ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 551.510.535

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. II

А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин

Рассматривается приложение нестационарного решения уравнения диффузии газа в гравитационном поле [1] к процессам в области F ионосферы. Обсуждаются условия формирования слоя F_2, а также неоднородностей, возникающих выше максимума этого слоя. Показано, что при больших вертикальных масштабах начального возмущения происходит усиление неоднородностей по мере их опускания. Получено аналитическое решение неоднородного уравнения диффузии при заданных источниках и потоке на бесконечности.

1. ФОРМИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМ ИЗ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. УСИЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В первой части работы было показано [1], что любая газовая примесь, введенная в атмосферу в виде плоского слоя, ограниченного сверху и снизу, с произвольным начальным распределением по высоте, со временем достигнет устойчивой формы типа чепменовского слоя, опускающегося под действием тяжести. Для этого достаточно, чтобы основная масса частиц была сосредоточена вначале в диапазоне высот L, а затем максимум распределения переместился из этой области вниз на расстояние, большее L. В этом случае, согласно [1],

$$N(\tau, z) \approx \int\limits_L G(\tau, z', z_0)\, n_0(z_0)\, dz_0 \approx \varphi(x)\, \psi(\tau), \tag{1.1}$$

где

$$\varphi(x \equiv z + \ln \tau) = \begin{cases} \exp[-x - \exp(-x)] & (G = C_+) \\ \exp[-x\delta - \exp(-x)] & (G = G_-) \end{cases}; \tag{1.2}$$

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_L \frac{n_0(z_0)}{\Gamma(\nu+1)\,\tau^\nu} \exp(-z_0\nu)\, dz_0 & (G = G_+ \\ \displaystyle\int\limits_L \frac{n_0(z_0)}{\Gamma(\delta)}\, dz_0 & (G = G_-) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$(\nu = 1 - \delta).$$

Изменение во времени для $G = G_+$ происходит пропорционально $\tau^{-\nu}$. От начального распределения зависит, следовательно, только величина возмущения, но не его асимптотическая форма и не скорость опускания. Заметим, что $\psi(\tau)$ для $G = G_-$ представляет собой просто постоянный множитель, который зависит только от общего числа частиц, составляющих возмущение.

В реальных условиях формирование возмущения может происходить из небольшого начального избытка частиц в большом диапазоне высот. Для G_- конечная асимптотическая форма должна содержать то же самое количество частиц, что и первоначальное возмущение. В этом случае максимальное значение возмущенной плотности в неоднородности должно увеличиваться по мере формирования установившегося состояния. Чем больше диапазон высот, где первоначально имелся избыток частиц, тем больше усиление неоднородности. Величина усиления, согласно (1.1)—(1.3), равна

$$\frac{N(\tau, z)}{n_{0\,\max}} = \frac{1}{\Gamma(\delta)\,(e/\delta)^{\delta}} \int\limits_L \frac{n_0(z_0)}{n_{0\,\max}}\,dz_0 \qquad (G = G_-), \tag{1.4}$$

и, кроме того, для больших значений $\tau\,[\tau > \exp(-z_0)]$ возможно усиление и при $G = G_+$:

$$\frac{N(\tau, z)}{n_{0\,\max}} \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\,\tau^{\nu}} \int\limits_L \frac{n_0(z_0)\exp(-\nu z_0)}{n_{0\,\max}}\,dz_0, \tag{1.5}$$

где $n_{0\,\max}$ — максимальное значение плотности в начальный момент. Для $n_0 = \mathrm{const}$ предельная величина усиления, таким образом, пропорциональна вертикальному масштабу начального возмущения.

