

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|------------|
| Лоладзе Ц. Д., Хирсели Е. М. О взаимодействии волн в анизотропной плазме Кормилец В. М., Якименко И. П. Нелинейное взаимодействие волн в цилиндрическом столбе магнитоактивной плазмы | 647 652 |
| Омельченко А. Я., Панченко В. И., Степанов К. Н. О поглощении необыкновенной электромагнитной волны в линейном слое плазмы в области гибридного резонанса | 660 |
| Семенова В. И. Об отражении электромагнитных волн при наклонном падении на движущийся фронт ионизации | 665 |
| Кац Л. И., Тержова В. П., Шехтер Л. А. К эффекту магнитосопротивления плазмы в переменном магнитном поле | 675 |
| Наумов А. П. О поглощении радиоволн в земной атмосфере примесными газами | 682 |
| Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А. Одновременные измерения электронной концентрации и частоты соударений электронов в D-области ионосферы методом частичных отражений | 695 |
| Андропова И. А., Хандохин П. А. Исследование влияния магнитного поля на характеристики кольцевого лазера на волне 3,39 мк | 703 |
| Фейзулин З. И. Получение оптического изображения двумерного объекта с использованием дифракции света на ультразвуке | 713 |
| Романовский Ю. М. О взаимной синхронизации многих автоколебательных систем, связанных через общую среду | 718 |
| Каллистратова М. А., Покасов В. В. Измерение корреляции «блужданий» световых центров тяжести пространственно-ограниченных лучков в турбулентной атмосфере | 725 |
| Кашкан А. А., Полищук Ю. М. Дифракция Кирхгофа—Френеля в турбулентной атмосфере | 732 |
| Старобинец И. А. Средняя освещенность и флуктуации интенсивности в фокусе светового пучка, фокусируемого в турбулентной атмосфере | 738 |
| Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Расширение лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере вдоль наклонных трасс | 743 |
| Найда О. Н. К проблеме предельной поляризации | 751 |
| Курин А. Ф., Новиков Г. П., Орлов В. Н. Открытый резонатор с трехгранным отражателем | 766 |
| Семенов В. С., Фрумкис Л. С., Шостак А. С. Влияние плоско-слоистой среды на импеданс горизонтальных линейных антенн | 773 |
| Руденко А. И. Нестационарный токоперенос в твердых телах | 778 |
| Кузнецов М. И., Железцова И. Н., Степанов С. В. Собственные колебания электронного облака в цилиндрическом магнетроне | 787 |

Краткие сообщения и письма в редакцию

| | |
|---|-----|
| Огородников С. Н. О нестационарных соленоидальных регулярных потоках одноименно заряженных частиц | 792 |
| Кривошеков Г. В., Никулин Н. Г., Соколовский Р. И. Об одном синхронизме при возбуждении гармоник сверхкороткими импульсами света | 795 |
| Гордеев А. Д., Грецишкин В. С., Шишкин Е. М. «Медленные биения» в двухчастотном спиновом эхо | 796 |
| Сьедин В. Я., Хмелевцов С. С., Цык Р. Ш. Флуктуации интенсивности в фокусированном световом пучке, прошедшем через толщу турбулентной атмосферы | 798 |

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XI, № 6, 1971 г., т. XII, № 1, 1972 г., 801

УДК 533.951

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Ц. Д. Лоладзе, Е. М. Хирсели

В работе рассмотрены процессы нелинейного взаимодействия высокочастотных плазменных волн с излучением магнитогидродинамических волн в анизотропной плазме. Изучены частные случаи распадного взаимодействия геликонов с акустической волной в частично ионизованной плазме и квазипродольных волн с магнитозвуковой волной в полностью ионизованной плазме. Для исследуемых процессов получены инкременты нарастания волн и оценены пороговые значения энергии взаимодействующих волн.

1. Как было показано в работах [1,2], исследование в изотропной плазме нелинейного взаимодействия волн с периодами и длинами, намного превышающими период и длину волны высокочастотных колебаний, может быть проведено посредством совместного решения системы кинетического уравнения волн и гидродинамического уравнения:

$$\frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} + \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \frac{\partial |E_k|^2}{\partial r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial r} \frac{\partial |E_k|^2}{\partial k} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - u^2 \nabla \operatorname{div} \xi \right) = \bar{f},$$

где $|E_k|^2$ и ω_k — плотность энергии и частота высокочастотных колебаний, $k = (k, \omega_k)$, ρ — массовая плотность плазмы, ξ — смещение частиц плазмы, \bar{f} — усредненная по высокочастотным колебаниям плотность нелинейной силы.

В данной работе предложенным в [1] методом исследованы в магнитоактивной плазме распадные процессы геликонов с излучением акустической волны и квазипродольных волн с излучением магнитозвуковой волны. В распадных процессах необходимо удовлетворение законов сохранения энергии и импульса взаимодействующих волн:

$$\omega_1 = \omega_2 + \Omega, \quad (2)$$

$$k_1 = k_2 + q;$$

волновые векторы лежат в плоскости xz^* .

2. Рассмотрим распад геликона (ω_1, k_1) на геликон (ω_2, k_2) и акустическую волну (Ω, q) :

$$\omega_{1,2} = (k_{1,2}^2 c^2 / \omega_{Le}^2) |\Omega_e| \cos \vartheta_{1,2}; \quad (3)$$

$$\Omega = qu, \quad (4)$$

* Отдельные вопросы, связанные с распадами в плазме, в той или иной мере уже рассматривались рядом авторов [3-7].

где $u = \left(\frac{T_a}{M}\right)^{1/2}$ — скорость обычной звуковой волны, ϑ — угол между внешним магнитным полем B_0 , направленным вдоль оси z , и волновым вектором геликона k ; остальные обозначения общеприняты.

Для геликона, удовлетворяющего (3), с частотой, лежащей в интервале $|\Omega_e| \gg \omega \gg \Omega_i$, частично ионизованная плазма ($n_0/n_a^0 \ll 1$) может считаться бесстолкновительной при соблюдении условия

$$v_{ea} \cos \vartheta < (\omega \Omega_e)^{1/2}, \quad (5)$$

где v_{ea} — частота столкновения электронов с нейтралими.

При учете (3), (4) из законов сохранения (2) следует, что $|k_2| < |k_1|$, т. е. имеет место перекачка энергии в сторону длинных волн.

Для исследования данного распадного процесса воспользуемся системой уравнений (1), где плотность силы \bar{f} нелинейного взаимодействия, аналогично [1], обусловлена электронным взаимодействием в плазме и получена посредством усреднения нелинейных членов гидродинамического уравнения по периоду и длине волны высокочастотных колебаний:

$$\bar{f} = -\frac{1}{8\pi\rho} \int dk \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left\{ \chi_{ij}^* \chi_{lm} - \chi_{jm} \delta_{il} + \chi_{lm} \delta_{ij} \right\} \frac{a_{jm}}{D} \nabla_l |E_k|^2. \quad (6)$$

Здесь $\chi_{\alpha\beta} = \frac{\omega^2}{\omega_{Le}^2} (\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta})$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы,

$$D = 1 + \cos^2 \vartheta + \frac{\omega^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \vartheta,$$

$$a_{jm} = \begin{bmatrix} 1 & -i \cos \vartheta & -\frac{\omega}{\Omega_e} \sin \vartheta \\ i \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta & -i \frac{\omega}{\Omega_e} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -\frac{\omega}{\Omega_e} \sin \vartheta & -i \frac{\omega}{\Omega_e} \sin \vartheta \cos \vartheta & \frac{\omega^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \vartheta \end{bmatrix}.$$

Производя преобразование Фурье ($\exp i[qr - \Omega t]$) системы уравнений (1) и подставляя в гидродинамическое уравнение поле $|E_k|^2$, получим дисперсионное соотношение

$$\Omega^2 - q^2 u^2 = \frac{q^2}{4\pi\rho} \int dk \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e} \frac{q \frac{\partial |E_k|^2}{\partial k}}{\Omega - 2\omega_k \frac{kq}{k^2}} \frac{\cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta}. \quad (7)$$

Допустим, что $\Omega = \pm qu + i\Gamma_q^\pm$, где $\Gamma_q \ll qu$. Тогда для декремента (инкремента) акустической волны в поле волны геликонов получим

$$\Gamma_q^\pm = -qu \frac{\omega_{Le}}{8\Omega_e} \int dk \frac{\cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \left(q \frac{\partial}{\partial k} \right) |E_k|^2 \frac{\delta}{\rho u^2} \left(\pm qu - 2\omega_k \frac{kq}{k^2} \right). \quad (8)$$

Из законов сохранения следует, что $u < \frac{\partial \omega_k}{\partial k}$. Исследуем в этом случае дисперсионное соотношение (7). Энергию геликонов представим в виде

$$|E_k|^2 = 4\pi k_0^3 \delta(k - k_0) \mathcal{E}_0 \quad (\mathcal{E}_0 = \text{const}). \quad (9)$$

Перейдя к полярным координатам и интегрируя соотношение (7) по частям, получим

$$\Omega^2 - q^2 u^2 = \frac{\omega_{Le}^2}{\left(\Omega - 2\omega_{k_0} \frac{k_0 q}{k_0^2}\right)^2} \frac{\Omega}{\Omega_e} \frac{q^3 k_0^2 \mathcal{E}_0}{\rho} \frac{\cos \vartheta_0 \cos \varphi_0}{1 + \cos^2 \vartheta_0} \quad (\varphi_0 = (\widehat{k_0 q})). \quad (10)$$

Пусть $\Omega = 2\omega_{k_0} \frac{k_0 q}{k_0^2} + \nu$, тогда $\nu^2 = -\omega_{Le}^2 \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \vartheta_0} \frac{k_0 q^2 \mathcal{E}_0}{\rho c^2}$,

откуда

$$\nu = \pm iqu \frac{\omega_{Le}}{\Omega_e} \frac{\omega_{Le}}{k_0 c} \sqrt{\frac{k_0^3 \mathcal{E}_0}{\rho u^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \vartheta_0}}. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что инкремент нарастания акустической волны в поле волны геликона $\nu \sim \mathcal{E}_0^{1/2}$ при пороговом значении энергии геликона, удовлетворяющем условию

$$\mathcal{E}_0 > \frac{\nu_{ea}^2}{\omega_{Le}^2} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} \frac{n_0}{k_0 q^2} mc^2. \quad (12)$$

Условие (12) приводит к тому, что нарастание превалирует над затуханием акустической волны, вызванным столкновением нейтралов с электронами, т. е. $\nu > \nu_{ae}$.

3. Рассмотрим в полностью ионизованной неизотермической ($T_e \gg T_i$) плазме распад квазипродольных волн (ω, k) на квазипродольные и магнитозвуковые волны (Ω, q):

$$\omega = \omega_{Le} + \frac{\Omega_e^2 \sin^2 \vartheta}{2\omega_{Le}} + \frac{k^2 v_T^2}{2\omega_{Le}} \quad (\omega_{Le} \gg \Omega_e); \quad (13)$$

$$\Omega = qu = q \sqrt{v_A^2 + v_s^2} \quad (14)$$

— магнитозвуковая волна, распространяющаяся поперек внешнего магнитного поля, вектор которого лежит в юдной плоскости xz с вектором k ; v_s, v_A — соответственно ионно-звуковая и альвеновская скорости. Из законов сохранения (2) для данного распадного процесса следует, что $|k_1| > |k_2|$, т. е. имеет место увеличение фазовой скорости волны.

Распадный процесс происходит до нарушения условия $v_\phi < \frac{v_{Te}}{u} v_{Te}$.

Для описания данного распадного процесса воспользуемся системой уравнений (1), где под нелинейной силой подразумевается величина

$$\bar{f} = -\frac{\omega_{Le}^2}{8\pi} \int \frac{dk}{\omega_k^2} \nabla |E_k|^2. \quad (15)$$

Исключением поля $|E_k|^2$ систему (1) с учетом силы (15) сведем к дисперсионному соотношению

$$\Omega^2 - q^2 u^2 = - \frac{q^2}{16\pi\rho} \omega_{Le} \int dk \frac{q \frac{\partial |E_k|^2}{\partial k}}{\Omega - q \frac{\partial \omega_k}{\partial k}}. \quad (16)$$

Исследуем кинетическую неустойчивость данного процесса, для чего допустим, что $\Omega = \pm qu + i\Gamma_q^\pm$; тогда

$$\Gamma_q^\pm = \frac{q}{32\rho} \frac{\omega_{Le}}{u} \int dk \left(q \frac{\partial |E_k|^2}{\partial k} \right) \delta \left(\pm qu - q \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \right). \quad (17)$$

Далее используем соотношение (16) для исследования гидродинамической неустойчивости. Для этого, полагая $u \ll \left| \frac{\partial \omega_k}{\partial k} \right|$ и применяя представление (9), получим дисперсионное соотношение

$$(\Omega^2 - q^2 u^2) \left(\Omega - q \frac{\partial \omega_{k_0}}{\partial k_0} \right)^2 = \frac{q^4 k_0^3 \mathcal{E}_0}{4\rho} v_T^2. \quad (16a)$$

Частоту Ω ищем в виде $\Omega = \frac{1}{2} q \frac{\partial \omega_{k_0}}{\partial k_0} + \nu$.

Тогда для ν получим квадратное уравнение

$$\nu^2 - \left(\frac{1}{2} q \frac{\partial \omega_{k_0}}{\partial k_0} \right)^2 = \pm \frac{1}{2} q^2 v_T^2 \sqrt{\frac{k_0^3 \mathcal{E}_0}{\rho v_T^2}},$$

откуда

$$\nu = \pm \left\{ \left(\frac{1}{2} q \frac{\partial \omega_{k_0}}{\partial k_0} \right)^2 \pm \frac{1}{2} q^2 v_T^2 \sqrt{\frac{k_0^3 \mathcal{E}_0}{\rho v_T^2}} \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Из выражения (18) при пороговом значении энергии квазипродольной волны

$$\frac{\mathcal{E}_0 k_0^3}{\rho v_T^2} > \left(\frac{k_0}{k_{De}} \right)^4 \quad (19)$$

видно, что ν является инкрементом нарастания магнитозвуковой волны в поле высокочастотной квазипродольной волны ($\nu \sim \mathcal{E}_0^{1/4}$).

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Н. Л. Цинцадзе за постоянный интерес к данной работе и ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, ДАН СССР, 159, № 4, 767 (1964).
2. R. Z. Sagdeev, A. A. Galeev, Lecture on the Non-Linear Theory of Plasma, Trieste, Sept., 35, 1966.
3. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
4. Н. П. Гиоргадзе, Е. М. Хирсели, Н. Л. Цинцадзе. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 489 (1966).
5. Е. М. Khirseli, N. L. Tsintsadze, Phys. Letters, 25A, № 3, 279 (1967).
6. Г. И. Сурамлишвили, ЖТФ, 37, № 4, 798 (1967).
7. В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 884 (1970).

WAVE INTERACTION IN ANISOTROPIC PLASMA

Ts. D. Loladze, E. M. Khirseli

The paper considers the processes of the nonlinear interaction of high frequency plasma waves with the of magnetohydrodynamic wave radiation in anisotropic plasma. The particular cases of the helicon decay interactions with an acoustic wave in the partially ionized plasma and quasi-longitudinal waves with a magnetoacoustic wave in the fully ionized plasma are investigated. For the processes studied the increments of the wave increasing are obtained and the threshold values of the energy of the interacting waves are estimated.

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТОЛБЕ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

В. М. Кормилец, И. П. Якименко

В гидродинамическом приближении получено координатное представление нелинейного тока, возникающего при взаимодействии некоторого набора электромагнитных волн в плазменном цилиндре, помещенном в постоянное магнитное поле $H_0(0, 0, H_0)$ (приближение холодной плазмы). Переизлученное поле, вызванное этим током, найдено на основании теоремы взаимности для гиротропных сред. Полученные результаты связываются с результатами выполненных ранее работ по нелинейному взаимодействию при распространении и рассеянии волн в холодном изотропном цилиндре. Рассмотрен частный случай нелинейного взаимодействия двух электромагнитных полей, возникающих внутри бесконечно длинного цилиндра разреженной плазмы при нормальном падении двух плоских волн p -поляризации.

1. При постановке широкого класса нелинейных граничных задач взаимодействующие поля можно рассматривать как заданные функции координат и времени [1-3]. В таком плане исследовалось слабое нелинейное взаимодействие электромагнитных и плазменных волн в неограниченной [4-10] и ограниченной [11-16] плазме. Ряд вопросов, относящихся к изотропному плазменному цилиндру, рассмотрен, в частности, в работах [11, 14-16]. В настоящей работе метод, использованный ранее в [16], используется для описания эффекта «переизлучения» при рассеянии на плазменном цилиндре заданного набора электромагнитных волн при наличии внешнего постоянного магнитного поля $H_0(0, 0, H_0)$.

Задача переизлучения ставится как краевая задача электродинамики с заданным сторонним током, роль которого играет нелинейный ток I_ω , обусловленный взаимодействующими волнами. Координатное представление этого тока можно легко найти, используя систему гидродинамических уравнений и уравнений Максвелла для области, занятой магнитоактивной плазмой ($r < a$):

$$\begin{aligned}
 I_\omega = & \frac{ie n_0}{\omega} \left\{ \nabla(V_1 V_2)_\omega + \frac{\omega_H}{n_0} [(n_1 V_2 + n_2 V_1) e_z] + \right. \\
 & + i \omega_H \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \left(\frac{1}{\Delta\omega} \left[V_{1\omega_1} \frac{\partial V_{2\Delta\omega}}{\partial z} \right] + \frac{1}{\omega_1} \left[V_{2\Delta\omega} \frac{\partial V_{1\omega_1}}{\partial z} \right] \right) \Bigg\} - \\
 & - e(n_1 V_2 + n_2 V_1)_\omega.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь индексами $j = 1, 2$ отмечены величины, относящиеся к первичным волнам, n_0 — равновесная концентрация электронов, $\omega_H = eH_0/mc$ — циклотронная частота, e — абсолютная величина заряда электрона, $\Delta\omega = \omega - \omega_1$.

Краевая задача образуется уравнениями поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E_\omega &= ik_0 H_\omega, \\ \operatorname{rot} H_\omega &= \begin{cases} -ik_0 E_\omega & (r > a), \\ -ik_0 \overset{\wedge}{\varepsilon} E_\omega + (4\pi/c) I_\omega & (r < a) \end{cases}, \\ k_0 &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (2)$$

и системой обычных граничных условий макроскопической электродинамики, которым должны удовлетворять поля при $r = a$.

Тензор диэлектрической проницаемости для рассматриваемой геометрии определяется в виде [1]

$$\overset{\wedge}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\eta & 0 \\ -i\eta & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, & \eta &= \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \\ \varepsilon_3 &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$ — ленгмюровская частота.

2. Переизлученное поле, вызванное током I_ω , удобно определить на основании теоремы взаимности для гиротропных сред [17]. Если в качестве вспомогательного источника выбран единичный электрический диполь \mathbf{p} ($p = 1$), расположенный в некоторой точке \mathbf{r} вне плазменного объема, то проекция вектора поля на направление \mathbf{p} дается выражением

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \int I_\omega(\mathbf{r}') \tilde{E}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (5)$$

Вспомогательное поле $E'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляет собой внутреннее дифракционное поле цилиндра при дифракции поля электрического диполя на магнитоактивном плазменном цилиндре в отсутствие тока. Значок «тильда» указывает, что это поле берется в данной среде, но находящейся не в поле $+H_0$, а в обращенном поле $-H_0$.

Для вычисления этого поля представим величины, входящие в (2) при $I_\omega = 0$, в виде интегралов Фурье по z' и ряда Фурье по φ' :

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta E_{n\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[i\beta(z' - z) + in(\varphi' - \varphi)]. \quad (6)$$

Тогда, решая уравнения (2) для области $r < a$, для продольных компонент Фурье находим

$$\begin{aligned} E'_{z'} &= -\frac{1}{k_0 \sqrt{\varepsilon_3}} (Y_1 \lambda_1^2 \Psi_1 + Y_2 \lambda_2^2 \Psi_2), \\ H'_{z'} &= \frac{1}{ik_0} (\lambda_1^2 \Psi_1 + \lambda_2^2 \Psi_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Psi'_{1,2} = \pm \frac{(Y_2 - Y_1)\lambda_{1,2}^2}{ik_0 Y_{2,1}} \Psi_{1,2}, \quad (8)$$

а Ψ'_i ($i = 1, 2$) являются решениями уравнения

$$\nabla_t^2 \Psi'_i + \lambda_i^2 \Psi'_i = 0, \quad (9)$$

в котором ∇_t^2 — поперечная часть оператора Лапласа, а

$$\lambda_i^2 = b_2 + b_1 Y_i, \quad (10)$$

причем Y_i являются корнями уравнения

$$Y^2 + Y \frac{b_2 - a_1}{b_1} - 1 = 0, \quad (11)$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_1 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} (k_0^2 \varepsilon - \beta^2), \quad b_1 = \beta k_0 \frac{\eta}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon_3}, \quad b_2 = k_0^2 \frac{\varepsilon^2 - \eta^2}{\varepsilon} - \beta^2. \quad (12)$$

Поперечные фурье-компоненты полей выразятся через E'_z и H'_z :

$$E'_t = (k_0^2 \hat{\varepsilon}_t - \beta^2 \hat{I})^{-1} \{i\beta \nabla_t E'_z + ik_0 [\nabla_t H'_z e_{z'}]\}, \quad (13)$$

$$H'_t = (k_0^2 \hat{\varepsilon}_t - \beta^2 \hat{I})^{-1} \{i\beta \nabla_t H'_z - ik_0 \hat{\varepsilon}_t [\nabla_t E'_z e_{z'}]\},$$

где

$$\hat{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon & i\eta \\ -i\eta & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\nabla_t = e_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + e_{\varphi'} \frac{in}{r'}.$$

Компоненты фурье-полей, возбуждаемых диполем, имеют вид

$$E^0 = a_1^0 \varphi_1^0 + ia_2^0 \varphi_2^0, \quad H^0 = -i\tilde{\varepsilon} a_1^0 \varphi_2^0 + a_2^0 \varphi_1^0, \quad (15)$$

где

$$\varphi_1^0 = \frac{1}{k_0} \left\{ i\beta J'_n(\tilde{\lambda} r') e_{r'} - \left(\frac{n\beta}{r'} e_{\varphi'} - \tilde{\lambda}^2 e_{z'} \right) J_n(\tilde{\lambda} r') \right\},$$

$$\varphi_2^0 = \frac{in}{r'} J_n(\tilde{\lambda} r') e_{r'} - J'_n(\tilde{\lambda} r') e_{\varphi'},$$

$$a_1^0 = -\frac{ik_0^2}{2\tilde{\lambda} \tilde{\varepsilon}} \varphi_1, \quad a_2^0 = -\frac{ik_0^2}{2\tilde{\lambda}} \varphi_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{k_0} \left\{ i\beta H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) p_r + \left(\frac{n\beta}{r} p_{\varphi} - \tilde{\lambda}^2 p_z \right) H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) \right\}, \quad (16)$$

$$\varphi_2 = \frac{n}{r} H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) p_r - iH_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r) p_{\varphi},$$

$$\tilde{\lambda}^2 = k_0^2 \tilde{\varepsilon} - \beta^2.$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещен диполь, $J_n(\tilde{\lambda} r')$, $H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r)$ — функции Бесселя и Ханкеля, штрих означает дифференцирование по радиусу.

Компоненты Фурье дифракционных полей при $r > a$ имеют вид (15) с неопределенными коэффициентами a_1 и a_2 , а в φ_j^2 ($j = 1, 2$) входит $H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} r')$ вместо $J_n(\tilde{\lambda} r')$.

Подчиняя поля граничным условиям на поверхности раздела $r' = a$, для внутреннего дифракционного поля получим при $\tilde{\varepsilon} = 1$

$$E'(r, r') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta (a'_1 \varphi'_1 + a'_2 \varphi'_2) \exp[i\beta(z' - z) + in(\varphi' - \varphi)]. \quad (17)$$

Здесь

$$a'_j = \mp \frac{ik_0^2 \varphi_s \delta_{js}}{\pi a \lambda \tilde{\lambda}^2 \Delta} \quad (j, s = 1, 2),$$

$$\delta_{11} = \Gamma'_2 + \tilde{\Gamma}_2, \quad \delta_{12} = -\Gamma'_2 + i \frac{Y_2}{V \varepsilon_3} \Gamma_2, \quad \delta_{21} = \Gamma'_1 + \tilde{\Gamma}_1,$$

$$\delta_{22} = -\Gamma'_1 + i \frac{Y_1}{V \varepsilon_3} \Gamma_1, \quad \Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21},$$

$$\Gamma'_j = \frac{in\beta}{k_0 a} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \right) J_j H,$$

$$\Gamma''_j = \frac{in\beta}{k_0 a} \left(i \frac{Y_j}{\sqrt{\varepsilon_3} \tilde{\lambda}^2} + \frac{k_0 a_j}{\beta \lambda_j^2} \right) J_j H,$$

$$\tilde{\Gamma}_j = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} J_j H' - \frac{1}{\lambda_j^2} J'_j H, \quad \Gamma_j = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} J_j H' - \frac{\varepsilon_3}{\lambda_j^2} J'_j H, \quad (18)$$

$$\varphi'_j = e_{r'} \left[\frac{in}{r'} J_n(\lambda_j r') + \alpha_j J'_n(\lambda_j r') \right] + e_{\varphi'} \left[\frac{in}{r'} \alpha_j J_n(\lambda_j r') - J'_n(\lambda_j r') \right] - e_{z'} \frac{Y_j \lambda_j^2}{k_0 \sqrt{\varepsilon_3}} J_n(\lambda_j r'),$$

$$\alpha_j = \frac{i}{k_0^2 \eta} (k_0^2 \varepsilon - \beta^2 - \lambda_j^2) = -i \frac{\beta \sqrt{\varepsilon_3}}{k_0 \varepsilon} Y_j + i \frac{\eta}{\varepsilon},$$

$$J_j = J_n(\lambda_j a), \quad H = H_n^{(1)}(\tilde{\lambda} a).$$

В отсутствие магнитного поля ($\varepsilon = \varepsilon_3$, $\eta = 0$) найдем $Y_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda^2 = k_0^2 \varepsilon - \beta^2$, $\alpha_{1,2} = \pm i \beta / k_0 \sqrt{\varepsilon_3}$, и из (17) и (18) следует

$$E'(r, r') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta (A_1 \varphi_1 + i A_2 \varphi_2) \exp[i\beta(z' - z) + in(\varphi' - \varphi)], \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{k_0} \left[i\beta J'_n(\lambda r') e_{r'} - \left(\frac{n\beta}{r'} e_{\varphi'} - \lambda^2 e_{z'} \right) J_n(\lambda r') \right], \\ \varphi_2 &= \frac{in}{r'} J_n(\lambda r') e_{r'} - J'_n(\lambda r') e_{\varphi'}, \\ A_j &= \frac{k_0^2 \delta_{js} \varphi_s}{\pi a \lambda^2 J H \Delta} \quad (j, s = 1, 2), \\ A_{1,2} &= a'_2 \mp a'_1, \\ \delta_{11} &= \frac{H'}{H} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} \frac{J'}{J}, \quad \delta_{22} = \frac{H'}{H} - \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\lambda}^2}{\lambda^2} \frac{J'}{J}, \\ \delta_{12} &= -\delta_{21} = \frac{in\beta}{k_0 a} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda^2} - 1 \right), \quad \Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}. \end{aligned} \quad (20)$$

Последние обозначения введены в работе [16], а при $\varphi = 0, z = 0, \tilde{\varepsilon} = 1$ результат (19) совпадает с приведенным в работе [17].

3. Применим полученные выше общие результаты для определения поля переизлучения при нормальном падении на плазменный цилиндр двух плоских волн вида

$$E_i = e_z E_i^0 \exp i(\mathbf{k}_i \mathbf{r} - \omega_i t) + \text{к. с.} \quad (21)$$

Для определения индуцированных скоростей и зарядов, связанных с этими волнами, необходимо решение дифракционной задачи для падающих полей. Хотя это решение для цилиндра можно легко получить с помощью соотношений, найденных в предыдущем разделе, мы для простоты ограничимся случаем $\omega_i \gg \omega_0$ ($i = 1, 2$), когда поля внутри цилиндра можно принять равными падающим.

Компоненты Фурье тока (1) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} I_\omega &= \frac{ien_0}{\omega} \nabla(V_1 V_2)_\omega = \\ &= -\frac{ie^3 n_0}{m^2 \omega \omega_1 \omega_2} \sigma_{12} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp [im(\varphi_0 - \varphi)] \left[J'_m(gr) e_r - \frac{im}{r} J_m(gr) e_\varphi \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\sigma_{12} = \sum_{l_{1,2} = \pm 1} l_1 E_1^{0l_1} l_2 E_2^{0l_2} \delta(\omega + l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2),$$

$$\varphi_0 = [(l_1 \mathbf{k}_1 + l_2 \mathbf{k}_2) \hat{e}_x], \quad \mathbf{g} = l_1 \mathbf{k}_1 + l_2 \mathbf{k}_2$$

(при верхнем отрицательном индексе в $\sigma_{1,2}$ соответствующая величина берется комплексно-сопряженной).

Проекция рассеянного поля на направление \mathbf{p} согласно (5) с учетом (22) имеет вид

$$E_p(\mathbf{r}) = -\frac{e(1 - \varepsilon_3)\varepsilon}{m \omega_1 \omega_2 k_0^2 a (\varepsilon^2 - \eta^2)} \sigma_{12} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \exp [im(\varphi_0 - \varphi)] \times$$

$$\times J_n(ga) J_n(\lambda_2 a) \frac{n + \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{a}{\eta_2 \eta_0} \frac{g^2 \eta_0 - \lambda_2^2 \eta_2}{\lambda_2^2 - g^2}}{\tilde{\Gamma}_2 + \Gamma_2} \Big|_{\beta=0} \times \quad (23)$$

$$\times \left[\frac{n}{r} H_n^{(1)}(k_0 r) p_r - i H_n^{(1)'}(k_0 r) p_\varphi \right].$$

Здесь

$$\eta_0 = \frac{J_n(ga)}{J_n'(ga)}, \quad \eta_2 = \frac{J_n(\lambda_2 a)}{J_n'(\lambda_2 a)}.$$

Как нетрудно проверить, в волновой зоне ($k_0 r \gg 1$) поле имеет структуру цилиндрической волны, как и должно быть в случае бесконечно длинного цилиндра.

В отсутствие магнитного поля результат (23) совпадает с полученным в [16].

Из различных частных случаев общего результата (23) интерес представляет случай тонкого цилиндра. Поскольку при малых радиусах цилиндра ($\lambda_2 a \ll 1$, $k_0 a \ll 1$) здесь можно воспользоваться приближенными значениями функций Бесселя при малых аргументах, то, сохраняя в рядах функций Бесселя только первые члены, нетрудно убедиться, что основную роль играют колебания $n = 0, \pm 1$. В волновой зоне ($k_0 r \gg 1$) роль радиальной компоненты несущественна, и для тонкого цилиндра из (23) получим

$$E_\varphi(r) = i \frac{\pi}{2} \frac{e(1 - \varepsilon_3) k_0^2 a}{m \omega_1 \omega_2} J_1(ga) \sigma_{12} \times \quad (24)$$

$$\times [B_0 + B_1 \exp[i(\varphi_0 - \varphi)] + B_{-1} \exp[-i(\varphi_0 - \varphi)]] \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp i \left(k_0 r - \frac{\pi}{4} \right),$$

где

$$B_0 = \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{k_0 g}{\lambda_2^2 - g^2} \left[1 - \frac{ga}{2} \frac{J_0(ga)}{J_1(ga)} \right],$$

$$B_1 = \frac{\varepsilon + \frac{\eta}{\lambda_2^2 - g^2} \left[g^2 - \lambda_2^2 a \frac{J_1'(ga)}{J_1(ga)} \right]}{(\varepsilon - \eta)[(\varepsilon + \eta)b^* + b]}, \quad (25)$$

$$B_{-1} = \frac{-\varepsilon + \frac{\eta}{\lambda_2^2 - g^2} \left[g^2 - \lambda_2^2 a \frac{J_1'(ga)}{J_1(ga)} \right]}{(\varepsilon + \eta)[(\varepsilon - \eta)b^* + b]},$$

$$b = 1 + i\pi \frac{k_0^2 a^2}{4}.$$

Из (25) вытекают условия резонанса переизлученного поля (24), определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varepsilon + \eta + 1) &= 0, \\ \operatorname{Re}(\varepsilon - \eta + 1) &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

Резонансы, определяемые условиями (26), характерны для цилиндрических систем с магнитоактивной плазмой и подробно исследованы в работе [18].

В отсутствие магнитного поля из (26) следуют хорошо известные условия резонансного взаимодействия ($\text{Re } \epsilon = -1$) в цилиндрическом столбе холодной плазмы [14, 16].

Выражение (23) позволяет найти среднюю мощность, излучаемую цилиндром с единицы его поверхности, в волновой зоне ($k_0 r \gg 1$) на комбинационных частотах $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2 > 0$:

$$P_{\omega_{\pm}} = \frac{c}{(2\pi)^2 g a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(\omega_{\pm}, a)|^2, \quad (27)$$

где

$$A_n(\omega_{\pm}, a) = -i \frac{V_1 E_2}{c} \frac{\omega_{\pm}}{\omega_2} \frac{1}{\lambda_2^2 a} J_n(ga) J_n(\lambda_2 a) \exp(in \varphi_0) \times \\ \times \frac{1 - \epsilon_3}{\tilde{\Gamma}_2 + \Gamma_2'} \left\{ n + \frac{\eta}{\epsilon} \frac{a}{\eta_2 \eta_0} \frac{g^2 \eta_0 - \lambda_2^2 \eta_2}{\lambda_2^2 - g^2} \right\}_{\omega = \omega_{\pm}}, \quad (28) \\ g = \omega_{\pm} / c.$$

Полное сечение рассеяния определим как отношение полного потока мощности (27) к потоку энергии второй падающей волны:

$$\sigma_{\omega_{\pm}} = \frac{2}{\pi g a |E_2|^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(\omega_{\pm}, a)|^2. \quad (29)$$

В практически важном случае тонкого цилиндра ($ga \ll 1$, $\lambda_2 a \ll 1$), сохраняя в (27) только члены первого порядка по параметрам ga , $\lambda_2 a$, находим

$$P_{\omega_{\pm}} = P_1 + P_{-1}, \quad (30)$$

причем

$$P_{\pm 1} = \frac{1}{16} g a c \left(\frac{V_1}{c} \right)^2 \left(\frac{\omega_{\pm}}{\omega_2} \right)^2 \left(\frac{g a}{2} \right)^2 \frac{|E_2|^2 (1 - \epsilon_3)^2}{|(\epsilon \pm \eta + 1) + i \pi (g a / 2)^2 (1 - \epsilon \mp \eta)|^2}. \quad (31)$$

Как видно из (25) и (31), радиационным затуханием можно пренебречь только при условиях

$$\text{Im}(\epsilon + \eta) \gg \pi \left(\frac{g a}{2} \right)^2 \text{Re}(1 - \epsilon - \eta), \\ \text{Im}(\epsilon - \eta) \gg \pi \left(\frac{g a}{2} \right)^2 \text{Re}(1 - \epsilon + \eta). \quad (32)$$

При этом в спектральном распределении потока мощности переизлученного поля имеются резкие максимумы, обусловленные колебаниями плазмы в магнитном поле и наблюдающиеся при выполнении резонансных условий (26).

Численные оценки, полученные с помощью формулы (31), показывают, что рассмотренный в настоящей работе эффект переизлучения при наличии взаимодействия двух плоских волн, падающих по нормали

на цилиндр магнитоактивной плазмы, может быть экспериментально обнаружен в диапазоне СВЧ (сечения рассматриваемого процесса равны $10^{-11} \div 10^{-15}$ см²). Особый интерес представляет экспериментальное исследование резонансного расщепления при наличии внешнего постоянного магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967
2. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ВИНТИ, М., 1964.
3. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
4. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, **15**, 1086 (1960).
5. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, **32**, 1291 (1962).
6. R. E. Aamodt, W. E. Drummond, J. Nucl. Energy, C6, **147** (1964).
7. Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, **34**, 1707 (1964).
8. N. M. Kroll, A. Ron, N. Rostoker, Phys. Rev., Lett., **13**, 83 (1964).
9. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
10. D. E. Du Bois, M. N. Goldman, Phys. Rev., **164**, 207 (1969).
11. Н. П. Гиоргадзе, Д. Г. Ломинадзе, В. Г. Маханьков, ЖТФ, **34**, 1817 (1964).
12. Д. Д. Рютов, ДАН СССР, **164**, 1273 (1965)
13. Ю. Р. Аланакян, ЖТФ, **35**, 1552 (1965); **36**, 258, 806, 1519 (1966).
14. H. Cheng, Y. C. Lee, Phys. Rev., **156**, 172 (1967).
15. К. С. Карплюк, В. Н. Ораевский, ЖТФ, **38**, 1214 (1968).
16. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 4, 495 (1969)
17. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
18. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 1, 33 (1966).

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступила в редакцию
14 июня 1971 г.

NONLINEAR WAVE INTERACTION IN A CYLINDRIC COLUMN OF THE MAGNETO-ACTIVE PLASMA

V. M. Kormilets, I. P. Yakimenko

The coordinate presentation of the nonlinear current occurred at the interaction of a set of electromagnetic waves in a plasma cylinder placed in the constant magnetic field H_0 (0, 0, H_0) (cold plasma approximation) is obtained in the hydrodynamic approximation. Reradiated field induced by this current is found on the basis of the reciprocity theorem for the gyrotropic medium. The results obtained are connected with the results of previous papers on the nonlinear interaction at wave propagation and scattering in the cold isotropic cylinder. The particular case of the nonlinear interaction of two electromagnetic fields occurred inside the infinitely long cylinder of the discharged plasma at the normal incidence of two plane waves with σ -polarization is considered.

