1 + a^2 q^2) \right]^{-2} \times \\ \times \exp \left[\left(\dfrac{2\alpha}{k^2 a^4} \right)^{1/3} r - \left(\dfrac{1}{aq} \right)^{2/3} \right] & \left(\dfrac{1}{30} \alpha q^2 r^3 / k^2 a^4 \gg 1 \right) \end{cases}, \tag{34}$$

где

$$c = \frac{\partial^4 R(x)}{\partial x^4} \bigg/ \left(\frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \right)^2 \bigg|_{x=0}. \tag{35}$$

При $\langle r_n \rangle \eta_n^{(0)} \gg a$

$$B_{n_0}^2 = \frac{2}{3} \alpha r / a^2. \tag{36}$$

Величина $\langle r_n \rangle \eta_n^{(0)}$ при $\langle r_n \rangle \eta_n^{(0)} < a$ имеет порядок

$$\begin{aligned} & qr/k \qquad \left(\frac{1}{30} \alpha r^3 / k^2 a^4 \leqslant 1 \right), \\ & (1 + a^2 q^2) \left(\frac{a}{2\alpha k} \right)^{1/3} \exp \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{k^2 a^4} \right)^{1/3} r - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{aq} \right)^{2/3} \right] \\ & \left(\frac{1}{30} \alpha r^3 / k^2 a^4 \gg 1 \right). \end{aligned} \tag{37}$$

Итак, для пространственного спектра мерцаний получаем следующие выражения. При

$$\frac{1}{30} \alpha q^2 r^3 / k^2 a^2 \gg 1,$$

$$\frac{1}{a} < q < \begin{cases} ka/r & \left(\frac{1}{30}\alpha r^3/k^2a^4 \leqslant 1\right) \\ \left(\frac{2\alpha k}{a}\right)^{1/3} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{k^2a^4}\right)^{1/3} r\right] & \left(\frac{1}{30}\alpha r^3/k^2a^4 \gg 1\right) \end{cases} \tag{38}$$

имеем

$$\widetilde{M}(q, r) \sim \begin{cases} \frac{30k^2a^2}{2\pi c \alpha q^2 r^3} \exp[-30k^2a^4/2c\alpha r^3] & \left(\frac{1}{30}\alpha r^3/k^2a^4 \leqslant 1\right) \\ \frac{1}{2\pi c q^2}\left[\left(\frac{2\alpha r^3}{k^2a^4}\right)^{1/3} + \ln(1+a^2q^2)\right]^{-2} \times & \\ \times \exp\left[-\left(\frac{2\alpha}{k^2a^4}\right)^{1/3} r\right] & \left(\frac{1}{30}\alpha r^3/k^2a^4 \gg 1\right) \end{cases} . \tag{39}$$

При

$$\frac{1}{30}\alpha q^2 r^3/k^2a^2 \gg 1,$$
$$q < 1/a, \tag{40}$$
$$\frac{1}{30}\alpha r^3/k^2a^4 \gg 1$$

$$\widetilde{M}(q, r) \sim \frac{a^2}{2\pi c}\left[\left(\frac{2\alpha}{k^2a^4}\right)^{1/3} r - \left(\frac{1}{aq}\right)^{2/3}\right]^{-2} \exp\left[-\left(\frac{2\alpha}{k^2a^4}\right)^{1/3} r + \left(\frac{1}{aq}\right)^{2/3}\right]. \tag{41}$$

Выражения (39) и (41) представляют $\widetilde{M}(q)$ по порядку величины.

При

$$\alpha r \gg 1,$$
$$\frac{1}{30}\alpha q^2 r^3/k^2a^2 \gg 1, \tag{42}$$
$$q \gg ka/r$$

$$\widetilde{M}(q, r) \approx \frac{3}{2\pi\alpha r} \exp[-3q^2/2\alpha r]. \tag{43}$$

В существенной области пространственных частот выражение (43) определяет $\widetilde{M}(q, r)$ с относительной точностью порядка

$$\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2\alpha r}}, \left|a\frac{\partial R(x)}{\partial x}\right|_{x=(\alpha r^3/k^2a^2)^{1/2}}\right|\right\}.$$

5. ИНДЕКС МЕРЦАНИЙ

Рассмотрим поведение индекса мерцаний

$$F = \overline{(I - \overline{I})^2}/\overline{I}^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\widetilde{M}(q) - \delta(q)] d^2 q \tag{44}$$

в зависимости от параметра αka^2 и расстояния от источника r.

Вначале рассмотрим зависимость F от r при больших значениях αka^2. При

$$r < r_1 = (30k^2a^4/4\alpha)^{1/3} \tag{45}$$

основной вклад в интеграл (44) дает область (26) и F определяется выражением, полученным в [1]:

$$F = \frac{2}{30}\,\frac{\alpha}{k^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 R(x,\ y)\bigg|_{x=y=0}. \tag{46}$$

Координаты x, y расположены в плоскости, перпендикулярной направлению на источник. В случае слабых мерцаний индекс мерцаний сферической волны в 10 раз меньше индекса мерцаний плоской волны.