Неоднородность, охватывающая первоначально диапазон высот 2—3 H, наиболее быстро достигает асимптотической формы. Если вертикальный масштаб первоначального возмущения составляет a высот однородной атмосферы, а распределение плотности однородно (см. рис. 1), то формула (4.1) из [1] дает

$$\frac{N}{n_0} \approx \sum_{k=0}^{\infty} G_{+,k}^{\infty}(x)\;\Psi_{+,k}(\tau) \qquad (G = G_+); \tag{1.6а}$$

$$\frac{N}{n_0} \approx \sum_{k=0}^{\infty} G_{-,k}^{\infty}(x)\;\Psi_{-,k}(\tau) \qquad (G = G_-), \tag{1.6б}$$

где

$$G_{+,k}^{\infty} = \exp\left[-(k+1)\,x - \exp(-x)\right]; \tag{1.7а}$$

$$G_{-,k}^{\infty} = \exp\left[-(k+\delta)\,x - \exp(-x)\right], \tag{1.7б}$$

$x = z + \ln\tau$ — «опускающая» координата [1];

$$\Psi_{+,k} = \frac{\gamma(k+\nu,\ 1/\tau) - \gamma(k+\nu,\ e^{-a}/\tau)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)\,\tau^{\nu}}; \tag{1.8а}$$

$$\Psi_{-,k} = \frac{\gamma(k,\ 1/\tau) - \gamma(k,\ e^{-a}/\tau)}{k!\;\Gamma(k+\delta)}. \tag{1.8б}$$

Здесь $\gamma(\alpha, y) = \int\limits_0^y e^{-\xi}\,\xi^{\alpha-1}\,d\xi$ — неполная гамма-функция, доопределенная следующим образом:

$$\gamma\left(0, \frac{1}{\tau}\right) - \gamma\left(0, \frac{e^{-a}}{\tau}\right) \equiv \mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{e^{-a}}{\tau}\right) = \int\limits_{(e^{-a})/\tau}^{1/\tau} \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi. \tag{1.9}$$

К этому интегралу могут быть приведены выражения в формуле (1.6 б) вида

$$\Delta\gamma_k \equiv \gamma\left(k, \frac{1}{\tau}\right) - \gamma\left(k, \frac{e^{-a}}{\tau}\right)$$

посредством рекуррентного соотношения

$$\Delta\gamma_{k+1} = k\Delta\gamma_k + \frac{1}{\tau}\left[\exp\left(-ak - \frac{e^{-a}}{\tau}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(\frac{1}{\tau}\right)\right],$$

которое получается, если взять по частям интегралы $\Delta\gamma_{k+1}$.

Вид рядов (1.6) показывает, что возмущение можно представить как суперпозицию чепменовских слоев $G^{\infty}_{\pm, k}$, которые смещены по высоте относительно друг друга и опускаются вниз со скоростями g/ν_i [1], не изменяясь в процессе опускания по форме. Изменение их «амплитуд» путем перекачки частиц из одной гармоники в другую, описываемое функциями $\Psi_{\pm, k}(\tau)$, приводит к тому, что с течением времени выделяется основная гармоника — член с $k = 0$. По форме основная гармоника представляет собой асимптотическое возмущение $G_{\pm}$ [1]. С ростом τ все $\Psi_{\pm, k}$ стремятся к нулю, за исключением $\Psi_{-, 0}(\tau)$, которая стремится к $\Gamma(\delta)$. Учитывая, что $\max G^{\infty}_{-, 0} = (\delta/e)^{\delta}$, получим предельную (при $\tau \to \infty$), но, вообще говоря, не наибольшую величину усиления:

$$\frac{N_{\max}}{n_0} \to \left(\frac{\delta}{e}\right)^{\delta} \frac{1}{\Gamma(\delta)} \qquad (\tau \to \infty). \qquad (1.10)$$

При возмущении, охватывающем первоначально $G^{-1}_{\max}$ высот однородной атмосферы, должно наблюдаться усиление в процессе приближения неоднородностей по форме к асимптотическому виду. Величина $G^{-1}_{\max}$ для разных δ приведена в табл. 1 [1] (нижняя строка). Процесс достижения асимптотической формы описывается линейным и квадратичным членом разложения $\Psi_{-, 0}$ в ряд по $1/\tau$:

$$\Psi_{-, 0} = \frac{1}{\Gamma(\delta)}\left[a - \frac{1}{\tau}(1 - e^{-a}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\tau^2}(1 - e^{-2a}) - \ldots\right]. \qquad (1.11)$$