УДК 533 951

О ПОГЛОЩЕНИИ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ ПЛАЗМЫ В ОБЛАСТИ ГИБРИДНОГО РЕЗОНАНСА

А. Я. Омельченко, В. И. Панченко, К. Н. Степанов

Приводятся результаты численных расчетов распределения поля и коэффициента поглощения при нормальном падении необыкновенной волны на линейный слой плазмы с учетом эффекта «разбухания» поля в области гибридного резонанса

Как известно [1, 2], при падении электромагнитной волны на неоднородную магнитоактивную плазму в точке «гибридного» резонанса происходит резкое увеличение составляющей электрического поля в направлении неоднородности плазмы. Возрастание поля в резонансной области приводит к сильному поглощению электромагнитной волны. Эффективность поглощения может быть аналитически определена только в некоторых предельных случаях [2-4].

Эффект поглощения волн в резонансной области может эффективно использоваться для нагрева и диагностики плазмы.

В настоящей работе определен коэффициент поглощения необыкновенной волны при нормальном падении на неоднородную магнитоактивную плазму в случае, когда внешнее магнитное поле однородно и направлено перпендикулярно направлению изменения плотности плазмы. Мы будем считать, что плотность линейно изменяется вдоль оси x .

Вне плазмы ($x < 0$) электрическое поле необыкновенной волны имеет вид

$$E = E_y = E_0 (e^{i\omega x/c} + r e^{-i\omega x/c}), \tag{1}$$

где r — коэффициент отражения.

В плазме ($x > 0$) компонента электрического поля E_y определяется из уравнения

$$\frac{d^2 E_y}{d\xi^2} + K^2(\xi) E_y = 0, \tag{2}$$

$$K^2(\xi) = \rho^2 \left(2u - \xi + \frac{\alpha}{\xi} \right),$$

$$u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}, \quad v = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \xi = v + u - 1,$$

$$a = u(1 - u), \quad \rho = \frac{\omega a}{c}, \quad \frac{1}{a} = \frac{dv}{dx}.$$

Границе плазмы соответствует точка $\xi = \xi_0 = u - 1$.

Компонента E_x связана с E_y соотношением

$$E_x = -\frac{iv\sqrt{u}}{1-u-v} E_y. \quad (3)$$

Величина $K^2(\xi)$ положительна при $u-1 < \xi < \xi_-$ и при $0 < \xi < \xi_+$, где $\xi_{\pm} = u \pm \sqrt{u}$.

В отсутствие столкновений в точке «гибридного» резонанса $\xi = 0$ компонента поля E_x обращается в бесконечность, а величина E_y имеет логарифмическую особенность. Для «сшивания» решений при $\xi < 0$ и $\xi > 0$ введем бесконечно малое затухание, для этого надо заменить величину $1/\xi$ в выражении для $K^2(\xi)$ на $1/(\xi - i\delta)$, где $\delta = \frac{\nu}{\omega}(1+u) \rightarrow +0$.

(Мы предполагаем, что эффективная частота столкновений электронов с тяжелыми частицами ν мала по сравнению с частотой волны.)

Коэффициент поглощения $Q = 1 - |r|^2$ будет не мал только в том случае, если расстояние между первой точкой отражения ξ_- и точкой резонанса будет сравнимо с длиной волны в плазме. В случае слабо-неоднородной ($\rho \gg 1$) плазмы это выполняется только в слабом магнитном поле ($u \ll 1$). В случае сильной неоднородности ($\rho \leq 1$) сильное поглощение может иметь место и при $u \sim 1$.

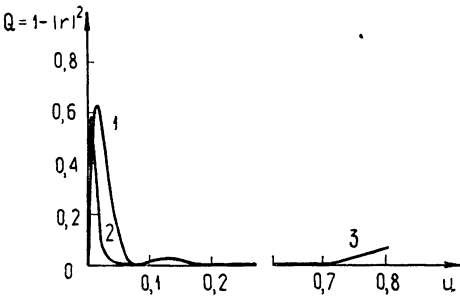


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения Q от параметра u в случае слабо-неоднородной плазмы.
1, 3 — $\rho = 10$; 2 — $\rho = 20$.

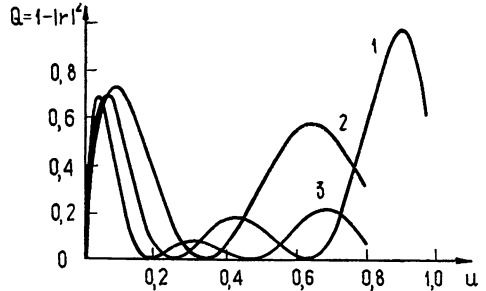


Рис. 2. Зависимость коэффициента поглощения Q от параметра u в промежуточном случае.
1 — $\rho = 4$; 2 — $\rho = 3$; 3 — $\rho = 5$.

В настоящей работе приводятся результаты численных расчетов коэффициента поглощения и распределение полей для линейного плазменного слоя для различных значений параметров задачи ρ и u .

Уравнение (2) решалось численно на ЭВМ двумя способами: интегрированием методом Рунге—Кутты и численным суммированием рядов для E_y по степеням ξ (оба способа дают совпадающие результаты). При численном интегрировании уравнения (2) функция $E_y(\xi)$ в области больших положительных значений $\xi \geq \xi_{\max} = 5 \div 10$ выбиралась в асимптотическом виде

$$E_{\xi} = (2\sqrt{\pi}\xi^{1/4})^{-1} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right).$$

Во втором случае функция $E_y(\xi)$ представлялась в виде рядов

$$E_y = A_1 E_y^{(1)}(\xi) + A_2 E_y^{(2)}(\xi), \quad (4)$$

где

$$E_y^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^{k+1}, \quad E_y^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k + \beta \ln \xi \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^{k+1}. \quad (5)$$

Коэффициенты C_k и b_k определяются рекуррентными соотношениями

$$C_k = \frac{1}{k(k+1)} (-\rho^2 \alpha C_{k-1} + \rho^2 C_{k-3} - 2\rho^2 u C_{k-2}) \quad (C_0 = -1),$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \rho^2 \alpha, \quad C_2 = \frac{1}{6} \left(2\rho^2 u - \frac{\rho^4 \alpha^2}{2} \right),$$

$$b_k = \frac{1}{k(k-1)} [-\rho^2 \alpha b_{k-1} + \rho^2 b_{k-3} - 2\rho^2 u b_{k-2} + (1-2k)\beta C_{k-1}],$$

$$b_0 = -1, \quad b_1 = -C_1, \quad \beta = -2C_1. \quad b_2 = 4C_1^2 + \rho^2 u.$$

Величина $\ln \xi$ при $|\xi| \ll 1$ в (5) заменялась на $\ln(\xi - i\delta)$, величина δ при расчетах выбиралась равной $\delta = 10^{-4}$. (Варьирование δ при численных расчетах не изменяло величины Q .)

Коэффициенты A_1, A_2, E_0 и r определяются из условий непрерывности E_y и dE_y/dx при $x=0$ и условия обращения поля E_y в нуль при $\xi \rightarrow \infty$. В наших расчетах последнее условие заменилось требованием обращения в нуль при $\xi = \xi_{\max} = 5 \div 10$. Варьирование величины ξ_{\max} в этих пределах не влияло в пределах точности вычислений (шесть-семь знаков после запятой) на распределение поля в резонансной области и величину коэффициента поглощения.

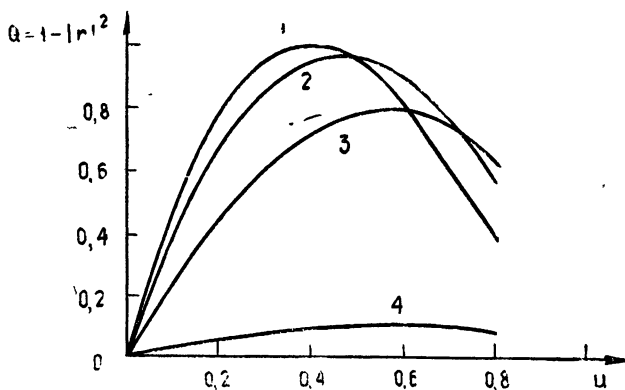


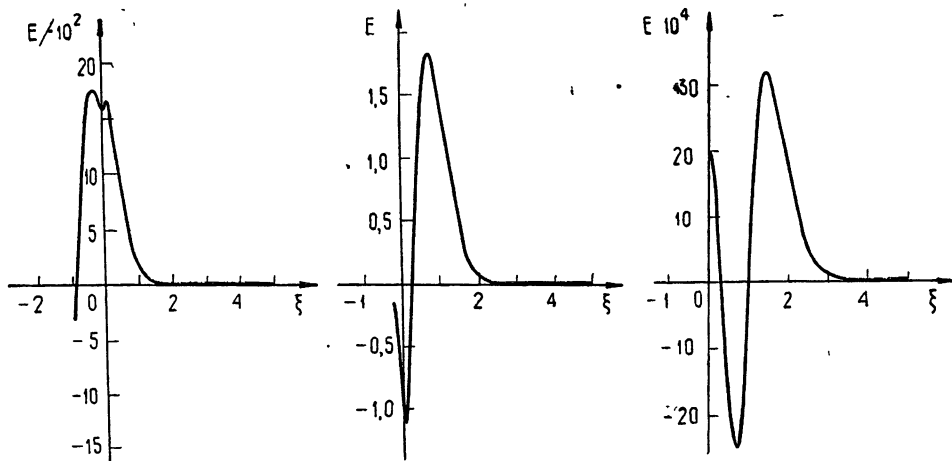
Рис. 3. Зависимость коэффициента поглощения Q от параметра u в случае сильнонеоднородной плазмы.
1— $\rho = 1$; 2— $\rho = 0,8$; 3— $\rho = 0,5$; 4— $\rho = 0,1$.

Графики коэффициентов поглощения в зависимости от величины u для различных значений параметра ρ и распределение поля (в произвольных единицах) в зависимости от переменной ξ показаны на рис. 1—7.

При малых значениях u величина Q в соответствии с [3] растет линейно при увеличении u . В этом случае точка резонанса и обе точки отражения лежат друг от друга на расстоянии, значительно меньшем длины волны. Величина Q при этом оказывается малой по сравнению с единицей, так как величина компоненты поля E_x в направлении неоднородности (3) пропорциональна малому параметру \sqrt{u} . Поэтому коэффициент отражения, пропорциональный работе поля в резонансной области $\overline{j_x E_x}$, оказывается пропорциональным u .

При дальнейшем увеличении параметра u расстояние между точкой

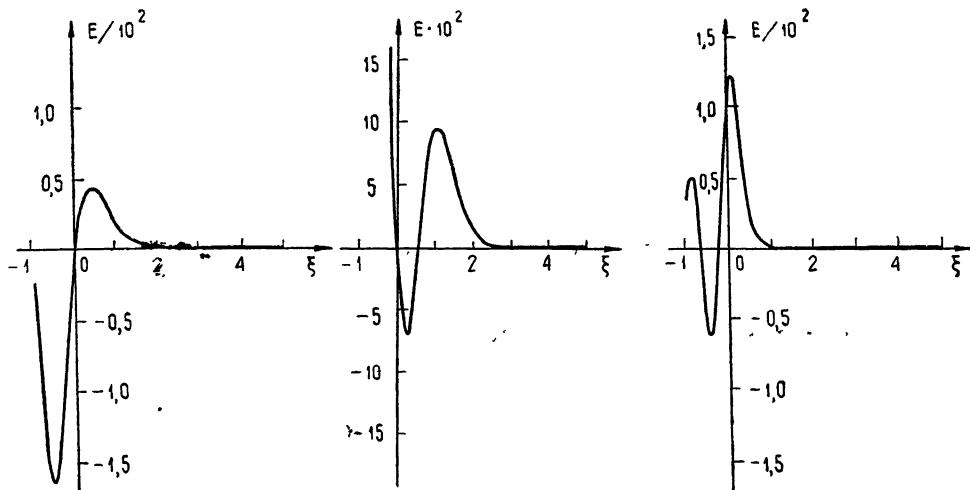
отражения ξ_- и точкой резонанса становится порядка длины волны в плазме и коэффициент поглощения становится сравнимым с единицей (см. рис. 1—3).



а) $u = 0,055$, б) $u = 0,425$, в) $u = 0,9$.

Рис. 4. Распределение электрического поля в плазме для $\rho = 4$ (случай пучности в резонансной точке).

Быстрое убывание величины Q с ростом u в случае слабонеоднородной плазмы (см. рис. 1) связано с тем, что при больших значениях u ширина области непрозрачности $\Delta\xi = \xi_0$ становится значительно больше длины волны, и в область резонанса проникает экспоненциально малая доля падающей энергии.



а) $u = 0,24$, б) $u = 0,63$.

Рис. 5. Распределение электрического поля в плазме для $\rho = 4$ (случай узла в резонансной точке).

Рис. 6. Распределение электрического поля в слабонеоднородной плазме ($\rho=10$) при $u = 0,033$.

Наличие этих максимумов при $\rho = 10$ на рис. 1 и ряда максимумов в промежуточном случае $\rho = 3, 4, 5$ (см. рис. 2), а также обращение величины Q в нуль при некоторых значениях u связаны с наличием отражений волны от второй точки поворота $\xi = \xi_+$ и образованием

в резонансной области стоячей волны. Именно величина Q достигает максимума при тех значениях u , когда поле E_y (и, следовательно, поле E_x) имеет в точке резонанса пучность (см. рис. 4, 6, 7), а случай обращения величины Q в нуль соответствует образованию в точке резонанса узла (см. рис. 5).

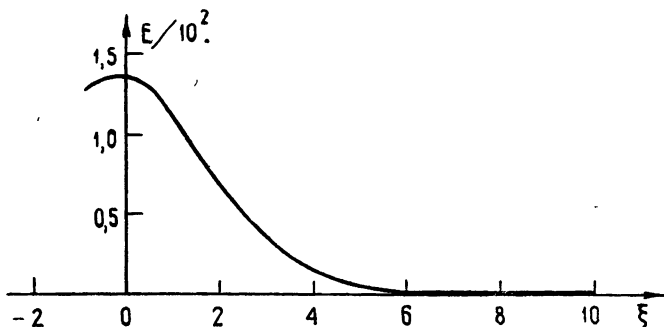


Рис. 7. Распределение электрического поля в сильнонеоднородной плазме ($\rho = 0,5$) для $u = 0,57$.

В случае сильнонеоднородной плазмы $\rho = 0,1$ (см. рис. 3) коэффициент поглощения мал по сравнению с единицей. Это связано с тем, что ширина Δx резонансной области, в которой поле E_x совершает работу, определяемая из условия $\Delta \xi \sim \frac{\nu}{\omega} (1+u)$, при $a \rightarrow 0$ ($\rho \ll 1$) становится очень малой ($\Delta x \sim a \frac{\nu}{\omega} (1+u)$), потому и сам коэффициент поглощения $Q \sim \rho$ значительно меньше единицы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М, Физматгиз, 1960.
- 2 Н. Г. Денисов, Радиотехника и электроника, 1, 732 (1956); 4, 388 (1959); ЖЭТФ, 34, 528 (1958).
- 3 А. Я. Омельченко, К. Н. Степанов, УФЖ, 13, 1522 (1968).
- 4 А. Я. Омельченко, К. Н. Степанов, УФЖ, 12, 1443 (1967).

Поступила в редакцию
20 сентября 1971 г

EXTRAORDINARY ELECTROMAGNETIC WAVE ABSORPTION IN THE LINEAR PLASMA LAYER IN THE HYBRID RESONANCE REGION

A. Ya. Omel'chenko, V. I. Panchenko, K. N. Stepanov

The results are given of the numerical calculations of the field distribution and the absorption coefficient at the normal incidence of the extraordinary wave on the linear plasma layer regarding the effect of the field „swelling“ in the hybrid resonance region.

УДК 621.372 821.1

ОБ ОТРАЖЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ НА ДВИЖУЩИЙСЯ ФРОНТ ИОНИЗАЦИИ*

В. И. Семенова

Рассмотрено наклонное падение монохроматических ТЕ- и ТМ-волн на резкую границу плазмы, образованной движущимся с постоянной скоростью источником ионизации. Получены и исследованы формулы для коэффициентов отражения и прохождения. Особенностью случая ТМ-волн является возбуждение в плазме за фронтом продольных колебаний при любой частоте падающей поперечной волны.

Вопрос о распространении монохроматических сигналов и импульсов при нормальном падении на резкую границу плазмы, образующейся при распространении ионизирующего излучения в неподвижном газе, рассматривался в работах [2-4]. Было показано [2], что, так как заряженные частицы на фронте ионизации имеют начальные скорости, определяемые только процессом ионизации и не зависящие от напряженности поля в данной точке в рассматриваемые моменты, диэлектрическая проницаемость не является исчерпывающей характеристикой плазмы за фронтом. В силу этого отражение электромагнитных волн от фронта ионизации имеет особенности по сравнению с отражением от движущихся диэлектриков и, в частности, от движущейся плазмы [5], когда скорость частиц на границе определяется напряженностью поля (см. также работу [6], где исследуется распространение электромагнитных волн в нейтральной плазме с плавным изменением концентрации заряженных частиц за фронтом ионизации).

В настоящей работе рассматривается наклонное падение монохроматических ТЕ- и ТМ-волн на резкую границу плазменного полупространства, возникающего при распространении ионизирующего излучения в нейтральном газе**. Показано, что случай ТЕ-волн (вектор электрического поля E перпендикулярен плоскости падения) принципиально не отличается от случая нормального падения [2]. При наклонном падении ТМ-волн (вектор E лежит в плоскости падения) в плазме за фронтом, наряду с поперечными, возбуждаются две продольные волны при любой частоте падающей поперечной волны.

1. Рассмотрим следующую задачу об отражении волн от фронта ионизации. Вдоль оси x декартовой системы координат с произвольной постоянной скоростью $-V_0\{-V_0, 0, 0\}$ движется бесконечно тонкий импульс ионизирующего излучения, под действием которого concentra-

* Работа доложена на V Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (г. Ленинград, 1970) [1].

** Наклонное падение ТЕ-волн на движущийся фронт ионизации рассматривалось также в докладе [7], содержание которого, как нам стало известно после написания статьи, опубликовано в [8]. Особое внимание в работе [8] уделено скорости фронта, равной скорости света.

ция заряженных частиц в неподвижном газе в каждой точке изменяется скачком и становится равной N_0 в момент прихода фронта излучения в данную точку. Движение ионов в дальнейшем не учитываем и считаем, что электроны образуются с нулевыми начальными скоростями, т. е. на резкой границе плазменного полупространства ($x \geq V_0 t$), лежащего за фронтом ионизации, их скорость удовлетворяет условию*

$$v^{(0)}|_{x=-v_0 t} = 0. \quad (1)$$

Здесь и ниже индексом (0) обозначены величины, относящиеся к лабораторной системе отсчета, где движется источник ионизации.

Со стороны $x = -\infty$ навстречу ионизирующему импульсу распространяется плоская монохроматическая волна с частотой $\omega_{\text{пад}}^{(0)}$, $\exp[i(\omega_{\text{пад}}^{(0)} t^{(0)} - k_{\text{пад}}^{(0)} r_{\text{пад}}^{(0)})]$, волновой вектор которой, $k_{\text{пад}}^{(0)} (k_{x_{\text{пад}}}^{(0)}, k_{y_{\text{пад}}}^{(0)}, 0)$, образует произвольный угол с направлением движения границы плазмы. Для простоты при последующих вычислениях будем полагать, что диэлектрическая проницаемость нейтрального газа вне плазмы близка к единице, так что $|k_{\text{пад}}^{(0)}| = \omega_{\text{пад}}^{(0)}/c$.

В зависимости от поляризации падающей плоской волны рассмотрим два случая: 1) вектор электрического поля $E_{\text{пад}}^{(0)}$ ($B_{\text{пад}}^{(0)} = \frac{c}{\omega_{\text{пад}}^{(0)}} [k_{\text{пад}}^{(0)} E_{\text{пад}}^{(0)}]$) перпендикулярен плоскости падения xu и 2) вектор $E_{\text{пад}}^{(0)}$ лежит в плоскости xu .

2. ТЕ-волна. В этом случае вектор $E_{\text{пад}}^{(0)}$ перпендикулярен плоскости падения, и, следовательно, в падающей волне отличны от нуля следующие компоненты поля: $E_{z_{\text{пад}}}^{(0)}$, $B_{x_{\text{пад}}}^{(0)}$, $B_{y_{\text{пад}}}^{(0)}$. При решении задачи об отражении перейдем в систему координат, движущуюся вместе с фронтом ионизации. В выбранной системе отсчета граница $x = 0$ области, занятой плазмой, неподвижна, а электроны имеют постоянную составляющую скорости $V_0 (V_0, 0, 0)$ в положительном направлении оси x . Поле падающей волны изменяется по гармоническому закону $\exp[i(\omega t - k_{\text{пад}} r)]$, ω и $k_{\text{пад}}$ — частота и волновой вектор в движущейся системе координат, выражающиеся через $\omega_{\text{пад}}^{(0)}$ и $k_{\text{пад}}^{(0)}$ в соответствии с известными формулами преобразования частот и волновых чисел при переходе от одной системы координат к другой [9]. Амплитуда поля падающей волны равна

$$E_{z_{\text{пад}}} = \sqrt{B_{y_{\text{пад}}}^2 + B_{x_{\text{пад}}}^2} = \frac{E_{z_{\text{пад}}}^{(0)} (1 - \beta \cos \theta_{\text{пад}}^{(0)})}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{V_0}{c} \right).$$

При определении полей в области, занятой плазмой, в движущейся системе координат будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

* Средняя направленная скорость образующихся при ионизации заряженных частиц в принципе может быть отличной от нуля. Мы полагаем ее равной нулю, так как существенным является лишь то обстоятельство, что заряженные частицы начинают движение со скоростями, не зависящими от поля в данной точке в момент ионизации.

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t},$$

где плотность тока равна

$$j_z = eNv_z. \quad (3)$$

Здесь e — заряд, N — концентрация электронов в движущейся системе координат, одинаковая во всех точках плазмы за фронтом, v_z — скорость электронов под действием поля.

Уравнение движения электронов в общем случае имеет вид [9]

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\frac{e}{m_0} \right) \left\{ E + \frac{1}{c} [VB] - \frac{V}{c} \left(\frac{V}{c} E \right) \right\}, \quad (4)$$

m_0 — масса покоя, V — скорость электрона, которая в нашем случае может быть представлена как

$$V = V_0 + v_z, \quad (5)$$

где V_0 — скорость равномерного движения в направлении оси x , v_z — скорость вынужденного движения, связанного с воздействием ТЕ-волны на заряженные частицы. Исходя из (4) и полагая $v_z \ll V_0$, можем записать

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{e}{m} (E_z + \beta B_y), \quad (6)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Для монохроматических полей $\exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)]$ вместо (2) и (6) получаем следующую систему уравнений:

$$\left(k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = i \frac{4\pi}{c^2} eNv_z, \quad (7)$$

$$(\omega - V_0 k_x) E_z = i \omega \left(\frac{e}{m} \right)^{-1} (\omega - V_0 k_x) v_z,$$

которая приводит к дисперсионному уравнению

$$(\omega - V_0 k_x) \left(k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ — ленгмюровская частота электронов, совпадающая, очевидно, с $\omega_p^{(0)} = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m_0}$ — ленгмюровской частотой в лабораторной системе отсчета.

Как следует из (8), в плазме за фронтом ионизации могут существовать две «обычные» волны, удовлетворяющие условию

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon, \quad (9)$$

где $\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, и, аналогично случаю нормального падения [2], третья волна, у которой

$$k_{x_3} = \frac{\omega}{V_0}. \quad (10)$$

Существование в плазме за фронтом волны с волновым вектором $\mathbf{k}_3 \left\{ k_{x_3} = \frac{\omega}{V_0}, k_{y_3}, 0 \right\}$ в движущейся системе координат является особенностью рассматриваемой задачи, связанной с тем, что скорость заряженных частиц в момент образования на фронте не зависит от поля [2].

Итак, в системе отсчета, где фронт ионизации покоится, а плазма как целое движется со скоростью V_0 , электрическое поле ТЕ-волны в плазме может быть представлено в виде суммы трех волн:

$$E_{z_{\text{прох}}} = E_1 \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)] + E_2 \exp [i(\omega t - k_x x - k_y y)] + E_3 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\omega}{V_0} x - k_y y \right) \right], \quad (11)$$

амплитуды и компоненты волновых векторов которых, как и у отраженной волны ($\exp [i(\omega t - k_{x_{\text{отр}}} x - k_{y_{\text{отр}}} y)]$), определяются по заданным амплитуде, частоте и волновому вектору падающей волны из граничных условий. Это, во-первых, непрерывность тангенциальных компонент электромагнитного поля на границе раздела двух сред, неподвижной в рассматриваемой системе отсчета, и, во-вторых, условие обращения в нуль вынужденной скорости электронов на фронте излучения (1):

$$v_z |_{r=0} = 0. \quad (12)$$

Из условия непрерывности E_y и B_z на границе $x = 0$ и соответствующих формул преобразования ω и \mathbf{k} при переходе из одной системы координат в другую следует, что частота и направление волнового вектора при отражении от плазмы, образующейся под воздействием ионизирующего излучения, изменяются так же, как и при отражении от любых других движущихся границ. Это справедливо, очевидно, и в случае отражения ТМ-волн от фронта ионизации, о котором пойдет речь ниже.

Определим амплитуды полей прошедших и отраженной волн, воспользовавшись (12) и условиями на границе:

$$\begin{aligned} E_{z_{\text{пад}}} + E_{z_{\text{отр}}} &= E_1 + E_3 = E_{z_{\text{прох}}}, \\ B_{y_{\text{пад}}} + B_{y_{\text{отр}}} &= B_y + B_{y_3}. \end{aligned} \quad (13)$$

(Считаем, что в плазме на бесконечности источников нет, поэтому исключим из рассмотрения волну, распространяющуюся со стороны $x = \infty$, полагая $E_2 = 0$.)

Согласно (7) и (11) скорость электронов в плазме равна

$$v_z = i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega} \left[E_1 \exp \left(-i \frac{\omega}{c} \sqrt{u} x \right) + \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}}{\beta^2 (1 - \epsilon)} E_3 \exp \left(-i \frac{\omega}{V_0} x \right) \right] \times \exp [i(\omega t - k_y^{(0)} y)], \quad (14)$$

$u = \epsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}}$. Удовлетворяя (12), получаем отсюда соотношение между E_1 и E_3 в виде $E_3 = \frac{\beta^2 (1 - \epsilon)}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}} E_1$. Зная, далее, связь между B_y и E_z в вакууме и в плазме за фронтом (см. (2)), находим в движущейся системе координат

$$E_1 = \frac{2(1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}})}{(1 + \sqrt{u})(1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}) + \beta(1 - \epsilon)(1 + \beta)} E_{\text{пад}},$$

$$E_3 = \frac{2\beta^2(1-\varepsilon)}{(1+\sqrt{u})(1-\beta^2\cos^2\theta_{\text{пад}}) + \beta(1-\varepsilon)(1+\beta)} E_{\text{пад}},$$

$$B_{x_{\text{прох}}} = \frac{k_y^{(0)}}{\omega/c} E_{z_{\text{прох}}}, \quad B_{y_{\text{прох}}} = \left[B_1 \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\sqrt{u}x\right) + B_3 \exp\left(-i\frac{\omega}{V_0}x\right) \right] \exp[i(\omega t - k_y^{(0)}y)],$$

$$B_3 = -\frac{E_3}{\beta}, \quad B_1 = +\sqrt{u}E_1,$$

$$v_z = 2i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega} \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}}{(1 + \sqrt{u})(1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}) + \beta(1 - \varepsilon)(1 + \beta)} \times \left[\exp\left(-i\frac{\omega}{c}\sqrt{u}x\right) - \exp\left(-i\frac{\omega}{V_0}x\right) \right] \exp[i(\omega t - k_y^{(0)}y)] E_{\text{пад}}.$$

В лабораторной системе отсчета, где граница плазмы движется со скоростью ионизирующего излучения $-V_0$, а электроны плазмы совершают лишь вынужденное движение под действием поля, у электрического поля есть лишь одна компонента $E_1^{(0)}$, изменяющаяся по закону $\exp[i(\omega_{\text{прох}}^{(0)}t - k_{\text{прох},x}^{(0)}x - k_{\text{прох},y}^{(0)}y)]$, согласно (15) и формулам преобразования полей при переходе из одной системы координат в другую. Очевидно,

$$\omega_{\text{прох}}^{(0)} = \omega \frac{1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega_{\text{пад}}^{(0)} \frac{(1 + \beta \cos \theta_{\text{пад}}^{(0)}) (1 - \beta \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}}})}{(1 - \beta^2)},$$

$\theta_{\text{пад}}$ — угол падения в движущейся системе координат, диэлектрическая проницаемость ε определяется частотой ω в движущейся системе координат (см. выше) и равна, следовательно, $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^{(0)2} (1 - \beta^2)}{\omega_{\text{пад}}^{(0)2} (1 + \beta \cos^2 \theta_{\text{пад}}^{(0)})^2}$.

Скорость электронов в лабораторной системе

$$v_z^{(0)} \sim \exp[i(\omega_{\text{прох}}^{(0)}t - k_{x_{\text{прох}}}^{(0)}x - k_{y_{\text{прох}}}^{(0)}y)] - \exp\{-i[\omega_{\text{пад}}^{(0)}(1 + \beta)x + k_y^{(0)}y]\},$$

т. е. электроны имеют постоянную составляющую скорости, не зависящую от времени и определяемую фазой электромагнитного поля в момент рождения электрона в той точке, где электрон образовался. В результате электроны совершают равномерное движение в направлении оси $z^{(0)}$ со скоростями, меняющимися от точки к точке по периодическому закону $\exp\{-i[\omega_{\text{пад}}^{(0)}(1 + \beta)x + k_y^{(0)}y]\}$ в зависимости от $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$. В соответствии с (16) компоненты $B_{x_{\text{прох}}}^{(0)}$ и $B_{y_{\text{прох}}}^{(0)}$ имеют по две составляющие, которые можно определить, пользуясь (15).

Амплитуда отраженной волны равна

$$E_{z_{\text{отр}}} = E_{z_{\text{пад}}} \frac{\cos \theta_{\text{пад}} [1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}})] - \beta(1 - \varepsilon) - (1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}}}}{\cos \theta_{\text{пад}} [1 - \beta^2(\varepsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}})] + \beta(1 - \varepsilon) + (1 - \beta^2 \cos^2 \theta_{\text{пад}}) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_{\text{пад}}}}.$$

Зная связь между $E_{z_{\text{пад}}}$ и $E_{z_{\text{пад}}}^{(0)}$ и аналогичное соотношение для $E_{z_{\text{отр}}}$ и $E_{z_{\text{отр}}}^{(0)}$, с помощью (17) легко найти коэффициент отражения ТЕ-волны по мощности в лабораторной системе, равный

$$R^{(0)} = \left| \frac{E_{z_{\text{отр}}}^{(0)}}{E_{z_{\text{пад}}}^{(0)}} \right|^2 = \left| \frac{E_{z_{\text{отр}}}}{E_{z_{\text{пад}}}} \right|^2 \frac{(1 + \beta \cos \theta_{\text{пад}})^2}{(1 - \beta \cos \theta_{\text{пад}})^2}. \quad (18)$$

Заметим, что формулы (15)—(18) при $\theta_{\text{пад}}^{(0)} = 0$ переходят в известные соотношения [2] для случая нормального падения.

Полученные результаты содержат те же особенности, которые и при нормальном падении отличают задачу об отражении от фронта ионизации от случая отражения от движущихся диэлектриков.

Во-первых, электроны плазмы совершают равномерное движение в направлении, перпендикулярном скорости фронта, наряду с колебаниями. Во-вторых, не происходит усиления сигнала при отражении: можно сказать, что коэффициент отражения (18) максимален при условии $\epsilon \ll \sin \theta_{\text{пад}}$ и равен $R_{\text{max}}^{(0)} = 1$ (напомним, что в проведенном неравенстве все величины взяты в движущейся системе координат и через параметры в лабораторной системе могут быть выражены с помощью соответствующих формул).

3. ТМ-волна. Рассмотрим случай, когда в падающей волне отличны от нуля следующие компоненты поля: $E_{x_{\text{пад}}}^{(0)}$, $E_{y_{\text{пад}}}^{(0)}$, $B_{z_{\text{пад}}}^{(0)}$, т. е. вектор $E_{\text{пад}}^{(0)}$ лежит в плоскости падения и имеет проекцию на направление движения фронта ионизации. В этом случае концентрация заряженных частиц за фронтом не остается постоянной и систему уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y, \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (19)$$

в области $x \geq 0$ (движущаяся вместе с фронтом система координат) нужно решать совместно с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

и уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} &= (1 - \beta^2) \frac{e}{m} E_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{e}{m} (E_y - \beta B_z), \end{aligned} \quad (21)$$

следующими из (4).

В (20) n — концентрация электронов в плазме, которую можно представить в виде суммы $n = N + \tilde{n}$, где N — постоянная составляющая, определяемая интенсивностью источника ионизации, и \tilde{n} — пере-

менная, появляющаяся при наличии продольной компоненты электрического поля ($\text{div } \mathbf{E} \neq 0$). В дальнейшем полагаем $\tilde{n} \ll N$.

В уравнениях (19) j_x, j_y — компоненты плотности тока, с учетом $\tilde{n} \ll N$ и $v_x, v_y \ll V_0$, равные соответственно $j_x = e(Nv_x + \tilde{n}V_0)$, $j_y = eNv_y$.

Из системы уравнений (19) — (21) для монохроматических процессов $\exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)]$ получаем дисперсионное уравнение

$$\left(k_x^2 + k_y^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\right) (\omega - V_0 k_x) [(\omega - V_0 k_x)^2 - \omega_p^2 (1 - \beta^2)] = 0, \quad (22)$$

которое по сравнению с (8) имеет дополнительную ветвь $(\omega - V_0 k_x)^2 - \omega_p^2 (1 - \beta^2) = 0$. Эта ветвь соответствует двум продольным волнам, у которых

$$k_{x_{4,5}} = \frac{\omega \mp \omega_p \sqrt{1 - \beta^2}}{V_0}, \quad (23)$$

а k_y — компоненты волновых векторов в соответствии с условием непрерывности E_y и B_z на границе совпадают с $k_{y_{\text{пад}}}$ и не меняются при переходе из лабораторной системы координат в движущуюся вместе с фронтом ионизации.

В лабораторной системе отсчета эти волны характеризуются следующими частотами и волновыми числами: $\omega_{4,5}^{(0)} = \pm \omega_p$,

$k_{x_{4,5}} = \frac{\omega_{\text{пад}}^{(0)} (1 + \beta \cos \theta_{\text{пад}}) \mp \omega_p}{V_0}$, групповые скорости их равны нулю, и, как

показывает расчет, они имеют только E -компоненту поля, а вектор магнитной индукции равен нулю, т. е. в холодной плазме за фронтом ($T = 0$) при падении ТМ-волны возбуждаются продольные колебания с $v_{\text{гр}} = 0$. Заметим, что возбуждение в плазме, образованной движущимся источником ионизации продольных волн с $\omega^{(0)} = \pm \omega_p$ при любой частоте $\omega_{\text{пад}}^{(0)}$ падающей на границу поперечной волны, поляризованной в плоскости падения, является особенностью рассматриваемой задачи и не характерно, например, для случая движущейся плазмы, на резкую границу которой также под углом падает ТМ-волна [10].

Для определения амплитуд продольных и поперечных прошедших волн, а также коэффициента отражения используем условие непрерывности тангенциальных компонент поля при $x = 0$, условие обращения в нуль скорости рождающихся частиц в начальный момент, т. е. $v_x|_{x=0} = 0$, $v_y|_{x=0} = 0$ на неподвижной границе в движущейся вместе с фронтом системе координат, и, кроме того, естественное требование $\tilde{n}|_{x=0} = 0$.

