ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 6 *РАДИОФИЗИКА* *1972*

УДК 538.56 : 519.25

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПОЛЯ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. С. Мазманишвили, А. М. Шендерович

Рассмотрены вопросы статистики поля синхротронного излучения релятивистских электронов в накопителе (синхротроне). Анализ проведен для произвольного числа электронов с учетом статистических флуктуаций их положения на орбите. Получена зависимость корреляционных функций от фазовой протяженности сгустка и числа электронов В стационарном случае получены пространственно-временные зависимости корреляционных функций.

В настоящее время спектр, поляризация и угловое распределение синхротронного излучения хорошо изучены на основе как классической, так и квантовой электродинамики [1,2]. Однако в связи с развитием квантовой оптики [3–5] представляет интерес также исследование его статистических характеристик. Этот вопрос рассмотрен только в работе [6], в которой авторы ограничились исследованием поведения одного электрона при отсутствии статистических флуктуаций. Поле излучения такого электрона находится в когерентном состоянии [3] и описывается пуассоновской статистикой.

В настоящей работе исследованы вопросы статистики поля синхротронного излучения в более реальных условиях, с учетом флуктуаций положения электронов на орбите и других флуктуаций. При проведении анализа мы ограничились рассмотрением парных пространственно-временных корреляций, представляющих наибольший интерес. По тем же соображениям, что и в работе [6], задача решалась без учета отдачи, испытываемой электронами при излучении.

Известно [3], что вероятность срабатывания идеального счетчика фотонов с поляризацией μ, расположенного в пространственно-временной точке $x_1 \equiv \{\boldsymbol{r}_1, t_1\}$, пропорциональна функции корреляции первого порядка:

$$G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1;\ x_1) = \mathrm{Sp}\,\{\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}_{\mu}(x_1)\,\hat{E}^{(+)}_{\mu}(x_1)\}, \tag{1}$$

где $\hat{E}^{(+)}_{\mu}(x_1)$ и $\hat{E}^{(-)}_{\mu}(x_1)$ — части оператора электрического поля с положительными и отрицательными частотами, $\hat{\rho}$ — матрица плотности поля излучения. Вероятность срабатывания двух идеальных детекторов в точках x_1 и x_2, регистрирующих фотоны с μ-й и ν-й поляризациями соответственно, пропорциональна функции корреляции второго порядка:

$$G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}(x_1,\ x_2;\ x_2,\ x_1) = \mathrm{Sp}\,\{\hat{\rho}\,\hat{E}^{(-)}_{\mu}(x_1)\,\hat{E}^{(+)}_{\nu}(x_2)\,\hat{E}^{(+)}_{\nu}(x_2)\,\hat{E}^{(-)}_{\mu}(x_1)\}. \tag{2}$$

Поэтому естественной мерой пространственно-временных корреляций поля излучения может служить величина

$$\gamma_{\mu\nu}(x_1,\ x_2) = \frac{G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}(x_1,\ x_2;\ x_2,\ x_1) - G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1;\ x_1)\,G^{(1)}_{\nu\nu}(x_2;\ x_2)}{G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1;\ x_1)\,G^{(1)}_{\nu\nu}(x_2;\ x_2)}, \tag{3}$$

характеризующая относительное превышение скорости счета совпадений двух идеальных счетчиков над произведением их скоростей счета. При отсутствии корреляции, как легко видеть, $\gamma_{\mu\nu}(x_1, x_2) = 0$.

При проведении анализа мы будем пользоваться P-представлением матрицы плотности на базисе когерентных состояний $|\{\alpha_\kappa\}\rangle$ поля излучения [3, 4]:

$$\hat{\rho} = \int P(\{\alpha_\kappa\}) \,|\{\alpha_\kappa\}\rangle \langle \{\alpha_\kappa\}| \prod_\kappa d^2\alpha_\kappa . \tag{4}$$

1. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ СИНХРОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Пусть в накопителе имеется N электронов, вращающихся по орбите радиуса R с частотой ω и одновременно совершающих синхротронные чолебания с частотой Ω:

$$x_j = [R + g\,\psi_j'(t)] \cos[\omega t + \psi_j(t)], \quad y_j = [R + g\,\psi_j'(t)] \sin[\omega t + \psi_j(t)],$$
$$z_j = 0, \tag{5}$$
$$\psi_j(t) = a_j \cos(\Omega t + \chi_j), \quad \psi_j'(t) = -a_j\Omega \sin(\Omega t + \chi_j),$$

где x_j, y_j, z_j — декартовые координаты j-го электрона; a_j и χ_j — соответственно амплитуда и фаза синхротронных колебаний j-го электрона, которые предполагаются случайными. Это предположение соответствует реальности, поскольку, как известно (см., например, [7, 8]), продольный размер пучка определяется только случайными факторами (в отсутствие случайных флуктуаций благодаря радиационному затуханию все частицы группируются в точке синхронной фазы). Коллективные эффекты в данной работе не рассматриваются.

Как легко видеть,

$$G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1; x_1) = \int \prod_j P(a_j, \chi_j)\, da_j\, d\chi_j\, G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1; x_2; a_j, \chi_j),$$
$$G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \int \prod_j P(a_j, \chi_j)\, da_j\, d\chi_j\, G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}(x_1, x_2; x_2, x_1; a_j, \chi_j), \tag{6}$$

где $P(a_j, \chi_j)$ — плотность распределения вероятностей величин a_j и χ_j для j-го электрона; в аргументах G под a_j, χ_j понимается набор всех значений j от 1 до N.

Подынтегральные функции $G^{(1)}_{\mu\mu}$ и $G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}$ представляют собой при заданных значениях a_j и χ_j корреляционные тензоры, которые соответствуют, очевидно [6], когерентным состояниям поля. Следовательно,

$$G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}(x_1, x_2; x_2, x_1; a_j, \chi_j) = G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1; x_1; a_j, \chi_j)\, G^{(1)}_{\nu\nu}(x_2; x_2; a_j, \chi_j),$$
$$G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1; x_2; a_j, \chi_j) = E^{(-)}_\mu(x_1; a_j, \chi_j)\, E^{(+)}_\mu(x_2; a_j, \chi_j). \tag{7}$$

Здесь $E^{(-)}$, $E^{(+)}$ — собственные значения операторов $\hat{E}^{(-)}$ и $\hat{E}^{(+)}$:

$$E^{(+)}_\mu = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^{(+)}_{j\mu},$$
$$\varepsilon^{(+)}_{j\mu} = \sum_{k,s} i \left(\frac{2\pi\hbar ck}{L^3}\right)^{1/2} \xi_\mu(\boldsymbol{k}, s)\, a_{jks}(t, a_j, \chi_j) \exp[i(\boldsymbol{kr} - ckt)], \tag{8}$$

L^3 — нормировочный объем; $\xi_\mu(\boldsymbol{k}, s)$ — проекция вектора поляризации на ось μ.

По аналогии с [6], для амплитуд α_{jks} с учетом выражения (5)

$$\alpha_{jks} = ie\left(\frac{2\pi c}{\hbar k L^3}\right)^{1/2}\int_{t_0}^{t} dt\,\{\xi_y^*(\boldsymbol{k}, s)\cos[\omega t + \psi_j(t)] - \\ - \xi_x^*(\boldsymbol{k}, s)\sin[\omega t + \psi_j(t)]\}\exp[-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_j - ckt)], \tag{9}$$

где $\boldsymbol{r}_j$ — радиус-вектор j-го электрона с компонентами x_j, y_j, z_j (см. формулу (5))

Для последующих вычислений удобно перейти в формулах (6) от переменных a_j и χ_j к переменным ψ_j и ψ_j' в соответствии с выражением (5). Нетрудно показать, что

$$\gamma_{\mu\nu}(\varkappa_1, \varkappa_2) = [\langle G^{(1)}_{\mu\mu}(\varkappa_1; \varkappa_1; \psi_j, \psi_j')\, G^{(1)}_{\nu\nu}(\varkappa_2; \varkappa_2; \psi_j, \psi_j')\rangle - \\ - \langle G^{(1)}_{\mu\mu}(\varkappa_1; \varkappa_1; \psi_j, \psi_j')\rangle\langle G^{(1)}_{\nu\nu}(\varkappa_2; \varkappa_2; \psi_j, \psi_j')\rangle]\times \\ \times[\langle G^{(1)}_{\mu\mu}(\varkappa_1; \varkappa_1; \psi_j, \psi_j')\rangle\langle G^{(1)}_{\nu\nu}(\varkappa_2; \varkappa_2; \psi_j, \psi_j')\rangle]^{-1}, \tag{10}$$