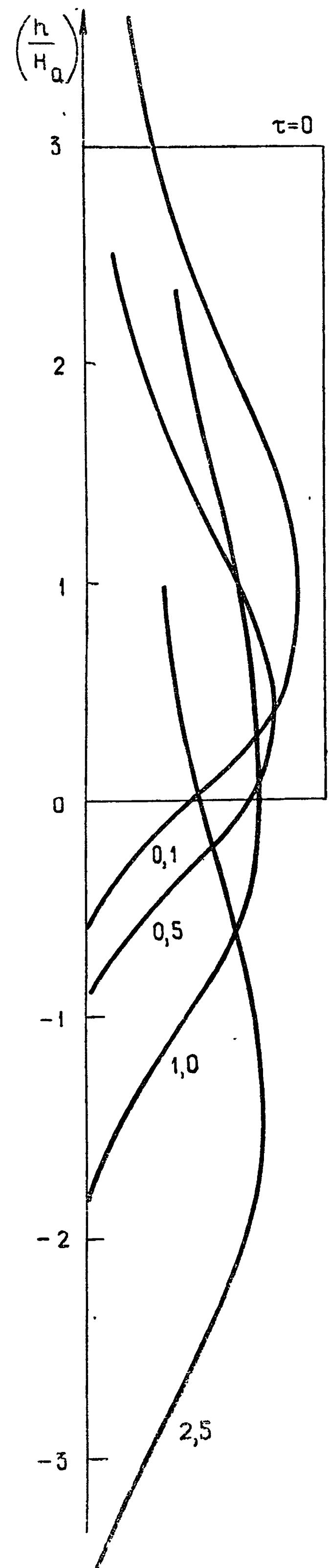

Рис. 1. Формирование асимптотического возмущения из прямоугольного.

2. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Известно (см., например, [2]), что решения неоднородного уравнения можно выразить с помощью тех же функций Грина $G_{+,-}$. В нашем случае к такому выводу легко приводит следующее рассуждение. Пусть нам требуется найти решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} - e^z\left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (\delta+1)\frac{\partial N}{\partial z} + \delta N\right] = q(z, \tau) \qquad (2.1)$$

с источниками $q(z, \tau)$ при начальном условии $N(z, 0) = n_0(z)$. Рассмотрим сначала уравнение

$$L(N) = \delta(\tau - \tau_0)\,\delta(z - z_0), \qquad (2.2)$$

где $L(N)$ — левая часть (2.1).

Правая часть уравнений (2.1) и (2.2) представляет собой скорость образования частиц под действием стороннего источника, следовательно, число частиц, появившихся за время, τ, есть $\int\limits_0^\tau q(z, \theta)d\theta$. Источник в случае (2.2) изменяет концентрацию частиц скачком, а их полное число есть

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dh \int\limits_0^\tau d\tau\ \delta(\tau - \tau_0)\ \delta(z - z_0) = H_a \qquad (2.3)$$

(такая нормировка связана с переходом к безразмерной координате z).

Задача о выбросе H_a частиц в момент τ_0 на высоте z_0 имеет, как это следует из предыдущего, решение $G(\tau - \tau_0, z', z_0)$, где G — функция, определенная выражением (3.5) из [1], но теперь уже от аргумента $\tau - \tau_0$.

