

УДК 551.510.535

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. I***А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин*

В работе получено нестационарное решение уравнения диффузии газа в гравитационном поле. Описан процесс установления и асимптотический вид вертикального распределения концентрации частиц при произвольных начальных возмущениях. Показано, что вертикальное распределение концентрации частиц любой газовой примеси, введенной в атмосферу в виде слоя, огражденного сверху и снизу, с произвольным начальным распределением со временем принимает устойчивую форму типа чепменовского слоя, опускающегося под действием тяжести и сохраняющего свою форму.

Для ряда вопросов физики атмосферы представляют интерес процессы установления диффузионного равновесия газа в гравитационном поле, значительно отличающиеся от обычного выравнивания плотности при диффузии. В частности, примесь газа в атмосферах Земли и планет может формировать характерные сферические (в первом приближении — плоские) слои, в которых основная масса частиц сосредоточена в относительно узкой области высот.

Ранее были исследованы [1,2] стационарные решения одномерного уравнения диффузии в гравитационном поле применительно к электронно-ионному газу ионосферной плазмы для случая, когда имеются источники и стоки потоков заряженных частиц. Введение источников и стоков позволило выявить некоторые особенности стационарного распределения, такие, например, как появление отчетливо выраженного максимума в вертикальном распределении.

В настоящей работе получены нестационарные решения той же задачи для любой газовой примеси. Используемый в работе метод функции Грина позволяет получить решения при различных источниках частиц, при произвольных начальных распределениях и заданных потоках частиц на бесконечности (заметим, что учет рекомбинационных процессов, усложняющих картину диффузии электронно-ионной компоненты в ионосфере, связан со значительными трудностями, о чем будет сказано ниже). Исследование свойств функций Грина дает возможность проследить процесс формирования устойчивого уплотненного слоя, движущегося затем в поле тяжести без существенного перераспределения в нем плотности.

Возможность существования равновесного образования с явно выраженным максимумом плотности при диффузии в гравитационном поле была понятна и без рассмотрения нестационарной диффузии [3,4]. Действительно, довольно несложно подобрать такую форму высотного распределения плотности, при которой скорость диффузии (с учетом действия гравитации) не изменяется с высотой, а следовательно, и вся масса частиц движется как целое. Таковой является нормальная чепменовская форма [3]. Сходство распределений плотности при диффузионном равновесии с чепменовской формой неоднократно отмечалось многими авторами (см., например, [2,5]). Вопрос заключается в том, должны ли реально формироваться подобные слои из каких-либо начальных рас-

пределений. Были сделаны попытки исследований такого рода процессов. Так, в [6] проведен численный расчет формирования слоя из нейтральной примеси, имевшей вначале прямоугольное высотное распределение. В [7] и [8] дано аналитическое исследование диффузии нейтральной компоненты, причем в работе [8], результаты которой могут быть сопоставлены с нашими, была вычислена методами операционного исчисления предельная асимптотическая форма слоя, образующегося при начальном δ -распределении. Однако сам процесс формирования слоя не исследован, не учитываются источники частиц и потеряно второе решение, справедливое при наличии потоков частиц в атмосферу или из нее. Последнее весьма существенно, так как не позволяет перенести результаты на электроиононосную компоненту ионосферы, для которой такие потоки играют существенную роль. Интересно отметить, что в работах [9] и [10], где рассматривается диффузия плазмы в ионосферной области F , получены оба возможных решения для начального δ -распределения. Однако эффект образования равновесного слоя вообще выпал из рассмотрения. Заниженное более чем на порядок значение коэффициента диффузии и малая начальная высота возмущения (230 км) свели на нет эффект формирования слоя.

Исследованные в настоящей работе свойства нестационарных решений уравнения диффузии позволяют довольно просто понять динамику образования и быстрых переформирований ионосферной области F и могут быть полезны для объяснения механизма появления сложных неоднородностей в этой области.