причем

$$\langle f(\psi_j, \psi_j')\rangle = \int f(\psi_j, \psi_j')\prod_j P(\psi_j')\,d\psi_j\,d\psi_j'\,P(\psi_j). \tag{11}$$

При вычислении α_{jks} по формуле (11) можно считать, что ψ_j и ψ_j' не зависят от времени. В формуле (11) $P(\psi_j)$ и $P(\psi_j')$ — распределение вероятностей величин ψ_j и ψ_j', которые являются статистически независимыми. В дальнейшем будут использованы известные соотношения

$$P(-\psi_j) = P(\psi_j), \qquad P(-\psi_j') = P(\psi_j'), \\ \langle\psi'^2\rangle = \Omega^2\langle\psi^2\rangle = \Omega^2\sigma^2. \tag{12}$$

2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕРЫ КОРРЕЛЯЦИИ ОТ ЧИСЛА ЧАСТИЦ И ФАЗОВОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ СГУСТКА

В этом разделе мы зададимся целью выяснить зависимость меры корреляции $\gamma_{\mu\nu}$ от числа излучающих электронов N и фазовой протяженности сгустка $\langle\psi^2\rangle^{1/2}$, не интересуясь ее зависимостью от $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Как следует из (7), (8) и (10), функции первого порядка корреляции поля можно записать в виде

$$\langle G^{(1)}_{\mu\mu}\rangle = \sum_{l\neq m}\langle\varepsilon^{(-)}_{\mu l}\rangle\langle\varepsilon^{(+)}_{\mu m}\rangle + \sum_{l=m}\langle\varepsilon^{(-)}_{\mu l}\,\varepsilon^{(+)}_{\mu m}\rangle = \\ = N(N-1)\langle\varepsilon^{(-)}_\mu\rangle\langle\varepsilon^{(+)}_\mu\rangle + N\langle\varepsilon^{(-)}_\mu\,\varepsilon^{(+)}_\mu\rangle. \tag{13}$$

Здесь в правой части формулы знаком $\langle\ \rangle$ обозначено усреднение по одночастичной функции распределения; соответствующие средние, очевидно, одинаковы для всех частиц.

Для функции $\langle G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}\rangle$ получим аналогично

$$\langle G^{(2)}_{\mu\nu\nu\mu}\rangle = N(N-1)(N-2)(N-3)\,b_{21} + N(N-1)(N-2)\,b_{22} + \\ + N(N-1)\,b_{23} + N b_{24}, \tag{14}$$

где через $b_{21} \div b_{24}$ обозначены средние от различных комбинаций полей:

$$b_{21} = \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle,$$

$$\begin{aligned} b_{22} = {} & \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle + \\ & + \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle + \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} b_{23} = {} & \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \times \\ & \times \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle + \\ & + \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle + \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle, \end{aligned}$$

$$b_{24} = \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle .$$

Введем средние

$$\begin{aligned} b_{11} &= \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle, \\ b_{12} &= \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle + \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \rangle \langle \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle, \\ b_{13} &= \langle \varepsilon_\mu^{(-)} \varepsilon_\mu^{(+)} \rangle \langle \varepsilon_\nu^{(+)} \varepsilon_\nu^{(-)} \rangle \end{aligned} \tag{16}$$

и представим (14) в виде

$$\langle G_{\mu\mu}^{(1)} \rangle \langle G_{\nu\nu}^{(1)} \rangle = N^2(N-1)^2 b_{11} + N^2 (N-1)\, b_{12} + N^2 b_{13} . \tag{17}$$

Тогда получим зависимость меры корреляции поля излучения от числа электронов в виде

$$\gamma_{\mu\nu}(N) = \frac{1}{N} \frac{A(N)}{B(N)}, \tag{18}$$

где

$$B(N) = N^2 b_{11} + N (b_{12} - 2b_{11}) + (b_{11} - b_{12} + b_{13}),$$

$$\begin{aligned} A(N) = {} & N^2 (b_{22} - 4b_{21} - b_{12}) + N (10\, b_{21} - 3b_{22} + b_{23} + b_{12} - b_{13}) - \\ & - (6b_{21} - 2b_{22} + b_{23} - b_{24}). \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что $b_{11} = b_{21}$.