Снова используя принцип суперпозиции, можем выписать полное решение неоднородного уравнения:

$$N = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n_0(z_0)\, G(\tau, z', z_0)\, dz_0 + \int\limits_0^\tau d\tau_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(z_0, \tau_0) \times \times G(\tau - \tau_0 z', z_0)\ dz_0. \qquad (2.4)$$

3. РЕШЕНИЕ ПРИ ЗАДАННОМ ПОТОКЕ ЧАСТИЦ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ

К обычным источникам частиц в атмосфере $q(z, \tau)$ может быть добавлен источник в удаленной области, поток частиц от которого не создает заметного изменения плотности в области, где он расположен; однако внизу, где частицы накапливаются, действие этого источника необходимо учесть. Дальнейшей идеализацией такой задачи является предположение о том, что источник находится в бесконечности, в то время как поток частиц, создаваемый им, имеет конечную величину, определенным образом изменяющуюся во времени. Нужно, следовательно, найти решение, для которого существует конечный предел величины потока

$$\lim_{z\to\infty} P(z, \tau) = \lim_{z\to\infty} d_0 H_a e^z \left(\frac{\partial N}{\partial z} + \delta N\right) = \Psi(\tau), \qquad (3.1)$$

являющийся некоторой заданной функцией времени $\Psi(\tau)$.

Рассмотрим сначала следующую частную задачу. В начальный момент $\tau = 0$ нет отклонений от диффузионного равновесия, т. е. величина $N(0, z)$, которую мы вправе рассматривать как возмущение, равна нулю. Начиная с момента $\tau = 0$, вниз направлен диффузионный поток из бесконечности, причем источников $q(z, \tau)$ внутри области нет. Требуется найти создаваемое таким потоком распределение плотности $N(z, \tau)$.

Сначала заметим, что из полученных функций Грина легко составить решение таким образом, чтобы начальные условия были бы нулевыми, а поток из бесконечности вниз был бы конечен. Таким решением будет функция $G^* = G_- - G_+$, т. е.

$$G^* = \frac{2 \sin \nu\pi (z')^{(1+\delta)/2}}{\pi\tau (z_0')^{(\delta-1)/2}} \exp\left(-\frac{z_0' + z'}{\tau}\right) k_\nu \left(\frac{2}{\tau} \sqrt{z' z_0'}\right) \tag{3.2}$$

$$(\nu = 1 - \delta),$$

где k_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). Действительно, для потока, направленного вниз, G_+ должна войти в решение со знаком минус, а в начальный момент $G_+ \approx G_-$, так что G^* — единственная комбинация функции Грина, из которой можно построить решение для нашей задачи. Поток от G^* на бесконечности равен

$$P^*(z_0', \tau) = -P_+(z_0', \tau) = A \frac{(z_0')^\nu \exp(-z_0'/\tau)}{\tau^{\nu+1}}, \tag{3.3}$$

где

$$A = \frac{d_0 H_a}{\Gamma(\nu)}, \tag{3.4}$$

$|P^*|$ имеет максимум при $\tau_{max} = z_0'/(\nu + 1)$, уменьшаясь до нуля при $\tau \to \infty$ и $\tau \to 0$.

Таким образом, каждому характерному времени изменения потока (будем считать его равным τ_{max}) соответствует своя высота формирования возмущения в атмосфере, причем длительно действующим потокам соответствуют более низкие высоты. Обратно, зная высоту формирования возмущения, можно определить время действия потока, который создает это возмущение. Подставляя в выражение для τ_{max} настоящие высоты и времена, приходим к формуле

$$T = \frac{H_a^2}{D(h)(\nu + 1)}, \tag{3.5}$$

связывающей длительность потока T с высотой образования возмущения h через коэффициент диффузии D на этой высоте. Следовательно, можно сделать вывод, что поток из бесконечности должен создавать возмущение с максимумом на той высоте, где время диффузии на расстояние порядка высоты однородной атмосферы равно по порядку величины времени действия потока. В табл. 1 приведены значения величины T для разных высот, вычисленные по модели атмосферы CIRA-65 mod 3 (14^h) для дневных летних условий, причем использовано выражение для коэффициента амбиполярной диффузии из работы [5].