1. УРАВНЕНИЕ ДИФфуЗИИ. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Мы будем рассматривать уравнение диффузии следующего вида:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{b}{n_0} \exp\left(\frac{z-z_0}{H_a}\right) \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{H_a} + \frac{1}{H}\right) \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{N}{HH_a} \right] - \beta_0 N \exp\left(-\frac{z-z_0}{H_m}\right) + W \frac{\partial N}{\partial z} + q(z, t), \quad (1.1)$$

где N — число диффундирующих частиц в 1 см^3 ; z — вертикальная координата, отсчитываемая вверх; H , H_a , H_m — высоты однородных атмосфер соответственно диффундирующей примеси, основной составляющей, определяющей коэффициент диффузии, и компоненты, определяющей исчезновение диффундирующих частиц; W — скорость однородного движения частиц (направлена вниз), для простоты предполагается $W = \text{const}$; $\beta = \beta_0 \exp\left(-\frac{z-z_0}{H_m}\right)$ — коэффициент исчезновения частиц при смеси; $\frac{b}{n_0} \exp\left(\frac{z-z_0}{H_a}\right)$ — коэффициент диффузии; z_0 — произвольно выбранный уровень в атмосфере; n_0 , β_0 — соответственно плотность основной составляющей и коэффициент исчезновения на этом уровне; b — постоянная, входящая в коэффициент диффузии; $q(z, t)$ — плотность источников или стоков частиц.

Уравнением (1.1) может описываться в одномерном приближении диффузия как нейтральных, так и заряженных частиц (плазма) в атмосфере в гравитационном поле. В последнем случае (область F_2 земной ионосферы)

H , H_a , H_m — высоты однородных атмосфер соответственно электроионной компоненты, атомарного кислорода и молекулярной компоненты нейтральной атмосферы;

b/n_0 — коэффициент амбиполярной диффузии D_a на высоте z_0 , умноженный на $\sin^2 I$, где I — магнитное наклонение (постоянно на одной вертикали);

β — коэффициент линейной рекомбинации;

W — скорость дрейфа электронно-ионной компоненты.

Мы полагаем, что 1) H , H_a и H_m постоянны; 2) исчезновение диффундирующих частиц происходит таким образом, что можно пренебречь изменением плотности компоненты, определяющей такое исчезновение (стационарный коэффициент рекомбинации для плазмы); 3) все вариации величин в горизонтальном направлении (а также малые изменения, связанные с тем, что должна рассматриваться не плоская, а сферическая задача) можно не учитывать.

Уравнение (1.1) обычным способом можно привести к виду, не содержащему первой производной по координате:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \gamma u + qv^{-1}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} u &= Nv^{-1}, \\ v &= \xi^{\delta+1/2} \exp\left(\frac{c}{4a} \xi^2\right), \\ \xi &= \exp\left(-\frac{z-z_0}{2H_a}\right), \\ a &= \frac{b}{4H_a^2 n_0}, \quad c = \frac{W}{2H_a}, \\ \delta &= H_a/H, \quad \varepsilon = H_a/H_m, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\gamma = \gamma(\xi) = -a\xi^{-2} \left(\delta - \frac{1}{2}\right) \left(\delta - \frac{3}{2}\right) - \frac{c^2}{4a} \xi^2 - c\delta - \beta_0 \xi^{2\delta}.$$

Во многих работах для величины δ используется значение $1/2$, что соответствует заряженной компоненте, состоящей из ионов основного газа. Как показывает выражение (1.3), этот случай является особым (так же, как и случай $\delta = 3/2$): при таком значении δ в (1.3) отсутствует член с ξ^{-2} . Вместе с тем представляет интерес исследование диффузии других примесей в атмосфере, когда $\delta \neq 1/2; 3/2$. Более того, для реальной ионосферной плазмы отношение δ близко к $0,4$, а не к $1/2$ [2].

Для ε в ряде задач можно, видимо, принять значения 2, что соответствует рекомбинации с участием O_2 при основной составляющей O . Вообще для высоты H_m в рекомбинационном члене для высот области F приводятся значения от 35 до 103 км [11]. Видимо, наиболее соответствуют реальности значения 35—50 км. В работе [10] принято $\varepsilon = 1$. Интересно, что при таком значении ε действие ветра можно простым способом сопоставить с влиянием рекомбинации. Член в γ , равный $-c\delta$, означает экспоненциальное изменение со временем функции u в соответствии с множителем $\exp\left(-\frac{Wt}{2H}\right)$, и переход к переменной $\rho = u \exp\left(\frac{Wt}{2H}\right)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} + \hat{\gamma} \rho, \quad (1.4)$$

где $\hat{\gamma} = \gamma + c\delta$. Теперь видно, что рекомбинация с коэффициентом

$$\beta_0 = \frac{c^2}{4a} = \frac{W^2}{4D_a \sin^2 I} \quad (1.5)$$

должна давать тот же эффект, что и дрейф, (если учесть также изменение плотности при дрейфе, пропорциональное $\exp\left(-\frac{Wt}{2H} + \frac{W\xi^2}{2D_0 \sin^2 I}\right)$).