В результате получаем

$$R = \frac{B_{z_{\text{отр}}}^{(0)}}{B_{z_{\text{пад}}}^{(0)}} = \frac{1 + \beta \cos \theta_{\text{пад}}}{1 - \beta \cos \theta_{\text{пад}}} \frac{A - B \cos \theta_{\text{пад}}}{A + B \cos \theta_{\text{пад}}},$$

$$T_1 = \frac{B_{z_{\text{прох}_1}}^{(0)}}{B_{z_{\text{пад}}}^{(0)}} = (C - \beta) D \Delta_1, \quad T_3 = \frac{B_{z_{\text{прох}_3}}^{(0)}}{B_{z_{\text{пад}}}^{(0)}} = \frac{1 - \beta^2}{\beta} D \Delta_3,$$

$$T_{4,5} = \frac{E_{y_{\text{прох}_{4,5}}}^{(0)}}{B_{z_{\text{пад}}}^{(0)}} = (1 - \beta^2) D \Delta_{4,5},$$

$$C = 1 - \beta(1 - \gamma^2 - \beta \sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2}) K^{-1},$$

$$K = \sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2} (1 - \beta \sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2}) - \gamma \beta^2,$$

$$D = \frac{2 \cos \theta_{\text{пад}}}{1 - \beta \cos \theta_{\text{пад}}} \frac{1}{A + B \cos \theta_{\text{пад}}}, \quad (24)$$

$$A = \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta K, \quad B = \frac{\Delta_3}{\beta} + \beta(\Delta_4 + \Delta_5) + \Delta(1 - \gamma^2 - \beta \sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2}),$$

$$\Delta_3 = -\gamma \left\{ \frac{\sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2} - \beta}{\beta \sin \theta_{\text{пад}}} \left[\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1 - \gamma^2 - \beta^2}{\beta^2 \sin^2 \theta_{\text{пад}}} \right] + \sin \theta_{\text{пад}} \sqrt{1 - \beta^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{(1 + \gamma^2) \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2 \sin^2 \theta_{\text{пад}}} \right] + \frac{\gamma^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{\sin \theta_{\text{пад}}} \right\},$$

$$\Delta = -\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2} \frac{1}{\gamma \sin \theta_{\text{пад}}} \left[\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1 - \gamma^2 - \beta^2}{\beta^2 \sin^2 \theta_{\text{пад}}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta_{\text{пад}}}{\gamma} \left[1 + \frac{(1 + \gamma^2) \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2 \sin^2 \theta_{\text{пад}}} \right] + \frac{\gamma}{\sin \theta_{\text{пад}}} \right\},$$

$$2K\Delta_{4,5} = -\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \left\{ \pm \sin \theta_{\text{пад}} \left[\frac{(1 + \gamma^2) \sqrt{1 - \beta^2} \pm \gamma(2 - \beta^2)}{\beta^2 \sin^2 \theta_{\text{пад}}} + 1 \right] + \right. \\ \left. + \gamma \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \pm \gamma}{\sin^2 \theta_{\text{пад}}} \right\} \pm \frac{\sin \theta_{\text{пад}}}{\beta} \left\{ (\sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2} - \beta) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(1 + \gamma^2) \sqrt{1 - \beta^2} \pm \gamma(2 - \beta^2)}{\beta^2 \sin^2 \theta_{\text{пад}}} + 1 \right] \mp \beta \gamma \sqrt{1 - \beta^2} \right\} + \\ + \gamma \left[\frac{\sqrt{\cos^2 \theta_{\text{пад}} - \gamma^2} - \beta}{\beta \sin \theta_{\text{пад}}} (\sqrt{1 - \beta^2} \pm \gamma) + \sin \theta_{\text{пад}} \sqrt{1 - \beta^2} \right],$$

$\gamma = \frac{\omega_p}{\omega}$, $\theta_{\text{пад}}$ через $\theta_{\text{пад}}^{(0)}$ выражается в соответствии с [9].

Формулы (24) определяют коэффициенты отражения и прохождения в лабораторной системе координат; очевидно, $|R|^2 = \left| \frac{B_{\text{отр}}^{(0)}}{B_{\text{пад}}^{(0)}} \right|^2$

характеризует в случае ТМ-волн отражаемую мощность по отношению к падающей.

В предельном случае $\epsilon \rightarrow -\infty$ волны с индексами 1, 4, 5 в плазме затухают, отлична от нуля лишь компонента магнитного поля, связанная с равномерным движением электронов, коэффициент отражения R стремится к единице.

При касательном падении ($\theta_{\text{пад}}^{(0)} \rightarrow \pi/2$, $\cos \theta_{\text{пад}} \rightarrow \beta$) потоки энергии отраженной и проходящих волн остаются конечными.

Для иллюстрации на рис. 1 приведены графики изменения R и $T_{1,3,4,5}$ в зависимости от угла $\theta_{\text{пад}}^{(0)}$ при различных значениях параметров β и γ . Как видно из рис. 1а, угол Брюстера, при котором

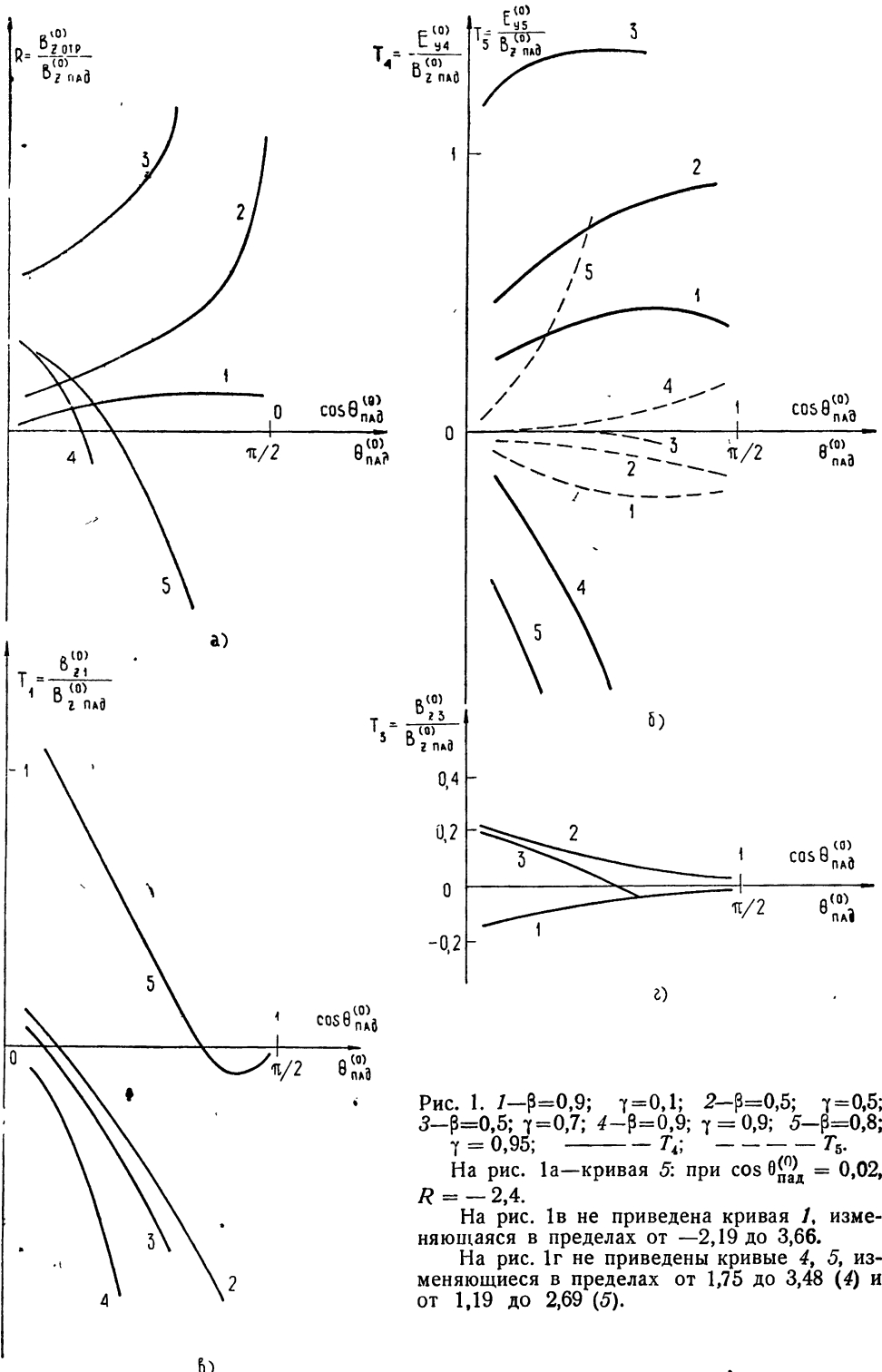


Рис. 1. 1— $\beta=0,9$; $\gamma=0,1$; 2— $\beta=0,5$; $\gamma=0,5$; 3— $\beta=0,5$; $\gamma=0,7$; 4— $\beta=0,9$; $\gamma=0,9$; 5— $\beta=0,8$; $\gamma=0,95$; ———— T_4 ; - - - - T_5 .

На рис. 1а—кривая 5: при $\cos \theta_{\text{пад}}^{(0)} = 0,02$, $R = -2,4$.

На рис. 1в не приведена кривая 1, изменяющаяся в пределах от $-2,19$ до $3,66$.

На рис. 1г не приведены кривые 4, 5, изменяющиеся в пределах от $1,75$ до $3,48$ (4) и от $1,19$ до $2,69$ (5).

TM-волна не отражается от границы, зависит от параметров, и в ряде случаев отражение происходит всегда (R в нуль не обращается).

4. В заключение следует отметить, что полученные результаты содержат те же особенности, которые и при нормальном падении [2, 4] отличают задачу об отражении от фронта ионизации: электроны плазмы наряду с колебаниями совершают равномерное движение со скоростями, изменяющимися от точки к точке по периодическому закону в зависимости от x и y . На сообщение электронам постоянной составляющей скорости расходуется часть энергии падающих волн, поэтому отраженная энергия меньше падающей, даже при $\epsilon < \sin \theta$, когда волны 1, 4, 5 в плазме затухают.

Действительно, энергия волнового пакета определяется квадратом амплитуды поля и длительностью импульса, имеющей порядок ширины спектра и изменяющейся в нашем случае обратно пропорционально частоте [11]. Так как частота отраженной волны больше частоты падающей, то, в соответствии с формулами (18) и (24), энергия пакета при отражении от фронта ионизации уменьшается, хотя в случае TE-волн $R_{\max}^{(0)} = 1$, а для TM-волн коэффициент отражения может превышать единицу при некоторых значениях параметров.

Автор выражает благодарность А. А. Андронову, В. В. Железнякову, Е. В. Суворову и Ю. В. Чугунову за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Семенова, Тезисы докладов 5-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, 1970
2. В. И. Семенова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1077 (1967).
3. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1376 (1970).
4. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 5, 686 (1971)
5. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, № 4, 491 (1959).
6. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, № 1, 226 (1961)
7. В. В. Борисов, Тезисы докладов 5-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, 1970
8. В. В. Борисов, Вестник ЛГУ, вып. 2, № 10, 46 (1971).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960, § 17.
10. С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 4, 571 (1962).
11. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 июля 1971 г.

REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES AT THE OBLIQUE INCIDENCE ON THE MOVING FRONT OF IONIZATION

V. I. Semenova

The oblique incidence of monochromatic TE-and TM-waves on the sharp plasma boundary formed by the ionization source moving with a constant velocity is considered. Formula on the reflection and transmission factors are obtained and investigated. The peculiarity of TE-waves is the excitation in plasma outside the front of the longitudinal oscillations at any frequency of the incident transverse wave.

УДК 533.9.01

К ЭФФЕКТУ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ ПЛАЗМЫ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л. И. Кац, В. П. Терцова, Д. А. Шехтер, Л. А. Шехтер

На основании полученного общего выражения для функции распределения носителей в однородной среде, на которую действуют гармонически меняющиеся во времени ортогональные электрическое и магнитное поля разных частот, проводится расчет эффекта магнитосопротивления.

Экспериментальная проверка эффекта проводилась путем измерения сопротивления образца n -InSb, расположенного в пучности магнитного поля прямоугольного волновода. Отмечается удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных. Обсуждается возможность применения эффекта магнитосопротивления в переменном магнитном поле для создания безынерционных датчиков мощности в сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн.

Разнообразие физических эффектов, сопутствующих взаимодействию плазмopodobной среды с электромагнитным полем, создает большие возможности как для теоретических, так и для экспериментальных исследований. Работы последних лет показывают плодотворность общего подхода к явлениям, протекающим в газоразрядной плазме и плазме твердого тела. В этом плане представляется интересным рассмотреть известный в физике полупроводников эффект магнитосопротивления, так как последний является основным при создании ряда измерительных устройств и, в частности, измерителей сверхвысокочастотной мощности [1]. Наиболее общее рассмотрение этого явления должно проводиться при учете переменных электрических и магнитных полей разной частоты, действующих на плазму или электронный газ в зоне проводимости полупроводника. Попытки такого рассмотрения предприняты в работах [2, 3].

В первой из них решалось уравнение для средней скорости электронов, во второй рассмотрено велось на основе уравнения Больцмана, однако полученное решение не является достаточно общим и связано с дополнительными ограничениями типа малости амплитуд переменных полей.

В данной работе проводится расчет эффекта магнитосопротивления в переменных магнитных полях, а также предпринята попытка экспериментального исследования подобного эффекта для создания безынерционных датчиков мощности в диапазоне СВЧ.

1. РАСЧЕТ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как известно, эффект магнитосопротивления состоит в изменении проводимости среды во внешнем магнитном поле. При этом измеряемая на опыте эффективная проводимость σ_B вдоль внешнего электрического поля (направление Ox) оказывается равной

$$\sigma_B = \rho_B^{-1} = \sigma_{xx} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}}, \quad (1)$$

σ_{ij} — компоненты тензора проводимости магнитоактивной среды. Соотношение (1) справедливо и для случая, когда электронный газ (плазма или полупроводник в зоне проводимости) находится во внешнем однородном электрическом поле $E = E_0 \cos \omega t$, параллельном плоскости $z = 0$, и в магнитном поле $H = H_0 + H_1 \cos \Omega t$, направленном по оси Oz . Вычисление σ_{ij} проведем на основе кинетического уравнения Больцмана, которое в отличие от [3] позволяет учесть различные механизмы взаимодействия носителей. Указанное обстоятельство особенно существенно в случае плазмы твердого тела. Кроме того, возможные отклонения закона дисперсии энергии квазичастиц твердого тела от параболического типа также могут быть учтены в данном подходе.

Кинетическое уравнение в однородной среде, линеаризованное по полю E , в приближении времени релаксации имеет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + (\omega_0 + \omega_1 \cos \Omega t) \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -\nu f_1 + \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{v} V E \cos \omega t. \quad (2)$$

Здесь f_0 — равновесная функция распределения, f_1 — линейная по полю E поправка к равновесной функции, $\omega_0 = \frac{eH_0}{mc}$ и $\omega_1 = \frac{eH_1}{mc}$ — циклотронные частоты электронов, соответствующие постоянному и переменному магнитным полям, $\nu(\epsilon) = \tau^{-1}$ — эффективная частота соударений, m — эффективная масса электронов, φ — азимутальный угол, введенный в пространстве скоростей сферической системы координат;

$$v_x = v \sin \theta \cos \varphi, \quad v_y = v \sin \theta \sin \varphi, \quad v_z = v \cos \theta.$$

Решая уравнение (2) методом характеристик, получим

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega_0 + \omega_1 \cos \Omega t}, \quad (3)$$

откуда

$$\varphi = \varphi_0 + g(t), \quad (4)$$

где $g(t) = \omega_0 t + \Delta \sin \Omega t$, $\Delta = \frac{\omega_1}{\Omega}$, φ_0 — интеграл уравнения характеристик (3).

Выражение (4) позволяет получить общее решение кинетического уравнения для рассматриваемой задачи:

$$f_1(t, \varphi) = e^{-\nu t} \left\{ C(\varphi_0) + \int_0^t \frac{e}{m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{v} \right) \cos \omega t' e^{-\nu t'} (V(\varphi') E) dt' \right\}. \quad (5)$$

Здесь $C(\varphi_0)$ — произвольная функция, вид которой определяется начальными условиями. Действительно, при $t = 0$

$$f_1(0, \varphi) = C(\varphi_0) = 0.$$

После несложных преобразований получим

$$f_1(t, V) = e^{-\nu t} \{ v_x [-\sin g \Psi(t) + \cos g \chi(t)] + v_y [\cos g \Psi(t) + \sin g \chi(t)] \}, \quad (6)$$

где

$$\Psi(t) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{v} \right) \int_0^t e^{vt'} \cos \omega t' [a_y \cos g(t') - a_x \sin g(t')] dt',$$

$$\chi(t) = \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{v} \right) \int_0^t e^{vt'} \cos \omega t' [a_y \sin g(t') + a_x \cos g(t')] dt',$$

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Вычисление приведенных интегралов приводит к следующему выражению для f_1 :

$$f_1(t, V) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{1}{v} \right) \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} J_n(\Delta) J_m(\Delta) \{ v_x [a_x \xi_{mn}(t) + a_y \eta_{mn}(t)] + v_y [-a_x \eta_{mn}(t) + a_y \xi_{mn}(t)] \}, \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\xi_{mn}(t) = \cos(\omega_0 + n\Omega)t \varphi_m(t) + \sin(\omega_0 + n\Omega)t x_m(t),$$

$$\eta_{mn}(t) = -\sin(\omega_0 + n\Omega)t \varphi_m(t) + \cos(\omega_0 + n\Omega)t x_m(t),$$

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{(\omega + \omega_0 + m\Omega)^2 + v^2} [v \cos(\omega + \omega_0 + m\Omega)t + (\omega + \omega_0 + m\Omega) \sin(\omega + \omega_0 + m\Omega)t] +$$

$$+ \frac{1}{(\omega - \omega_0 - m\Omega)^2 + v^2} [v \cos(\omega - \omega_0 - m\Omega)t + (\omega - \omega_0 - m\Omega) \times \sin(\omega - \omega_0 - m\Omega)t],$$

$$x_m(t) = \frac{1}{(\omega + \omega_0 + m\Omega)^2 + v^2} [v \sin(\omega + \omega_0 + m\Omega)t -$$

$$-(\omega + \omega_0 + m\Omega) \cos(\omega + \omega_0 + m\Omega)t] - \frac{1}{(\omega - \omega_0 - m\Omega)^2 + v^2} \times$$

$$\times [v \sin(\omega - \omega_0 - m\Omega)t - (\omega - \omega_0 - m\Omega) \cos(\omega - \omega_0 - m\Omega)t],$$

$J_n(\Delta)$ — функция Бесселя n -го порядка.

Для нахождения компонент тензора проводимости путем обычной процедуры определяем плотность тока, а из нее (см. [3]) проводимость; усредняя тензор проводимости по времени с помощью операции

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dots dt, \quad \text{получим в случае невырожденного электронного}$$

газа

$$\text{Re } \sigma_{xx} = \frac{2Ne^2}{3\sqrt{\pi} m v_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \int_0^{\infty} x^{(n+3)/2} e^{-x} (Q^{-1} + R^{-1}) dx,$$

$$\operatorname{Im} \sigma_{xx} = \frac{2Ne^2}{3\sqrt{\pi} m\nu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} \left(\frac{\omega + \omega_0 + l\Omega}{\nu_0} Q^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{\omega - \omega_0 - l\Omega}{\nu_0} R^{-1} \right) dx, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \sigma_{xy} = \frac{2Ne^2}{3\sqrt{\pi} m\nu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} \left(\frac{\omega - \omega_0 - l\Omega}{\nu_0} R^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{\omega + \omega_0 + l\Omega}{\nu_0} Q^{-1} \right) dx,$$

$$\operatorname{Im} \sigma_{xy} = \frac{2Ne^2}{3\sqrt{\pi} m\nu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\Delta) \int_0^{\infty} x^{(n+3)/2} e^{-x} (Q^{-1} - R^{-1}) dx.$$

Здесь введены обозначения

$$Q = \left(\frac{\omega + \omega_0 + l\Omega}{\nu_0} \right)^2 + x^n, \quad R = \left(\frac{\omega - \omega_0 - l\Omega}{\nu_0} \right)^2 + x^n, \\ \nu = \nu_0 x^{n/2}, \quad x = \frac{m\nu^2}{2kT}.$$

Выражения (8) при $n = 0$ переходят в известные [1], полученные для σ_{ij} из уравнения движения электронов для средней скорости. Принятая нами степенная зависимость времени релаксации от энергии носителей предполагает преобладание одного выделенного механизма рассеяния носителей. Так, например, в случае движения носителей в твердом теле $n = 1$ соответствует рассеянию на акустических колебаниях, $n = -1$ — на оптических колебаниях, $n = 0$ — на нейтральных примесях [4] и т. д. Таким образом, формулы (8) позволяют учесть распределение носителей по скоростям и различные механизмы рассеяния. Для конкретных значений n вычисление компонент тензора проводимости (8) сводится к нахождению значений специальных функций (типа $\Gamma(x, y)$ — неполная гамма-функция и $Ei(x)$ — интегральная показательная функция), что позволяет довести расчет до численных результатов. Расчет, проведенный для значений $n = 0, -1, +1$ в работе [5], показывает, что в зависимости от принятой величины n значения величины магнитосопротивления (магнитопроводимости) изменяются в пределах нескольких порядков.

Для иллюстрации полученных соотношений нами проведен расчет σ_B при $n = 0$ и $\omega = 0$ для антимоноида индия со следующими параметрами: $N = 1,1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$; $\mu = 5,61 \cdot 10^5 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ и $\rho = 0,11 \text{ ом} \cdot \text{см}$. Результаты для разных значений частот переменного магнитного поля Ω представлены на рис. 1. Кривые 1, 2 и 3 вычислены для частот $f = \Omega/2\pi$, равных соответственно 3; 37 и 150 Гц. Расчет проводился с учетом 15 членов бесконечной суммы (8). Максимальная погрешность, обусловленная отброшенными членами суммы, не превосходит 0,2%. Для высокочастотных магнитных полей относительно малой величины параметр $\Delta < 1$, что позволяет в бесконечной сумме выражения (8) учитывать только члены с $l = 0, \pm 1$. Результаты расчета для малых Δ при $f = 3 \text{ Гц}$, $\omega = 0$, $n = 0$ и разных значений магнитного поля представлены на рис. 2.

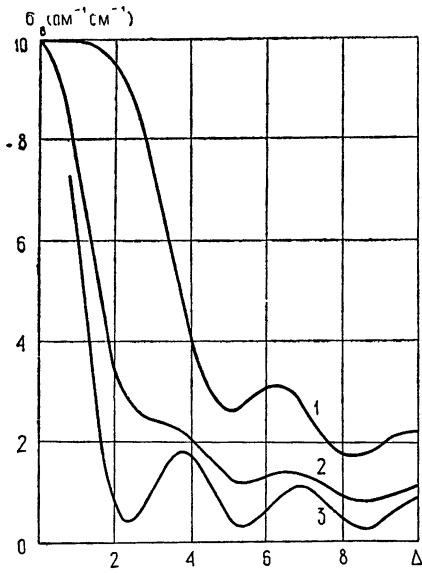


Рис. 1. Расчетная зависимость эффекта магнитосопротивления в переменных магнитных полях.

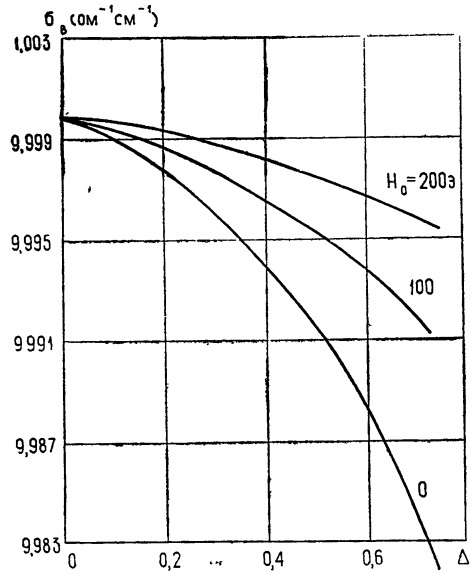


Рис. 2. Расчетная зависимость эффекта магнитосопротивления в переменных магнитных полях при малых значениях параметра Δ .

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ InSb

На рис. 3 представлена блок-схема установки, позволяющей осуществить измерение величины σ_B при разных значениях H_1 . В качестве переменного магнитного поля использовалось поле десятисантиметрового прямоугольного волновода. Образец n — InSb размерами $5 \times 3 \times 1$ помещался вплотную к боковой стенке прямоугольного волновода (в минимум электрического поля), работающего на H_{10} -типе колебаний.

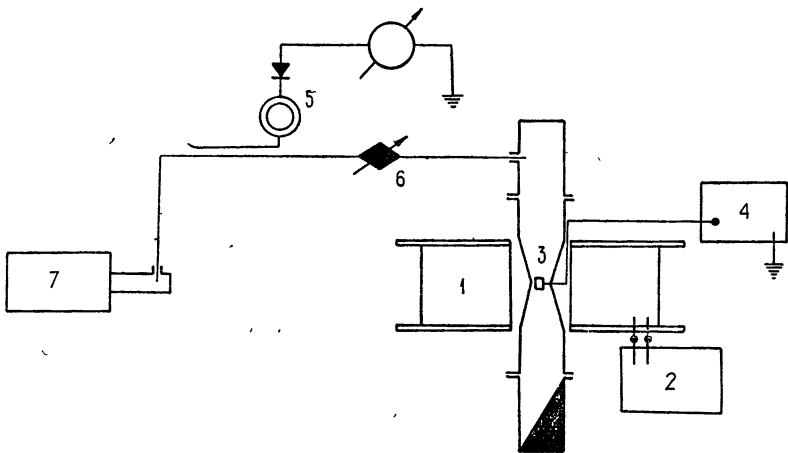


Рис. 3. Блок-схема установки измерения проводимости InSb в магнитных полях СВЧ диапазона:

1 — электромагнит; 2 — источник питания электромагнита; 3 — измеряемый образец, 4 — мост постоянного тока; 5 — прибор контроля СВЧ мощности; 6 — переменный аттенуатор; 7 — высокочастотный генератор типа ЛОВ «М».

Мощный генератор типа ЛОВ «М» позволяет создавать в волноводе сечением 72×10 мм переменное магнитное поле в пределах от 0,1 до

2 э при соответствующем изменении высокочастотной мощности. Электромагнит, представленный на схеме, создает постоянное магнитное поле до 1 кэ, по направлению совпадающее с высокочастотным. Электрофизические параметры образца соответствовали принятым при расчете. Измерение σ_B проводилось с помощью моста постоянного тока типа МО-62 (т. е. $\omega = 0$), при этом выбранное соотношение плеч моста обеспечивало измерение сопротивления образца при минимальных измерительных токах.

Последнее представляется необходимым для устранения изменения σ_B за счет теплового воздействия тока. Перемещение образца в поперечной плоскости волновода позволяет свести к минимуму действие электрической составляющей поля.

Измерение величины σ_B проводилось следующим образом: образец помещался в пучность магнитного поля волновода и определялось изменение его проводимости при разных фиксируемых уровнях СВЧ мощности, т. е. при разных значениях высокочастотного магнитного поля, а также при разных значениях постоянного магнитного поля. Результаты измерений, представленные на рис. 4, получены при нуле-

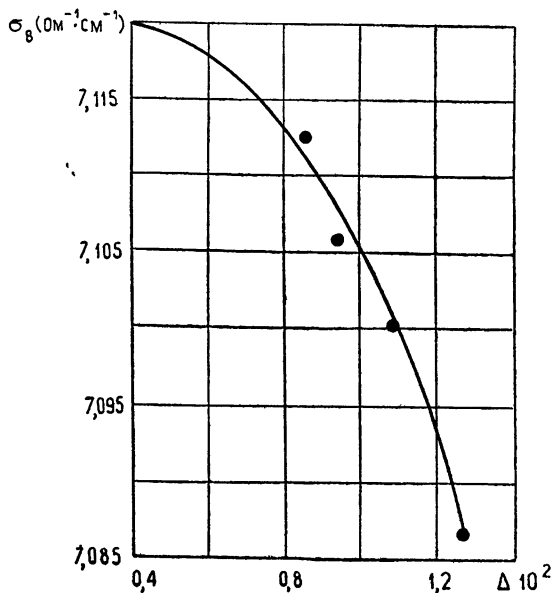


Рис. 4. Экспериментальная зависимость магнитосопротивления InSb от величины переменного магнитного поля.

вом постоянном магнитном поле. Эти результаты по порядку величины Δ могут быть сравнимы с данными, представленными на рис. 2. Однако ввиду малых экспериментально достигнутых значений величины Δ можно говорить лишь о качественном соответствии экспериментальных и расчетных зависимостей.

Величина исследуемого эффекта (изменение σ_B от H_1) оказывается заметной при значительных величинах ω_1 , т. е. при высоких значениях мощности, возбуждающей волновод.

На основании изложенного можно сделать выводы, полезные для практики, а именно: магниторезистивный эффект в переменном поле может быть использован для создания безынерционных датчиков СВЧ мощности. Основное преимущество таких датчиков определяется тем,

что датчик находится в той области волновода, где высокочастотное электрическое поле равно нулю, что позволяет использовать его для измерения высоких уровней мощностей при минимальном искажении работы канализирующего тракта. Осциллирующий характер зависимости σ_p от H_1 определяет верхнюю границу величины мощности, которая может быть однозначно определена с помощью описанного эффекта. Несложный расчет показывает, что эта граница применительно к десятисантиметровому волноводу находится в области предельно допустимых для волновода уровней мощности. Увеличение крутизны эффекта при увеличении частоты переменного магнитного поля позволяет рекомендовать его для создания измерителей мощности в области миллиметровых длин волн. Проведенный нами эксперимент показал, что описанный выше датчик уверенно фиксирует изменение мощности в восьмимиллиметровом волноводе в пределах нескольких милливольт.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Kataoka, H. Fujisada, *Solid State Electronics*, II, № 1, 163 (1968).
2. M. S. Sodha, A. K. Agra, P. K. Kaw, *J. Phys.*, series 2, I, № 1, 89 (1968).
3. В. Н. Луговой, *ЖЭТФ*, 41, № 5, 1562 (1961).
4. А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, ГИФМЛ, 1962.
5. Д. А. Шехтер, сб. Вопросы электронной техники, изд. СГУ, Саратов, 1972.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
30 декабря 1970 г.,
после доработки
5 октября 1971 г.

MAGNETORESISTANCE OF PLASMA IN VARIABLE MAGNETIC FIELD

L. I. Kats, V. P. Terzhova, D. A. Shekhter, L. A. Shekhter

The calculation of the magnetoresistance is carried out on the basis of the general expression obtained for the function of the carrier distribution in the homogeneous medium placed in harmonically varying in time orthogonal electric and magnetic fields. The experiment is made by measurement of the n -InSb sample resistance of located in the magnetic field loop of the rectangular waveguide. A satisfactory coincidence of calculated and experimental data is observed. The possibility of applying the magnetoresistance in the variable magnetic field for the development of the inertialess power pickup in centimeter and millimeter wave ranges is discussed.

УДК 621.371.325

О ПОГЛОЩЕНИИ РАДИОВОЛН В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ ПРИМЕСНЫМИ ГАЗАМИ

А. П. Наумов

Приведены количественные сведения о молекулярном поглощении сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых ($\lambda \geq 0,3$ мм) радиоволн в примесных газах атмосферы O_3 , CO , N_2O на высотах 0 и 20 км. Обсуждается маскирующее действие основных поглощающих компонент атмосферы—водяного пара и молекулярного кислорода—на разрешение вращательных линий указанных примесей в суммарном коэффициенте поглощения для различных высот (0, 10, 15 и 20 км). Полученные результаты могут быть использованы для уточнения характеристик распространения соответствующих радиоволн в резонансных областях поглощения перечисленных примесей на больших высотах и для оценок возможностей радиотеплокационных исследований атмосферы.

Как известно [1, 2], молекулярное поглощение радиоволн в атмосферах Земли и планет определяется газами, молекулы которых обладают постоянным или индуцированным дипольными моментами. Основными поглощающими компонентами в атмосфере Земли являются пары воды и молекулярный кислород [3–6]. Однако наряду с указанными газовыми компонентами в земной атмосфере, как правило, присутствуют и примеси — CO , N_2O , NO , NO_2 , SO_2 и т. д. [7]. Большое значение для биологических процессов и физики атмосферы имеет присутствие в атмосфере молекул озона [8]. Все перечисленные компоненты также обладают дипольными моментами и, следовательно, поглощают и излучают электромагнитную энергию. Вращательные спектры этих молекул приходится на сантиметровый, миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны волн. Таким образом, знание поглощательных свойств атмосферных примесей может представлять интерес как для исследования характеристик распространения соответствующих радиоволн (в частности, монохроматического лазерного излучения), так и для получения информации о содержании этих примесей в атмосфере методами радиотеплокации [9–11].

Результаты спектроскопических исследований примесных компонент атмосферы приведены в монографиях и статьях [2, 12–18]. В работе [20] содержатся подробные сведения о вращательном спектре озона: вычислены резонансные частоты ν_{ij}^0 для переходов между уровнями с квантовым числом полного момента количества движения $J \leq 40$, приходящиеся на диапазон $\lambda > 100$ мк; рассчитанные значения ν_{ij}^0 сопоставляются с рядом измеренных значений в области $\lambda \geq 2,5$ мм и приведены вычисленные значения коэффициентов поглощения O_3 на резонансных частотах для температуры, близкой к температуре озонного слоя атмосферы, $T = 220^\circ K^*$. Экспериментальные сведения о вращательном спек-

* В расчетах вертикального поглощения радиоволн вблизи некоторых резонансов N_2O и O_3 , выполненных в [21], не учитывалось доплеровское уширение линий в верхних слоях атмосферы и имеются значительные неточности в численных значениях полуширин линий, обусловленных молекулярными соударениями.

ре поглощения озона получены также в работе [41]. Однако практический и научный интерес могут представлять значения коэффициентов поглощения примесных газов не только на резонансных частотах, но и в окнах прозрачности, например, при радиотеплолокационных исследованиях атмосферы важны контрасты поглощения и яркостных температур в резонансных областях и участках спектра, прилегающих к резонансам. Наконец, в силу сравнительно небольших дипольных моментов, которыми обладают примесные газы (см. табл. 1), а также по причине их незначительного относительного содержания в атмосфере [7], поглощение и излучение энергии этими газами существенно «маскируются» аналогичными эффектами более активных компонент атмосферы—водяного пара и молекулярного кислорода. Тем не менее, обычно полагается (см., например, [4]), что если, в силу названных причин, спектральные линии примесных газов не разрешаются в спектре атмосферы на уровне моря, то вполне могут разрешаться на больших высотах, и, таким образом, вклад примесных газов в вертикальное поглощение атмосферы на некоторых резонансных частотах может достигать все-таки заметной величины [10, 11]. Последнее обстоятельство определяет, в частности, возможность исследования количественного содержания примесных компонент атмосферы путем радиотеплолокации.

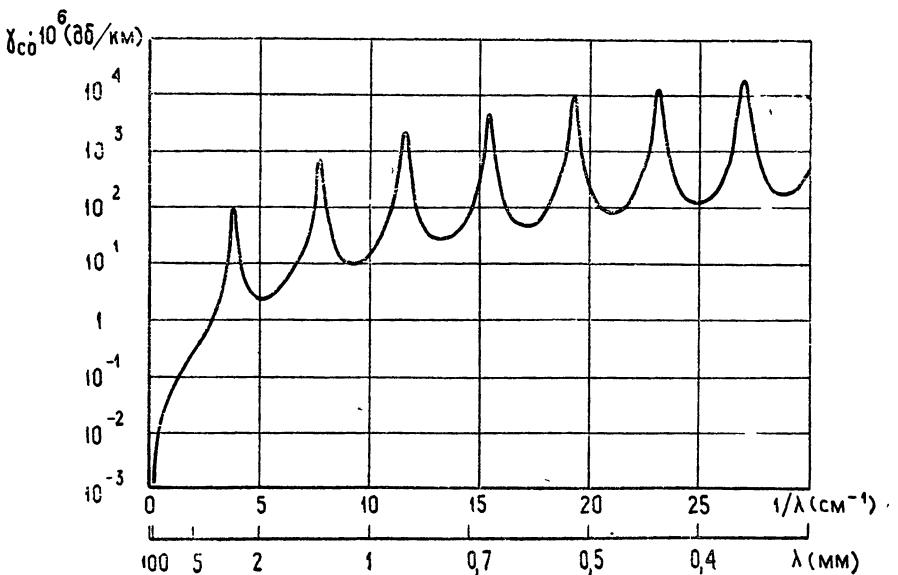


Рис. 1. Коэффициент поглощения окиси углерода в диапазоне длин волн $\lambda = 0,03 \div 10$ см на уровне моря ($f_{CO} = 10^{-6}$).

Однако в литературе отсутствовали количественные данные о поглощении радиоволн примесными газами в широком диапазоне волн (включая окна прозрачности) и о степени «маскировки» линий этих газов крыльями линий поглощения водяного пара и молекулярного кислорода на различных высотах. Изложенные обстоятельства стимулировали постановку и решение задачи о поглощении радиоволн в земной атмосфере с учетом вращательных линий некоторых примесных газовых компонент. В данной статье приводятся результаты расчетов коэффициентов поглощения озона, закиси азота и окиси углерода в диапазоне длин волн $\lambda \geq 0,3$ мм на высотах 0 и 20 км, а также суммарного коэф-

коэффициента поглощения атмосферы в миллиметровом и сантиметровом участках спектра для высот 10, 15 и 20 км.

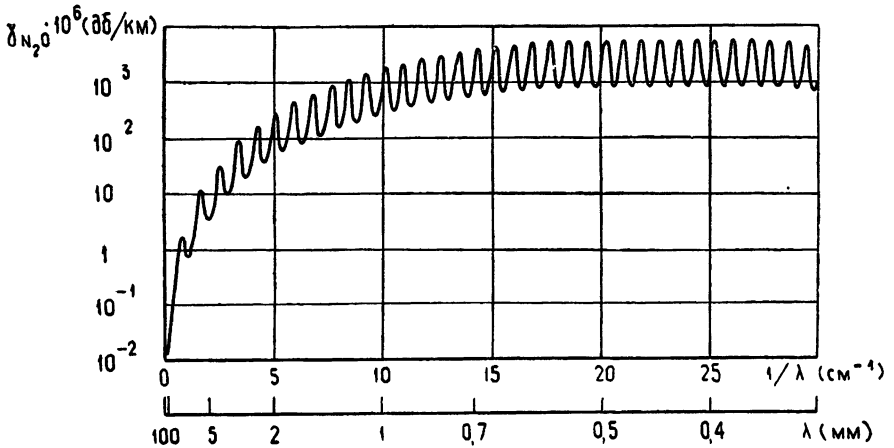


Рис. 2. Коэффициент поглощения закиси азота в диапазоне длин волн $\lambda = 0,03 \div 10$ см на уровне моря ($f_{N_2O} = 5 \cdot 10^{-7}$).