Из выражения (18) видно, что мера корреляции пропорциональна N^{-1} и отношению двух квадратных по N трехчленов. Однако в связи с тем, что коэффициенты этих трехчленов зависят от конкретных условий, на основании (18) нельзя сделать общих выводов о зависимости $\gamma_{\mu\nu}$ от N.

Рассмотрим эту зависимость в трех случаях*: а) при малой фазовой протяженности сгустка, б) при равномерном распределении сгустка по азимуту и в) в случае гауссова распределения по ψ для данной моды.

В первом случае разложим корреляционные функции в ряд Маклорена. Ограничиваясь членами с ψ^2 и учитывая, что в силу (12) $\langle \psi \rangle = 0$, получим искомую зависимость

---

* Заметим, что в реальных условиях разброс величин ψ' очень мал. Поэтому при дальнейшем рассмотрении распределение $P(\psi')$ предполагается δ-образным. Учет конечных размеров разброса по ψ', как показывает анализ, практически не меняет приведенных ниже результатов.

$$\gamma_{\mu\nu}(N) = \frac{\langle\psi^2\rangle}{N}\,\frac{C(N)}{B(N)}, \tag{19}$$

где

$$C(N) = \left.\frac{\partial^2 A(N)}{\partial\,\psi^2}\right|_{\psi=0}.$$

Из формулы (19) видно, что мера корреляции пропорциональна среднему квадрату фазовой протяженности сгустка $\langle\psi^2\rangle$. В частности, при $\langle\psi^2\rangle=0$ при любом N $\gamma_{\mu\nu}=0$; при этом поле излучения будет находиться в когерентном состоянии. При $\langle\psi^2\rangle \neq 0$, так как $\dfrac{\partial\gamma(N)}{\partial N} \geqslant 0$, корреляции наименее сильны в поле излучения небольшого количества электронов и возрастают с ростом их числа. При $N=1$ имеем

$$\gamma_{\mu\nu}(1) = \frac{\langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\mu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\,\rangle}{\langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\mu^{(+)}\,\rangle\langle\,\varepsilon_\nu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\rangle} - 1. \tag{19a}$$

В случае, если $\langle\psi^2\rangle$ не является существенно малой величиной, выражение для зависимости меры корреляции от числа электронов может иметь существенно другой характер. Рассмотрим случай б), когда $P(\psi) = (2\pi)^{-1} = \mathrm{const}$ при любых ψ. В этом случае среднее $\langle\,\varepsilon^{(\pm)}\rangle$ пропорционально величине

$$\left(\xi_y^*\frac{\partial}{\partial k_x} - \xi_x^*\frac{\partial}{\partial k_y}\right)\int_{t_0}^{t} dt \int_0^{2\pi} d\psi\,\times$$
$$\times\exp\{-iR\,[k_x\cos(\omega t+\psi) + k_y\sin(\omega t+\psi)] + ickt\}, \tag{20}$$

которая после замены ψ на $\psi+\omega t$ и разделения интегралов пропорциональна интегралу по времени от быстроосциллирующей функции $\exp(ickt)$. Этот интеграл очень быстро стремится к нулю, поэтому

$$\langle\,\varepsilon^{(\pm)}\rangle = 0, \tag{21}$$

откуда $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$. Из аналогичных соображений можно показать, что $\langle\,\varepsilon^{(+)}\,\varepsilon^{(+)}\rangle = \langle\,\varepsilon^{(-)}\,\varepsilon^{(-)}\rangle = 0$.