Предположение об однородности и простой способ учета движения, использованный в уравнении (1.1), значительно упрощают сложную реальную картину. Мы ограничимся сделанным выше замечанием и в дальнейшем не будем рассматривать влияние ветра или дрейфа на распределение плотности. Принимая $W = 0$, получим

$$\gamma = -a\xi^{-2} \left(\delta - \frac{1}{2}\right) \left(\delta - \frac{3}{2}\right) - \beta_0 \xi^{2a}. \quad (1.6)$$

Наиболее просто, как видим, найти решение для $\delta = 1/2$ или $3/2$ и $\beta_0 = 0$. Его можно выписать сразу для произвольных начальных условий и источников, так как уравнение (1.2) в этом случае имеет стандартный вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + qv^{-1}. \quad (1.7)$$

В настоящей работе получено решение уравнения диффузии при произвольных значениях δ при заданных начальных условиях и произвольных источниках частиц, в том числе и при потоках на бесконечности, произвольным образом изменяющихся во времени. Как частный случай из наших решений получается и решение для $\delta = 1/2$. Результаты применимы не только к ионизованной компоненте в ионосфере, но и к нейтральным примесям.

Исследование диффузии при учете рекомбинации представляет собой сложную задачу, если учесть, что меняется в процессе диффузии и концентрация частиц, не участвующих в рекомбинации. Задача становится нелинейной. Например, для плазменной компоненты необходимо рассматривать систему уравнений, включающую уравнения для молекулярных ионов. Аналитическое исследование такой задачи значительно усложняется. Когда концентрация заряженных частиц мала настолько, что заметного изменения концентрации молекул не должно наблюдаться, то учесть рекомбинацию можно так, как это сделано в (1.1) — вводя соответствующий рекомбинационный член. В дальнейшем представляется необходимым провести расчет для различных значений ϵ , в частности, для $\epsilon = 2$, так как значение $\epsilon = 1$, принятое в [10], не соответствует реальным условиям.

Учет рекомбинации в настоящей работе не проведен. Полученные результаты, следовательно, могут быть верны, если только характерное время диффузии $T_d = H^2/D_a$ меньше времени рекомбинации $T_p = \beta^{-1}$, т. е.

$$\frac{\beta_0 H^2 n_0}{b} \exp\left[-(z - z_0) \left(\frac{1}{H_a} + \frac{1}{H_m}\right)\right] < 1. \quad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что граница области по z , выше которой диффузия может рассматриваться в чистом виде, должна быть очень резкой. Для

ионосферной плазмы она лежит на высоте около 260 км. Вопрос о комбинации в дальнейшем будет рассмотрен более подробно. Сейчас примем $\beta = 0$. Таким образом, мы решаем уравнение диффузии, которое удобно записать в таком виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = d_0 e^z \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (\delta + 1) \frac{\partial N}{\partial z} + \delta N \right], \quad (1.9)$$

где $d_0 e^z$ — коэффициент диффузии, деленный на H_a^2 , z — безразмерная координата, определенная соотношением $dz = dh/H_a$. Переход к безразмерному времени $\tau = td_0$ приводит уравнение (1.9) к виду

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = e^z \left[\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + (\delta + 1) \frac{\partial N}{\partial z} + \delta N \right]. \quad (1.10)$$

2. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ

Сначала находим частное решение уравнения (1.10) методом разделения переменных, подставляя вместо N

$$N(z, \tau) = Z(z) T(\tau).$$

Получаем

$$T = T_0 \exp(-\lambda \tau); \quad (2.1)$$

$$Z'' + (\delta + 1) Z' + \delta z + \lambda \exp(-z) Z = 0, \quad (2.2)$$

где T_0 и λ — произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$Z = \exp\left(-\frac{1+\delta}{2} z\right) Z_{\pm(1-\delta)} \left[2\sqrt{\lambda} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) \right]. \quad (2.3)$$