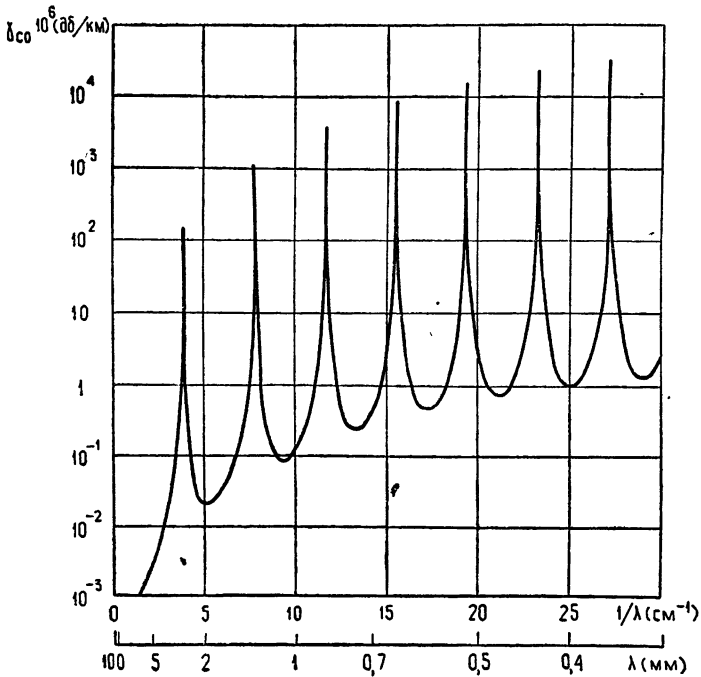


Рис. 3. Коэффициент поглощения окиси углерода в диапазоне длин волн $\lambda = 0,03 \div 10$ см на высоте 20 км ($f_{CO} = 10^{-6}$).

Исходные данные о молекулах CO, N₂O и O₃, которые использовались в расчетах коэффициентов поглощения, содержатся в табл. 1.

Таблица 1

| Молекула | Тип молекулы | Дипольный момент, 10 ⁻¹⁸ CGSE | Вращательные константы (Мгц) | Полуширина линий $\left(\frac{Мгц}{мм \text{ рт. ст.}}\right)$ |
|------------------|----------------------|---|---|---|
| СО | линейная | 0,1 [2] | 57897,5 [14] | 4,25 [16] 3,81 ± 0,36 [18] |
| N ₂ O | линейная | 0,166 [16, 17] | 12561,66 [2] | 4,25 [16] |
| O ₃ | асимметричный волчок | 0,53 [2, 41] | A=106530,0 [22] B=13349,1 [22] C=11834,3 [22] | 4,63 ± 0,24 [41] |

1. Расчетные формулы для коэффициентов поглощения СО и N₂O были получены аналогично формуле для коэффициента поглощения водяного пара (см. (8) в [4]) с учетом, разумеется, специфики, обусловленной линейностью рассматриваемых молекул [2]:

$$\begin{aligned} \gamma_i \left(\frac{\partial \delta}{\kappa \text{ м}}\right) &= 10^6 \log_{10} e \left(\frac{16\pi^2 N_i}{3kT}\right) \mu_i^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \sum_J \left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_i^2 \times \\ &\times \frac{(\Delta\nu/c)_i}{\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_i^2\right]^2 + 4\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_i^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} \left\{1 - \exp\left[-\frac{2\pi \hbar c}{kT} \left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_i\right]\right\} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{2\pi \hbar c}{kT} B_i J(J+1)\right]. \end{aligned} \quad (1)$$

В формуле (1) N_i — число молекул исследуемого газа в единице объема (см³), $(\lambda_J)_i$ и B_i — резонансная длина волны (см) и вращательная константа молекулы (см⁻¹), $(\Delta\nu/c)_i$ — полуширина спектральной линии, \hbar , k и c — соответственно постоянные Планка, Больцмана и скорость света, T — абсолютная температура, μ_i и J — дипольный момент (в единицах CGSE) и квантовое число момента количества движения молекулы.

С учетом численных значений молекулярных параметров (см. табл. 1) формула (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \gamma_i \left(\frac{\partial \delta}{\kappa \text{ м}}\right) &= A_i f_i \frac{P}{T^2} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \sum_J \left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_i^2 \frac{(\Delta\nu/c)_i}{\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_i^2\right]^2 + 4\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_i^2 \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2} \times \\ &\times \left\{1 - \exp\left[-1,44 \frac{1}{T} \left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_i\right]\right\} \exp\left[-C_i \frac{1}{T} J(J+1)\right], \end{aligned} \quad (2)$$

где f_i — относительное объемное содержание того или иного газа (по числу молекул), P — атмосферное давление (в мм рт. ст.), $A_{\text{CO}} = 1,6 \cdot 10^4$, $\left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_{\text{CO}} = 3,86(J+1)$, $C_{\text{CO}} = 2,78$, $A_{\text{N}_2\text{O}} = 4,41 \cdot 10^4$, $\left(\frac{1}{\lambda_J}\right)_{\text{N}_2\text{O}} = 0,84(J+1)$, $C_{\text{N}_2\text{O}} = 0,603$. Матричные элементы квантовых переходов $J \rightarrow J+1$ (индуцированное поглощение) и $J \leftarrow J+1$ (индуцированное излучение) в формулах (1) и (2) учтены в том виде, как они даются в [2] (см. (1.76)).

Полуширины линий CO и N₂O брались одинаковыми для всех переходов и равными $(\Delta\nu/c)_0 = 0,1 \text{ см}^{-1}$ при стандартных условиях на уровне моря ($P = 760 \text{ мм рт. ст.}$, $T = 300^\circ\text{K}$). Зависимость полуширины линии от высоты определялась соотношением $\frac{\Delta\nu}{c} = \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{0,760} \frac{P}{T} \frac{300}{T}$. Возможные погрешности в выборе численного значения $(\Delta\nu/c)_0$ ($\sim 20\%$) и температурой зависимости (последние незначительны на уровне моря и могут достигать $\sim 15\%$ на высоте $h = 20 \text{ км}$), по-видимому, несущественны для принципиального характера расчетов. Отметим лишь, что отношение доплеровской полуширины линии к полуширине, обусловленной молекулярными соударениями, даже на волне $\lambda \approx 0,3 \text{ мм}$ и высотах $h \approx 20 \text{ км}$ не превышает $\sim 0,5\%$. В миллиметровом и сантиметровом диапазонах волн расчетную формулу (2) можно еще более упростить, так как основной вклад в поглощение на этих волнах в земных условиях дают переходы, для которых выполняется неравенство $2\pi\hbar c \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)_i \ll kT$.

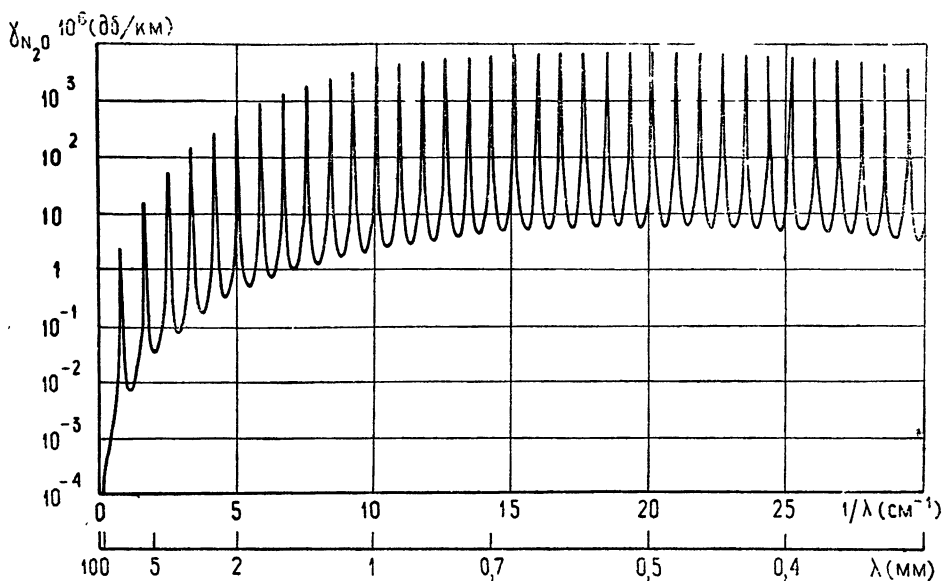


Рис. 4. Коэффициент поглощения закиси азота в диапазоне длин волн $\lambda = 0,03 \div 10 \text{ см}$ на высоте 20 км ($f_{\text{N}_2\text{O}} = 5 \cdot 10^{-7}$).

Результаты расчетов коэффициентов поглощения CO и N₂O по формуле (2) представлены на рис. 1—4. В расчетах учитывалось 30 квантовых переходов CO и 120 квантовых переходов N₂O. При указанном условии учитываются фактически все вращательные переходы молекул CO и N₂O, резонансные частоты которых приходятся на диапазон $1/\lambda \leq 100 \text{ см}^{-1}$. Это обстоятельство, в свою очередь, приводит к тому, что погрешность в вычисленных коэффициентах поглощения, обусловленная пренебрежением в расчетах квантовыми переходами с большими значениями J , не превышает долей процента во всем рассмотренном диапазоне длин волн. Отметим, что предельное значение J_{lim} вращательного квантового числа молекулы CO составляет, согласно [23], 288.

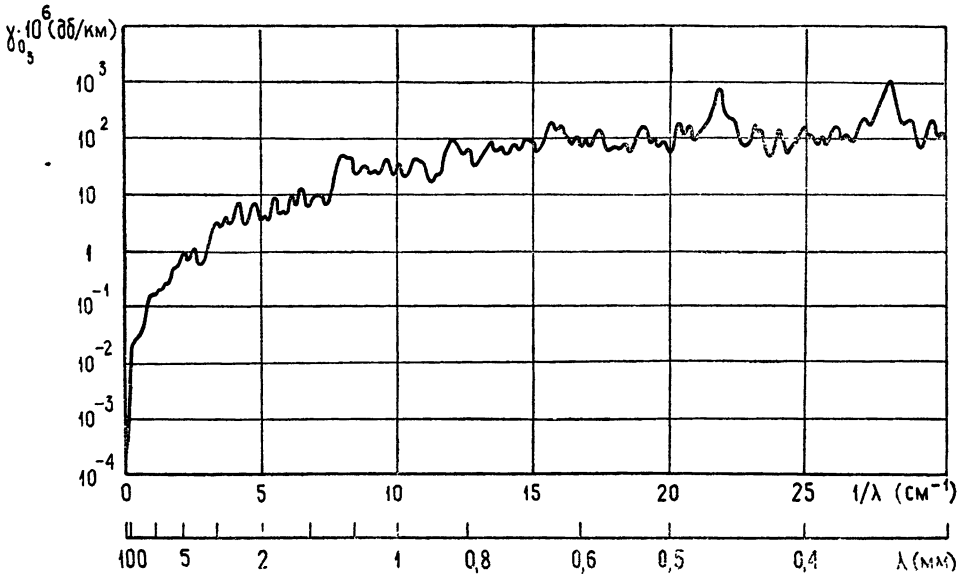


Рис. 5. Коэффициент поглощения озона в диапазоне длин волн $\lambda = 0,03 \div 10$ см на уровне моря ($N_{O_3} = 10^{11}$ см $^{-3}$).

Из рис. 1—4 видно, что для выбранных концентраций молекул CO и N₂O в земной атмосфере, которые отвечают средним значениям f_{CO} и f_{N_2O} , согласно [7], величины коэффициентов поглощения составляют $\sim 10^{-6} \div 3 \cdot 10^{-2}$ дб/км в резонансах вращательных переходов, а также $\sim 10^{-6} \div 8 \cdot 10^{-4}$ дб/км на уровне моря и $10^{-8} \div 5 \cdot 10^{-6}$ дб/км на высоте $h = 20$ км вне соответствующих линий. В работе [10] из радиометрических исследований прозрачности атмосферы для радиоизлучения Солнца в окрестности вращательных резонансов CO и N₂O

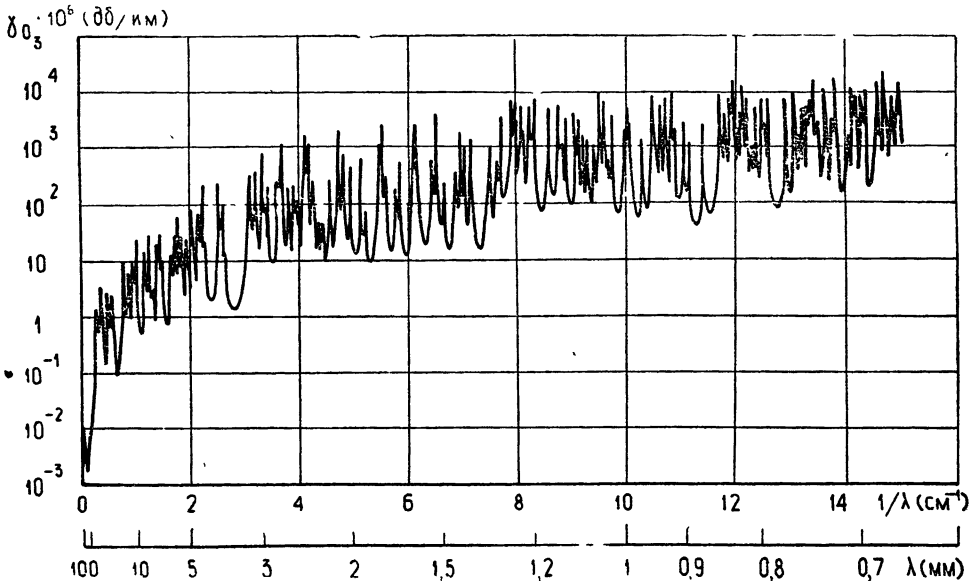


Рис. 6. Коэффициент поглощения озона в диапазоне длин волн $\lambda = 0,065 \div 10$ см на высоте 20-км ($N_{O_3} = 2 \cdot 10^{12}$ см $^{-3}$).

недавно были получены значения относительных концентраций указанных газов, заключающиеся соответственно в пределах $(1 \div 2,5) \cdot 10^{-5}$ и $(1 \div 6) \cdot 10^{-6}$, которые превышают выбранные нами в качестве средних значения f_{CO} и $f_{\text{N}_2\text{O}}$ (см. подписи к рис. 1—4). Численные значения коэффициентов поглощения γ_{CO} и $\gamma_{\text{N}_2\text{O}}$ на определенных высотах для условий, соответствующих наблюдениям [10], или для иных физических условий также могут быть получены из рис. 1—4 путем несложной коррекции, поскольку коэффициенты поглощения γ_i с достаточной степенью точности пропорциональны величинам f_i (см. (2)).

2. Расчет коэффициента поглощения озона может быть выполнен по обычной квантовомеханической формуле для асимметричного волчка (параметр асимметрии Рэя $x_{\text{O}_3} = -0,968$). Поскольку, однако, коэффициенты поглощения O_3 на резонансных частотах для переходов со значениями $J = 0 \div 40$ при $P = 760$ мм рт. ст., $T = 220^\circ\text{K}$, $\Delta\nu/c = 0,078$ см $^{-1}$ и $f_{\text{O}_3} = 1$ уже вычислены в [20], то для решения поставленной задачи представлялось целесообразным использовать результаты [20].

Из общей формулы для коэффициента поглощения (см. (8) в [4]):

$$\gamma \left(\frac{\partial \delta}{\kappa \text{ м}} \right) = 10^6 \log_{10} e \left(\frac{16\pi N}{3\hbar c G} \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \sum_{i,j} \frac{1}{\lambda_{ij}} |\mu_{ij}|^2 \times \\ \times \left| \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right) \right| \frac{(\Delta\nu/c)_{ij}}{\left[\left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij}^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2} \quad (3)$$

следует, что величина γ (см $^{-1}$) на резонансной длине волны $\lambda = \lambda_{ij}$, обусловленная лишь соответствующим квантовым переходом $i \rightarrow j$, определяется равенством

$$\gamma(\text{см}^{-1}) = \frac{4\pi N}{3\hbar c G} |\mu_{ij}|^2 \frac{1}{\lambda_{ij}} \left| \exp(-E_i/kT) - \exp(-E_j/kT) \right| \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Это выражение совпадает с расчетной формулой (1') работы [20]. Обозначая для озона при $P = 760$ мм рт. ст., $T = 220^\circ\text{K}$, $\Delta\nu/c = 0,078$ см $^{-1}$ и $f_{\text{O}_3} = 1$ величину $\gamma(\text{см}^{-1})$, определяемую равенством (4), через I_{ij} , а затем подставляя это значение в формулу (3), имеем на длине волны λ и при различных метеорологических условиях

$$\gamma_{\text{O}_3} \left(\frac{\partial \delta}{\kappa \text{ м}} \right) = 0,4452 \cdot 10^{-14} N_{\text{O}_3}(h) \left(\frac{300}{T} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \sum_{i,j} I_{ij} \times \\ \times \frac{|\exp(-E_i/kT) - \exp(-E_j/kT)|}{|\exp(-E_i/220k) - \exp(-E_j/220k)|} \frac{(\Delta\nu/c)_{ij}}{\left[\left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij}^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2}. \quad (5)$$

В расчетах коэффициента поглощения O_3 по диапазону использовались значения $1/\lambda_{ij}$ и I_{ij} , заимствованные из [20]. Величины E_i вычислялись по формуле асимметричного волчка [2] $\left(E_j = E_i + \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{ij}} \right)$. Полуширины вращательных линий озона в нашем расчете брались равными аналогичным величинам для CO и N_2O (см. разд. 1). На основании результатов, приведенных в работах [8, 24], содержание озона при-

нималось равным $N_{O_3} = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ на уровне моря и $N_{O_3} = 4 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ на высотах $h = 10$ и 20 км . Результаты расчетов величины γ_{O_3} даны на рис. 5—7.

На рис. 6, 7 видно обилие разрешающихся линий озона на высоте $h = 20 \text{ км}$. Однако значения поглощения в резонансных областях O_3 все же не превышают $3 \cdot 10^{-2} \div 2 \cdot 10^{-1} \text{ дб/км}$ при этих условиях. С другой стороны, величины γ_{O_3} на некоторых резонансных частотах становятся соизмеримыми и с резонансными значениями коэффициентов поглощения водяного пара (см. рис. 10). Как следствие отмеченных обстоятельств, спектр поглощения атмосферы на высоте $h \approx 20 \text{ км}$ имеет весьма сложный характер.

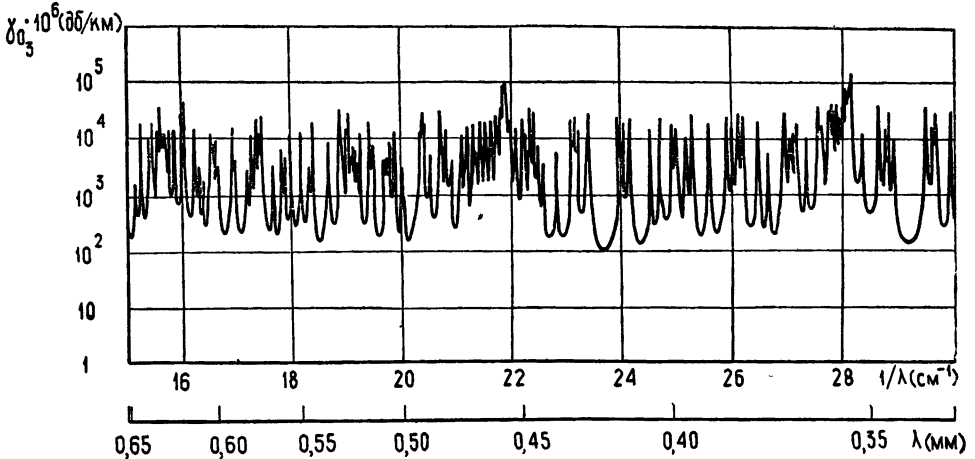


Рис. 7. Коэффициент поглощения озона в диапазоне длин волн $\lambda = 0,03 \div 0,065 \text{ см}$ на высоте 20 км ($N_{O_3} = 2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$).

3. Суммарный коэффициент поглощения атмосферы определялся по формуле

$$\gamma_a \left(\frac{\partial \delta}{\text{км}} \right) = \gamma_{H_2O} + \gamma_{O_3} + \gamma_{CO} + \gamma_{N_2O} + \gamma_{O_2} \quad (6)$$

В качестве значений γ_{CO} , γ_{N_2O} и γ_{O_3} использовались величины, получающиеся по вышеприведенным формулам (2), (5), а значения γ_{H_2O} и γ_{O_2} вычислялись по формулам (4), (6) работ [5, 6]. Расчеты выполнялись для стандартных физических условий, определяемых моделью атмосферы [31] (60° N , лето). Распределение удельной влажности полагалось экспоненциальным до высоты 16 км ($q = q_0 e^{-\alpha h}$, $q_0 = 9,4 \text{ г/кг}$, $\alpha = 0,48 \text{ км}^{-1}$), а выше удельная влажность считалась постоянной [32]. Газовые компоненты, учитываемые в (6), не исчерпывают список всех поглощающих агентов, содержащихся в земной атмосфере, спектры которых также приходится на миллиметровый и сантиметровый диапазоны волн. Для полноты картины в (6) следовало бы учесть вклад вращательных линий NO , NO_2 и SO_2 . Однако тонкая структура полос поглощения NO и NO_2 представляется еще не до конца выясненной*, а относительно содержания сернистого ангидрида (SO_2) в атмосфере не исключается, что оно может значительно уменьшаться с высотой (это

* Например, в работе [15] не была обнаружена линия поглощения NO_2 с ожидаемой резонансной частотой $105158,4 \text{ МГц}$.

обстоятельство имеет место, например, для порных областей [25])* . Концентрации NO и NO₂ в атмосфере, как показывают расчеты реакций и их продуктов, связанных с атомарным кислородом и азотом на высотах более 60 км [25], оказываются равными 10⁻⁸ и 10⁻¹², т. е. соответственно в 50 и 5·10⁵ раз меньше, чем среднее относительное содержание N₂O в атмосфере. Однако дипольные моменты молекул NO и NO₂ также порядка (0,15 ÷ 0,30) · 10⁻¹⁸ CGSE [2], и, следовательно, при одинаковых условиях поглощательные свойства их должны быть соизмеримыми с аналогичными характеристиками рассмотренных примесей. Значения резонансных частот некоторых длинноволновых квантовых переходов молекул NO и NO₂ приводятся в табл. 2.

Таблица 2

1) Резонансные частоты NO₂ (длинноволновые вращательные переходы) [27]

| № | Переход | ν_{ij} (Мгц) | Примечания |
|---|--------------------------------------|------------------|------------|
| 1 | 8 ₋₈ —7 ₋₆ | 15290 ± 360 | 10 линий |
| 2 | 40 ₋₃₆ —39 ₋₃₄ | 16020 ± 12 | 6 линий |
| 3 | 23 ₋₂₀ —24 ₋₂₂ | 16630 ± 66 | 8 линий |
| 4 | 22 ₋₂₀ —21 ₋₁₈ | 39150 ± 95 | 6 линий |
| 5 | 9 ₋₈ —10 ₋₁₀ | 40820 ± 160 | 6 линий |

2) Резонансные частоты NO (длинноволновые вращательные переходы) [27]

| № | Состояние молекулы | Переход | ν_{ij} (Мгц) | Примечания |
|---|-------------------------------|---|-----------------------------|--------------------|
| 1 | ² Π _{1/2} | $J = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$ | 150210 ± 35 150510 ± 150 | 5 линий 5 линий |
| 2 | ² Π _{1/2} | $J = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{5}{2}$ | 250460 ± 23 250760 ± 55 | 5 линий 5 линий |
| 3 | ² Π _{3/2} | $J = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{5}{2}$ | 257790 ± 40 257890 ± 40 | 6 линий 6 линий |

Разумеется, мы совсем не исключаем возможного нарушения упомянутых здесь соотношений между коэффициентами поглощения атмосферных примесей при аномально больших содержаниях тех или иных компонент, которые могут реализоваться, в частности, при значительных загрязнениях атмосферы вблизи крупных промышленных центров или в более широком масштабе [26], но анализ этих особых ситуаций требует и специального рассмотрения.

Из остальных газовых примесей следует отметить еще, пожалуй, аммиак, следы которого также обнаружены в атмосфере ($f_{\text{NH}_3} \approx 1,6 \cdot 10^{-8}$ вблизи земной поверхности). Расчетная формула для коэффициента поглощения NH₃, обусловленного инверсионными переходами в сантиметровом диапазоне волн, дается в [28]. Но в ряде случаев (например, над областью пассатной инверсии на о. Гавайи, Мауна-Кеа, 3200 м [25]) было зарегистрировано значительное уменьшение концентрации NH₃ по высоте. Как будет видно из нижеизложенного, разреженные спектральные линии газовых примесей в спектре поглощения атмос-

* Результаты расчетов суммарного коэффициента поглощения показывают, что отдельные спектральные линии примесных компонент при выбранном количественном содержании начинают разрешаться с высот $h \approx 10 \div 15$ км (см. рис. 8—10).

феры может иметь место на высотах $h \geq 15$ км при концентрациях $f \geq 10^{-7}$. На высотах $h \approx 50 \div 60$ км поглощение в крыльях линий уменьшается практически до нуля, и поэтому любое значение концентрации той или иной газовой компоненты может приводить в принципе к разрешению линий поглощения при благоприятных условиях, т. е. если резонанс одной компоненты не приходится на резонансную область другой компоненты. Однако эти резонансы локализованы в очень узких областях спектра (ширина их по половине максимума поглощения не превышает $5 \div 10$ Мгц), и абсолютные значения поглощения при значительном уменьшении концентрации становятся столь малыми, что представляют, пожалуй, лишь сугубо теоретический интерес.

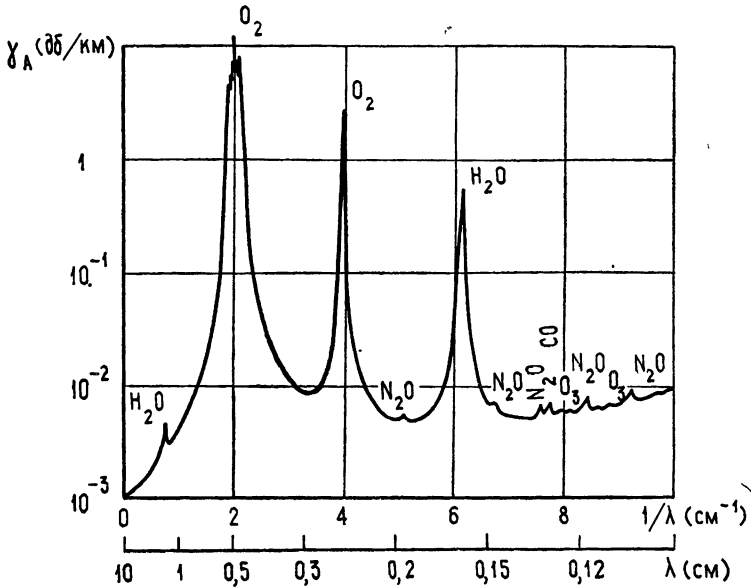


Рис. 8. Суммарный коэффициент поглощения атмосферы в диапазоне длин волн $\lambda = 0,1 \div 10$ см на высоте 10 км.

Прежде чем перейти к обсуждению результатов расчета суммарного коэффициента поглощения на различных высотах, можно еще отметить незначительную роль молекулярного поглощения недипольных компонент атмосферы (N_2 , CO_2) в рассматриваемом участке спектра. При соударениях молекулы этих газов приобретают индуцированные дипольные моменты. Поглощение, обусловленное индуцированными дипольными моментами N_2 и CO_2 , экспериментально исследовалось в [29]. Из установленного в [29] полуэмпирического выражения получается, что суммарный вклад N_2 и CO_2 в величину γ_a не превышает $0,2 \div 0,6\%$ при рассмотренных атмосферных условиях.

На рис. 8—10 представлены значения γ_a , вычисленные в диапазоне длин волн $\lambda \geq 1$ мм для высот 10, 15 и 20 км. Интерпретация линий поглощения атмосферного спектра дана на этих рисунках. Прежде всего следует отметить, что на высоте $h = 10$ км линии примесных газов атмосферы лишь начинают проявляться в значениях γ_a . На высотах $h < 10$ км в спектре поглощения атмосферы присутствуют линии только основных поглощающих компонент — O_2 и H_2O . По мере увеличения высоты над уровнем моря ($h > 10$ км) маскировка спектральных линий малых примесей существенно уменьшается, и на высотах $h \approx 20$ км поглощение в некоторых вращательных резонансах озона становится

уже соизмеримым с поглощением в линиях водяного пара, центрированных, например, к $\lambda = 1,35$ см и $\lambda = 1,64$ см (рис. 10). Интересно обратить внимание на поведение коэффициента поглощения атмосферы вблизи $\lambda = 1,29$ мм ($1/\lambda \sim 7,72$ см⁻¹). В этой области расположены близкие резонансные частоты озона и окиси углерода (переходы $16_{-14} \rightarrow 16_{-2}$ и $J = 1 \rightarrow 2$). На высотах $h \leq 15$ км определяющий вклад в молекулярное поглощение энергии дает здесь вращательная линия CO, в то время как на высотах $h \approx 20$ км это соотношение между величинами γ_{CO} и γ_{O_3} изменяется в сторону предпочтительности соответствующего вклада от озона. Отметим, что принятые в расчете величины абсолютного содержания атмосферного озона соответствуют возрастанию его относительной концентрации на высотах $h = 0 \div 20$ км более чем на 2 порядка (от величины $f_{O_3} = 0,4 \cdot 10^{-8}$ до $f_{O_3} \approx 10^{-6}$).

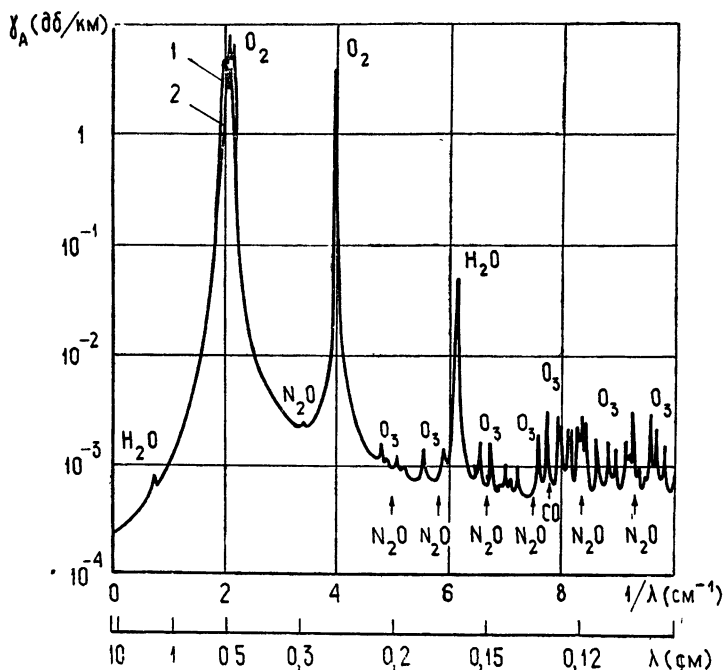


Рис. 9 Суммарный коэффициент поглощения атмосферы в диапазоне длин волн $\lambda = 0,1 \div 10$ см на высоте 15 км. В области $\lambda \approx 4,6 \div 5,4$ мм кривая 1 обозначает огибающую максимумов поглощения молекулярного кислорода, а кривая 2—огибающую минимумов поглощения O_2 .

Результаты выполненных расчетов могут быть использованы, кроме целей, отмеченных во введении, и для поиска новых участков спектра в радиотеплолокационных исследованиях атмосферы. С этой точки зрения перспективным может оказаться субмиллиметровый диапазон волн, в котором расположено большое количество линий различных газовых компонент атмосферы. При исследовании возможностей спутниковой радиометеорологии в субмиллиметровом диапазоне волн, кроме замечаний, содержащихся в данной статье по поводу соотношений между поглощательными свойствами рассмотренных компонент, следует иметь в виду и то обстоятельство, что на субмиллиметровый диапазон приходятся также вращательные линии O_2 , отвечающие правилу отбора $\Delta K = \pm 2$ (K —квантовое число азимутального момента количества движения ядра), которые рассмотрены в работе [30] (см. также [33]).

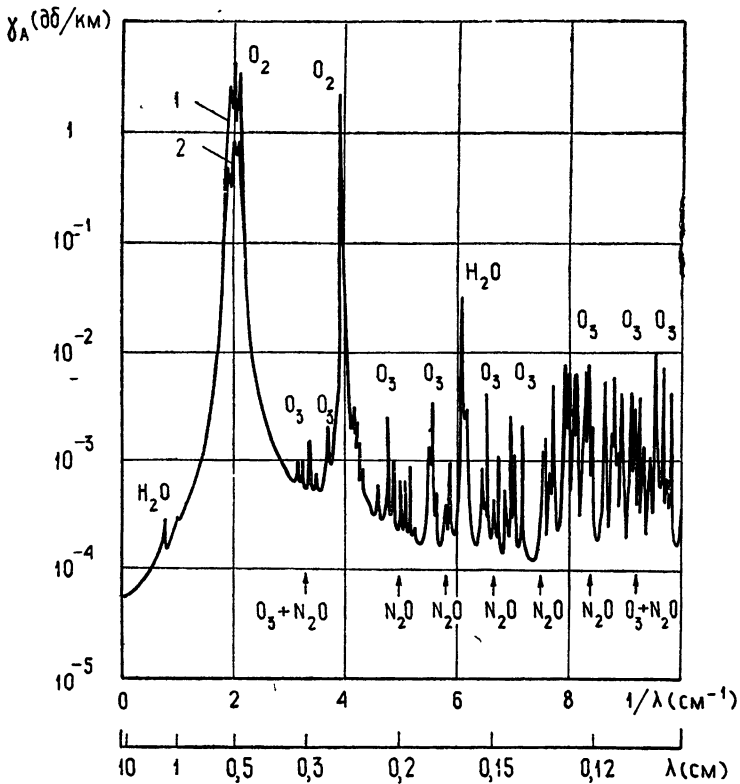


Рис. 10. Суммарный коэффициент поглощения атмосферы в диапазоне длин волн $\lambda=0,1 \div 10$ см на высоте 20 км. В области $\lambda \approx 4,6 \div 5,4$ мм кривая 1 обозначает огибающую максимумов поглощения молекулярного кислорода, а кривая 2—огибающую минимумов поглощения O_2 .

Сведения о возможном влиянии димерных молекул водяного пара на спектр радионизлучения атмосферы в коротковолновом участке миллиметрового диапазона и на субмиллиметровых волнах содержатся в [33–39]. О некоторых проблемах интерпретации спектральных линий поглощения $(H_2O)_2$ в атмосфере см. в [10, 40]. Примеры использования атмосферного излучения в резонансных областях примесных компонент атмосферы CO , N_2O , O_3 для получения информации о количественном содержании этих компонент приведены в работах [10, 11].

Автор признателен С. А. Жевакину за обсуждение материалов работы и М. Б. Зиничевой за расчеты, выполненные на БЭСМ-4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963.
2. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
3. J. H. Van Vleet, Phys. Rev., 71, № 7, 413 (1947).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, № 6, 987 (1965).
6. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
7. Б. А. Миртов, Газовый состав атмосферы Земли и методы его анализа, изд. АН СССР, М., 1961.
8. В. Васси, Атмосферный озон, изд. Мир, М., 1968.

9. Материалы семинара «Применение наземной радиотеплолокации в метеорологии», Изв высш уч. зав — Радиофизика, 14, № 9, 1463 (1971).
10. В Н Воронов, А Г Кисляков, Э П Кукина, А И Наумов, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 8, № 1, 29 (1972).
11. W. M. Caton, W. J. Welch, S. Silver, J. Geophys. Res., 72, № 24, 6137 (1967).
12. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбаруло, Радиоспектроскопия, Гостехиздат, М, 1955.
13. H. C. Allen, P. C. Cross, Molecular Vib-Rotors, New York and London, 1963.
14. O. R. Gilliam, C. M. Johnson, W. Gordy, Phys. Rev., 78, 140 (1950).
15. C. O. Britt, C. W. Tolbert, A. W. Straiton, J. Res. NBS, 65D, 15 (1961).
16. D. K. Coles, R. H. Hughes, Phys. Rev., 76, 178 (1949).
17. R. G. Shulman, B. P. Dailey, C. H. Townes, Phys. Rev., 75, 472 (1950); 78, 145 (1950).
18. J. M. Dowling, R. T. Hall, J. Molec. Spectroscopy, 19, 108 (1966).
19. C. D. Walshaw, Proc. Phys. Soc., A68, 530 (1955).
20. E. K. Gora, J. Molec. Spectroscopy, 3, № 1, 78 (1959).
21. S. N. Ghosh, V. Malaviya, J. Atmosph. and Terrest. Physics, 21, № 1, 243 (1961).
22. R. Trambarulo, S. N. Ghosh, C. A. Burrus, W. Gordy, J. Chem. Phys., 21, 851 (1953).
23. Г. А. Хачкурузов, Оптика и спектроскопия, 21, № 2, 152 (1966); 22, № 1, 24 (1967); 30, № 5, 847 (1971).
24. И А Хвостиков, УФН, 59, 229 (1966)
25. Х. Юнге, Химический состав и радиоактивность атмосферы, изд Мир, М, 1965
26. К. Я Кондратьев, Метеорология и гидрология, № 9, 3 (1970).
27. A. H. Barrett, Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, t. 7, fascicule unique, Liège Université, 1963, p. 197.
28. А Д Кузьмин, А П. Наумов, Т. В Смирнова, Астрон. вестник, 6, № 1, 13 (1972).
29. W. Ho, J. A. Kaufman, P. Thaddeus, J. Geophys. Res., 71, № 21, 8091 (1966).
30. А Г. Кисляков, К. С Станкевич, Изв высш уч зав—Радиофизика, 10, № 9—10, 1244 (1967).
31. U. S. Standard Atmosphere, NASA. Government Printing Office, Washington, 1966.
32. М С. Малкевич, Ю. В. Самсонов, Л. И. Копрова, УФН, 80, № 1, 93 (1963).
33. I. G. Nolt, T. Z. Martin, C. W. Wood, W. M. Sinton, J. Atmosph. Sci., 28, № 2, 238 (1971).
34. А А Викторова, С А Жевакин, ДАН СССР, 194, № 3, 540 (1970).
35. H. A. Gebbie, W. J. Burroughs, Nature, 217, № 5135 (1968).
36. H. A. Gebbie, W. J. Burroughs, J. Chamberlain, J. E. Harries, R. J. Jones, Nature, 221, № 5176 (1969).
37. W. J. Burroughs, R. G. Jones, H. A. Gebbie, J. Quant. Spectr. and Radiat. Transfer, 9, № 6 (1969).
38. J. A. Eddy, P. J. Lena, R. M. Mac Queen, J. Atm. Sci., 26, № 6 (1969).
39. J. E. Harries, W. J. Burroughs, Infrared Physics, 10, № 3, 165 (1970).
40. А А Викторова, С А Жевакин, Изв АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана (в печати).
41. M. Lichtenstein, J. J. Gallagher, S. A. Clough, J. Molec. Spectroscopy, 40, № 1, 10 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 сентября 1971 г.