Таблица 1

h (*км*)	200	260	300	360	400	460	500	560	600	660	700
T (*мин*)	83	30	17	7,4	4,6	2,1	1,4	0,71	0,5	0,32	0,27

Приведенные результаты получены из рассмотрения потока частного вида (3.3). Чтобы найти решение для произвольного потока, представим его как интеграл потоков вида (3.3). Это всегда можно сделать, так как нахождение соответствующей такому разложению весовой функции $f(z_0')$ в уравнении

$$\Psi(\tau) = \int_0^\infty f(z_0') P^*(z_0', \tau)\, dz_0 = -A \int_0^\infty \frac{(z_0')^\nu \exp(-z_0'/\tau)}{\tau^{\nu+1}} f(z_0')\, dz_0' \qquad (3.6)$$

сводится к обратному преобразованию Лапласа по $\tau^{-1} = W$ функции $W\Psi$ ($W^{-1} = \tau$).

Из (3.6) имеем

$$f(z_0') A (z_0')^\nu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} W^{-\nu-1} \Psi(W^{-1}) \exp(z_0' W)\, dW, \qquad (3.7)$$

а решение есть

$$N(z', \tau) = \int_0^\infty f(z_0') G^*(z, z_0', \tau)\, dz_0'. \qquad (3.8)$$

Полагая в (3.6) $f(z_0') = [A\Gamma(\nu+1)]^{-1}$, получим

$$\Psi(\tau) = 1 \qquad (3.9)$$

при $\tau > 0$; при $\tau < 0$ $\Psi = 0$. Так как мы вправе произвольным образом задать Ψ в дискретные моменты (такое изменение потока не дает дополнительных частиц в атмосферу), то можно считать $\Psi(\tau = 0) = 1/2$, т. е. принять, что Ψ есть единичная функция u, обычно рассматриваемая в анализе.

Распределение плотности, возникающее от потока $u(\tau)$, будем обозначать N с нижним индексом u. Имеем [3]

$$N_u(z', \tau) = \int_0^\infty \frac{G^*\, dz_0'}{A\Gamma(\nu+1)} = B\tau\varkappa^{1-\nu} W_{-(\nu+1)/2,\, \nu/2}(\varkappa^2) \exp\left(-\frac{\varkappa^2}{2}\right), \qquad (3.10)$$

где

$$B = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(\nu) \sin \pi\nu}{d_0 H_a}, \qquad \varkappa = \left(\frac{z'}{\tau}\right)^{1/2}. \qquad (3.11)$$

Здесь $W_{-(\nu+1)/2,\, \nu/2}$ — функция Уиттекера [4] с индексами $-\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}$. Для $\delta = \frac{1}{2}$ распределение плотности от единичного потока дается формулой

$$N(z', \tau) = \frac{2}{A\sqrt{\pi}} \tau\varkappa \left\{ \frac{\exp(-\varkappa^2)}{\sqrt{\pi}} - \varkappa[1 - \Phi(\varkappa)] \right\}, \qquad (3.12)$$

где $\Phi(\varkappa)$ — интеграл ошибок.

Кривая высотного распределения плотности при мгновенно включенном постоянном потоке в атмосферу для этого случая приведена на рис. 2. Для сравнения показан отрезок, равный высоте однородной атмосферы. Из (3.10), (3.12) следует, что возмущение и в этом случае движется вниз как целое без изменения формы с экспоненциально убывающей с уменьшением высоты скоростью, однако величина возмущения растет пропорционально времени. Последнее легко понять из того, что пропорционально времени растет общее число частиц.

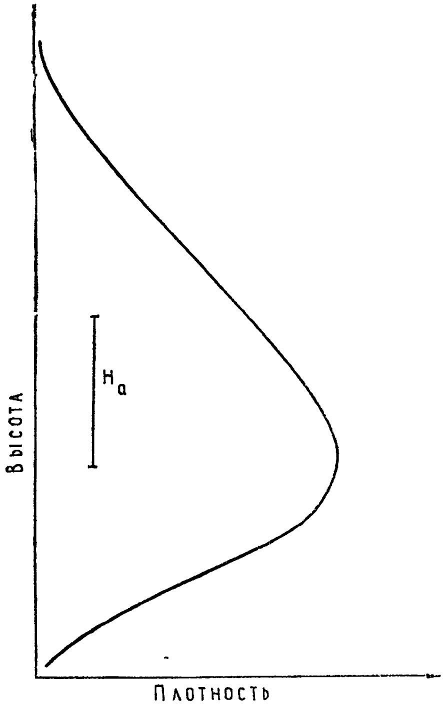

Рис. 2.