Здесь $Z_{\pm(1-\delta)}$ — цилиндрические функции порядка $\pm(1-\delta)$. Для построения общего решения уравнения (1.10) во всей области $-\infty < z < \infty$, удовлетворяющего начальному условию

$$N(0, z) = n_0(z), \quad (2.4)$$

используем разложение функции

$$f_0(z') = n_0(z')^{-(1+\delta)/2}, \quad (2.5)$$

где $z' = \exp(-z)$, в интеграл Фурье — Бесселя

$$f_0(z') = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_\nu(2\sqrt{\lambda z'}) d\lambda, \quad (2.6)$$

в котором

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} f(z') J_\nu(2\sqrt{\lambda z'}) dz' \quad (\nu = \pm(1-\delta)). \quad (2.7)$$

В соответствии с принципом суперпозиции функция $N(z', \tau)$, определенная уравнением

$$N(z', \tau) (z')^{-(1+\delta)/2} = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) J_\nu(2\sqrt{\lambda z'}) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad (2.8)$$

есть решение уравнения (1.10), удовлетворяющее начальному условию (2.4), так как $N(z', \tau)$ представляет собой интеграл от произведений выражений типа (2.1) и (2.3), взятый с весом $\varphi(\lambda)$, а при $\tau = 0$ правая часть уравнения (2.8) согласно тождеству Ганкеля равна

$$\int_0^{\infty} d\lambda J_{\nu}(2\sqrt{\lambda z'}) \int_0^{\infty} dz' f_0(z') J_{\nu}(2\sqrt{\lambda z'}) = f_0(z') = n_0(z')^{-(1+\delta)/2}, \quad (2.9)$$

т. е. $N(z', \tau)$ удовлетворяет и начальному условию (2.4). Индекс ν в уравнениях (2.6) — (2.9) равен $\pm(1 - \delta)$.

Получено, таким образом, решение уравнения диффузии (1.10) в интегральном виде (2.8), выраженное через интеграл Фурье—Бесселя от начального распределения (2.4).

3. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ГРИНА

Чтобы исследовать свойства решений уравнения диффузии, построим с помощью (2.8) функцию Грина уравнения (1.10). Для этого примем, что начальное распределение имеет вид δ -функции в точке z_0

$$n_0 = \delta(z - z_0). \quad (3.1)$$

Тогда, согласно (2.7), будем иметь

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\delta(z - z_0)}{(z')^{(1+\delta)/2}} J_{\nu}(2\sqrt{\lambda z'}) dz' = (z_0)^{(1-\delta)/2} J_{\nu}(2\sqrt{\lambda z'_0}), \quad (3.2)$$

где $z'_0 = \exp(-z_0)$. Подставляя теперь $\varphi(\lambda)$ из (3.2) в (2.8), получаем

$$N(z', \tau) (z')^{-(1+\delta)/2} = \int_0^{\infty} J_{\nu}(2\sqrt{\lambda z'}) J_{\nu}(2\sqrt{\lambda z'_0}) \exp(-\lambda\tau) d\lambda. \quad (3.3)$$

Вычисляя интеграл в правой части (3.3) в квадратурах [12], находим

$$G(z', \tau; z'_0) \equiv N(z', \tau) = \frac{1}{\tau} \frac{(z')^{(1+\delta)/2}}{(z'_0)^{(\delta-1)/2}} \exp\left(-\frac{z'_0 + z'}{\tau}\right) I_{\nu}\left(\frac{2}{\tau} \sqrt{z' z'_0}\right), \quad (3.4)$$

где I_{ν} — модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Бесселя мнимого аргумента). Переходя к координате z' ($z' = \exp(-z)$), можем записать окончательное выражение:

$$G(z, \tau; z_0) = \frac{1}{\tau} \exp\left[\frac{(\delta-1)z_0 - (\delta+1)z}{2} - \frac{e^{-z} + e^{-z_0}}{\tau}\right] I_{\nu}\left(\frac{2 \exp[-(z_0 + z)/2]}{\tau}\right). \quad (3.5)$$

Построенной таким образом функции Грина будем приписывать снизу индекс $+$ при $\nu = (1 - \delta)$ и $-$ при $\nu = -(1 - \delta)$.