RADIO WAVE ABSORPTION BY IMPURITY GASES IN THE EARTH ATMOSPHERE

A. P. Naumov

Quantitative data on the molecular absorption of centimeter, millimeter and sub-millimeter ($\lambda \geq 0.3$ mm) radio waves by the atmosphere impurity gases O_3 , CO , N_2O at the heights of 0 and 20 km are given. The masking effect of the main absorption components—water vapour and molecular oxygen—on the resolution of rotational lines of the mentioned impurities in the total absorption coefficient for different heights (0, 10, 15 and 20 km) is discussed. The results obtained may be used to specify the characteristics of radio wave propagation in the absorption resonance regions of the given impurities at large heights and to estimate the possibility of the atmosphere microwave probing.

УДК 551 510 535

ОДНОВРЕМЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И ЧАСТОТЫ СОУДАРЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В D-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов

Электронная концентрация N в D -области ионосферы может быть найдена по коэффициенту корреляции амплитуд обыкновенной и необыкновенной компонент радиоволн, рассеянных обратно неоднородностями D -области. Используя одновременные измерения разности дифференциального поглощения нормальных волн, можно найти число соударений ν_m электронов с нейтральными молекулами. Описана методика определения N и ν_m . Приведены предварительные результаты измерений ν_m во время двух внезапных ионосферных возмущений на частоте 5,75 Мгц.

В работе [1] предложено определять электронную концентрацию N в D -области ионосферы по коэффициенту корреляции между амплитудами обыкновенной и необыкновенной волн, рассеянных обратно неоднородностями среды. В [2] изложены первые результаты измерений N этим методом. В этой же работе [2] обращено внимание на то, что одновременное определение разности величин поглощения обыкновенной и необыкновенной компонент рассеянных обратно радиоволн позволяет находить также и число соударений ν_m электронов с молекулами. Обсуждению одновременных измерений N и ν_m и посвящена настоящая статья.

1. *Определение $N(h)$.* Если не учитывать поглощение радиоволн в рассеивающем объеме, то для достаточно узкой диаграммы направленности антенны и прямоугольной формы зондирующего импульса коэффициент корреляции амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн будет выражаться соотношением [1]

$$\rho_{A_0 A_x} = \frac{\sin^2 X}{X^2}, \quad (1)$$

где $X = kL(\mu_0 - \mu_x)$, μ_0 и μ_x — показатели преломления соответственно обыкновенной и необыкновенной компонент, $L = \frac{c\tau}{2}$, τ — длительность

зондирующего импульса, $k = \frac{\omega}{c}$, ω — круговая рабочая частота и c — скорость

света. При выводе соотношения (1) предполагалось, что компоненты поля рассеяния распределены по нормальному закону (что выполняется на опыте [3]). Параметры среды в пределах объема рассеяния

с толщиной $\frac{c\tau}{2}$ считаются постоянными.

При учете поглощения радиоволн [2]

$$\rho_{A_0 A_x} = \frac{(\sin^2 X + \operatorname{sh}^2 Y) Y_0 Y_x}{(X^2 + Y^2) \operatorname{sh} Y_0 \operatorname{sh} Y_x}, \quad (2)$$

где $Y = kL(x_0 + x_x)$, $Y_{0,x} = 2kL x_{0,x}$, x_0 и x_x — показатели поглощения соответственно обыкновенной и необыкновенной компонент. На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов $\rho_{A_0 A_x}$ в зависимости от электронной концентрации при различных числах соударений ν_m .

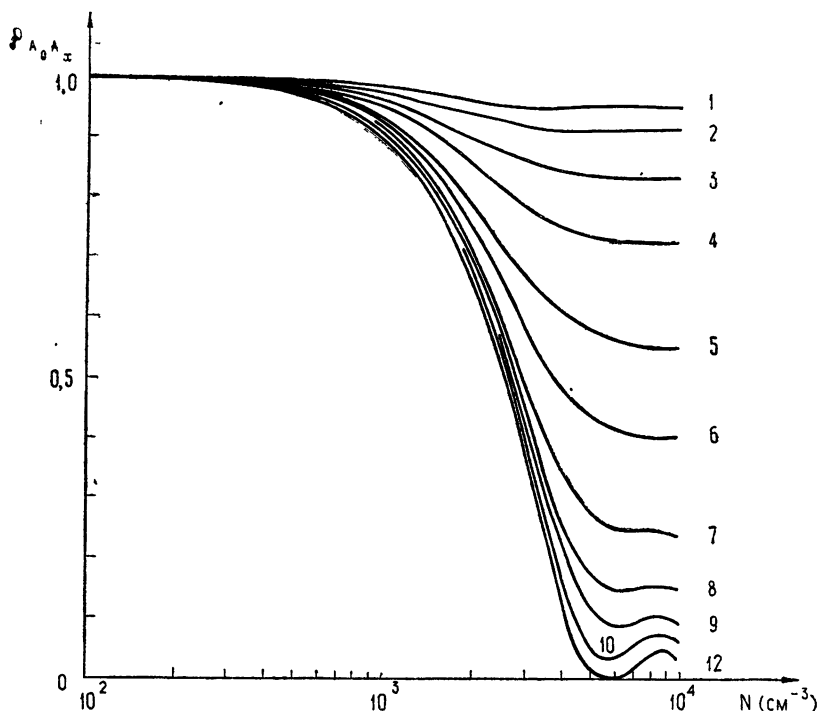


Рис. 1.

Рис. 1 относится к рабочей частоте $f_1 = 5,75$ Мгц, рис. 2 — к частоте $f_2 = 3$ Мгц. Выражение для комплексного показателя преломления $n = \mu - i\kappa$ бралось по обобщенной теории Сена и Уиллера. Величина продольной компоненты гирочастоты в расчетах соответствует широте г. Горького ($\omega_L = 8,8$ Мгц). Значения ν_m указаны в табл. 1.

Таблица 1

| № кривых | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| ν_m (сек ⁻¹) | $2 \cdot 10^7$ | $1,4 \cdot 10^7$ | 10^7 | $6,75 \cdot 10^6$ | $4,7 \cdot 10^6$ | $3,2 \cdot 10^6$ | $2,2 \cdot 10^6$ |
| № кривых | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | |
| ν_m (сек ⁻¹) | $1,55 \cdot 10^6$ | $1,09 \cdot 10^6$ | $7,6 \cdot 10^5$ | $5,35 \cdot 10^5$ | 0 | | |

Как видно из рис. 1 и 2, для сравнительно небольших ν_m ($\nu_m < 10^6$) изменения ρ в пределах от 0,95 до 0,1 соответствуют изменениям N от $\sim 6 \cdot 10^2$ до $4 \cdot 10^3$ э/см³ на частоте 5,75 Мгц и от $\sim 10^2$ до $9 \cdot 10^2$ э/см³

на частоте 3 Мгц. При повышении ν_m диапазон определения N несколько смещается в сторону больших значений N . В целом возможный интервал измерений электронной концентрации корреляционным методом на частотах 3 и 5,75 Мгц охватывает D -область ионосферы днем и E -слой ночью.

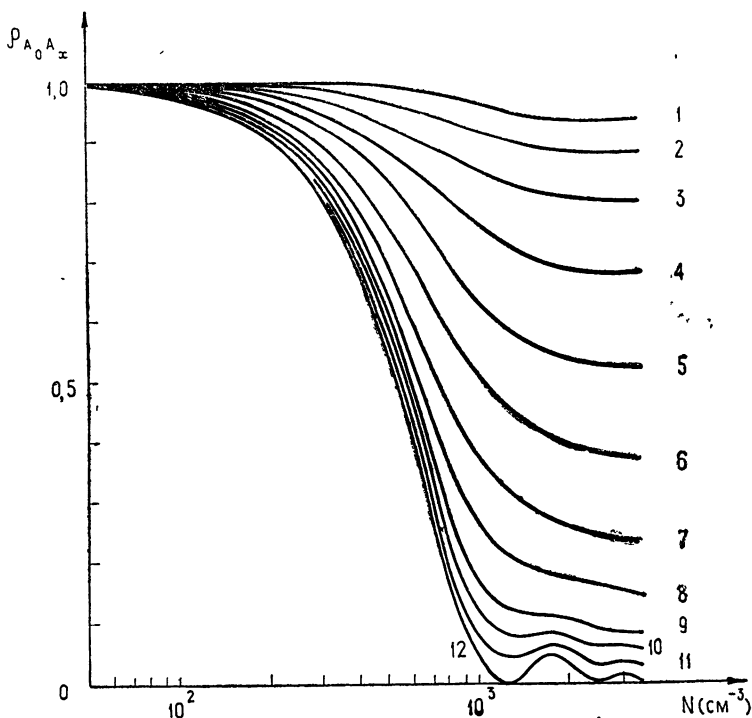


Рис. 2.

Выражения (1) и (2) предполагают постоянство значений N и ν_m в пределах $\frac{c\tau}{2}$. При типичной длительности зондирующего импульса

$\tau = 50 \text{ мксек}$ $\frac{c\tau}{2} = 7,5 \text{ км}$. Концентрация электронов в пределах такого

интервала высот может, вообще говоря, существенно измениться. Найденное значение N в этом случае будет соответствовать высоте, несколько отличающейся от номинальной. Можно, очевидно, уточнить профиль $N(h)$, определяя последовательно значения N с шагом, меньшим $\frac{c\tau}{2}$, и вычисляя соответствующие разности ΔN .

Учет ν_m при нахождении N разумно проводить в два этапа. На первом этапе берется примерное значение ν_m на данной высоте. После этого по методике, описанной ниже, это значение уточняется и при необходимости вводится поправка на определение N . Заметим, что погрешности измерений N , вызванные неточным знанием ν_m , в большинстве случаев, особенно при малых ν_m , невелики. Так, например, даже при 50% неопределенности в ν_m $\delta N < 10\%$ на частоте 5,75 Мгц в диапазоне $0,2 \leq \rho \leq 0,95$, если $\nu_m \leq 1,5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$.

Существенным является учет случайных ошибок обработки записей амплитуд нормальных компонент сигнала $A_0(h, t)$ и $A_x(h, t)$. Будучи

некоррелированными, эти случайные ошибки уменьшают величину ρ_{A_0, A_x} . Если положить для простоты, что $\sigma_{0,x}^2 \ll \overline{A_{0,x}^2}$, то

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\sigma_0^2}{A_0^2} + \frac{\sigma_x^2}{A_x^2}, \quad (3)$$

где $\sigma_{0,x}$ — дисперсия ошибок измерений $A_{0,x}$ при их распределении по нормальному закону. Уменьшение ρ за счет данного эффекта наиболее заметно при малых амплитудах $A_{0,x}$. В качестве примера на рис. 3 приведена полученная в Горьком 14.6.70 г. во время внезапного ионосферного возмущения зависимость $\rho(h)$ на частоте 5,75 Мгц. Понижение ρ на высотах, меньших 62 км, как показал анализ записей и ошибок обработки, является следствием указанных ошибок. Как видно из рис. 3, $\Delta\rho/\rho \leq 0,05$ на высоте $h = 60$ км и $\Delta\rho/\rho \sim 0,1 \div 0,15$ на $h = 58,5$ км. В этой области высот неучет уменьшения ρ за счет ошибок обработки приводит, как это легко видеть из рис. 2, 3, к очень существенному завышению N . По мере снижения значений ρ и перехода к более высоким концентрациям N влияние этого фактора уменьшается, а при введении поправки $\Delta\rho$ — становится практически несущественным.

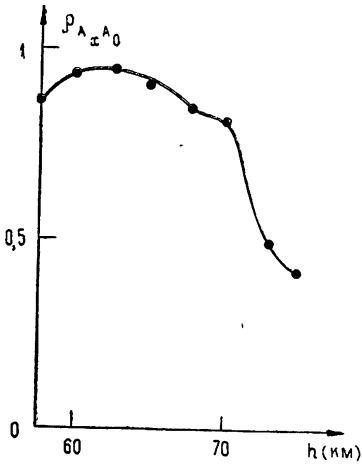


Рис. 3.

Имеются и другие источники погрешностей определения ρ : например, ограниченность во времени записей $A_{0,x}(h, t)$, по которым вычисляется коэффициент корреляции, нестационарность параметров среды в процессе наблюдений и т. п. В целом можно ожидать при введении указанных выше поправок и коррекций, что юбщая погрешность нахождения электронной концентрации корреляционным методом не будет превышать 15—25% в области изменений ρ от 0,1 до 0,95.

Приведенные в [2] профили $N(h)$ были получены по формуле (1) без учета рассмотренных факторов. Заметим в этой связи, что ошибки, вызванные с одной стороны, пренебрежением v_m , а с другой стороны, обусловленные погрешностями обработки записей $A_{0,x}(h, t)$, имеют противоположные знаки и в значительной степени компенсируют друг друга. Этим обстоятельством и объясняется, по-видимому, удовлетворительное согласие профилей $N(h)$, найденных разными методами в [2].

2. Определение v_m . При нахождении профиля $N(h)$ методом частичных отражений измеряется разность величин поглощения обыкновенной и необыкновенной компонент. Высотная зависимость $v_m(h)$ в этой задаче считается заданной. Корреляционный метод определения N дает возможность изменить задачу и по разности величин поглощения искать $v_m(h)$. При этом как $N(h)$, так и $v_m(h)$ находятся по одним и тем же исходным экспериментальным записям $A_{0,x}(h, t)$. Напомним, что

$$\sqrt{\frac{\overline{A_x^2}}{A_0^2}}(h) = \frac{|R_x|}{|R_0|} \exp \left[-2 \frac{\omega}{c} \int_0^h (x_x - x_0) dh \right], \quad (4)$$

где для D -области ионосферы и рассматриваемого диапазона рабочих частот

$$\left[\frac{R_x}{R_0}(h) \right]^2 = r^2(h) = \frac{\left[\frac{\omega - \omega_L}{\nu_m} C_{3/2}^- \right]^2 + \left[\frac{5}{2} C_{5/2}^- \right]^2}{\left[\frac{\omega + \omega_L}{\nu_m} C_{3/2}^+ \right]^2 + \left[\frac{5}{2} C_{5/2}^+ \right]^2}; \quad (5)$$

$$2 \frac{\omega}{c} (x_x - x_0) = \frac{5}{2} \frac{4 \pi e^2 N(h)}{m \nu_m(h)} [C_{5/2}^- - C_{5/2}^+] \quad (6)$$

и $C_p^\pm = C_p \left(\frac{\omega \pm \omega_L}{\nu_m(h)} \right)$ — интегралы вида $C_p(y) = \frac{1}{p!} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^p e^{-\varepsilon}}{\varepsilon^2 + y^2} d\varepsilon$. Изме-

ря отношение $a(h) = \sqrt{\frac{A_x^2}{A_0^2}}(h)$ на двух соседних высотах h_1 и h_2 , получаем

$$\ln \left[\frac{r(h_2)}{r(h_1)} \right] - 2 \frac{\omega}{c} (x_x - x_0) \Delta h = \ln \left[\frac{a(h_2)}{a(h_1)} \right], \quad (7)$$

где $\Delta h = h_2 - h_1$. Уравнение (7) позволяет найти число соударений ν_m , если известна концентрация электронов N . В общем виде решать уравнение (7) приходится численным методом. Для этой цели могут быть полезными графики функций $r(\nu_m)$ и $F(\nu_m) = 2 \frac{\omega}{c} \left(\frac{x_x - x_0}{N} \right) \Delta h$ в зависимости от частоты соударений ν_m , изображенные на рис. 4. Кривые 1 и 3 на рис. 4 относятся к частоте $f_1 = 5,75 \text{ МГц}$, кривые 2 и 4 — к частоте 3 МГц . Интервал Δh в расчетах (кривые 3 и 4) взят равным $2,5 \text{ км}$. Для удобства практической работы с графиками значения функции $F(\nu_m)$ на рис. 4 умножены на коэффициент $0,43$.

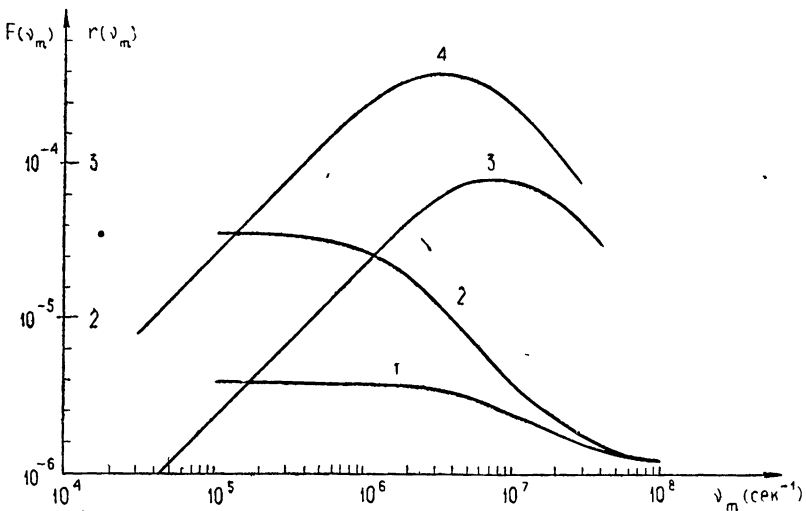


Рис. 4.

Определение ν_m существенно облегчается, если

$$\ln \left[\frac{r(h_1)}{r(h_2)} \right] \ll \ln \left[\frac{a(h_2)}{a(h_1)} \right]. \quad (8)$$

В этом случае

$$F(\nu_m) N = \ln \left[\frac{a(h_1)}{a(h_2)} \right] \quad (9)$$

и значение ν_m находится непосредственно по графику зависимости $F(\nu_m)$. Выполнения условия (8) можно ожидать при относительно малых ν_m , когда изменения функции $r(\nu_m)$ становятся весьма незначительными. Как видно из кривой 1 рис. 4, на частоте 5,75 МГц $r(\nu_m)$ практически остается постоянной при $\nu_m < 10^6 \text{ сек}^{-1}$. Если же $\nu_m \ll \omega$ и $\omega_L^2 \ll \omega^2$, то, пользуясь формулой Апплетона—Хартри для комплексного показателя преломления и соотношением $\nu = \frac{5}{2} \nu_m$, где ν —эффективное число соударений, вместо (7) имеем

$$\frac{40 \pi e^2 \omega_L \nu_m N}{m \omega^3 c} = \ln \left[\frac{a(h_1)}{a(h_2)} \right],$$

откуда

$$\nu_m = \frac{B}{N} \ln \left[\frac{a(h_1)}{a(h_2)} \right], \quad (10)$$

где

$$B = \frac{m \omega^3 c}{40 \pi e^2 \omega_L}.$$

Из (10) следует, что при относительных ошибках измерений $\ln \frac{a(h_1)}{a(h_2)}$ и N порядка 10—20% погрешность определения ν_m будет составлять около 15—30%. Такого же порядка погрешностей следует ожидать и при увеличении ν_m до тех пор, пока существенно не вырастут ошибки измерений N и $\ln \frac{a(h_1)}{a(h_2)}$. Следует иметь в виду, что погрешности будут изменяться от случая к случаю в зависимости от обстоятельств эксперимента—от соотношения уровней полезного сигнала и помех, продолжительности записи и т. п.

3. В качестве иллюстрации к описанному методу на рис. 5 крестиками и кружочками показаны предварительные результаты определения ν_m во время двух внезапных ионосферных возмущений. Передатчик работал на частоте 5,75 МГц с длительностью импульса 50 мксек. Раздельный прием обыкновенной и необыкновенной компонент осуществлялся с помощью антенны, имеющей диаграмму направленности порядка $12^\circ \times 12^\circ$ по уровням половинной мощности. Высотно-временные зависимости $A_x(h, t)$ и $A_0(h, t)$ регистрировались кинокамерой с экрана осциллографа. Эти зависимости использовались как для нахождения коэффициентов корреляции $\rho_{A_0 A_x}(h)$, так и для вычисления отношений $\sqrt{A_x^2/A_0^2}(h) = a(h)$. Крестики на рис. 5 относятся к 24.10.1969 г. (07 45 UT), а кружки—к 18.6.1970 (06 50 UT)*. На этом же рисунке приведены примерные границы разброса зависимостей $\nu_m(h)$, построенные по литературным данным [4—10]. Сплошные линии относятся к летним, а пунктирные—к зимним измерениям ν_m в умеренных широтах. Как видно из рис. 5, полученные в настоящей работе значения ν_m совпадают в пределах ошибок измерений с данными других

* Профили $N(h)$, полученные корреляционным методом для этих вспышек, приведены в [2].

авторов, хотя и несколько смещены в сторону нижних границ соответствующих областей.

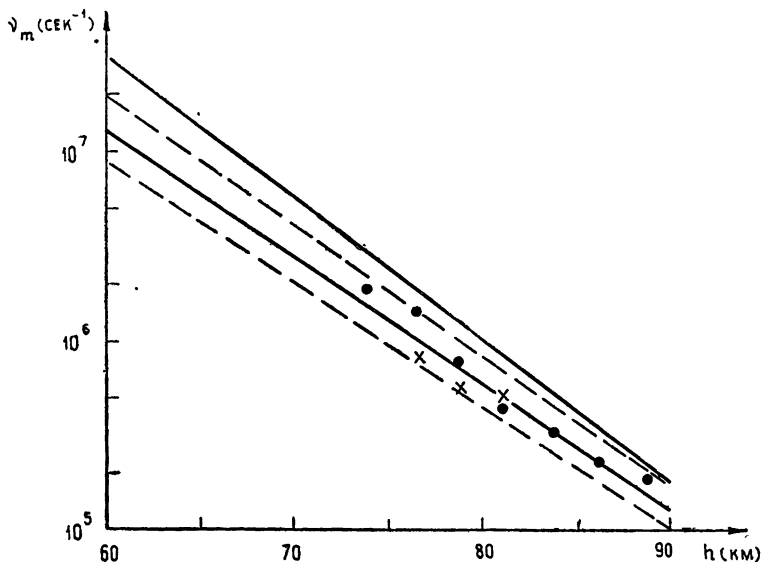


Рис. 5.

В г. Горьком в 1970 г. наблюдения методом частичных отражений были проведены во время нескольких десятков внезапных ионосферных возмущений. Результаты этих наблюдений обрабатываются и будут изложены в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1331 (1971).
2. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1452 (1971).
3. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 504 (1972).
4. A. J. Kantor, A. E. Cole, J. Appl. Meteorol., 4, 228 (1965).
5. E. V. Thrane, A. Haug, B. Bjelland, M. Anastasiadis, E. Tsagakis, J. Atm. Terr. Phys., 30, 135 (1968).
6. J. A. Kane, J. Atm. Terr. Phys., 23, 338 (1961).
7. J. S. Belrose, H. J. Burke, J. Geophys. Res., 69, № 13, 2799 (1964).
8. M. Jespersen, A. Haug, B. L. Landmark, Proceeding of the NATO Advanced Study Institute held at Finse, Norway, April, 1965. Edited by Jon Frihaden, North-Holland Publishing Company John Wiley and Sons, INC—New York, 1966, p. 27.
9. J. S. Belrose, L. R. Bode, L. W. Hewitt, Proceeding of the NATO Advanced Study Institute held at Finse, Norway, April, 1965. Edited by Jon Frihagen, North-Holland Publishing Company John Wiley and Sons, INC—New York, 1966, p. 35.
10. W. J. Beynon, S. Rangaswamy, J. Atm. Terr. Phys., 31, № 7, 891 (1969).

SIMULTANEOUS MEASUREMENTS OF THE ELECTRON DENSITY AND THE COLLISION FREQUENCY IN IONOSPHERIC *D*-REGION BY THE METHOD OF PARTIAL REFLECTION

E. A. Benediktov, L. V. Grishkevich, V. A. Ivanov

The electron density N in the ionospheric *D*-region may be found by the correlation coefficient of amplitudes of ordinary and extraordinary radio wave components back-scattered by *D*-region inhomogeneities. Using the simultaneous measurement of the difference in the normal wave differential absorption one may find the number of electron collisions with the neutral molecules ν_m . A method of estimating N and ν_m is described. The preliminary measurement results of ν_m during two sudden ionospheric disturbances at the frequency 5.75 Mc/s are given.

УДК 621.378.33

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА НА ВОЛНЕ 3,39 мк

И. А. Андропова, П. А. Хандохин

Рассчитаны поворот плоскости поляризации и смещение частоты генерации в лазерах с различными конфигурациями резонатора при наложении продольного магнитного поля на активную среду. Экспериментальное исследование проводилось на He³-Ne²⁰ лазере с треугольным резонатором на волне 3,39 мк. Экспериментальные измерения находятся в удовлетворительном согласии с теоретическими оценками. Наблюдалась ликвидация области конкуренции при подаче магнитного поля.

В настоящее время имеется обширная литература по вопросу воздействия магнитного поля на работу линейных газовых лазеров [1-7]. Рассматривались также случаи кольцевого лазера [8, 9]. Тем не менее ряд вопросов, связанных с воздействием магнитного поля на активную среду лазера, не нашел еще достаточного освещения (особенно это относится к кольцевым лазерам). Цель настоящей работы состояла как в теоретическом рассмотрении воздействия продольного магнитного поля, наложенного на активную среду, на некоторые характеристики лазеров различной конфигурации (линейный, треугольный, четырехугольный), так и в проведении соответствующего экспериментального исследования с треугольным гелий-неоновым лазером на волне 3,39 мк и сопоставлении результатов опытов с выводами теории.

Для расчета эффектов, связанных с наложением продольного магнитного поля на активную среду, используется метод матриц Джонса, который уже применялся в ряде статей для исследования лазерных систем [10-12]. Этот метод является достаточно общим, позволяет проводить расчет при любых видах анизотропии потерь в резонаторе и активной среде лазера. Расчеты проводились в основном для выяснения поляризационных эффектов в лазерах с произвольной анизотропией потерь (в частности, при наличии окон Брюстера), а также эффектов смещения и расщепления частоты в треугольных лазерах.

1. РАСЧЕТ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ И ЧАСТОТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Матрицы Джонса для различных оптических элементов приведены в [13]. Матрица для активной среды, помещенной в продольное постоянное магнитное поле H , согласно проведенному расчету оказалась равной

$$S^+ = S^- = \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где значки \pm относятся к встречным направлениям распространения волн. Элементы матрицы A и B связаны с коэффициентом усиления $K_{1,2}$ и дополнительными фазовыми набегам в среде $\varphi_{1,2}$; здесь и далее индексы 1 и 2 относятся соответственно к право- и лево-циркулярно-поляризованным волнам. Значения A и B равны

$$A = \frac{1}{2} (K_1 e^{i\varphi_1} + K_2 e^{i\varphi_2}); \quad (2)$$

$$B = \frac{1}{2} [K_1 e^{i(\varphi_1 - \pi/2)} + K_2 e^{i(\varphi_2 + \pi/2)}]. \quad (3)$$

Вводя диэлектрическую восприимчивость среды для волн 1 и 2, $\kappa_{1,2} = \kappa'_{1,2} - i\kappa''_{1,2}$, можем записать

$$K_{1,2} = \exp\left(\frac{4\pi^2 l}{\lambda_0} \kappa'_{1,2}\right); \quad (4)$$

$$\varphi_{1,2} = \frac{4\pi^2 l}{\lambda_0} \kappa''_{1,2}, \quad (5)$$

где l — длина активной среды, λ_0 — длина волны.

При достаточно малых интенсивностях волн, распространяющихся в среде, зависимостью κ от интенсивности можно пренебречь. Для случая больших интенсивностей примем для κ обычно принимаемую аппроксимацию. Однако в нашем случае следует иметь в виду, что наложение продольного магнитного поля вызывает расщепление кривой усиления среды на две кривые усиления волн 1 и 2, сдвинутые по частоте относительно исходной кривой усиления на величину $\pm \Omega$, где $\Omega = (g\mu_0/h)H$ — зеемановское расщепление (μ_0 — магнетон Бора, g — фактор Ланде, h — постоянная Планка).

Обозначим через $P_{1,2}^+$ мощности волн 1 и 2, распространяющихся в среде слева направо, а через $P_{1,2}^-$ — мощности таких же волн во встречном направлении. Воспользовавшись обычным представлением о провалах Беннета [14] в кривой усиления и учитывая, что в каждой кривой усиления в магнитном поле будет 4 провала (2 «своих» и 2 «чужих»), можем записать

$$\begin{aligned} \kappa_1^\pm = \kappa_0 \left\{ \exp\left[-\left(\frac{\delta - \Omega}{0,6\Delta\nu_D}\right)^2\right] - \frac{\gamma}{2} \left[P_1^\pm \exp\left[-\left(\frac{\delta - \Omega}{0,6\Delta\nu_D}\right)^2\right] + \right. \right. \\ \left. \left. + P_1^\mp \frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta - \Omega}{0,6\Delta\nu_D}\right)^2\right]}{1 + 4[(\delta - \Omega)/\Delta\nu_N]^2} + P_2^\mp \frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta + \Omega}{0,6\Delta\nu_D}\right)^2\right]}{1 + 4(\delta/\Delta\nu_N)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + P_2^\pm \frac{\exp\left[-\left(\frac{\delta + \Omega}{0,6\Delta\nu_D}\right)^2\right]}{1 + 4(\Omega/\Delta\nu_N)^2} \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь γ — параметр насыщения, $\delta = \nu_r - \nu_0$ — отстройка частоты генерации ν_r от центра доплеровской кривой, $\Delta\nu_D$ — ширина доплеровской кривой усиления, $\Delta\nu_N$ — ширина естественной линии перехода с учетом соударений. Форма провала принята лоренцевской с шириной $2\Delta\nu_N$. В дальнейшем для простоты примем $P_{1,2}^+ = P_{1,2}^-$. Для фазовых набегов в среде расчет дает

$$\varphi_1 = \varphi_1^+ = \varphi_1^- = \frac{8\pi^2 l \kappa_0}{\lambda_0} \left\{ 0,28 \sin \frac{\delta - \Omega}{0,3\Delta\nu_D} - \right. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\delta - \Omega}{\Delta v_N} \frac{P_1 \exp \left[- \left(\frac{\delta - \Omega}{0,6 \Delta v_D} \right)^2 \right]}{1 + 4 [(\delta - \Omega) / \Delta v_N]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\Delta v_N} \frac{P_2 \exp \left[- \left(\frac{\delta + \Omega}{0,6 \Delta v_D} \right)^2 \right]}{1 + 4 (\delta / \Delta v_N)^2} - \frac{\Omega}{\Delta v_N} \frac{P_2 \exp \left[- \left(\frac{\delta + \Omega}{0,6 \Delta v_D} \right)^2 \right]}{1 + 4 (\Omega / \Delta v_N)^2} \right] \end{aligned}$$

Значения κ_2^\pm и $\varphi_2 = \varphi_2^+ = \varphi_2^-$ получаются заменой в (6) и (7) Ω на $-\Omega$ и перестановкой индексов 1 и 2.

Заметим, что при отстройке $\delta = 0$ и при $P_1 = P_2$ имеем

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi, \quad K_1 = K_2 = K. \quad (8)$$

В этом случае матрица (1) представляет собой обычную матрицу Джонса для элемента Фарадея [10], умноженную на коэффициент K . Расчет начнем со случая кольцевого лазера с треугольным резонатором (рис. 1). Согласно схеме расчета лазерных систем с использованием матриц Джонса (см., например, [10]) запишем матрицу системы для луча, бегущего вправо от точки p (на выходе этого луча):

$$S_p^+ = S_3^+ S_2^+ S_1^+ S_{R_3} S_{R_2} S_{R_1}, \quad (9)$$

а для луча, бегущего влево, выход следует рассматривать в точке q :

$$S_q^- = S_{R_2} S_{R_3} S_1^- S_2^- S_3^- S_{R_1}. \quad (10)$$

Здесь

$$S_1^+ = S_1^- = S_3^+ = S_3^- = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}, \quad (11)$$

где a и b — коэффициенты пропускания (по амплитуде) окон Брюстера x - и y -компонент излучения.

Для зеркал, как и в работе [10], полагаем

$$S_{R_i} = R_i \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Подставляя (1), (11) и (12) в (9) и (10), получаем

$$S_p^+ = S_q^- = S = R \begin{vmatrix} Aa^2 & -Bab \\ -Bab & -AB^2 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

$R = R_1 R_2 R_3$. Решая уравнение $SI = \lambda I$ (см. [10]), находим два собственных значения λ и соответственно две величины $\zeta = E_x/E_y$, характеризующие поляризацию излучения:

$$\lambda = \frac{R}{2} \{ A(a^2 - b^2) \pm [A^2(a^2 + b^2) + 4B^2a^2b^2]^{1/2} \}; \quad (14)$$

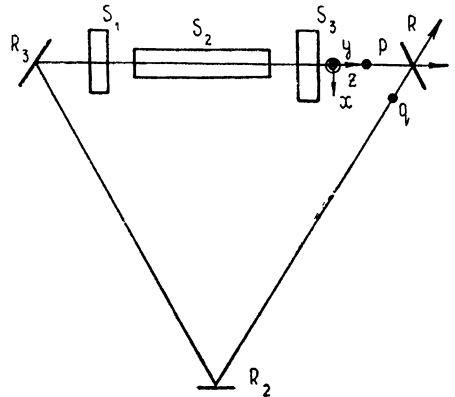


Рис. 1. R_1, R_2, R_3 — зеркала, S_1, S_3 — наклонные, плоскопараллельные изотропные пластинки (ось y расположена в плоскости падения волны на пластинку), S_2 — активная среда в продольном магнитном поле.

$$\zeta = - \frac{RAb^2 + \lambda}{RBab}. \quad (15)$$

Для установившегося режима генерации имеем $|\lambda| = 1$. Из-за конкуренции генерация обычно происходит на той поляризации, которая более «добротна», т. е. для которой условие $|\lambda| = 1$ выполняется при меньших значениях K . Фаза ψ собственного значения λ определяет смещение частоты генерации в магнитном поле:

$$\Delta\nu(H) = - \frac{c}{2\pi L} \psi, \quad (16)$$

здесь L — длина периметра резонатора, c — скорость света в вакууме.

В центре линии ($\delta = 0$) и при $P_1 P_2$ выполняется (8) и легко видеть, что при этом ζ и λ при любом магнитном поле остаются действительными величинами. Отсюда следует, что поляризация излучения будет линейной и $\psi = 0$ (т. е. смещение частоты равно нулю). При этом поворота плоскости поляризации при наложении магнитного поля получаем выражение

$$\operatorname{tg} \beta = \zeta = \frac{ab}{a^2 + b^2} \varphi. \quad (17)$$

Для окон Брюстера можно положить $a = 0,85$, $b = 0,99$; при этом $\operatorname{tg} \beta \approx 0,5\varphi$ — практически то же, что и без окон Брюстера ($a = 1$, $b = 1$). Отметим, что это имеет место только для треугольного кольцевого лазера: для линейного и четырехугольного кольцевого лазеров поворот плоскости поляризации существенно зависит от анизотропии резонатора. Заметим также, что поворот плоскости поляризации вдвое меньше, чем поворот, даваемый самой средой из-за эффекта Фарадея, равный φ .

При отстройке от центра ζ и λ становятся комплексными величинами, что говорит о появлении эллиптичности поляризации излучения и смещения частоты генерации. Из-за громоздкости выражения в общем случае ограничимся случаем малой эллиптичности; при этом имеем отношение малой и большой осей эллипса:

$$\rho \approx \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{K_1^2 - K_2^2}{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (18)$$

Расчет для фазы ψ дает

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{4abR} \frac{K_1 \sin \varphi_1 + K_2 \sin \varphi_2}{K_1 K_2 \cos((\varphi_1 + \varphi_2)/2)}}{1 + \frac{b^2 - a^2}{4abR} \frac{K_1 \cos \varphi_1 + K_2 \cos \varphi_2}{K_1 K_2 \cos((\varphi_1 + \varphi_2)/2)}}. \quad (19)$$

При малых отстройках, когда $K_1 \approx K_2$, легко видеть, что

$$\psi \approx \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad (20)$$

т. е. смещение частоты в треугольном лазере слабо зависит от наличия окон Брюстера. Подставляя (7) и (20) в (16), находим функцию $\Delta\nu(H)$. В эксперименте измеряется смещение частоты, вызываемое подачей H , т. е. $\Delta\nu(H) - \Delta\nu(0) = f(H, \delta)$. Для простого случая, когда $P_1 = P_2 = P$, эта функция протабулирована на ЭВМ для ряда значений параметров. Эта функция является нечетной по отношению к отстройке δ и четной

по отношению к H . На рис. 4 изображена функция $f(H, \delta)$ для случаев $\gamma P = 0$ и $\gamma P = 0,25$ в виде пунктирных кривых 1 и 2.

Итак, при подаче продольного магнитного поля в активную среду треугольного лазера наряду с поворотом плоскости поляризации наблюдается смещение частоты генерации при $\delta \neq 0$ в обеих встречных волнах. Вместе с тем, расчет показывает, что разностной частоты не должно быть, т. е. $\nu_r^+ = \nu_r^-$ (вследствие того, что $\lambda^+ = \lambda^-$).