Учитывая это, получим следующее выражение для меры корреляции:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu\nu}(N) = {} & [\langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\nu^{(+)}\rangle\langle\,\varepsilon_\mu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\rangle + N^{-1}(\langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\mu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\rangle - \\ & - \langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\mu^{(+)}\rangle\langle\,\varepsilon_\nu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\rangle - \langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\nu^{(+)}\rangle\langle\,\varepsilon_\mu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\rangle)]\times \\ & \times(\langle\,\varepsilon_\mu^{(-)}\,\varepsilon_\mu^{(+)}\rangle\langle\,\varepsilon_\nu^{(+)}\,\varepsilon_\nu^{(-)}\rangle)^{-1}.\end{aligned} \tag{22}$$

Формула (22) описывает зависимость меры корреляции от числа излучающих электронов в случае, если их статистические фазовые флуктуации распространяются на весь угловой интервал с постоянной плотностью. При большом числе электронов второе слагаемое в числителе становится пренебрежимо малым, следовательно, в этом случае пространственно-верменные корреляции не зависят от их числа.

В третьем случае, когда распределение по ψ является гауссовым, приведем окончательный результат, опуская громоздкие промежуточные выкладки. Мера корреляции l-й моды излучения равна

$$\gamma_l(N,\beta)=\frac{1}{N}\,\frac{F_1(\beta)N^2+F_2(\beta)N+F_3(\beta)}{F_4(\beta)N^2+F_5(\beta)N+F_6(\beta)},\qquad \beta=l\,\sigma. \tag{23}$$

Здесь $\sigma=\langle\psi^2\rangle^{1/2}$ — дисперсия, а функции $F_1(\beta)\div F_6(\beta)$ равны

$$F_1(\beta)=2\exp(-\beta^2)\,[1+\exp(-\beta^2)\,I_0(\beta^2)-2\exp(-\beta^2)],$$

$$F_2(\beta)=1+10\exp(-\beta^2)\,[\exp(-\beta^2)-1]-\exp(-2\beta^2)\,I_0(\beta^2)\times$$
$$\times[6-I_0(\beta^2)]+4\exp(-\beta^2/2)\left[2\exp(-\beta^2)-\int\limits_0^\infty x\exp(-x^2)\,J_0^3(\sqrt{2}\,x\beta)\,dx\right],$$

$$F_3(\beta)=8\exp(-\beta^2)\,[1-\exp(-\beta^2)]-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty x\exp(-x^2)\times \tag{24}$$
$$\times J_n^4(\sqrt{2}\,x\beta)dx+\exp(-\beta^2)\Big[4\exp(-\beta^2)\,I_0(\beta^2)+4\int\limits_0^\infty x\times$$
$$\times\exp(-x^2)\,J_0^3(\sqrt{2}\,x\beta)\,dx-6\exp(-\beta^2)-\exp(-\beta^2)\,I_0^2(\beta^2)\Big],$$

$$F_4(\beta)=\exp(-2\beta^2),\qquad F_5(\beta)=2\exp(-\beta^2)\,[1-\exp(-\beta^2)],$$
$$F_6(\beta)=[\exp(-\beta^2)-1]^2,$$

где $I_0(z)$ и $J_n(z)$ — соответствующие функции Бесселя.

Из (23) видно, что мера корреляции зависит только от числа электронов N и параметра $\beta=l\sigma$. В наиболее интересном оптическом диапазоне, когда $\beta\gg 1$, эта формула допускает асимптотическое представление

$$\gamma_l(N,\beta)=1-\sqrt{\pi/8}\,(N\beta)^{-1}. \tag{25}$$

3. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕРЫ КОРРЕЛЯЦИИ

Формула (22) при больших N может быть записана в виде

$$\gamma_{\mu\nu}(x_1;\,x_2)=\frac{|\,G^{(1)}_{\mu\nu}(x_1;\,x_2)\,|^2}{G^{(1)}_{\mu\mu}(x_1;\,x_1)\,G^{(1)}_{\nu\nu}(x_2;\,x_2)}. \tag{26}$$

Это выражение совпадает с выражением для меры корреляции в случае гауссова оператора плотности поля $\hat{\rho}$ (см. [3], формула (10.26)). Это совпадение не случайно, а является следствием центральной предельной теоремы, согласно которой при большом N в стационарном случае распределение должно быть гауссовым [3]. Отсюда следует, что формула (26) справедлива при более общих условиях, чем принятые при ее выводе. (По-видимому, она справедлива и при учете отдачи электрона при излучении.)