В случае потока прямоугольного вида

$$\hat{\Psi}(\tau) = \begin{cases} 1 & (0 < \tau < \tau_0) \\ 0 & (\tau < 0; \tau > \tau_0) \\ 1/2 & (\tau = 0; \tau_0) \end{cases} \quad (3.13)$$

решение, очевидно, имеет вид

$$N(z', \tau) = N_u(z', \tau) - N_u(z', \tau - \tau_0). \quad (3.14)$$

В общем случае произвольного потока $\Psi(\tau)$ более удобно получать решение с помощью интеграла Дюамеля

$$N(z', \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \Psi(\tau_0) N_u(z', \tau - \tau_0)\, d\tau_0, \quad (3.15)$$

чем обратным преобразованием Лапласа по формулам (3.7), (3.8).

Задание только начальных условий и источников в атмосфере не является, как показано, достаточным для нахождения единственного решения, если подразумевается, что поток частиц на бесконечности может быть конечен. Эта неопределенность в выборе G_+ и G_- снимается, если поток на бесконечности задан, однако произвольное задание потока из атмосферы вверх может привести к отрицательным значениям электронной плотности. При задании потока следует, видимо, руководствоваться конкретными физическими условиями, определяющими такой поток. Эти условия могут получаться из решения более полных уравнений, нежели уравнение диффузии (учитывающих, например, центробежные и кориолисовы силы). Для потока из бесконечности, направленного вниз в атмосферу, можно получить решения, даже если задавать этот поток произвольным образом.

В общем случае, когда заданы некоторые начальные условия (n_0), источники в атмосфере (q) и диффузионный поток частиц из бесконечности (Ψ), решение неоднородного уравнения диффузии (2.1) является суперпозицией уже рассмотренных решений, т. е. оно имеет вид

$$N(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} n_0(z_0) G_-(\tau, z', z_0)\, dz_0 + \int_0^{\tau} d\tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} q^*(z_0, \tau_0) \times$$
$$\times G_-(\tau - \tau_0, z', z_0)\, dz + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \Psi(\tau_0) N_u(e^{-z_0}, \tau - \tau_0)\, d\tau_0, \quad (3.16)$$

где G_- определяется формулой (3.5) из [1], а N_u — выражением (3.10).

Рассмотренные в настоящей работе свойства аналитических решений уравнения диффузии в гравитационном поле будут в дальнейшем исследованы более подробно как в смысле условий их применимости к реальным атмосферным процессам, так и в смысле дальнейшей модификации результатов и учета дополнительных факторов. В частности, таким фактором является действие геомагнитного поля, учет которого должен быть сделан более сложным образом, чем в уравнении [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 840 (1972)
2. Ф. М. Морс, Г Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958, гл. 7.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 2, изд. Наука, М., 1969.
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, Физматгиз, М., 1965.
5. A. Dalgarno, J. Atm. Terr. Phys., 26, 939 (1964).

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
27 октября 1971 г.

PECULIARITIES OF NONSTATIONARY SOLUTIONS OF THE EQUATION OF DIFFUSION IN THE GRAVITATIONAL FIELD. II

A. A. L'vova, V. M. Polyakov, V. V. Rybin

The application of the nonstationary solution of the equation of the gas diffusion in the gravitational field [1] to the processes in the ionospheric F region is considered. The conditions of forming F_2 layer and the inhomogeneities above layer maximum are discussed. It is shown that at the large vertical scales of the initial disturbance, the inhomogeneities intensity as they are lowering. An analytical solution is obtained for the inhomogeneous diffusion equation at the given sources and, in particular, for the flux at the infinity.