Как уже отмечалось, используемый метод позволяет рассчитать поляризационные и частотные эффекты в лазерах с произвольной конфигурацией резонатора. Расчет дает:

для линейного лазера:

$$\lambda = \frac{R}{2} \{(a^4 + b^4) A^2 - 2a^2 b^2 B^2 \pm (a^2 + b^2) A [(a^2 - b^2) A^2 - 4a^2 b^2 B^2]^{1/2}\}, \quad (21)$$

где $R = R_1 R_2$,

а для четырехугольного

$$\lambda = \frac{R}{2} \{(a^2 + b^2) A \pm [(a^2 - b^2) A^2 - 4a^2 b^2 B^2]^{1/2}\}, \quad (22)$$

где $R = R_1 R_2 R_3 R_4$. При условиях, приводящих к (8) ($\delta = 0, P_1 = P_2$), и при малых магнитных полях λ будет действительным; при этом будет отсутствовать смещение частоты, а поляризация будет линейной. Для поворота плоскости поляризации расчет дает

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ab}{a^2 + b^2} \varphi. \quad (23)$$

Это имеет место и для линейного, и для четырехугольного резонаторов. Как видно из (23), поворот плоскости поляризации в этих случаях существенно зависит от анизотропии резонатора: при уменьшении анизотропии ($a \rightarrow b$) поворот плоскости поляризации возрастает. Для случая окон Брюстера $\operatorname{tg} \beta \approx 3\varphi$, т. е. примерно втрое превышает поворот, даваемый самой средой.

Ранее отмечалось, что из двух решений λ на опыте реализуется то, которое более энергетически выгодно. При подаче магнитного поля добротности мод будут сближаться. При $\delta = 0$ магнитные поля, при которых оба значения λ сравниваются, существенно зависят от анизотропии резонатора; при $a = b$ это наступает при $H = 0$. С подачей поля генерация происходит на двух собственных волнах разной частоты, которые являются волнами с противоположными круговыми поляризациями (этот факт хорошо известен из литературы). При $a \neq b$ (окна Брюстера) в линейном лазере при достаточных полях также возможна генерация на двух частотах. При этом собственные волны оказываются эллиптически поляризованными*.

Для наглядности оценки значения некоторых величин приведены ниже в табл. 1, причем использованы следующие обозначения: φ — фазовый набег волны, даваемый средой в центре линии ($\delta = 0$), равный повороту плоскости поляризации волны за один проход активной среды; $K_0^2 = \exp(8\pi^2 l x_0 / \lambda_0)$ — коэффициент усиления по мощности при $\delta = 0$ и $\Omega = 0$; $\beta_{л\tau\varphi}$ — поворот плоскости поляризации излучения соответственно в линейном, треугольном и четырехугольном лазерах; $f_\tau(H\delta)$ — смещение частоты генерации треугольного лазера; ρ_τ — степень эллиптичности в треугольном лазере.

* Для лазера на $\lambda_0 = 3,39 \text{ мк}$ это может иметь место при $40 \div 50 \text{ эрст}$; при $\lambda_0 = 0,63$ и $1,15 \text{ мк}$ это практически нереализуемо (из-за малости K на этих волнах).

Оценки приведены для случая $H = 50$ эрст при наличии окон Брюстера и при длине активной среды $l = 14$ см.

Таблица 1

| λ_0 (мк) | K_0^2 | $\Delta\nu_D$ (Мгц) | $\Delta\nu_N$ (Мгц) | φ | $\beta_{лч} = \frac{ab\varphi}{b^2 - a^2}$ | $\beta_T = \frac{ab\varphi}{a^2 + b^2}$ | $\frac{f_T}{\delta \sim 150 \text{ Мгц}}$ | ρ_T |
|------------------|---------|---------------------|---------------------|-----------|--|---|---|---------------|
| 0,63 | 1,04 | 1500 | 250 | 7' | 21' | 3,5' | ~ 20 кгц | $\sim 0,04\%$ |
| 1,15 | 1,2 | 800 | 200 | 1° | 3° | 0,5 | | |
| 3,39 | 3 | 400 | 150 | 12° | 36° | 6° | 2 Мгц | 4% |

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Экспериментальное исследование проводилось на $\text{He}^3\text{-Ne}^{20}$ лазере с треугольным резонатором на волне 3,39 мк, работавшем в одномодовом режиме. Основные элементы экспериментальной установки изображены на рис. 2. Газоразрядная трубка РТ исследуемого лазера дли-

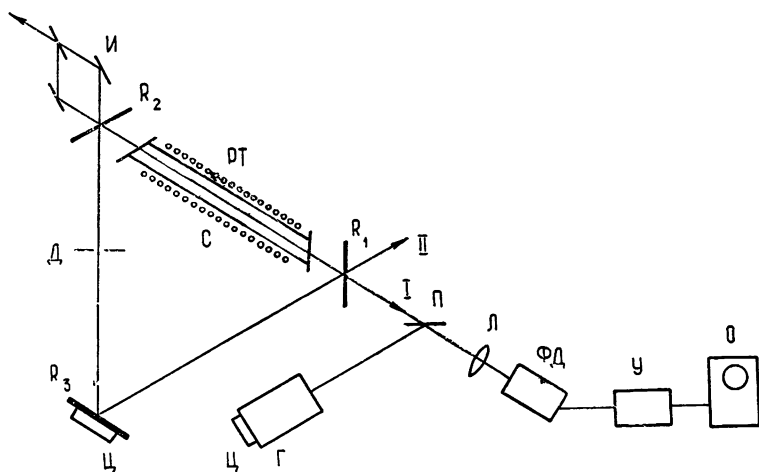


Рис. 2.

ной 140 мм и диаметром 3 мм помещена внутрь соленоида С; питание трубки осуществлялось постоянным током. В опытах использовались трубки как с окнами Брюстера, так и без них*. Соленоид состоял из двух половин, что давало возможность подавать магнитное поле в них как в одну сторону, так и навстречу. Магнитное поле изменялось в пределах от 0 до 100 эрст.

Все три зеркала резонатора плоские; зеркала R_1 и R_2 имели многослойные диэлектрические покрытия с коэффициентом отражения $\sim 85\%$, а зеркало R_3 имело алюминиевое покрытие с коэффициентом отражения $\sim 98\%$. Зеркало R_3 укреплено на пьезоцилиндре Ц; подачей электрического напряжения на цилиндр осуществлялось изменение параметра резонатора, длина которого $L \approx 75$ см. Мощность генерации регулировалась с помощью диафрагмы Д. Излучение лазера фокусировалось линзой Л на фотодиод ФД, с выхода которого сигнал через видеоусилитель У поступал на вход осциллографа О.

Для исследования влияния продольного магнитного поля на частоту генерации лазера использовался метод гетеродинамирования: для этого

* Давление в трубках 1,2 тор при соотношении $\text{He}^3 : \text{Ne}^{20} = 5,6 : 1$.

осуществлялась интерференция излучения исследуемого лазера с излучением линейного лазера (гетеродина) Г с помощью полупрозрачной пластинки П. Периметр лазера Г сканировался с частотой 50 гц; с той же частотой производилась горизонтальная развертка осциллографа. Когда частота сканируемого лазера Г приближалась к частоте исследуемого лазера настолько, что разность частот попадала в полосу усиления (~ 200 кГц) усилителя У, на кривой зоны генерации сканируемого лазера появлялся выброс (импульс, заполненный разностной частотой), по положению которого можно было судить о частоте генерации исследуемого лазера. Включение магнитного поля изменяло местоположение выброса; по величине и направлению его перемещения можно было количественно судить о смещении частоты. Недостатком такого метода являлась его небольшая чувствительность (~ 1 МГц).

При исследовании поляризационных эффектов полупрозрачная пластинка П убиралась, и вместо нее становился поляроид (на рис. 2 не показан). При измерении поворота плоскости поляризации отсчет производился при установке поляроида на минимум пропускания. Погрешность измерений составляла $\pm 1^\circ \div 3^\circ$ (в зависимости от мощности излучения). Опыты проводились при сканировании периметра резонатора L с частотой 50 гц.

Перейдем теперь к результатам опыта. Прежде всего отметим следующее: хорошо известно, что при работе с одним изотопом неона в кольцевом лазере вблизи центра перехода наблюдаются эффекты конкуренции встречных волн. Проведенные опыты показали, что наложение магнитного поля приводит к уменьшению области конкуренции, а при полях 20—30 эрст и выше эффекты конкуренции пропадают. Это связано с указанным выше расщеплением кривой усиления, в результате которого встречные волны начинают взаимодействовать с разными атомами. При $H \sim 20 \div 30$ эрст кривые усиления расходятся на $2\Omega \approx 70 \div 100$ МГц, что соответствует по порядку величин ширине естественной линии перехода. Заметим также, что при подаче магнитного поля в двух половинах соленоида навстречу друг другу ликвидация области конкуренции достигается примерно при тех же токах соленоида.

Результаты измерений поворота плоскости поляризации в центре линии ($\delta = 0$) при наличии окон Брюстера приведены на рис. 3, где по оси абсцисс отложено магнитное поле в эрстедах, а по оси ординат — угол поворота плоскости поляризации β . Все три кривые сняты при разных мощностях генерации, причем $P_1 > P_2 > P_3$. На рис. 3 видно, что увеличение поля H приводит к увеличению угла поворота плоскости поляризации. Смена знака магнитного поля изменяет знак угла поворота. На рис. 3 видно также, что с ростом мощности излучения угол поворота уменьшается. Эти результаты находятся в качественном согласии с расчетом (формулы (7) и (17)). Для $\gamma P = 0$ результат расчета приведен на рис. 3 пунктирной кривой. Из рисунка видно, что расчет по сравнению с экспериментом (кривая 3) дает для угла поворота плоскости поляризации значения в 1,5 раза меньше. Это может быть объяснено неточным знанием параметров системы при расчете по формулам (7) и (17) и приближенным характером самих формул. При включении двух половин соленоида навстречу друг другу поворота плоскости поляризации не наблюдалось, что объясняется нечетным характером зависимости поворота плоскости поляризации от магнитного поля.

Проводилось исследование поворота плоскости поляризации и в луче II. Поворот в ту же сторону и по величине в пределах погрешности совпадает с результатом для луча I.

Было проведено измерение поворота плоскости поляризации с трубкой без окон Брюстера. Как и следует из расчета для случая треуголь-

ного лазера, угол поворота плоскости поляризации оказался одинаковым как для трубки с окнами Брюстера, так и без них (в пределах погрешности измерений).

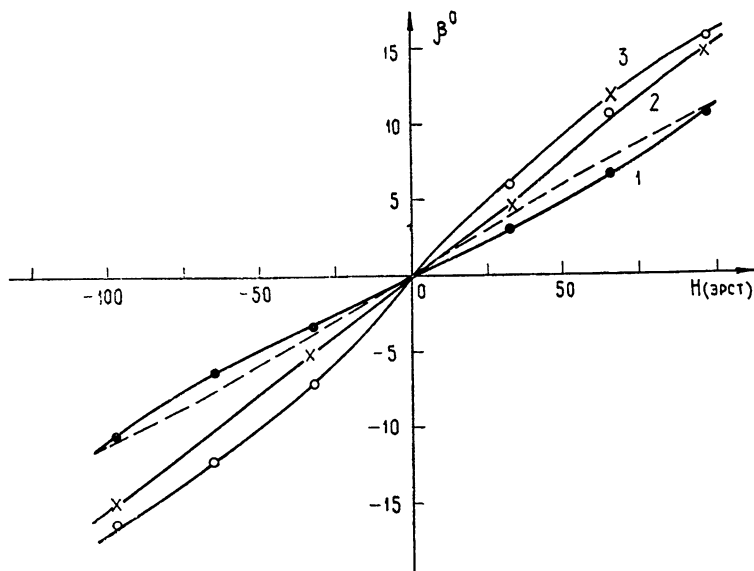


Рис. 3.

При отстройке от центра линии наряду с поворотом плоскости поляризации наблюдалось появление эллиптичности. При полях $H \approx 100$ эрст и при $\delta = 100$ Мгц эллиптичность достигала 10%, что примерно согласуется с данными расчета.

Результаты измерений смещения частоты генерации из-за магнитного поля представлены на рис. 4, на котором по оси абсцисс отложена отстройка δ , а по оси ординат—значения $f(H, \delta)$. По опытным данным, отмеченным точками, проведены кривые 3—5, соответствующие различным значениям H : 3—100 эрст, 4—80 эрст, 5—65 эрст. На этом же рисунке приведены теоретические кривые для $H = 80$ эрст при $\gamma P = 0$ (кривая 1) и $\gamma P = 0,25$ (кривая 2). Из кривой 2 следует, что при малых значениях величина $f(H, \delta) < 0$, т. е. частота из-за магнитного поля приближается к центру линии ν_0 , а при больших значениях δ — $f(H, \delta) > 0$ и частота удаляется от ν_0 . Поведение опытных данных $f(H, \delta)$ при $\delta = 100$ Мгц качественно согласуется с данными расчета, но количественно эксперимент дает примерно в 1,5—2 раза меньшие значения смещений частоты. Смещение частоты в центре при малых отстройках на опыте не было обнаружено.

Экспериментально была также подтверждена следуемая из теории четная зависимость $f(H, \delta)$ от H .

Расхождение теории с экспериментом может быть объяснено тем, что, во-первых, чувствительность используемого метода измерений не позволяет надежно измерять смещение частоты ≤ 1 Мгц, во-вторых, принятые в теории идеализации активной среды неточны (например, аппроксимация лоренцевской кривой), в-третьих, параметры системы (γP , $\Delta\nu_D$, $\Delta\nu_N$) точно не известны. Поэтому можно утверждать лишь об удовлетворительном качественном согласии теории с экспериментом.

Наряду с описанными опытами по определению влияния магнитного поля на поворот плоскости поляризации излучения и на частоту генерации был поставлен опыт по обнаружению разностной частоты

(частоты расщепления) встречных лучей в магнитном поле. Для этого была использована схема интерферометра И (см. рис. 2). Выход схемы подавался на фотодиод и после усиления на измеритель частоты.

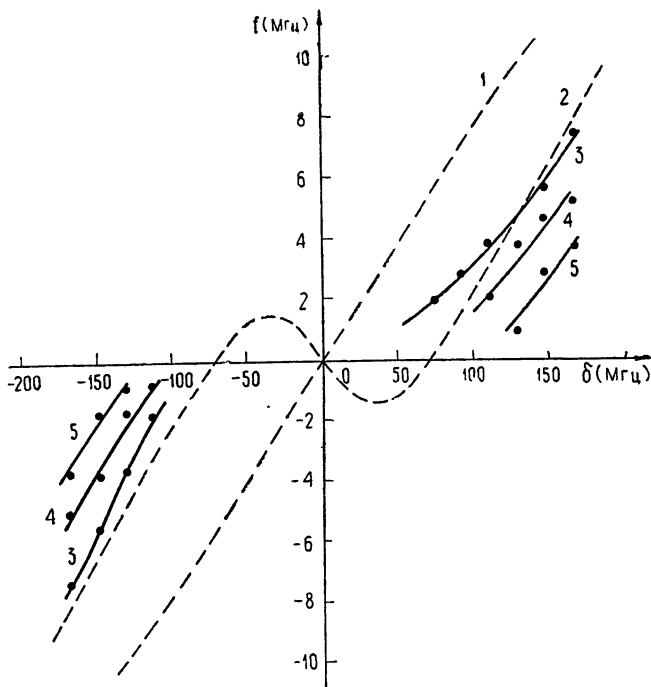


Рис. 4.

Перед подачей магнитного поля производилась тщательная юстировка резонатора на отсутствие частоты расщепления встречных лучей, которая наблюдается в лазере на $3,39 \text{ мк}$ из-за дефектов юстировки [15]. Эксперимент показал, что при подаче магнитного поля появляется разностная частота, которая зависит от величины острейки от центра δ ; при переходе через центр разностная частота, обращаясь в нуль, изменяет знак*. Максимальная частота расщепления при поле $H \approx 100 \text{ эрст}$ и $\delta = 150 \text{ Мгц}$ составляет $\approx 80 \text{ кгц}$. При включении двух половин соленоида навстречу частота расщепления возникает при больших полях и значительно меньше по величине. Расщепление частот встречных волн из приведенного выше анализа не следует. Причины расщепления до конца не ясны и являются предметом дальнейшего исследования.

В заключение считаем своим долгом выразить благодарность И. Л. Берштейну за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Дьяконов, С. А. Фридрихов, УФН, 90, вып. 4 (1966).
2. M. Sargent, W. E. Lamb, Jr. R. L. Fork, Phys. Rev., 164, 437 (1967).
3. W. J. Tomlinson, R. L. Fork, Phys. Rev., 164 466 (1967).
4. С. А. Фридрихов, Д. К. Терехин, Е. Ю. Андреева, ЖТФ, 38, 1101 (1968).
5. Д. К. Терехин, С. А. Фридрихов, ЖТФ, 39, 1919 (1969).
6. Д. К. Терехин, Е. Ю. Андреева, С. А. Фридрихов, ЖПС, 14, 53 (1971).
7. Э. Е. Фрадкин, Л. М. Хаютин, ЖЭТФ, 59, 1634 (1970).

* В этом отношении влияние магнитного поля отличается от влияния юстировки зеркал.

8. G. I. Burrell, T. S. Moss, A. H. Hetherington, *Infrared Physics*, **9**, 199 (1968).
9. A. H. Hetherington, G. I. Burrell, T. S. Moss, *Infrared Physics*, **9**, 109 (1969).
10. В. С. Рубанов, *ЖПС*, **10**, 725 (1969)
11. Э. И. Иванов, М. П. Чайка, *Физика газовых лазеров*, изд. Ленинградского университета, 1969 г.
12. Б. В. Рыбаков, С. С. Скулаченко, А. М. Хромных, И. И. Юдин, *Оптика и спектроскопия*, **27**, 113 (1969).
13. У. Шерклифф, *Поляризованный свет*, изд. Мир, М., 1965.
14. В. Беннет, *Газовые лазеры*, изд. Мир, М., 1964
15. И. А. Андропова, И. Л. Берштейн, *ЖЭТФ*, **57**, 100 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 сентября 1971 г.

INVESTIGATION OF THE MAGNETIC FIELD INFLUENCE ON THE CHARACTERISTICS OF A RING LASER AT THE WAVELENGTH 3.39μ

I. A. Andronova, P. A. Khandokhin

When applying the longitudinal magnetic field on the active medium the rotation of the polarization plane and the shift of the oscillation frequency in lasers with different configuration of the resonator have been calculated. The experimental investigations are carried out at 3.39μ with He³-Ne²⁰ laser having a triangular resonator. The experimental measurements are in good agreement with theoretical estimations. The elimination of the competition region at the supplying of the magnetic field is observed.

УДК 535.31

ПОЛУЧЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ОБЪЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ

З. И. Фейзулин

С использованием разложения светового и звукового полей на плоские волны рассмотрено взаимодействие цилиндрической световой волны с волновым ультразвуковым полем, получающимся в результате дифракции плоской ультразвуковой волны на произвольном двумерном объекте. Показано, что при определенных условиях дифрагированное световое поле воспроизводит исследуемый двумерный объект.

1. В 1966 году Корпелем [1] был предложен способ получения оптического изображения поперечного сечения ультразвукового (УЗ) пучка, основанный на брегговской дифракции света. В этой работе на основе простых геометрооптических рассуждений найдены правила преобразования УЗ поля в оптическое изображение. Позднее появилась вторая работа Корпеля [2], в которой была дана дифракционная теория образования оптического изображения двумерного УЗ волнового поля, получающегося в результате дифракции плоской УЗ волны на произвольном одномерном объекте.

В данной работе, используя разложение светового и звукового полей на плоские волны, мы рассматриваем взаимодействие света и звука в трехмерном случае. Этому же вопросу посвящена и недавняя работа Картера [3], но ее результаты получены при излишне жестких ограничениях и носят приближенный характер. В частности, они не допускают точный предельный переход к случаю одномерного объекта, исследованному в [2]. Найденным же в [3] условиям возможности получения оптического изображения двумерного объекта трудно дать физическое истолкование.

2. Рассматриваемая задача более точно формулируется следующим образом. Пусть в плоскости $z = 0$ расположен двумерный объект с комплексной функцией пропускания для ультразвука $f(x, y)$, на который в положительном направлении оси z падает плоская УЗ волна $e^{iKz} \left(K = \frac{2\pi}{\Lambda} \right)$ (рис. 1). Область, занимаемая волновым УЗ полем, освещается цилиндрической световой волной, излучаемой светящейся нитью, параллельной оси y и проходящей через точку $r_0 = (x_0, 0, z_0)$. Световая волна испытывает дифракцию на неоднородностях диэлектрической проницаемости фотоупругой среды, вызываемых УЗ полем. Задача состоит в том, чтобы найти связь между $f(x, y)$ и структурой дифрагированного светового поля и выяснить условия, при которых дифрагированный свет в точности воспроизводит функцию пропускания $f(x, y)$.

Предполагается, что изменение диэлектрической проницаемости среды, обусловленное УЗ волной, настолько мало, что можно восполь-

зоваться борновским приближением. Если относительное изменение диэлектрической проницаемости есть

$$\frac{\Delta\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = CS(\mathbf{r}); \quad (1)$$

где $S(\mathbf{r})$ — УЗ поле, а C — фотоупругая постоянная, то рассеянное световое поле в борновском приближении равно

$$E_s(\mathbf{r}) = \frac{k^2 C}{4\pi} \int_V \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} S(\mathbf{r}') E_0(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света в среде с невозмущенной диэлектрической проницаемостью, а $E_0(\mathbf{r}') = H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|)$ — поле линейного светового источника ($H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|)$ — функция Ганкеля). Интегрирование в (2) ведется по занятому УЗ полем объему V , который в дальнейшем мы будем считать бесконечным.

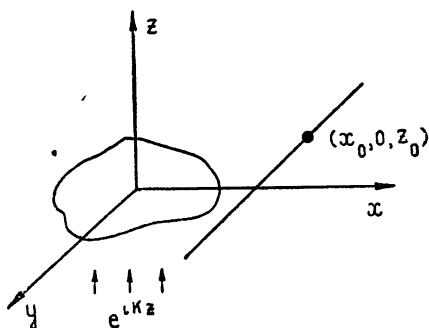


Рис. 1.

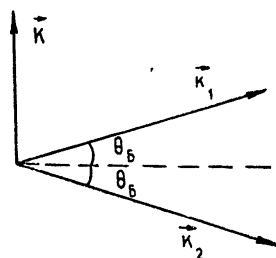


Рис. 2.

Представим все множители, входящие в подынтегральное выражение в (2), в виде суперпозиции плоских волн и проведем интегрирование по \mathbf{r}' , которое приводит к появлению в оставшемся интеграле трех дельта-функций. Наличие дельта-функций позволяет выполнить трехкратное интегрирование в пространстве волновых чисел, в результате которого получаем следующее выражение для рассеянного поля:

$$E_s(\mathbf{r}) = E_{s1}(\mathbf{r}) + E_{s2}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$E_{s1,2}(\mathbf{r}) = \frac{iC}{\sin 2\theta_B} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(P, Q)}{\sqrt{1 - \mu^2/\cos^2 \theta_B}} \exp \left\{ i \left[P \left(x - \frac{x - x_0}{2(1 - \mu^2)} \pm \frac{(z - z_0) \operatorname{ctg} \theta_B}{2(1 - \mu^2)} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\cos^2 \theta_B}} \right) + Qy + M \left(z - \frac{z - z_0}{2(1 - \mu^2)} \mp \frac{(x - x_0) \operatorname{ctg} \theta_B}{2(1 - \mu^2)} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\cos^2 \theta_B}} \right) \right] \right\} dP dQ. \quad (4)$$

Здесь $M = \sqrt{K^2 - P^2 - Q^2}$, $\mu = Q/K$, θ_B — брэгговский угол ($\sin \theta_B = \frac{K}{2k} = \frac{\lambda}{2\Lambda}$), а через $f(P, Q)$ обозначен пространственный спектр дифракционного УЗ поля, определяемый по формуле

$$f(P, Q) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-iPx - iQy) dx dy. \quad (5)$$

Наличие двух слагаемых в формуле (3) связано с тем, что каждая плоская звуковая волна в разложении дифракционного звукового поля даёт две дифрагированные плоские световые волны, выделяя из спектрального разложения поля линейного светового источника те компоненты, волновые векторы которых составляют угол $2\theta_B$ (рис. 2).

В частном случае одномерного объекта, свойства которого меняются только в направлении оси x , $f(P, Q) = f(P) \delta(Q)$ и из формулы (4) следует

$$E_{s1,2}(x, z) = \frac{iC}{\sin 2\theta_B} S(\tilde{x}_{1,2}, \tilde{z}_{1,2}), \quad (6)$$

где $\tilde{x}_{1,2}$ и $\tilde{z}_{1,2}$ — преобразованные координаты, выражаемые формулами

$$\tilde{x}_{1,2} = \frac{k}{K} [(x + x_0) \sin \theta_B \pm (z - z_0) \cos \theta_B]; \quad (7)$$

$$\tilde{z}_{1,2} = \frac{k}{K} [\mp (x - x_0) \cos \theta_B + (z + z_0) \sin \theta_B]. \quad (8)$$

Таким образом, в случае одномерного объекта рассеянное световое поле в точности воспроизводит дифракционное звуковое поле в соответствии с формулами (6) — (8). Геометрический смысл преобразований (7) и (8) заключается в уменьшении масштаба в λ/Λ раз, переносе начала координат в точку

$$x'_0 = x_0 \cos 2\theta_B \pm z_0 \sin 2\theta_B, \quad (9)$$

$$z'_0 = \mp x_0 \sin 2\theta_B + z_0 \cos 2\theta_B \quad (10)$$

и повороте осей координат на угол $\frac{\pi}{2} \mp \theta_B$. Аналогичный результат был получен в работе [2]. На рис. 3 в качестве иллюстрации правил преобразования (7) — (8) показано соответствие между предметными линиями и линиями изображений.

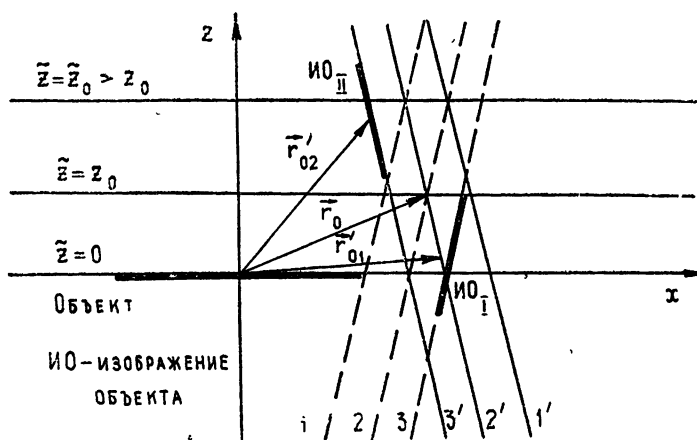


Рис. 3. 1, 1' — $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 = \tilde{z}_0$; 2, 2' — $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 = z_0$; 3, 3' — $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 = 0$.

Рассмотрим теперь случай двумерного объекта и, соответственно, трехмерного дифракционного звукового поля. Для простоты в формуле (3) оставим первое слагаемое. Естественно ожидать, что если свойства объекта меняются достаточно медленно по оси y , то рассеянный свет будет воспроизводить трехмерное дифракционное звуковое поле по координатам x и z в соответствии с формулами (7) и (8), а по координате y , без всяких изменений. Действительно, поскольку в этом случае пространственный спектр $f(P, Q)$ быстро спадает до нуля с ростом Q , можно в предэкспоненциальном множителе и показателе экспоненты подынтегрального выражения в (4) отбросить члены порядка $\mu^2 = Q^2/K^2 \ll 1$. В результате получим

$$E_s(x, y, z) = \frac{iC}{\sin 2\theta_B} S(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (11)$$

где \tilde{x} и \tilde{z} определяются соотношениями (7) и (8), а $\tilde{y} = y$.

Найдем теперь более точные условия, при которых возможен переход от формулы (4) к (11). Для этого разложим показатель экспоненты в (4) в ряд по степеням μ^2 и потребуем, чтобы члены, пропорциональные μ^2 , были малы по сравнению с единицей. Получающиеся при этом неравенства, записанные через преобразованные координаты \tilde{x} и \tilde{z} , с учетом малости брэгговского угла имеют вид

$$\mu^2 \left| P \left(\frac{\tilde{z} - z_0}{2} \sin \theta_B + \frac{\tilde{x} - x_0}{2} \right) \right| \ll 1; \quad (12)$$

$$\mu^2 \left| M \left(\frac{\tilde{z} - z_0}{2} + \frac{\tilde{x} - x_0}{2} \sin \theta_B \right) \right| \ll 1. \quad (13)$$

Таким образом, если выполняются неравенства (12) и (13), то дифракционное звуковое поле в точке $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ с точностью до постоянного множителя совпадает с рассеянным световым полем в точке (x, y, z) в соответствии с формулой (11).

Условиям (12) и (13) можно придать наглядный физический смысл.

Рассмотрим для простоты интересный частный случай, когда $\tilde{z} = 0$ (т. е. воспроизводится сам объект) и $z_0 = 0$ (т. е. линейный источник света лежит в одной плоскости с исследуемым двумерным объектом).

Тогда плоскость $\tilde{z} = 0$, в которой расположен объект, согласно правилам преобразований (7) и (8) перейдет в плоскость, проходящую через линейный источник света и составляющую угол $\pi/2 - \theta_B$ с плоскостью $\tilde{z} = 0$.

Пусть a_x и a_y — самые мелкие масштабы изменения $f(x, y)$ соответственно по осям x и y . Тогда для оценок можно положить $\mu \sim \frac{\Lambda}{a_y}$,

$P \sim \frac{1}{a_x}$, $|M| \sim \frac{1}{\Lambda}$. Подставляя эти значения в неравенства (12)

и (13), получаем два условия для масштаба изменения свойств объекта вдоль оси y :

$$a_y \gg \Lambda \sqrt{\frac{|\tilde{x} - x_0|}{a_x}}; \quad (14)$$

$$a_y \gg \sqrt{\lambda |\tilde{x} - x_0|}. \quad (15)$$

Первое из этих неравенств означает, что размер a_y намного превышает размер френелевской зоны звука на расстоянии $\frac{\Lambda}{a_x} |\tilde{x} - x_0|$, представляющем собой размер (вдоль оси z) области, в пределах которой имеет место взаимодействие света и звука*. Смысл второго условия заключается в том, что размер a_y велик по сравнению с размером френелевской зоны света на расстоянии $|\tilde{x} - x_0|$, равном дистанции, проходимой светом вдоль оси x в области взаимодействия света со звуком. Полученные условия оптического воспроизведения звукового поля (14) и (15) фактически означают, что исследуемый объект квазизоднороден в направлении оси y , т. е. его можно разбить на ряд однородных вдоль оси y объектов, таких, что, во-первых, в дифракционное звуковое поле каждого из них другие объекты дают пренебрежимо малый вклад и, во-вторых, рассеяние света на каждой из областей дифракционного звукового поля, соответствующих различным объектам, происходит независимо.

В заключение следует отметить, что в отличие от формулы Картера [3] полученное нами выражение для рассеянного светового поля (3), (4) является точным в рамках бронеовского приближения. Это связано с тем, что в [3] неудачно выбран порядок интегрирования в пространстве волновых чисел, в результате чего точное интегрирование оказалось невозможным уже на начальном этапе вычислений. По этой же причине условиям оптического воспроизведения объекта, найденным в [3], трудно дать наглядное толкование, так как они не содержат в явном виде свойств исследуемого объекта.

Автор выражает глубокую благодарность С. М. Рытову и В. В. Караваеву за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. KorpeI, Appl. Phys. Lett., 9, № 12, 425 (1966).
2. A. KorpeI, IEEE Trans., SU-15, № 3, 153 (1968).
3. W. H. Carter, J. Opt. Soc. Am., 60, № 10, 1366 (1970).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
13 мая 1971 г.
после доработки
14 января 1972 г.

OPTICAL IMAGE OF TWO-DIMENSIONAL OBJECT USING ULTRA-SONIC LIGHT DIFFRACTIONS

Z. I. Feizulin

Using the plane wave expansion of light and sound fields, the interaction of a cylindrical light wave with an ultra-sonic field have been considered as a result of diffraction of the plane ultra-sonic wave on an arbitrary two-dimensional object. It is shown that the diffracted light field images the two-dimensional object at the definite conditions.

* Поскольку пространственный спектр дифракционного звукового поля сосредоточен около оси z в узком конусе с угловым размером $\sim \Lambda/a_x$, в процессе взаимодействия света со звуком участвует набор плоских световых волн, волновые векторы которых лежат вблизи оси x в узком конусе с тем же угловым размером $\sim \Lambda/a_x$. Поэтому размер области взаимодействия в направлении оси x по порядку величины равен $\frac{\Lambda}{a_x} |\tilde{x} - x_0|$.

УДК 621.373.42

О ВЗАИМНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ МНОГИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ОБЩУЮ СРЕДУ

Ю. М. Романовский

Методом медленно меняющихся амплитуд рассчитывается полоса взаимной синхронизации, стационарные амплитуды и фазы многих автогенераторов, связанных по принципу «каждый с каждым». Такая система является математической моделью многих автоколебательных химических реакций, связанных через диффузию. Основным предположением при расчете является симметричное распределение собственных частот автономных генераторов и малость коэффициентов связи.

Ряд задач нелинейной теории колебаний сводится к исследованию многих связанных автоколебательных систем с различными видами связи между отдельными системами. Например, в работах [1, 2] изучаются цепочки автогенераторов, каждый из которых связан лишь со своими соседями, в работе [3] рассматриваются генераторы, связанные «звездой». В электротехнике и биофизике [4, 5] исследуются системы, состоящие из многих автогенераторов, связанных через общую нагрузку. Весьма интересной представляется задача о взаимной синхронизации многих спиновых генераторов [6]. Частоты генераторов отличаются друг от друга благодаря имеющейся всегда неоднородности постоянного магнитного поля, в котором происходит прецессия магнитных моментов ядер. Взаимодействие осуществляется через суммарное переменное магнитное поле, создаваемое отдельными атомами.

Исследованию взаимной синхронизации в подобной системе посвящена настоящая работа.

Пусть имеется $n+1$ химических реакторов, в каждом из которых происходит автоколебательная химическая реакция с участием двух веществ X и Y (примеры таких реакций приведены в книге [7]). Реакторы погружены в сосуд, наполненный нейтральным растворителем — «средой», в которой происходит полное перемешивание. Стенки реакторов частично проницаемы, так что молекулы X и Y могут проникать из реакторов в среду и наоборот. Так же как и в [2], будем считать, что $x_i(t)$ и $y_i(t)$ — малые отклонения от стационарных концентраций \bar{X}_i и \bar{Y}_i в i -м реакторе.

В качестве математической модели для описания колебаний $x_i(t)$ и $y_i(t)$ выберем хорошо известные уравнения Ван-дер-Поля. Тогда вся система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i + D_x (x - x_i), \\ \dot{y}_i &= -\omega_i^2 x_i + 2(\delta_0 - \delta_2 x_i^2) y_i + D_y (y - y_i), \\ \dot{x} &= k_x \sum_{j=-n/2}^{n/2} (x_j - x), \quad \dot{y} = k_y \sum_{j=-n/2}^{n/2} (y_j - y) \\ &(i = -n/2, \dots, 0, \dots, n/2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ — отклонения от стационарных концентраций \bar{X} и \bar{Y} в среде, D_x и D_y — коэффициенты диффузии веществ X и Y из реактора в среду, а k_x и k_y — коэффициенты диффузии из среды в реактор. Если проницаемость стенок для молекул X и Y одинакова в обе стороны, то между величинами D_x , D_y , k_x и k_y существуют следующие соотношения:

$$k_x = D_x \frac{V_p}{V_c}, \quad k_y = D_y \frac{V_p}{V_c}, \quad (2)$$

где V_p — объем реактора, а V_c — объем общей среды.

Будем считать, что автоколебания в реакторах отличаются друг от друга лишь частотами, а $D_x \ll \delta_0 \ll \omega$, $D_x \ll \delta_2 \ll \omega$, $D_x \approx D_y$. Третье и четвертое уравнения системы (1) являются линейными. Поэтому x и y можно выразить приближенно через x_i и y_i . Если в системе установилась синхронная частота ω и решение ищется в виде

$$x_i(t) = A_i(t) \cos [\omega t + \varphi_i(t)], \quad (3)$$

то

$$\dot{x} \approx \varepsilon_x \omega \sum_{j=-n/2}^{n/2} A_j \cos [\omega t + \varphi_j + \vartheta_x], \quad (4)$$

$$\dot{y} \approx -\varepsilon_y \omega (1 + D) \sum_{j=-n/2}^{n/2} \sin [\omega t + \varphi_j + \vartheta_y].$$

Здесь ϑ_x (ϑ_y) означает малый сдвиг фазы (если $V_c \gg V_p$),

$$\vartheta_x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{nk_x}, \quad \vartheta_y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{nk_y}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_x = \frac{k_x}{\sqrt{\omega^2 + n^2 k_x^2}}, \quad \varepsilon_y = \frac{k_y}{\sqrt{\omega^2 + n^2 k_y^2}}.$$

Преобразуем систему (1). Воспользовавшись выражениями (4) и пренебрегая членами порядка $\varepsilon_x D_x \delta_0/\omega$, $D_x D_y \varepsilon_x \varepsilon_y$, получим следующее уравнение для $x_i(t)$:

$$\ddot{x}_i + \Omega_i^2 x_i = -2D_x \delta_2 \dot{x}_i^2 - 2\dot{x}_i (\delta - \delta_2 x_i^2) + \omega \varepsilon \sum_{j=-n/2}^{n/2} x_j [\vartheta]. \quad (6)$$

Здесь

$$\Omega_i^2 = \omega_i^2 - 2D_x \delta_0 + D_x D_y, \quad \delta = \delta_0 - \frac{D_x + D_y}{2},$$

$$\varepsilon = D_x \varepsilon_x + D_y \varepsilon_y.$$

Таким образом, мы получили систему, эквивалентную системе связанных генераторов. Каждый генератор имеет более низкую собственную частоту и отрицательное затухание δ , малую «нелинейную жесткость» и связан со всеми другими генераторами. Коэффициент связи ε мал, и, как уже отмечалось, сигналы $x_i[\vartheta]$ сдвинуты по фазе на малую величину ϑ (для простоты считаем, что $\vartheta = \vartheta_x = \vartheta_y$). Хотя уравнение (6) получено из наглядной модели взаимодействующих через диффузию автоколебательных реакций, оно фактически описывает поведение достаточно общей системы из многих генераторов, связанных по принципу «каждый с каждым». Примеры подобных систем приведены в обзоре [8].