В стационарном случае справедливо следующее выражение для $G^{(1)}_{\mu\nu}$ [3]:

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(x_1;\,x_2)=\frac{\hbar c}{2(2\pi)^3}\sum_s\int d^3\boldsymbol{k}\,\xi^*_\mu(\boldsymbol{k},s)\,\xi_\nu(\boldsymbol{k},s)\,kn_{\boldsymbol{k}s}\times$$
$$\times\exp\{i\,[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)-ck(t_1-t_2)]\}, \tag{27}$$

где $n_{\boldsymbol{k}s}$ — среднее число фотонов $(\boldsymbol{k},s)$-моды.

Излучение релятивистских электронов, как известно [1,2], сосредоточено вблизи плоскости орбиты. Поэтому для упрощения дальнейших выкладок будем считать

$$n_{ks} = \frac{1}{2\pi}\,\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\delta(s - \sigma)\, n(k), \tag{28}$$

где $n(k)$ — распределение числа фотонов по частотам; θ — полярный угол, σ — направление поляризации в плоскости орбиты, это направление поляризации имеет излучение в плоскости орбиты [1,2].

Переходя к сферическим координатам в (27) и пользуясь (28), после интегрирования по телесному углу получим

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(x_1; x_2) = -(-1)^{\delta_{\mu\nu}} \frac{\hbar c}{2(2\pi)^3} \frac{\rho_\mu \rho_\nu}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \int\limits_0^\infty dk n(k)\, kJ_0(k\rho)\, e^{ick\tau}, \tag{29}$$

$\tau = t_1 - t_2$, $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, ρ — проекция вектора $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ на плоскость орбиты. В качестве $n(k)$ воспользуемся распределением плотности излучения в ультрарелятивистском случае [2]:

$$\hbar n(\boldsymbol{k}) = D \int\limits_{\varphi k}^{\infty} K_{5/3}(u)\, du\,,$$

$$D = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{ce^2}{\hbar R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \varphi^2, \qquad \varphi = \frac{2}{3}\frac{c}{\omega}\left(\frac{m_0 c}{E}\right)^3, \tag{30}$$

где $K_{5/3}(u)$ — функция Макдональда; E — энергия электронов.

Проинтегрируем (29) для случаев чисто временных ($\rho = 0$) и чисто пространственных ($\tau = 0$) корреляций.

В случае чисто пространственных корреляций после ряда преобразований

$$\gamma_{\mu\nu}(\rho) = \frac{9}{196}\left[1400\, F\left(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}; 4; -\frac{\rho^2}{\varphi^2}\right) + \frac{7}{9}\frac{\varphi^2}{\rho^2} \times \right.$$
$$\left. \times F\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}; 3; -\frac{\rho^2}{\varphi^2}\right) + 2\frac{\varphi^4}{\rho^4} F\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}; 2; -\frac{\rho^2}{\varphi^2}\right)\right]^2, \tag{31}$$

$F(c_1, c_2; c_3; \ -\rho^2/\varphi^2)$ — гипергеометрическая функция. Разложение гипергеометрических функций при малых ρ^2/φ^2 дает

$$\gamma_{\mu\nu}(\rho) = 1 - \frac{200}{169}\frac{\rho^2}{\varphi^2} + 22\frac{\rho^4}{\varphi^4} + \ldots \tag{32}$$

Отсюда видно, что с ростом ρ корреляции быстро убывают, причем скорость этого убывания пропорциональна энергии в шестой степени (так как $\varphi \sim E^{-3}$). Характерный размер, на котором корреляции существенно отличны от нуля, равен, очевидно,

$$\rho_0 = \varphi = \frac{2}{3}\frac{c}{\omega}\left(\frac{m_0 c}{E}\right)^3. \tag{33}$$

При обычных значениях энергии в синхротронах и накопителях от десятков миллионов до миллиардов электрон-вольт характерные значения длины корреляции находятся в пределах $5\cdot 10^{-2} \div 5\cdot 10^{-8}$ *см* (при $\omega = 5\cdot 10^7$ *гц*).