В простейшем случае процессы рекомбинации можно учесть, как это обычно и делается, заданием нулевого граничного условия на нижней фиксированной границе. Принимая эту границу за начало отсчета высот и оставляя из всего спектра значений λ лишь те λ_n (обозначены в порядке возрастания), для которых J_{ν} обращается в нуль при $z = 0$, получим функцию Грина для полупространства $z \geq 0$ (при условии $N = 0$ при $z \leq 0$):

$$G_{\pm}^{(1)} = \exp \left[\frac{(\delta - 1) z_0 - (\delta + 1) z}{2} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \exp [-\lambda_n (\tau - \tau_0)] \times \quad (3.6)$$

$$\times \frac{J_{\nu} (2 \sqrt{\lambda_n} e^{-z/2}) J_{\nu} (2 \sqrt{\lambda_n} e^{-z/2})}{J_{\nu+1}^2 (2 \sqrt{\lambda_n})}.$$

Такое граничное условие означает, что на уровне $z = 0$ происходит исчезновение всех частиц, приносимых сюда диффузионным потоком.

4. ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИИ ГАЗА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условию (2.4), можно представить в виде

$$N(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} n_0(z_0) G_{\pm}(z, \tau; z_0) dz_0, \quad (4.1)$$

так что в дальнейшем от свойств функций Грина G_+ и G_- можно перейти к свойствам общих решений уравнения (1.10).

а) *Сохранение числа частиц.* Вычислим сначала, как изменяется полное число частиц в столбе при $G = G_-$ и $G = G_+$. Получим

$$F_- = \int_{-\infty}^{\infty} G_- dz = 1; \quad (4.2a)$$

$$F_+ = \int_{-\infty}^{\infty} G_+ dz = \frac{\exp(-1/\tau)}{\tau^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tau^k \Gamma(\nu + 1 + k)}, \quad (4.2b)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Например, для частного случая $\delta = 1/2$ формула (4.2b) дает

$$F_+ = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \right), \quad (4.3)$$

где Φ — интеграл ошибок $\left(\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \right)$. Таким образом,

полное число частиц для решений, полученных с помощью G_- , остается неизменным, в то время как для решений, соответствующих $G = G_+$, убывает во времени.

Уменьшение общего числа частиц при $G = G_+$ может происходить только за счет исчезающего потока на бесконечности. Здесь уместно заметить, что уравнение диффузии представляет собой локальное уравнение баланса частиц (уравнение непрерывности), не учитывающее конечности скоростей реальных частиц. Это сказывается в описании начальной фазы развития возмущений, когда возмущение в любой, отличной от начального, момент времени имеет конечную величину в любой сколь угодно далекой точке; а также сказывается в том, что имеют место решения, убывающие при $z \rightarrow \infty$ при конечной величине потока, что требует бесконечных скоростей частиц.

Вычислим поток, требуемый функциями G_+ и G_- . Этот поток определяется формулой

$$P = -H_a d_0 e^z \left(\frac{\partial G}{\partial z} + \delta G \right). \quad (4.4)$$

Подставляя сюда G_+ из (3.5), получим

$$P_+ \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{H_a d_0}{\tau^{\nu+1} \Gamma(\nu)} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\right). \quad (4.5)$$

Следовательно, поток на бесконечности остается конечным, сначала возрастаая, а затем убывая во времени. Аналогичные вычисления для G_- показывают, что $P_- \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, что и следовало ожидать, если учесть, что полное число частиц в этом случае остается постоянным согласно (4.2 а).

Можно проверить, что все частицы возмущения будут вынесены потоком на бесконечности. Для этого проинтегрируем P_+ из (4.5) по времени t и отнесем полученное выражение к полному числу частиц возмущения. В результате находим

$$\frac{\int_0^{\infty} P_+ dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dh} = 1. \quad (4.6)$$

Таким образом, с течением времени все частицы, составляющие возмущение, будут вынесены потоком вверх.

Как будет показано ниже, решения, в которых используется G_+ , определяют распределения плотности, связанные с существованием потоков из бесконечности. Процессы установления и развития возмущений в атмосфере описываются решениями, в которых используется G_- . Требование конечной величины потока на бесконечности при убывающей плотности есть требование неограниченного роста скорости. Последнее, очевидно, физически неправомерно. Любое же ограничение скорости означает, что поток на бесконечности должен стремиться к нулю. Этому требованию удовлетворяют только решения, полученные с помощью G_- .

б) *Асимптотические формы функций Грина.* Рис. 1 и 2 иллюстрируют характерную особенность диффузии в гравитационном поле: после сравнительно быстрых изменений в начальный момент времени распределение плотности в дальнейшем изменяется незначительно. Рис. 1 показывает нормированные к единице кривые распределения плотности для $\tau = 3$ и 100, когда имеется поток частиц из «хвоста» возмущения на бесконечность.