Напишем систему укороченных уравнений для $A_i(t)$ и $\varphi_i(t)$:

$$\dot{A}_i = \delta A_i - \frac{\delta_2}{4} A_i^3 + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=-n/2}^{n/2} A_j \sin(\varphi_j - \varphi_i + \vartheta),$$

(7)

$$A_i \dot{\varphi}_i = A_i \frac{\Omega_i^2 - \omega^2}{2\omega} + \frac{3}{4} \frac{D_x \delta_2}{\omega} A_i^3 - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=-n/2}^{n/2} A_j \cos(\varphi_j - \varphi_i + \vartheta).$$

В общем случае даже стационарные значения \bar{A}_i и $\bar{\varphi}_i$ найти весьма затруднительно. Поэтому задачу приходится решать при некоторых специальных предположениях. Во-первых, амплитуды всех свободных генераторов будем считать одинаковыми и равными $A_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{\delta_2}}$.

Поправки на амплитуду можно определить по методу Хохлова [9], так как $\delta \gg \varepsilon n$. Во-вторых, частоты несвязанных генераторов ω_i будем считать симметрично распределенными относительно некоторой центральной частоты ω_0 . Далее для простоты положим, что ω_i распределены равномерно на интервале частот от $\omega_{-n/2}$ до $\omega_{n/2}$. Случай симметричного распределения частот представляется интересным и может соответствовать многим реальным приложениям.

Дальнейший расчет основан на предположении, что стационарные фазы синхронно работающих генераторов будут распределены так, что

$$\bar{\varphi}_i = -\bar{\varphi}_{-i}. \quad (8)$$

Это предположение проверялось методом электронного моделирования. При этом оказалось, что для трех и четырех генераторов $\bar{\varphi}_i = -\bar{\varphi}_{-i}$, с той точностью, с которой удалось произвести измерения ($\approx 5\%$).

При сделанных предположениях о малости величин D_x и D_y можно представить стационарную амплитуду i -го генератора в виде

$$\bar{A}_i = A_0 + \bar{a}_i. \quad (9)$$

Тогда из уравнения для амплитуды системы (7) получим выражение для стационарного значения поправки \bar{a}_i :

$$\bar{a}_i = \frac{\varepsilon A_0}{2\delta} \sin(\vartheta - \bar{\varphi}_i) \sum_{j=1}^{n/2} \cos \varphi_j. \quad (10)$$

Здесь учтено равенство (8) и то, что $n \gg 1$.

С помощью второго уравнения системы (7) получим

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{-i} = 2\varphi_i = \Delta_i + \frac{3}{4} \frac{D_x \delta_2}{\omega} A_0 (\bar{a}_i - \bar{a}_{-i}) - \\ - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=-n/2}^{n/2} [\cos(\varphi_j - \varphi_i + \vartheta) - \cos(\varphi_j + \varphi_i + \vartheta)]. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) отброшены члены порядка малой величины D/δ ; расстройка $\Delta_i = \omega_i - \omega_{-i}$. Подставляя (10) в (11) и полагая $\dot{\varphi}_i = 0$, получим для стационарных значений фаз уравнение

$$\Delta_i = -\mu \bar{I} \sin \bar{\varphi}_i, \quad (12)$$

где

$$\mu = 2\varepsilon \left(3 \frac{D_x \cos \vartheta}{\omega} + \sin \vartheta \right), \quad \bar{I} = \sum_{j=1}^{n/2} \cos \bar{\varphi}_j. \quad (13)$$

Синхронную частоту ω можно определить из уравнения для «нулевой» фазы $\varphi_0 = 0$. Считая, что $\varepsilon \approx 2kD_x/\omega$, получим

$$\omega^2 - \Omega_0 \omega - \frac{3}{4} D_x \delta_2 A_0^3 + 2D_x k \bar{I} A_0 = 0. \quad (14)$$

Отсюда при условии, что $\delta \gg D$, $\Omega_0 \gg A_0 \delta_2 D_x$ и $\omega \approx \Omega_0$,

$$\Omega + \frac{3}{4} A_0 \delta_2 D_x. \quad (15)$$

Здесь

$$\Omega_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=-n/2}^{n/2} \Omega_j.$$

Для того, чтобы вычислить $\bar{\varphi}_i$ и синхронную частоту ω , необходимо узнать величину \bar{I} , с помощью которой можно следующим образом определить полосу синхронизации. Наибольшая расстройка получается из формулы (12):

$$\Delta_{n/2} = \omega_{n/2} - \omega_{-n/2} = -\mu \bar{I} \sin \bar{\varphi}_{n/2}. \quad (16)$$

Тогда полоса синхронизации Δ_c равна

$$\Delta_c = \max \Delta_{n/2} = \max (-\mu \bar{I} \sin \bar{\varphi}_{n/2}) = -\mu \bar{I}_c \sin \bar{\varphi}_c. \quad (17)$$

Из (12) и (17) следует, что

$$\sin \bar{\varphi}_i = \sin \bar{\varphi}_c \frac{\Delta_i}{\Delta_c}. \quad (18)$$

Подставляя эту величину в выражение для \bar{I} (13), имеем

$$\bar{I}_c = \sum_{j=1}^{n/2} \left[1 - \sin^2 \bar{\varphi}_c \left(\frac{\Delta_j}{\Delta_c} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

В силу эквидистантности частот $\Delta_j = 2\Delta_c j/n$. Если n велико, то \bar{I}_c можно представить в виде интеграла

$$\bar{I}_c = \int_0^{n/2} \left(1 - \sin^2 \bar{\varphi}_c \frac{4j^2}{n^2} \right)^{1/2} dj = \frac{n}{4} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\bar{\varphi}_c + \bar{\varphi}_c}{\sin \bar{\varphi}_c}. \quad (19)$$

Чтобы найти $\bar{\varphi}_c$, нужно исследовать на устойчивость систему уравнений для амплитуды из (7) и фазы (11) вблизи стационарных значений $\bar{\varphi}_i$ и \bar{A}_i . Если обозначить малые отклонения от стационарной амплитуды и фазы

$$\alpha_i = A_i - \bar{A}_i, \quad \psi_i = \varphi_i - \bar{\varphi}_i, \quad (20)$$

то в результате линеаризации получим

$$\dot{\alpha}_i = -2\delta\alpha_i - \varepsilon A_0 \bar{T} \cos(\vartheta - \bar{\varphi}_i) \psi_i - \varepsilon A_0 \sin(\vartheta - \bar{\varphi}_i) \sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j \psi_j, \quad (21)$$

$$2\dot{\psi}_i = \frac{3}{2} \frac{\delta_2 D_x}{\omega} A_0 (\alpha_i - \alpha_{-i}) - 2\varepsilon \sin \vartheta \left(\bar{T} \cos \bar{\varphi}_i \psi_i - \sin \bar{\varphi}_i \sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j \psi_j \right).$$

По амплитуде рассматриваемая система (21) всегда устойчива в силу неравенства $\delta \gg \varepsilon A_0 n$, которое является следствием условий малости D_x . Поэтому устойчивость будет определяться уравнениями для отклонений фазы ψ_i :

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\mu}{2} \left(\bar{T} \cos \bar{\varphi}_i \psi_i - \sin \bar{\varphi}_i \sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j \psi_j \right). \quad (22)$$

Характеристический детерминант системы (22) записывается в виде

$$D = \left(\frac{\mu}{2} \right)^{n/2} \begin{vmatrix} -\cos \bar{\varphi}_1 \bar{T} + e_{11} - \frac{2\lambda}{\mu} & e_{12} \dots e_{1(n/2)} \\ e_{21} - \cos \bar{\varphi}_2 \bar{T} + e_{22} - \frac{2\lambda}{\mu} & \dots e_{2(n/2)} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ e_{(n/2)1} e_{(n/2)2} \dots - \cos \bar{\varphi}_{n/2} \bar{T} + e_{(n/2)(n/2)} - \frac{2\lambda}{\mu} \end{vmatrix} \quad (23)$$

Здесь $e_{ij} = \sin \bar{\varphi}_i \sin \bar{\varphi}_j$. Пользуясь теоремой Гершгорина [10] об областях локализации собственных чисел λ_i , мы можем оценить величину $\bar{\varphi}_c$, при которой существуют устойчивые синхронные автоколебания. Так как детерминант имеет действительные коэффициенты и симметричен относительно своей диагонали, λ_i принимают только действительные значения. Согласно упомянутой теореме все λ_i будут иметь отрицательные значения, если

$$\cos \bar{\varphi}_i \bar{T} \geq \sin \bar{\varphi}_i \sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j. \quad (24)$$

Эти неравенства означают, что все круги Гершгорина лежат в левой полуплоскости λ , и, таким образом, (24) являются достаточными условиями устойчивости. Так как, согласно (18), $\sin \bar{\varphi}_i$ растет вместе с Δ_i , а $\cos \bar{\varphi}_i$ убывает, то неравенства (24) выполняются, если

$$\cos \bar{\varphi}_{n/2} \bar{T} \geq \sin \bar{\varphi}_{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j. \quad (25)$$

Сумма $\sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j$ вычисляется с помощью выражения (18). Для $n \gg 1$

$$\sum_{j=1}^{n/2} \sin \bar{\varphi}_j = \frac{2 \sin \bar{\varphi}_{n/2}}{n} \sum_{j=1}^{n/2} j = \frac{n}{4} \sin \bar{\varphi}_{n/2}.$$

Подставляя эту величину и значение \bar{I} из (19) в неравенство (25), получим формулу для определения $\bar{\varphi}_c$:

$$\bar{\varphi}_c = -\operatorname{tg} \bar{\varphi}_c \cos 2 \bar{\varphi}_c. \quad (26)$$

Графическое решение этого трансцендентного уравнения дает значение $\bar{\varphi}_c \approx \pm 0,347$. Подставляя $\bar{\varphi}_c = -0,347$ в формулу (17), имеем

$$\Delta_c = 0,37 \mu n. \quad (27)$$

Если рассмотреть совместно формулы (27) и (13), то можно отметить, что Δ_c при малых углах ϑ в основном определяется величиной D_x . Сама же величина Δ_c имеет порядок D^3/ω^2 . Сравним величину Δ_c для генераторов, имеющих эквидистантное распределение собственных частот, с полосой синхронизации в следующих случаях.

а) Имеется $n/2$ генераторов с частотой ω_1 и $n/2$ генераторов с частотой ω_2 ; тогда $\Delta_c = \max(\omega_2 - \omega_1) = 0,25 \mu n$. б) Если $n - 2$ генератора работают на частоте ω , а два имеют частоты $\omega + \Delta\omega$ и $\omega - \Delta\omega$, то $\Delta_c = 0,5 \mu n$. Случай а) легко сводится к расчету взаимной синхронизации двух генераторов с частотами ω_1 и ω_2 . В случае б) $n - 2$ генератора фактически захватывают частоты крайних генераторов.

Таким образом, полоса синхронизации в случае неравномерного распределения частот несколько меньше, чем в случае б), и больше, чем в случае, когда генераторы разбиты на две группы с одинаковыми частотами.

Хотя наиболее распространенными типами автоколебаний в химии являются релаксационные, многие из них в определенных условиях имеют почти синусоидальные колебания концентраций около некоторого постоянного уровня [7]. К таким реакциям относятся автоколебательные процессы в гликолизе, а также периодическое образование ионов церия (Ce^{4+}) при окислении малоновой кислоты $\text{C}_3\text{H}_4\text{O}_3$ смесью KBrO_3 и $\text{Ce}(\text{SO}_4)_2$. Если принять для таких реакций отношение $D/\omega \approx 10^{-1}$, то $\Delta_c/\omega \sim 10^{-3}$. Эта величина может быть меньше, чем относительный разброс собственных частот отдельных химических генераторов.

Взаимная синхронизация автоколебательных химических реакций в релаксационных режимах происходит значительно «легче» [11]. Поэтому приведенные оценки величин Δ_c можно считать нижней границей полосы синхронизации. Кроме того мыслим случай частичной взаимной синхронизации, когда генераторы разбиваются на отдельные синхронные группы.

Подобным образом можно произвести расчеты и для более сложных способов распределения частот автогенераторов. Задача решается и в том случае, когда в среде нет полного перемешивания и происходит медленная диффузия молекул X и Y от «генератора к генератору».

В заключение приношу глубокую благодарность А. Е. Колибернову, М. С. Поляковой и В. И. Шмальгаузену за помощь в работе и ценную дискуссию полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 1, № 2, 197 (1956).
2. В. М. Малафеев, М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 936 (1970).
3. Ю. И. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 11, 1533 (1967).
4. Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1961.
5. В. М. Митюшина, Л. Л. Литинская, Л. Б. Каминир, сб. Колебательные процессы в биологических и химических системах, изд. Наука, М., 1967, стр. 325.
6. Н. М. Иевская, Р. М. Умарходжаев, Электричество, № 7 (1965).

7. Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский, Что такое математическая биофизика, изд. Просвещение, М., 1971.
8. Н. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
9. Р. В. Хохлов, ДАН СССР, 97, № 3, 411 (1954).
10. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1966.
11. Г. Б. Лишутина, Ю. М. Романовский, сб. Колебательные процессы в биологических и химических системах, изд. Наука, М., 1967.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
4 июня 1971 г.

MUTUAL SYNCHRONIZATION OF A NUMBER OF SELF- OSCILLATION SYSTEMS COUPLED THROUGH A COMMON MEDIUM

Yu. M. Romanovsky

By the method of slowly varying amplitudes the band of the mutual synchronization, stationary amplitudes and phases of a number of self-oscillators, coupled on the „each to each“ principle are calculated. This system is a mathematical model of many self-oscillation chemical reactions coupling through diffusion. The main assumption in calculation is the symmetric frequencies distribution of the autonomous oscillators and a small value of the coupling factor.

УДК 535.3 : 551.51

ИЗМЕРЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ «БЛУЖДАНИЙ» СВЕТОВЫХ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

М. А. Каллистратова, В. В. Покасов

Приводятся результаты измерений корреляционных функций «блужданий» световых центров тяжести двух световых пучков, распространяющихся на приземных трассах длиной 250 и 650 м. Измерения проводились для случаев, когда разнесены либо точки входа в среду, либо точки наблюдения. Полученные результаты сравниваются с теоретическими расчетами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Учет влияния атмосферной турбулентности на распространение пространственно-ограниченных световых пучков необходим для всех реальных применений лазерного излучения в открытой атмосфере, таких, как лазерный телефон и локация Луны, геодезическое определение координат и углов, лазерное зондирование атмосферы и многое другое. Исследованию этого влияния посвящены работы [1–14]. Теоретические исследования [7–10] позволяют рассчитать профиль средней интенсивности в фокальной плоскости оптической системы, формирующей пучок, и дисперсию «блужданий» светового центра тяжести пространственно-ограниченного пучка в зависимости от его параметров и интенсивности атмосферной турбулентности. Экспериментальные исследования [11–13] с исходным пучком вида

$$U = U_0 \exp \left(-\frac{\rho^2}{2a_0^2} - \frac{ik\rho^2}{2F} \right), \quad (1)$$

где ρ — двумерный вектор в плоскости фокусирующей линзы, $2a_0$ — эффективная ширина пучка, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, F — расстояние до центра излучения ($F = \infty$ — коллимированный пучок, $F < 0$ — расходящийся из точки $x = F$, $F > 0$ — сходящийся в точку $x = F$), подтверждают применимость расчетов [8, 9] для распространения в реальной атмосфере.

Однако в практических применениях часто приходится иметь дело не с пучком вида (1), рассматриваемым в теории, а с пучком, представляющим собой набор таких пучков, сходящихся или расходящихся.

Поэтому специальный интерес представляет исследование корреляции «блуждания» центров тяжести пучков с разнесенными или пересекающимися осями.

Теоретически эти вопросы рассмотрены Коном в работе [14], где он, используя результаты работы [7, 9] для случайного отклонения осей пучков от невозмущенного положения, получил выражения коэффициентов корреляции «блужданий» центра тяжести двух сфокусированных пучков с параллельными осями b_{p1} , расходящимися осями b_{p2} и сходящимися b_{p3} .

В настоящей работе проведена экспериментальная проверка расчетных формул, полученных в [14].

2. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ. ПРИНЦИП ИЗМЕРЕНИЙ

Для измерения корреляционных функций применялась методика, сходная с методикой [11]. Световые пучки от гелий-неоновых лазеров ($\lambda = 0,63 \text{ мкм}$), прошедшие турбулентный слой, сканировались на приемном пункте с помощью вращающегося зеркала по узкой вертикальной щели, за которой установлен фотоумножитель. Ток ФЭУ пропорционален величине

$$i_{\text{ФЭУ}} \sim \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dy, \quad (2)$$

где $I(x, y)$ — освещенность в точке (x, y) . Регистрируя ток ФЭУ, мы получаем при достаточной скорости сканирования* мгновенный разрез интенсивности сфокусированного пятна. Для исследования корреляционной функции «блуждания» использовались два пучка от двух лазеров с взаимоперпендикулярными плоскостями поляризации. На приемном конце пучки разделяются с помощью поляризаторов и попадают на два ФЭУ. Сигналы с фотоумножителей поступают на двухлучевой электронный осциллограф, развертка которого синхронизована с вращением сканирующего зеркала. Экран осциллографа фотографируется, и на фотопленке получают синхронные разрезы интенсивности двух пятен. Для получения пучков со сходящимися осями использовались лазеры, каждый из которых со своей фокусирующей оптической системой устанавливался на отдельной поворотной турели (рис. 1 а). Турели распо-

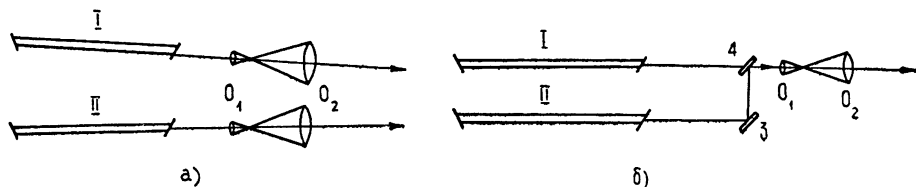


Рис. 1. Схемы передающих установок: а) для получения сходящихся пучков, б) для получения расходящихся пучков.

лагались на широком фундаменте таким образом, что расстояние между осями оптических систем могло меняться от 10 до 300 см. При получении пучков с расходящимися осями лазеры располагались на одной турели. Пучки, выходящие из лазеров, с помощью зеркала (3) (рис. 1б) и светоделительной пластинки (4) направлялись в одну фокусирующую оптическую систему. Изменение расстояния между фокусами пучков на приемном конце обеспечивалось изменением направления одного пучка на входе оптической системы на передающем конце путем поворота того же зеркала (3) и светоделительной пластинки (4).

Оптические системы состояли из окуляра O_1 и объектива O_2 с диаметром выходной апертуры 20 см**. Распределение интенсивности в пучке было гауссовым и соответствовало формуле (1).

На рис. 2 приведены фотоснимки двух сфокусированных лазерных пучков со сведенными осями на приемном пункте, сделанные в период суток, когда флуктуации коэффициента преломления были минималь-

* Как показывает исследование частотных спектров флуктуаций разности фаз [15], в этих спектрах не содержится частот выше 200 гц (при средней скорости ветра). Поэтому разрезы интенсивности пучка можно считать мгновенными, если время сканирования всего пучка не превышает нескольких миллисекунд.

** Для измерения $b_{\text{рз}}$ при $r = 10 \text{ см}$ использовались оптические системы с диаметром 7 см.

ными. Фотоснимки делались без объектива, и изображение на них имеет натуральную величину.



Рис. 2. Фотографии пучков на приемном конце трассы при слабой турбулентности.

Приемная аппаратура изображена на рис. 3. При измерении b_{p2} пучок от одного лазера, пройдя слой турбулентной атмосферы, отражается от плоского зеркала (2), затем отражается от полупрозрачной пластины (1) и попадает на вращающееся зеркало (3). Пучок от второго лазера проходит через полупрозрачную пластину (1) и также попадает на вращающееся зеркало (3). В случае измерений b_{p3} оба пучка фокусировались в центре вращающегося зеркала (3), а зеркало (2) и пластина (1) убирались. При вращении зеркала (3) оба пучка пробегают по узкой вертикальной щели (6). Между вращающимся зеркалом и щелью установлена телескопическая система (4), (5), сжи-

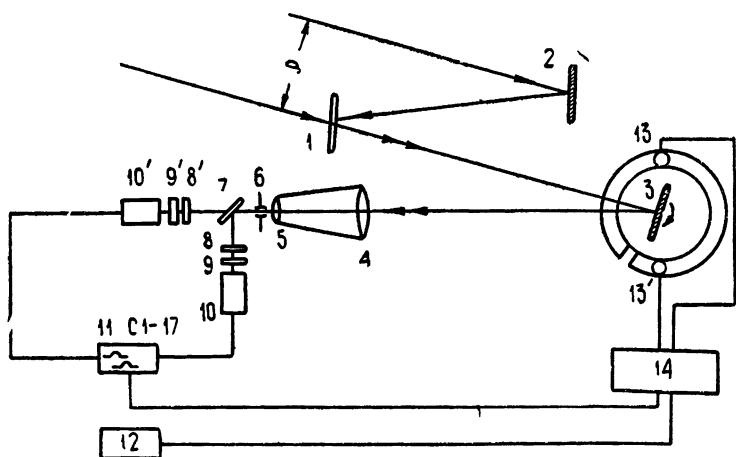


Рис. 3. Блок-схема приемной аппаратуры.

мающая пучки в 15 раз. За щелью стоит полупрозрачная пластинка (7), которая делит весь проходящий через щель поток на два. Один из них попадает на фотоумножитель (10), второй—на фотоумножитель (10'). Перед фотоумножителями установлены поляриды, повернутые так, что излучение от лазера (I) полностью гасится поляридом (8), а от лазера (II) полностью гасится поляридом (8'). Для уменьшения фона рассеянного солнечного света перед фотоумножителями установлены интерференционные фильтры (9) и (9') с полосой пропускания 40 Å. Сигналы с ФЭУ (10, 10') поступают на двухлучевой осциллограф (11), экран которого фотографируется на 36-миллиметровую киноплёнку фотокамерой РФК-5 (12).

Для синхронизации времени прохождения пучков от лазеров через

щель запуска развертки осциллографа и срабатывания камеры служит синхронизатор (14), срабатывающий от двух фотодиодов (13') и (13), расположенных на одной подставке с вращающимся зеркалом. Фотодиоды помещены в специальные патроны с оптическими системами и лампочками накаливания. На оси зеркала установлен диск с вырезом, который при вращении последовательно пропускает свет на фотодиоды и вызывает срабатывание синхронизатора.

На рис. 4 на фотопленке приведены образцы разрезов лазерных



Рис. 4. Примеры осциллограмм с мгновенными профилями пучков от двух лазеров.

сфокусированных пучков. С осциллограмм синхронных профилей двух сфокусированных пучков снимались цифровые данные, после чего на ЭВМ рассчитывались следующие величины.

- 1) Световой центр тяжести каждого пучка

$$X_{цт} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy}, \quad (3)$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dy = Y$ — амплитуда профиля на осциллограмме.

- 2) Дисперсия смещения центра тяжести пучка

$$\sigma_c^2 = \langle (X_{цт} - \langle X_{цт} \rangle)^2 \rangle. \quad (4)$$

- 3) Структурная функция взаимного смещения двух пучков

$$D_\varphi = \langle [(X'_{цт} - \langle X'_{цт} \rangle) - (X''_{цт} - \langle X''_{цт} \rangle)]^2 \rangle. \quad (5)$$

- 4) Функция корреляции смещения двух пучков

$$b_{\varphi c} = 1 - \frac{1}{2} \frac{D_\varphi}{\sigma_c' \sigma_c''}. \quad (6)$$

Все измерения проводились на приземных трассах $L_1 = 250$ м Цимлянкой и $L_2 = 650$ м Звенигородской научных станций ИФА летом 1968 и 1970 гг. Измерения проходили сериями продолжительностью 2—3 минуты, фотографирование мгновенных профилей производилось с частотой 7 кадров за 8 секунд. Таким образом, в серию входило 100—150 мгновенных профилей. Расстояние между пучками (при измерениях b_{p2}) на приемном конце устанавливалось равным $\rho = 3,5, 7, 14, 28$ и 56 см. Максимальный разнос соответствовал угловому расхождению пучков, равному $3'$. Измерения b_{p3} проводились при разносе осей, равном 10; 20; 50; 75; 150 и 300 см. При каждом значении ρ фотографировалось 8—12 серий. Скорость пробега пучка по щели (натуральная величина) 19700 см/сек. Максимальный эффективный диаметр размытого турбулентностью пучка на входе приемной системы составлял $d_{эф} \sim 8$ см, диаметр сканирующего зеркала составлял 20 см.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты определения корреляционной функции смещения центров тяжести двух сфокусированных пучков сравнивались с расчетами Кона [14]. Условия, для которых справедливы формулы [14] $L \gg \rho$ и $2L/ka^2 \ll 1$, при постановке эксперимента выполнялись.

На рис. 5 представлены результаты измерения корреляционной

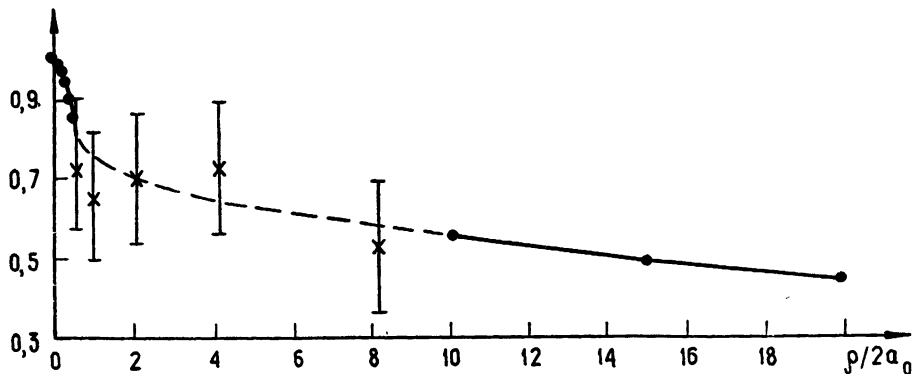


Рис. 5. Корреляция „блужданий“ двух расходящихся пучков.

функции $b_{\rho 2}$. По оси абсцисс отложено отношение разнота осей пучков к начальному эффективному диаметру пучка. Значения величины $b_{\rho 2}$, рассчитанные по асимптотическим формулам работы [14] для случаев $\rho/2a_0 \ll 1$ и $\rho/2a_0 \gg 1$, приведены на графике сплошной линией. Пунктирная часть кривой плавно сшивает две асимптотики. Каждая точка на графике представляет собой среднее значение, полученное из обработки 4—5 серий. Вертикальными линиями обозначена среднеквадратичная ошибка определения $b_{\rho 2}$, которая складывается из погрешности синхронизации запуска развертки с вращением зеркала, из погрешности снятия ординат при ручной отцифровке осциллограмм и из недостаточной представительности выборок (в одной серии—100 осциллограмм), вошедших в обработку. Ошибка измерения b_{ρ} составила $\pm 30\%$. Как видно из графика, экспериментальные значения согласуются с теоретическими в пределах точности измерения b_{ρ} .

На рис. 6 приведена корреляционная функция $b_{\rho 3}$ смещения двух

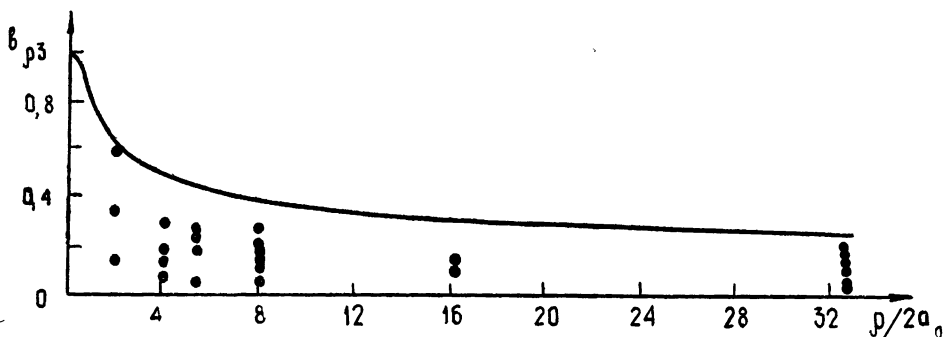


Рис. 6. Корреляция „блужданий“ двух сходящихся пучков.

сведенных в одну точку пучков, которые в начальной плоскости были разнесены. Сплошная кривая построена согласно расчетам Кона [14].

Измеренные значения корреляционной функции (на графике каждая точка соответствует одной серии) не совпадают количественно с теоретическими. На основании наших измерений можно утверждать, что даже при незначительном разnose источников (на расстояние порядка 5 диаметров пучка) корреляция между смещениями не превышает 0,3, а при дальнейшем увеличении разноса плавно падает до 0,2, в то время как расчет дает соответственно значения 0,46—0,26. Однако, в целом, в соответствии с теорией измерения показывают, что корреляция блужданий двух пучков с расходящимися осями выше, чем в случае сходящихся осей. Физически это объясняется тем, что в случае расходящихся осей пучки перекрываются в начальной части трассы, которая сильнее влияет на линейное смещение пучков в плоскости приема. Высокий коэффициент корреляций блужданий центров тяжести пучков с расходящимися осями показывает, что выводы теории [6-9], разработанной для лазеров, работающих в режиме осевых мод, справедливы в основном и для многомодовых лазеров. Прямым подтверждением этого вывода является рис. 7, на котором приведена зависимость дефоку-

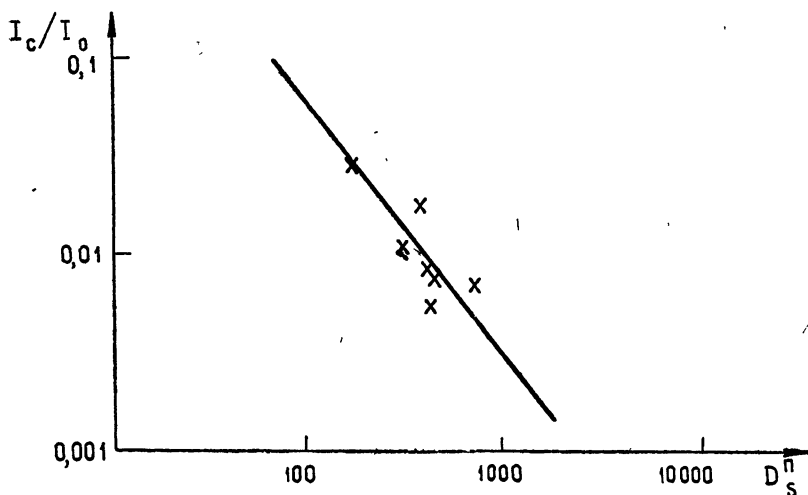


Рис. 7. Зависимость дефокусировки многомодового пучка от структурной функции фазы плоской волны D_s^n .

сировки пучка гелий-неонового лазера, работающего в многомодовом режиме, от структурной функции флуктуаций фазы D_s^n . По оси ординат отложен квадрат отношения эффективной ширины размытого турбулентностью сфокусированного пучка многомодового лазера к ширине дифракционного пятна от одной моды. Методика измерений и обработки данных рис. 7 такая же, как в [11]. Сплошной кривой нанесена теоретическая зависимость из [9] для пучка вида (1). Размытие пучка от многомодового лазера определяется как размытием отдельных мод в системе координат, связанной с центром тяжести каждой моды, так и «блужданиями» центров тяжести отдельных мод. В случае значительной коррелированности этих флуктуаций, что имеет место согласно нашим измерениям, многомодовость не вызовет дополнительного расширения пучка за счет блужданий центров тяжести отдельных мод. В этом случае турбулентность не будет заметным образом влиять на $d_{эфф}$ — эффективный размер пятна, пока $d_{эфф}$ меньше размера пятна в отсутствие турбулентности d_0 . При условии $d_{эфф} > d_0$ $d_{эфф}$ будет определяться формулами работы [9].

Количественное расхождение между расчетными и измеренными значениями коэффициента корреляции для случая сходящихся осей объяснить не удастся, поскольку как методика измерений, так и упрощения, сделанные при теоретическом расчете, одинаковы для случая и расходящихся и сходящихся осей.

В заключение авторы выражают признательность А. С. Гурвичу за ценные консультации и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Schmeltzer, Quart. Appl. Math., **24**, 339 (1967).
2. D. L. Fried, J. B. Seidman, J. Opt. Soc. Am., **57**, № 2, 181 (1967).
3. A. L. Vuck, Appl. Optics, **6**, № 4, 703 (1967).
4. A. Ishimaru, Radio Science, **4**, № 4, 341 (1969).
5. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 1, 146 (1970).
6. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 5, 870 (1965).
7. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 2, 173 (1969).
8. В. И. Татарский, Препринт, ИФА, АН СССР, М., 1970.
9. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 1, 61 (1970).
10. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 7, 1039 (1970).
11. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 8, 1200 (1971).
12. И. А. Старобинец, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
13. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
14. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
15. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 9, 1360 (1968).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1971 г.

CORRELATION MEASUREMENT OF „FLOATING“ OF THE LIGHT GRAVITY CENTERS OF SPATIALLY LIMITED BEAMS IN TURBULENT ATMOSPHERE

M. A. Kallistratova, V. V. Pokasov

The results are given of the correlation function measurements of the gravity center „floating“ of two light beams propagating at the near the earth traces of 250 and 650 m. Measurements are made for the cases when either the points of entrance or these of observations have been separated. The results are compared with theoretical calculations.

УДК 551.510

ДИФРАКЦИЯ КИРХГОФА—ФРЕНЕЛЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. А. Кашкан, Ю. М. Полищук

Рассматриваются флуктуации поля дифракции Кирхгофа—Френеля на отверстии в плоском непрозрачном экране, помещенном в турбулентную атмосферу. Для решения задачи используется понятие пространственно-частотной характеристики отверстия. В предположении изотропных флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферы вычисляются корреляционные функции относительных флуктуаций комплексного множителя ослабления. Полученные результаты применяются для расчета статистических характеристик множителя ослабления полуплоскости.

1. Рассмотрим дифракцию сферической волны на отверстии s в плоском непрозрачном экране, помещенном в неоднородную атмосферу. В качестве функции Грина примем решение волнового уравнения, полученное методом плавных возмущений (МПВ). В приближении Кирхгофа вектор Герца поля в точке A за экраном определяется выражением

$$\Pi(A) = p \iint_s \exp[\Psi(r') + \Psi(r', r)] K(r', r - r') ds. \quad (1)$$

Источник — диполь с моментом p находится в начале координат O (рис. 1), $r'(p', L')$ — радиус-вектор точки интегрирования, $r(p, L)$ — радиус-вектор точки A , $\Psi(r')$ — комплексная фаза падающей на экран волны, $\Psi(r', r)$ — комплексная фаза гюйгенсовской волны, $K(r', r - r')$ — коэффициент наклона в интеграле Кирхгофа—Френеля [1].

Примем следующие ограничения:

$$a) \quad \exp \Psi(R_0, R) \approx \frac{\exp(ik |R - R_0|)}{|R - R_0|} [1 + \Psi_1(R_0, R)],$$

R_0 и R — радиус-векторы, характеризующие, соответственно, положение источника и точки наблюдения, Ψ_1 — флуктуации комплексной фазы, найденные в первом приближении МПВ (k — волновое число);

б) поле флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферы — однородно и изотропно.

Введем $W(A)$ — множитель ослабления поля в точке A :

$$\Pi(A) = W(A)\Pi_0(A),$$

где

$$\Pi_0(A) = p \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (2)$$

Полагая плоскость экрана перпендикулярной оси z , воспользуемся в (1) и (2) приближением Френеля, затем сделаем замену переменных интегрирования:

$$\left(\rho' - \rho \frac{L'}{L}\right) \sqrt{\frac{kL}{\pi L'(L-L')}} \rightarrow \sigma.$$

Получим

$$W(A) = -\frac{i}{2} \iint_Q \exp\left(i \frac{\pi}{2} \sigma^2\right) [1 + \Psi_1(\Lambda\sigma + \rho_s, L') + \Psi_1(\Lambda\sigma + \rho_s, \rho, L - L')] dQ = W_0(A) + W_1(A). \quad (3)$$

Здесь использованы обозначения: $\rho_s = \rho \frac{L'}{L}$, $\Lambda = \sqrt{\frac{\pi \Delta'(L-L')}{k\Delta}}$, Q — новая площадь интегрирования, W_0 — регулярное значение W , W_1 — флуктуации W в первом приближении.