В случае чисто временных корреляций интеграл также может быть взят. В результате для временной зависимости меры корреляции имеем

$$\gamma_{\mu\nu}(\tau) = \delta_{\mu\nu}\frac{1}{448^2}\left\{\left[\frac{9(v)_1^2}{v^8}+\frac{3(v)_2^2}{v^6}\right]\mathrm{ch}^2\frac{5}{3}\,\mathrm{arcsh}\,v+\left[\frac{27(v)_1^2}{v^8}+\frac{(v)_2^2}{v^2}\right]\mathrm{sh}^2\frac{5}{3}\,\mathrm{arcsh}\,v+\frac{164^2}{v^8}-\frac{972(v)_1}{v^8}\,\mathrm{ch}\frac{5}{3}\,\mathrm{arcsh}\,v+\frac{324(v)_2}{v^7}\,\mathrm{sh}\frac{5}{3}\,\mathrm{arcsh}\,v-\frac{15(v)_1(v)_2}{2v^7}\,\mathrm{sh}\frac{10}{3}\,\mathrm{arcsh}\,v\right\}, \quad (34)$$

где обозначено $v = c\tau/\varphi$,

$$(v)_1 = \frac{54+264v^2+516v^4+441v^6}{(1+v^2)^{7/2}},$$

$$(v)_2 = \frac{270+890v^2+1295v^4}{(1+v^2)^3}.$$

Разложение функций при малых v дает

$$\gamma_{\mu\nu}(\tau) = \delta_{\mu\nu}\left(1-\frac{400}{27}\,\frac{c^2\tau^2}{\varphi^2}+121\frac{c^4\tau^4}{\varphi^2}+\ldots\right). \quad (35)$$

Отсюда следует, что с ростом τ корреляции быстро убывают; скорость убывания так же, как и в случае пространственных корреляций, пропорциональна энергии в шестой степени. Характерное время τ_0, в течение которого корреляции существенно отличны от нуля, равно

$$\tau_0 = 15\varphi c^{-1}. \quad (36)$$

В интервале энергий $10 \div 10^3$ *Мэв* (при $\omega = 5\cdot 10^7$ *гц*) $\tau_0 = 4\cdot(10^{-11}\div 10^{-17})$ *сек.*

Малые значения длин и времен корреляции связаны с большой шириной спектра синхротронного излучения и по порядку величины согласуются с соответствующими значениями для излучения черного тела [3] (при той же ширине полосы).

В заключение выражаем благодарность Ю. Н. Степановскому и А. С. Тарасенко за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
2. Синхротронное излучение, изд. Наука, М., 1966.
3. Р. Глаубер, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
4. Д. Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики, изд. Мир, М., 1970.
5. Л. Мандель, Э. Вольф, УФН, 87, 491 (1965); 88, 347 (1966); 88, 619 (1966).
6. Н. Н. Наугольный, А. М. Шендерович, Квантовое состояние «классического» электрона в накопителе, Препринт ФТИ АН УССР, 1970; И. А. Гришаев, Н. Н. Наугольный, Л. В. Репринцев, А. С. Тарасенко, А. М. Шендерович, ЖЭТФ, 59, 29 (1970).
7. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей, Физматгиз, М., 1962.
8. Г. Брук, Циклические ускорители заряженных частиц, Атомиздат, М., 1970.

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
13 апреля 1971 г.

SPATIAL-TIME CORRELATION OF SYNCHROTRON RADIATION FIELD

A. S. Mazmanishvili, A. M. Shenderovich

The statistics of the field of synchrotron radiation from relativistic electrons in a synchrotron has been considered. Analysis is made for the arbitrary electron number with taking into account the statistical fluctuations of their location at the orbit. The dependence is obtained of the correlation functions on the phase extension of a cluster and the electron number. In the stationary case the spatial-time dependences of the correlation functions have been obtained.