При

$$r_1 \leqslant r < r_2 = \left(\frac{k^2a^4}{2\alpha}\right)^{1/3} \ln[\ln(\alpha\, ka^2)] \tag{47}$$

основной вклад в F дает область (38) и

$$F \sim \begin{cases} \dfrac{30k^2a^4}{c\,\alpha\, r}\exp\left[-\dfrac{30k^2a^4}{2c\,\alpha\, r^3}\right]\ln(ka^2/r) & \left(\dfrac{1}{30}\,\alpha\, r^3/k^2a^4 \sim 1\right) \\ \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{k^2a^4}{2\alpha\, r^3}\right)^{1/3}\left[\dfrac{1}{3}\ln(2\alpha\, ka^2) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\alpha}{k^2a^4}\right)^{1/3} r\right]\exp\left[-\left(\dfrac{2\alpha}{k^2a^4}\right)^{1/3} r\right]. & \\ \left(\dfrac{1}{30}\,\alpha\, r^3/k^2a^4 \gg 1\right). & \end{cases} \tag{48}$$

Индекс мерцаний имеет максимум при $r = r_{\text{фок}}$:

$$r_{\text{фок}} \approx (30a^2/2c\,\alpha)^{1/3},$$
$$F_{\text{фок}} \sim e^{-1}\ln(ka^2/r_{\text{фок}}). \tag{49}$$

Таким образом, при $\alpha\, ka^2 \gg 1$ случайно преломляющая среда фокусирует сферическую волну. Вблизи фокуса спектр флуктуаций интенсивности в существенной области частот является степенным: $\widetilde{M}(q) \propto 1/q^2$.

При $r \gg r_2$ основной вклад в F дает область (42) и $F = 1$. Аналогичные расчеты при $\eta \neq 0$ приводят к выражению для четвертого момента при $r \gg r_2$:

$$\Phi(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ r) = \exp\left(-\frac{2}{3}\,\alpha\, r u^2/a^2\right) + \exp\left[-\frac{2}{3}\,\alpha\, r v^2/a^2\right], \tag{50}$$

где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — двумерные векторы в плоскости, перпендикулярной направлению на источник. Точность выражения (50) имеет порядок

$$\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2\alpha\, r}},\quad \left|a\,\frac{\partial R(x)}{\partial x}\right|_{x=(\alpha r^3/k^2a^2)^{1/2}}\right|\right\}.$$

При $r > ka^2$ и любых $\alpha\, ka^2$ имеем

$$\Phi(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ r) = \exp\left\{-2\alpha\int_0^r\left[1 - R\left(\frac{r'}{r}\,\boldsymbol{u}\right)\right]dr'\right\} + $$
$$+ \exp\left\{-2\alpha\int_0^r\left[1 - R\left(\frac{r'}{r}\,\boldsymbol{v}\right)\right]dr'\right\} - \exp\{-2\alpha\, r\}. \tag{51}$$

Точность выражения (51) — порядка $|R(x)|_{x=(\alpha r^3/k^2a^2)^{1/2}}|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. В. Писарева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 2, 376 (1961).
3. В. И. Шишов, Тр. ФИАН, 38, 171 (1967).
4. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
5. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, вып. 6, 2107 (1969).
6. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, вып. 4, 594 (1969).
7. M. J. Beran, J. Opt. Soc. Amer., 59, № 9, 1134 (1969).
8 В. И. Шишов, ЖЭТФ, 61, вып. 10, 1399 (1971).
9 K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Acta optica, 18, № 10, 767 (1971).
10. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, изд. Наука, М., 1965.
11. И А Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, изд: Наука, М., 1965.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
27 сентября 1971 г.

STRONG INTENSITY FLUCTUATIONS OF A SPHERICAL WAVE PROPAGATING IN A RANDOMLY REFRACTING MEDIUM

V. I. Shishov

An analytical investigation has been made the differential equation for the forth moment of the complex field amplitude of a spherical wave propagating in a statistically homogeneous and isotropic randomly-refracting medium with one typical scale of inhomogeneities. Approximative expressions have been obtained for the spatial spectrum of intensity fluctuations $\tilde{M}(q)$ and for the scintillation index $F = \overline{\Delta I^2}/\overline{I}^2$ in the case of weak and strong fluctuations. In particular, it is found that at $\alpha ka^2 \gg 1$ (α is the gradient of the mean square of the phase shift fluctuations, k is the wave number, a is the characteristic size of inhomogeneities of the refractive index fluctuations) the randomly refracting medium focuses the spherical wave, i. e., at some distance from the source, there is a maximum of F, $r_{\text{foc}} \approx (30a^2/2\alpha)^{1/3}$ and $F_{\text{foc}} \sim e^{-1} \ln (ka^2/r_{\text{foc}})$. At sufficiently large depths the forth moment is connected with the second one as it takes place at the normal distribution law of the wave field fluctuations.