Рис. 2 иллюстрирует начальную фазу развития возмущений (одинаковую для G_+ и G_-). Вначале происходит общее опускание слоя со скоростью $v = -D/H_a$, форма которого при этом становится несимметричной за счет преимущественной диффузии вверх от положения максимума. Однако, уже начиная с $\tau = 3$, слой оказывается сформированным и его форма в области максимума меняется в дальнейшем незначительно, как это видно из рис. 1. Такое свойство диффузии может быть объяснено «натеканием» частиц из длинного «хвоста» распределе-

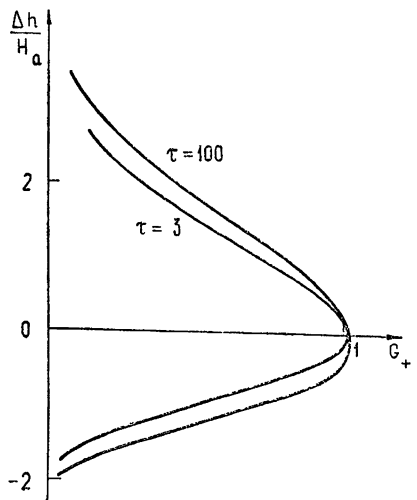


Рис. 1.

ния в верхней области, где градиент плотности мал (поэтому мала величина скорости собственно диффузии $-D \frac{\partial N}{\partial z} \frac{1}{N}$), а скорость падения

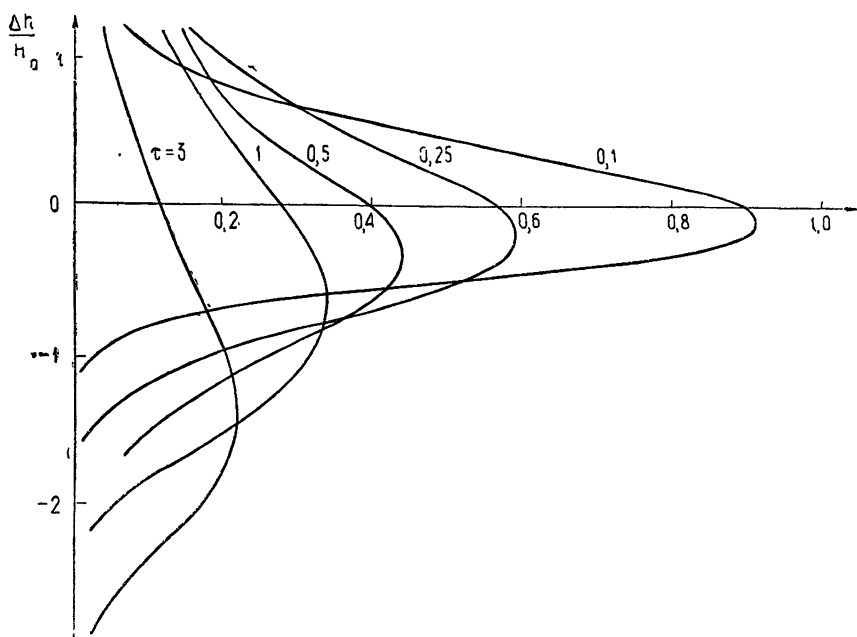


Рис. 2.

частиц тем больше, чем выше частицы находятся (за счет меньшего числа столкновений). Частицы из верхней области поддерживают достаточную плотность внизу в области максимума, так что характер распределения плотности сохраняется.

Для решений, получающихся при $G = G_-$, сохраняется не только форма кривой, но и величина максимума. Точнее, при $\tau \rightarrow \infty$ максимум функции G_- стремится к конечному пределу. Используя асимптотические выражения для I_ν и I'_ν при малых значениях аргумента, получаем следующее асимптотическое выражение для функций Грина:

$$G(z, \tau; 0) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1) \tau^{\nu+1}} \exp \left[- \left(\frac{\delta + 1}{2} + \frac{\nu}{2} \right) z - \frac{\exp(z) + 1}{\tau} \right]. \quad (4.7)$$

Отсюда

$$G_+ = \frac{\exp[-x - \exp(-x)]}{\tau^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad (\nu = 1 - \delta); \quad (4.8)$$

$$G_- = \frac{\exp[-x\delta - \exp(-x)]}{\Gamma(\delta)}, \quad (4.9)$$

где $x = z + \ln \tau$.

В работах [1, 2] отмечалось, что диффузионные процессы могут приводить в стационарных случаях к распределениям, близким по форме к чепменовским (к такой форме в действительности близок основной максимум ионизации в ионосфере—слой F_2 , хотя в его образовании основную роль играют не ионизационно-рекомбинационные процессы,

рассматриваемые в теории чепменовского слоя, а диффузионные). Из выражений (4.8) и (4.9) следует, что асимптотические решения уравнения диффузии представляют собой в точности чепменовские слои. Таким образом, правильно говорить о малых изменениях асимптотической формы кривой диффузионного распределения в нижней области, вызванных введением здесь стока частиц, нежели о сходстве с чепменовской формой (в отличие, например, от [2]).

На рис. 3 показана асимптотическая форма распределения плотности с учетом диффузии при $G = G_+$ и $G = G_-$. Видно, что отток частиц на бесконечности делает слой более тонким.

в) *Скорость опускания возмущения.* В соответствии с формулами (4.8) и (4.9) изменение G во времени можно представить как перемещение всей кривой распределения вниз по $-z$ при неизменном значении аргумента $x = z + \ln \tau$ («опускающаяся» координата). При этом форма кривых сохраняется.

Одновременно происходит уменьшение всех значений функций G_+ в соответствии с множителем $\tau^{-\nu}$. Скорость опускания всей кривой

$$v \approx \frac{D}{H_a} = \frac{g}{\nu}, \quad (4.10)$$

где g , ν , D — соответственно гравитационное ускорение, частота столкновений диффундирующих частиц и коэффициент диффузии.

Последние величины относятся

к максимуму возмущения. Отклонения скорости перемещения от скорости опускания частиц в атмосфере равны нулю при $\tau = 0$, а также для возмущения, достигшего асимптотической формы.

Асимптотическая форма G_- представляет собой такого рода «волну», вообще не убывающую по амплитуде. Ее максимум равен

$$G_{-\max} = \frac{1}{\Gamma(\delta) (e/\delta)^\delta} \quad (4.11)$$

при $\tau \rightarrow \infty$. В частности, для $\delta = 1/2$ получаем

$$G_{-\max} = (2\pi e)^{-1/2} \quad (4.12)$$

при $\tau \rightarrow \infty$.

Значения величины $G_{-\max}$ в зависимости от δ приведены в табл. 1.

Таблица 1

δ	1	0,5	0,45	0,4	0,385	3,57	0,333
$G_{-\max}$	0,33	0,24	0,23	0,21	0,20	0,19	0,18
$\alpha = G_{-\max}^{-1}$	3,02	4,13	4,39	4,76	5,10	5,16	5,58

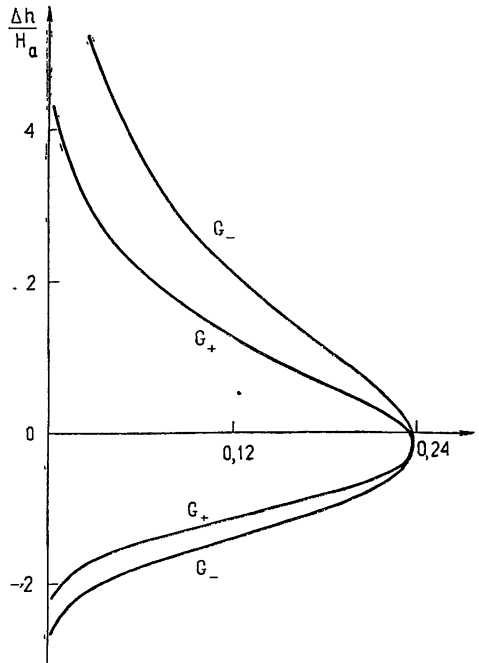


Рис. 3.

Более длинный высотный «хвост» распределения приводит к более медленному убыванию максимума и для G_+ , как это можно видеть из рис. 4, где показано положение и величина максимума для последо-

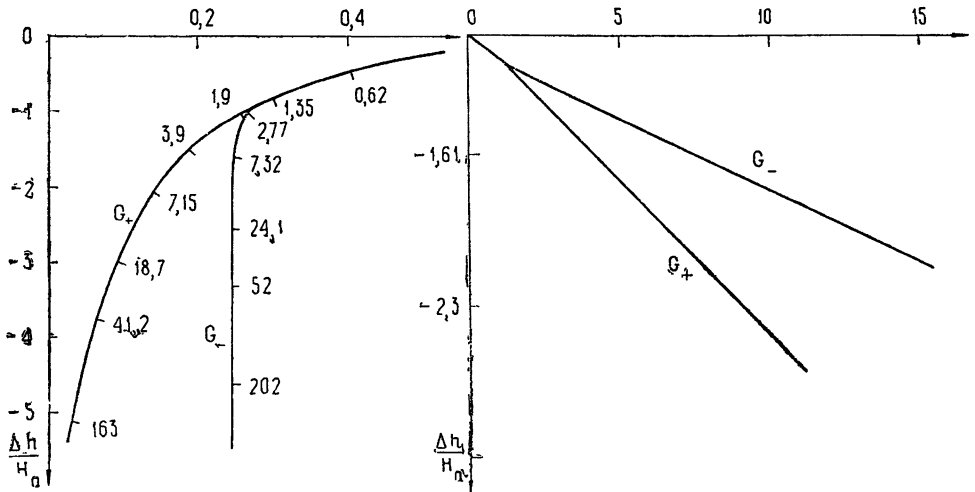


Рис. 4.

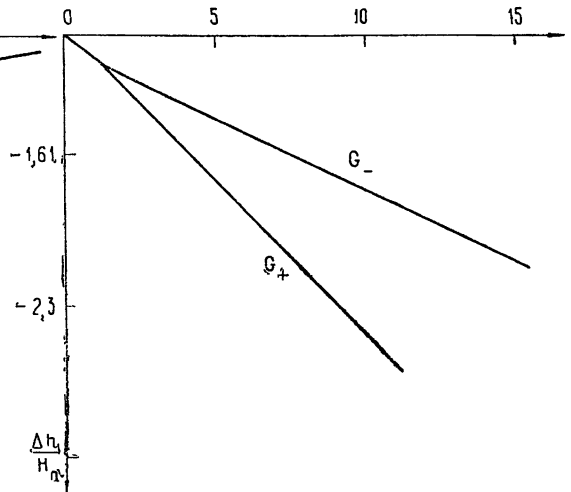


Рис. 5.

вательных моментов времени τ (значения τ написаны около точек кривой). Вторая кривая на рис. 4 показывает аналогичную зависимость для G_- . Расчет произведен для $\delta = 1/2$.

На рис. 5 показаны перемещения максимума возмущения (экспоненциальная шкала) в зависимости от времени для G_+ и G_- . Начальные фазы развития возмущений примерно одинаковы, но затем отток частиц из атмосферы приводит к более быстрому опусканию максимума в последующие моменты.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Geisler, S. A. Bowhill, *Aeronomy Report*, Co. 5, 1965, p. 75.
2. В. М. Поляков, Л. А. Щепкин, Э. С. Казимировский, В. Д. Кокоуров, *Ионосферные процессы*, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
3. М. Николе, *Аэрономия*, изд. Мир, М., 1964.
4. G. W. Dungey, *J. Atm. Terr. Phys.*, **9**, 90 (1956).
5. J. W. Wright, *J. Geophys. Res.*, **65**, № 1, 185 (1960).
6. J. R. Vanister, H. L. Davis, *Phys. Fluids*, **5**, 136 (1962).
7. K. D. Granzow, *Phys. Fluids*, **5**, 142 (1962).
8. К. Ю. М. Klein, *Phys. Fluids*, **7**, 651 (1964).
9. J. E. Gliddon, *Quart. J. Mechanics*, **12**, 3 (1959).
10. J. E. Gliddon, *Planet. Space Sci.*, **9**, 815 (1962).
11. A. Dalgarno, *J. Atm. Terr. Phys.*, **26**, 939 (1964).
12. Г. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИЛ, М., 1949, т. 1.

PECULIARITIES OF NONSTATIONARY SOLUTIONS OF THE EQUATION
OF DIFFUSION IN THE GRAVITATIONAL FIELD. I*A. A. L'vova, V. M. Polyakov, V. V. Rybin*

A nonstationary solution of the gas diffusion equation in the gravitational field has been obtained. The conditions of forming the asymptotic form of the vertical density distribution of particles from arbitrary initial disturbances are described. It is shown that the vertical density distribution of particles of any gaseous mixture (introduced into the atmosphere as a layer, bounded from above and below and with an arbitrary initial distribution) takes in due course a stationary form of Chapman's layer lowering under the gravity action and holding its form.