Разложение $u_\epsilon(d\mathbf{x}, z')$ флуктуаций Ψ_1 в плоскости волновых чисел \mathbf{x} (x_1, x_2) по спектральным амплитудам флуктуаций ϵ , полученное в Приложении, подставим в слагаемое $W_1(A)$ (3) и изменим порядок интегрирования:

$$W_1(A) = \frac{ik}{2} \int_0^L dz' \iint_{-\infty}^{\infty} P(\rho, \mathbf{x}, z') \exp\left[i \frac{z'}{L} \mathbf{x} \rho - i \frac{x^2 z' (\Delta - z')}{2kL}\right] u_\epsilon(d\mathbf{x}, z'); \quad (4)$$

$$P(\rho, \mathbf{x}, z') = -\frac{i}{2} \iint_Q \exp\left[i \frac{\pi}{2} \left(\sigma + \frac{\mathbf{x}\Lambda}{\pi} f(z')\right)^2\right] dQ; \quad (5)$$

входящую в (5) функцию

$$f(z') = \frac{z'}{L'} H(L' - z') + \frac{L - z'}{L - L'} H(z' - L')$$

(H — функция Хэвисайда) назовем пространственно-частотной характеристикой отверстия s .

Нас будут интересовать корреляционные функции относительных флуктуаций множителя ослабления в плоскости $z = L$:

$$B_{WW^*}(\rho_1, \rho_2) = \left\langle \frac{W_1(\rho_1)}{W_0(\rho_1)} \frac{W_1^*(\rho_2)}{W_0^*(\rho_2)} \right\rangle = \int_0^L d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\rho_1, \mathbf{x}, \eta)}{W_0(\rho_1)} \frac{P^*(\rho_2, \mathbf{x}, \eta)}{W_0^*(\rho_2)} F_{\Psi\Psi^*}(\mathbf{x}, \eta) \times \quad (6)$$

$$\times \exp\left(i \frac{\eta}{L} \mathbf{x}(\rho_1 - \rho_2)\right) d^2\mathbf{x};$$

$$B_{WW}(\rho_1, \rho_2) = \left\langle \frac{W_1(\rho_1)}{W_0(\rho_1)} \frac{W_1(\rho_2)}{W_0(\rho_2)} \right\rangle =$$

$$= \int_0^L d\eta \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\rho_1, \mathbf{x}, \eta)}{W_0(\rho_1)} \frac{P(\rho_2, -\mathbf{x}, \eta)}{W_0(\rho_2)} F_{\Psi\Psi}(\mathbf{x}, \eta) \times \quad (7)$$

$$\times \exp\left(i \frac{\eta}{L} \mathbf{x} (\rho_1 - \rho_2)\right) d^2 \mathbf{x}.$$

Здесь

$$F_{\Psi\Psi^*}(\mathbf{x}, \eta) = \frac{\pi k^2}{2} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \text{ и } F_{\Psi\Psi}(\mathbf{x}, \eta) = -\frac{\pi k^2}{2} \exp\left(\frac{-i\mathbf{x}^2 \eta (L - \eta)}{kL}\right) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$$

— двумерные спектральные плотности корреляционных функций $B_{\Psi\Psi^*}$ и $B_{\Psi\Psi}$ комплексной фазы сферической волны, $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \Phi_\varepsilon(x_1, x_2, 0)$ — трехмерный спектр корреляционной функции флуктуаций ε .

Через $B_{\Psi\Psi^*}$ и $B_{\Psi\Psi}$ выражаются корреляционные функции флуктуаций амплитуды $M_1/|W_0|$ и фазы Φ_1 множителя ослабления:

$$B_M = \text{Re}(B_{\Psi\Psi^*} + B_{\Psi\Psi}),$$

$$B_\Phi = \text{Re}(B_{\Psi\Psi^*} - B_{\Psi\Psi}).$$

2. Результаты первой части нашей работы позволяют находить статистические характеристики поля различных дифракционных систем.

При расчете дифракционного поля на горных трассах часто используется аппроксимация препятствия поглощающей полуплоскостью [3]. Рассмотрим флуктуации множителя ослабления аппроксимирующей модели, вызванные неоднородностью атмосферы. Регулярное значение множителя ослабления и частотная характеристика полуплоскости

$y > H \ll L'$ выражаются через интеграл Френеля $F(u) = \int_0^u \exp\left(i \frac{\pi}{2} t^2\right) dt$:

$$W_0(\rho) = 0,5 - (2i)^{-0,5} F\left(\frac{H - y_s}{\Lambda}\right); \quad (8)$$

$$P(\rho, \mathbf{x}, z') = 0,5 - (2i)^{-0,5} F\left(\frac{H - y_s}{\Lambda} + \frac{x_2 \Lambda}{\pi} f(z')\right). \quad (9)$$

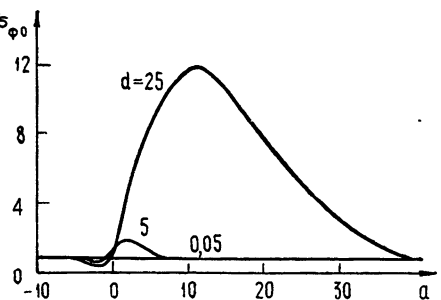
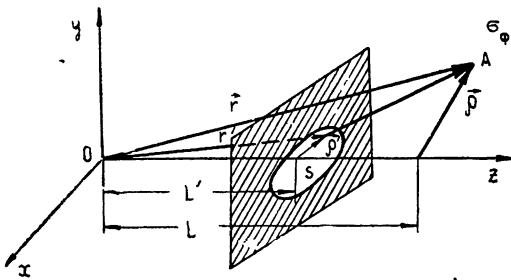


Рис. 1. К^{*}дифракции на отверстии s в плоском непрозрачном экране. Рис. 2. Зависимость $\sigma_\Phi/\sigma_{\Phi_0}$ при $d=0,05; 5; 25$.

На рис. 2 приведены результаты расчета дисперсии флуктуаций фазы σ_Φ множителя ослабления, отнесенной к ее значению σ_{Φ_0} в безграничной среде, в зависимости от величины $a = \frac{H}{\Lambda}$ (связанной с углом дифракции ψ выражением $\psi = \frac{\pi a}{k\Lambda}$) при различных значениях волнового

параметра $d = \frac{\Lambda}{r_0}$ (r_0 — характерный масштаб неоднородностей). При расчете полагалось, что спектр $\Phi_\varepsilon(x)$ соответствует гауссовой функции корреляции флуктуаций ε :

$$B_\varepsilon(r) = \sigma_\varepsilon^2 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

$L' = 0,5 L$, точка наблюдения находится на оси z .

Как видно из графика, при $d = 0,05$ (крупномасштабные неоднородности) наличие экрана не оказывает влияния на характер флуктуаций дифрагированного поля. Действительно, полагая спектр $\Phi_\varepsilon(x)$ существенным в области $|x| \leq x_m \sim \frac{1}{r_0}$, убеждаемся, что второе слагаемое в аргументе F выражения (9) дает незначительные поправки. Можно считать

$$P(\rho, x, z') \approx W_0(\rho).$$

Но тогда, согласно (6), (7),

$$B_{W W^{(*)}}(\rho_1, \rho_2) = B_{W W^{(*)}}(|\rho_1 - \rho_2|).$$

Влияние экрана становится значительным с уменьшением масштаба неоднородностей и проявляется в возрастании интенсивности флуктуаций дифрагированного поля в некоторой области углов дифракции. Так как переизлучение энергии в область тени связано с диаграммой рассеяния неоднородностей, кривые $\sigma_\phi/\sigma_\phi_0$ имеют характерный максимум, величина, положение и ширина которого определяются значением параметра d .

На рис. 3, 4 приведены рассчитанные графики коэффициентов корреляции флуктуаций амплитуды R_M и фазы R_ϕ множителя ослабления в горизонтальной и вертикальной плоскостях, отнесенные соответственно, к их значениям R_{M_0} и R_{ϕ_0} , в безграничной среде, при $d = 25$ в области разносов $(0 \div 0,8)\Lambda$ (для мелкомасштабных неоднородностей амплитудные и фазовые характеристики флуктуационного поля практически совпадают).

Декоррелирующее воздействие полуплоскости на горизонтальную компоненту дифрагированного поля наиболее сильно сказывается в области экстремальных значений a . График рис. 3 объясняет ход корреляционных функций флуктуаций амплитуды поля, полученных на закрытых горных трассах [4].

Заметим, что, ограничившись анализом только горизонтальной составляющей поля дифракции, можно сделать обобщение на локально однородные и изотропные флуктуации ε и рассматривать структурные функции:

$$D_{W W^{(*)}}(|x_1 - x_2|) = \left\langle \left| \frac{W_1}{W_0}(x_1) - \frac{W_1}{W_0}(x_2) \right|^2 \right\rangle = 2B_{W W^{(*)}}(x, x) - 2B_{W W^{(*)}}(x_1, x_2),$$

$$D_{W W}(|x_1 - x_2|) = \left\langle \left[\frac{W_1}{W_0}(x_1) - \frac{W_1}{W_0}(x_2) \right]^2 \right\rangle = 2B_{W W}(x, x) - 2B_{W W}(x_1, x_2).$$

В этом случае наши рассуждения позволяют объяснить «насыщение» экспериментальных структурных функций флуктуаций фазы [5] на

трассах с закрытыми позициями передатчиков. Однако крупномасштабные неоднородности, обуславливающие особенность локально однородной модели, не искажают структуру флуктуаций поля за экраном, поэтому используемая нами в расчетах модель однородного поля флуктуаций ϵ не вызовет принципиальных ошибок в вопросах дифракции.

Влияние полуплоскости на вертикальную компоненту поля в неглубокой тени ($a = 0; 7$) проявится прежде всего в нарушении статистической однородности поля дифракции, вызванном различием в энергетических уровнях точек наблюдения. При расчете графика рис. 4 полагалось $y_1 = -y_2$. Поведение кривых c_b в этой области существенным образом не отличается от рассмотренных выше зависимостей на рис. 3, т. е. связано с воздействием рассеянной в область тени составляющей случайного поля.

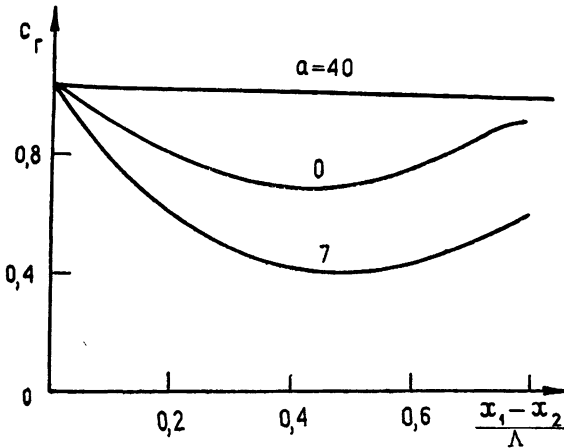


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость $c_r = R_M/R_{M_0} \left(\frac{x_1 - x_2}{\Lambda} \right) = R_\Phi/R_{\Phi_0} \left(\frac{x_1 - x_2}{\Lambda} \right)$ при $a = 0; 7, 40$.

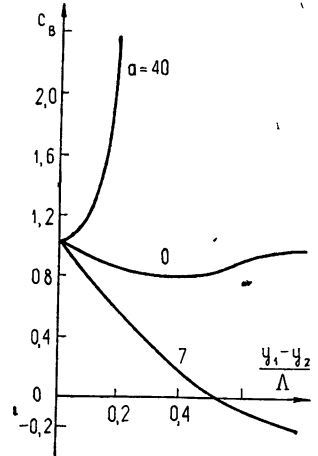


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость $c_b = R_M/R_{M_0} \left(\frac{y_1 - y_2}{\Lambda} \right) = R_\Phi/R_{\Phi_0} \left(\frac{y_1 - y_2}{\Lambda} \right)$ при $a = 0; 7, 40$.

В глубокой тени ($a = 40$) доля рассеянной от «освещенных» неоднородностей энергии невелика. Поэтому $c_r \approx 1$ (рис. 3), а возрастание c_b (рис. 4) объясняется тем, что лучи, идущие к точкам наблюдения y_1 и y_2 , на пути источник — экран практически полностью скоррелированы (в чем легко убедиться, воспользовавшись в (8), (9) асимптотикой интеграла Френеля).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разложение флуктуаций комплексной фазы по спектральным амплитудам флуктуаций диэлектрической проницаемости

Нас будет интересовать первое приближение флуктуаций комплексной фазы волны, распространяющейся от точечного источника, расположенного на границе полупространства $z > 0$ с неоднородной средой. Выражение для Ψ_1 с использованием приближения Френеля приводится в [2]:

$$\Psi_1(\rho_0, \rho, z) = \frac{k^2 z}{4\pi} \int_0^z \frac{dz'}{z'(z-z')} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_1(\rho', z') \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{ik[(\rho - \rho_0)z' - (\rho' - \rho)z]^2}{2zz'(z - z')} \right\} d^2 \rho', \quad (\text{П.1})$$

где ρ_0 и ρ — поперечные радиус-векторы, характеризующие, соответственно, положение источника и точки наблюдения.

Изотропное поле флуктуаций диэлектрической проницаемости атмосферы $\varepsilon_1(\rho', z')$ представим в виде двумерного стохастического интеграла Фурье—Стильтьеса в плоскости волновых чисел $\kappa(\kappa_1, \kappa_2)$:

$$\varepsilon_1(\rho', z') = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(i \kappa \rho') u_\varepsilon(d \kappa, z'), \quad (\text{П.2})$$

$u_\varepsilon(d \kappa, z')$ — спектральные амплитуды. Подставляя (П.2) в (П.1) и интегрируя по поперечным координатам, получим

$$\begin{aligned} \Psi_1(\rho_0, \rho, z) = & \frac{ik}{2} \int_0^z dz' \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(1 - \frac{z'}{z} \right) \kappa \rho_0 + \right. \\ & \left. + i \frac{z'}{z} \kappa \rho - i \frac{\kappa^2 z'(z - z')}{2kz} \right] u_\varepsilon(d \kappa, z'). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
2. А. И. Кон, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 71 (1970).
3. В. Н. Троицкий, Распространение УКВ в горах, изд. Связь, М., 1968.
4. М. Оное, М. Hirai and S. Niwa, J. Rad. Res. Labs., 5, № 20, 79 (1958).
5. Г. С. Шарыгин, Ю. М. Полищук, Н. М. Лесков, В. Ф. Слюсарчук, Экспериментальное исследование структуры электромагнитного поля при распространении радиоволн сантиметрового диапазона, изд. Томского университета, Томск, 1970.

Томский институт радиоэлектроники
и электронной техники

Поступила в редакцию
29 апреля 1971 г.

KIRCHHOFF—FRESNEL DIFFRACTION IN TURBULENT ATMOSPHERE

A. A. Kashkan, Yu. M. Polishchuk

Fluctuations of Kirchhoff—Fresnel diffraction field on a hole in the plane screen placed in a turbulent atmosphere are considered. To solve the problem the space-frequency characteristic of the hole is used. In the assumption of the isotropic fluctuations of the atmospheric dielectric constant, the correlation functions of the relative fluctuations of the complex attenuation factor are calculated. The results obtained are used for the calculation of the statistical characteristics of the half-plane attenuation factor.

УДК 621.371.332.1

СРЕДНЯЯ ОСВЕЩЕННОСТЬ И ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В ФОКУСЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА, ФОКУСИРУЕМОГО В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

И. А. Старобинец

На основании результатов измерений средней освещенности в сфокусированном световом пучке предлагается методика измерений интенсивности турбулентности.

Проверяется экспериментально зависимость эффективного диаметра светового пучка в фокальной плоскости от диаметра апертуры фокусирующей системы в условиях сильной турбулентности.

Представлены результаты измерений дисперсии логарифма интенсивности в фокусе при изменении среднеквадратичной разности фаз на апертуре пучка свыше 30π .

Размытие светового пучка, фокусируемого в турбулентной атмосфере, теоретически рассматривалось в работах [1-3]. В этих работах получен один и тот же результат, несмотря на то, что решение задачи проводилось разными методами.

Эксперимент, проведенный Каллистратовой и Покасовым [4], подтвердил полученные в [1-3] закономерности.

В данной работе проводились измерения дефокусировки пучка, фокусируемого в атмосфере, по другой значительно более простой, чем в [4], методике, которая по этой причине может быть предложена для исследования турбулентности.

1. Для измерения дефокусировки последовательно измерялись средняя освещенность \bar{E} в фокусе пучка и полный поток Φ_n фокусируемого излучения. Под величиной полного светового потока подразумевается поток света, принимаемый приемником, диаметр апертуры которого много больше эффективного диаметра светового пучка в плоскости приемника. По величине полного потока света рассчитывалась величина освещенности E_0 в фокусе, которая имела бы место, если бы пучок фокусировался в среде без возмущений показателя преломления. В случае светового пучка гауссовой формы величина E_0 и величина полного потока Φ_n связаны соотношением

$$E_0 = \Phi_n \frac{k^2 a_0^2}{\pi L^2},$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, a_0 — эффективный радиус пучка, в начале трассы, L — длина трассы. Отношение $(\bar{E}/E_0)_{\text{экс}}$ характеризует дефокусировку светового пучка в реальной атмосфере.

Измерения проводились на трех приземных горизонтальных трассах длиной $L = 250, 650$ и 1750 м со световыми сфокусированными пучками практически гауссовой формы в поперечном сечении и с фокусом в плоскости приема. Эффективный радиус a_0 пучка в начале турбулентной трассы в случае $L = 250$ м составлял $3,4$ см, при $L = 650$ м — $a_0 = 15$ и $7,5$ см и при $L = 1750$ м — $a_0 = 15$ см. В качестве источника света

использовался гелий-неоновый лазер с длиной волны $\lambda = 0,63$ мк, работающий в режиме осевых колебаний.

Для возможности сравнения с теоретическими результатами одновременно с измерениями освещенности в фокусе лазерного пучка проводились измерения C_n^2 — структурной характеристики коэффициента преломления воздуха на трассе. При измерениях на трассах $L = 250$ м и $L = 1750$ м величина C_n^2 определялась из градиентных измерений температуры воздуха и скорости ветра, а при $L = 650$ м — по размытию дифракционной картины в фокальной плоскости линзы, на которую падает лазерный пучок, распространяющийся по параллельной со сфокусированным пучком трассе.

Исходя из полученных значений величины C_n^2 , по формуле, полученной в работах [1–3], рассчитывалось теоретическое значение ослабления средней освещенности в фокусе лазерного пучка, фокусируемого в условиях турбулентности:

$$\left(\frac{\bar{E}}{E_0} \right)_{\text{теор}} = 2,53 [D_S(L, 2a_0)]^{-6/5} \left(\begin{array}{l} D_S(L, 2a_0) \gg 1 \\ D_S(L, l_0) \ll 1 \end{array} \right), \quad (1)$$

где $D_S(L, \rho)$ — структурная функция фазы сферической световой волны, рассчитываемая в первом приближении метода плавных возмущений для той же длины трассы L и тех же, что и для пучка, условий распространения

$$D_S(L, \rho) = 1,1 C_n^2 k^2 L \rho^{5/3}. \quad (2)$$

Волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ сферической световой волны равно волновому числу фокусируемого излучения, l_0 — внутренний масштаб турбулентности.

Известно, что $l_0 = 1 \div 2$ мм. Условия $D_S(L, 2a_0) \gg 1$ и $D_S(L, l_0) \ll 1$ в эксперименте выполнялись.

Сравнение экспериментально определенного ослабления $(\bar{E}/E_0)_{\text{эксп}}$ средней освещенности в фокусе с вычисленным по формуле (1) на основании измеренных значений C_n^2 теоретическим ослаблением $(\bar{E}/E_0)_{\text{теор}}$ проведено графически на рис. 1. Здесь каждая точка на графике соответствует паре значений $\{(\bar{E}/E_0)_{\text{теор}}, (\bar{E}/E_0)_{\text{эксп}}\}$. Линия регрессии между значениями $(\bar{E}/E_0)_{\text{теор}}$ и $(\bar{E}/E_0)_{\text{эксп}}$, построенная по методу наименьших квадратов, показывает удовлетворительное согласие между экспериментальными и теоретическими данными.

На этом основании можно рекомендовать описанную методику измерения уменьшения средней освещенности в фокусе пучка, фокусируемого в турбулентной атмосфере, для оценки значений структурной характеристики C_n^2 показателя преломления воздуха на оптической трассе в соответствии с формулой (1). Это может быть полезным, например, при разнообразных измерениях в сфокусированном пучке.

Использование сфокусированных световых пучков для зондирования турбулентности предлагалось Исимару в его теоретической работе [5]. Однако результаты расчета [5], проведенного в первом приближении метода плавных возмущений, неправильны, если среднеквадратичная разность фаз $\Delta S = \sqrt{D_S(L, 2a_0)}$ на апертуре пучка велика ($\Delta S > \pi$) [6]. Этот случай реализуется, например, уже при турбулентности средней интенсивности (структурная постоянная показателя преломления воздуха $C_n^2 = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1/3}$), длине оптической трассы $L = 100$ м, диаметре передающей апертуры $2a_0 = 10$ см и длине волны света $\lambda = 0,63$ мкм.

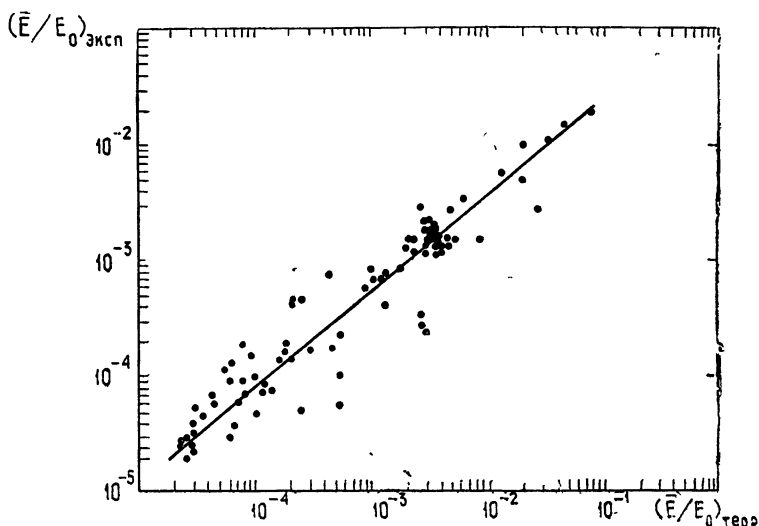


Рис. 1. График сравнения экспериментально определенных и теоретических значений ослабления \bar{E}/E_0 средней освещенности в фокусе.

2. Определим, как это сделано в работах [2, 3], эффективную площадь $S_{\text{эфф}}$ поперечного сечения пучка в фокальной плоскости как отношение полного потока света Φ_n к средней освещенности в центре \bar{E} :

$$S_{\text{эфф}} = \frac{\pi d_{\text{эфф}}^2}{4} = \frac{\Phi_n}{\bar{E}}, \quad (3)$$

где введена величина $d_{\text{эфф}}$ — эффективный диаметр пучка в фокальной плоскости.

Из формул (1) — (3) вытекает, что при $D_S(L, 2a_0) \gg 1$ эффективный диаметр пучка в фокальной плоскости не зависит от диаметра $2a_0$ пучка в начале турбулентной трассы. Это проверялось измерениями величины Φ_n/\bar{E} по описанной методике на трассе $L = 650$ м при двух значениях радиуса a_0 апертуры пучка: $a_0 = 15$ см, $a_0 = 7,5$ см.

Результаты приведены на рис. 2 в виде графика зависимости вели-

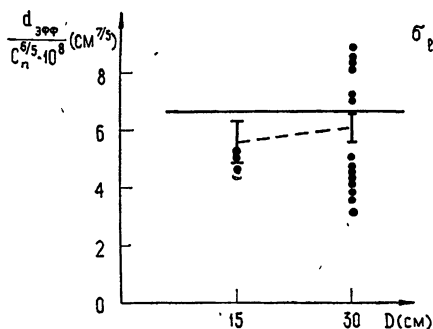


Рис. 2.

Рис. 2 Зависимость эффективного диаметра $d_{\text{эфф}}$ светового пучка в фокальной плоскости от диаметра D пучка в начале трассы; $D_S(D) > 400$.

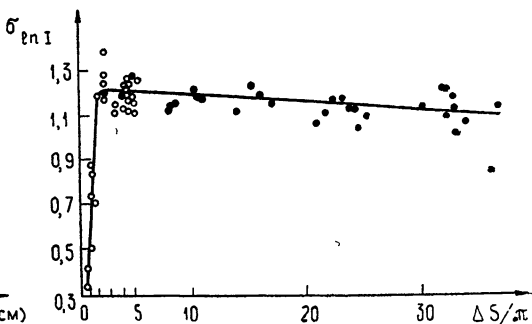


Рис. 3.

Рис. 3. Эмпирическая зависимость среднеквадратичного значения натурального логарифма интенсивности $\sigma_{\ln I}$ в фокусе от параметра ΔS .

чины $d_{эфф}/C_n^{6/5}$ от радиуса a_0 апертуры пучка. Выбор параметра $d_{эфф}/C_n^{6/5}$ исключает, согласно формулам (1)—(3), зависимость от режима турбулентности на трассе при $D_S (2a_0) \gg 1$.

На графике, кроме экспериментальных точек, нанесены также средние значения измеренной величины $d_{эфф}/C_n^{6/5}$, равные $5,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{7/5}$ при $a_0 = 7,5 \text{ см}$ и $6,1 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{7/5}$ при $a_0 = 15 \text{ см}$, и отрезками прямых обозначены среднеквадратичные отклонения экспериментальных данных от средних значений. Сплошная прямая $d_{эфф}/C_n^{6/5} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{7/5}$ — график теоретической зависимости $d_{эфф}(a_0)$. Величина $D_S (L, 2a_0)$ принимает значения, большие 400. Разброс точек на графике и отличие от теоретического значения $d_{эфф}/C_n^{6/5}$ можно считать несущественным, учитывая, что величина $d_{эфф}$ и $C_n^{6/5}$ порознь менялись в эксперименте примерно в 10 раз.

Таким образом, в условиях сильной турбулентности, т. е., как это следует из формул (1), (2), при

$$C_n^2 \gg k^{-2} L^{-1} (2a_0)^{-5/3},$$

ширина светового сфокусированного пучка в фокальной плоскости фокусирующей системы не зависит от диаметра эффективной апертуры фокусирующей оптики.

3. Кроме указанных измерений, параллельно с ними проводились измерения дисперсии $\sigma_{инт}^2$ логарифма интенсивности света в фокусе светового пучка, фокусируемого в турбулентной атмосфере, по методике, описанной в [6], но в большем диапазоне изменения параметров пучка и турбулентности на трассе. Результаты, приведенные на рис. 3 в виде графика зависимости величины $\sigma_{инт}$ от параметра $\Delta S = \sqrt{D_S (2a_0)}$, подтверждают выводы, сделанные в работе [6]. Следует отметить, что в большем диапазоне изменения параметра ΔS до 30π величина флуктуаций логарифма интенсивности практически постоянна.

Автор признателен А. С. Гурвичу за консультации и постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
3. Б. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1039 (1970).
4. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1200 (1971).
5. А. Исимару, Использование флуктуаций сфокусированных волнового пучка для зондирования атмосферной турбулентности, ТИИЭР, 57, № 4, 407 (1969).
6. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1290 (1970).

MEAN ILLUMINATION AND INTENSITY FLUCTUATIONS IN THE FOCUS OF THE LIGHT BEAM FOCUSED IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

I. A. Starobinets

On the basis of the measurement results of the mean illumination in the focused light beam the method of measuring the turbulent intensity is suggested.

The dependence of the effective diameter of the light beam in the focal plane on the aperture diameter of the focusing system in the conditions of strong turbulence is experimentally verified. The results are given of the dispersion measurements of the intensity logarithm in the focus at the r. m. s. phase difference in the beam aperture in excess of 30π .

УДК 621.378.325

РАСШИРЕНИЕ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ ВДОЛЬ НАКЛОННЫХ ТРАСС

В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов

Приведены расчеты турбулентного расширения лазерного пучка, распространяющегося вдоль наклонных трасс в атмосфере. Расчеты основаны на решении уравнения для функции когерентности второго порядка [8], полученного в приближении марковского случайного процесса. Выбранная модель распределения структурной характеристики флуктуаций показателя преломления по высоте соответствует неустойчивой температурной стратификации в атмосфере (конвективные условия). Получены графики для эквивалентного расстояния, позволяющие для оценки турбулентного расширения при распространении снизу вверх воспользоваться результатами [8], соответствующими однородной трассе. Показано, что при распространении сверху вниз величина турбулентного расширения имеет максимум при определенной высоте передатчика.

Вопросы, связанные с расширением лазерного пучка за счет турбулентных неоднородностей атмосферы, рассматривались рядом авторов в работах [1-8]. Полученные здесь результаты относятся к распространению пучка вдоль горизонтальных трасс, характеризующихся постоянным значением структурной характеристики флуктуаций показателя преломления.

В то же время для некоторых практических приложений требуется оценить турбулентное расширение пучка при распространении вдоль наклонных трасс, когда структурная характеристика изменяется с высотой. В данной работе представлены соответствующие расчеты, основанные на решении уравнения для функции взаимной когерентности второго порядка [8], полученного в приближении марковского случайного процесса.

В плоскости излучающей апертуры распределение поля лазерного пучка записывается в виде

$$U_0(\rho) = U_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2} + \frac{ik\rho^2}{2F}\right),$$

где U_0 — начальная амплитуда, $\rho = |\rho|$ — модуль радиуса вектора в плоскости yOz , a — эффективный радиус пучка, F — радиус кривизны волнового фронта в центре апертуры ($F > 0$ и $F < 0$ соответствуют расходящемуся и сфокусированному в точке $x = |F|$ пучкам).

Величину турбулентного расширения можно выразить [8] через отношение средней интенсивности на оси пучка в турбулентной среде $\bar{I}(x, 0)$ к интенсивности на оси пучка в вакууме $I_0(x, 0)$, которое обратно пропорционально отношению эффективных площадей соответствующих пучков:

$$\frac{\bar{I}(x, 0)}{I_0(x, 0)} = \frac{S_0(x)}{S_{\text{эфф}}(x)} = 2 \int_0^{\infty} t \exp\left[-t^2 - \frac{1}{2} D_1\left(x, \frac{2a}{g} t\right)\right] dt. \quad (1)$$

В выражении (1) величина

$$D_1 \left(x, \frac{2a}{g} t \right) = 8,7 k^2 x_m^{-5/3} \int_0^x C_n^2(x') \times \\ \times \left[{}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1; -\left(\frac{ax_m}{g} \right)^2 t^2 \left(1 - \frac{x'}{x} \right)^2 \right) - 1 \right] dx', \quad (2)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \beta; \zeta)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, совпадает со структурной функцией комплексных фаз двух сферических волн, источники которых разнесены на расстояние $2at/g$ (см. [9]), $g = [1 + k^2 a^4 (1/x + 1/F)^2]^{1/2}$ — обобщенный параметр, x — длина трассы, $x_m = 5,92/l_0$, l_0 — внутренний масштаб турбулентности, $C_n^2(x')$ — структурная характеристика флуктуаций показателя преломления, x' — расстояние вдоль трассы, отсчитываемое от передатчика.

Наиболее полные данные относительно закона изменения структурной характеристики $C_n^2(h)$ в атмосфере в зависимости от высоты h имеются для условий развитой конвекции. В этом случае в пределах динамического приземного слоя ($h \leq 50$ м) структурная характеристика убывает по степенному закону [10]:

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-2/3}, \quad (3)$$

где h_0 — некоторая начальная высота.

В более высоких слоях атмосферы, где выполняются условия свободной конвекции, степень убывания структурной характеристики возрастает [10]:

$$C_n^2(h) = C_n^2(h'_0) (h/h'_0)^{-4/3}, \quad (4)$$

где в качестве константы h'_0 можно выбрать высоту динамического слоя ($h'_0 \approx 50$ м). Соотношение (4), как показали экспериментальные исследования [11, 12], хорошо выполняется вплоть до высот образования кучевой облачности ($h \approx 1 - 3$ км).

В области высот $h \gtrsim 3$ км, согласно расчетам [13], проведенным с использованием усредненных метеорологических данных о скорости диссипации кинетической энергии и градиентах средней температуры и средней скорости ветра, интенсивность флуктуаций показателя преломления убывает быстрее, чем $h^{-4/3}$, и функцию $C_n^2(h)$ можно аппроксимировать путем введения в (4) экспоненциального множителя:

$$C_n^2(h) = C_n^2(h'_0) (h/h'_0)^{-4/3} \exp \left(-\frac{h'_0 - h}{h''_0} \right), \quad (5)$$

где константа h''_0 равна толщине оптически активного турбулентного слоя атмосферы ($h''_0 \approx 10$ км).

Расчетные данные [13] хорошо аппроксимируются также формулой

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-2/3} \exp(-h/\bar{h}_0) \quad (\bar{h}_0 = 3,2 \text{ км}). \quad (6)$$

Выражение, отличающееся от (6) заменой показателя степени $-2/3$ на $-1/3$, использовано в работе [14] при определении оптической передаточной функции в турбулентной атмосфере для наклонных трасс. Рядом авторов применяются в практических расчетах другие более простые модели, такие как степенной [12]

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) (h/h_0)^{-4/3} \quad (7)$$

и экспоненциальный [15]

$$C_n^2(h) = C_n^2(h_0) \exp(-h/\tilde{h}_0)$$

законы убывания структурной характеристики для всей толщи атмосферы (\tilde{h}_0 — константа).

На рис. 1 показано соотношение между рассмотренными моделями

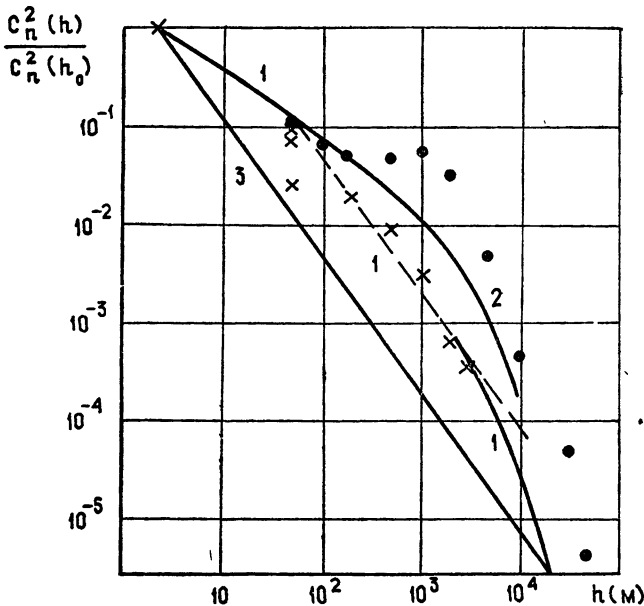


Рис. 1. Зависимость приведенной структурной характеристики от высоты.

1 — формулы (3) — (5); 2 — формула (6); 3 — формула (7);
x x x — данные работ [11, 12]; o o o — расчетные результаты [13].

зависимости $C_n^2(h)$ от высоты и их соответствие расчетным и экспериментальным результатам работ [11—13]. Формулы (3)—(5) и (6) дают наилучшее совпадение с этими данными и будут использованы в дальнейших расчетах.

Чтобы воспользоваться формулами (3)—(6) для функции $C_n^2(x')$, стоящей под знаком интеграла в выражении (2), необходимо определить высоту $h = h(x')$, соответствующую расстоянию вдоль трассы. Пренебрегая регулярной рефракцией в атмосфере в случае передатчика, расположенного вблизи Земли на высоте h_0 (распространение снизу вверх), находим

$$h(x') = h_0 + R \left[\left(\frac{x'}{R} \right)^2 + 2 \frac{x'}{R} \cos \theta + 1 \right]^{1/2} - R, \quad (8)$$

где R — радиус Земли, θ — зенитный угол. Если выполняется условие

$$h(x')/R \cos \theta \ll 1, \quad (9)$$

из формулы (8) следует простое приближенное соотношение:

$$h(x') = h_0 + x' \cos \theta. \quad (10)$$

Когда передатчик и приемник меняются местами (распространение сверху вниз), в выражениях (8), (10) необходимо провести замену $x' \rightarrow x - x'$. Однако если иметь в виду, что выражения (3) — (6), в которых $h = h(x')$ определяются формулами (8) или (10), стоят под знаком интеграла в (2), и произвести в последнем замену переменной интегрирования $x' \rightarrow x - x'$, то функция $D_1\left(x, \frac{2a}{g} t\right)$ при распространении сверху вниз запишется в виде

$$D_1\left(x, \frac{2a}{g} t\right) = 8,7 k^2 x_m^{-5/3} \int_0^x C_n^2(x'), \quad (11)$$

$$\left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\left(\frac{ax_m}{g} t \frac{x'}{x}\right)^2\right) - 1 \right] dx',$$

где структурная характеристика $C_n^2(x')$ по-прежнему определяется формулами (3) — (6), (8), (10).

При оценке малого параметра (9) вместо $h(x')$ следует взять толщину оптически активного турбулентного слоя атмосферы $h(x') = h_0''$, так как при $h(x') > h_0''$ структурная характеристика $C_n^2(x')$ практически равна нулю, и в расчетах без внесения существенной ошибки можно использовать приближенную формулу (10). При $h(x') = h_0''$ условие (9) удовлетворительно выполняется на отрезке $0 \leq \theta \leq 80^\circ$.

Для больших значений параметра $ax_m/g \gg 1$ в большей части области интегрирования по переменным x' и t в выражениях (1), (2) можно воспользоваться асимптотическим представлением гипергеометрической функции [16]. В этом случае формула (2) для $D_1\left(x, \frac{2a}{g} t\right)$ примет вид

$$D_1\left(x, \frac{2a}{g} t\right) = D_{1,a}\left(x, \frac{2a}{g}\right) t^{5/3}, \quad (12)$$

где величина

$$D_{1,a}\left(x, \frac{2a}{g}\right) = 2,92 C_n^2(h_0) k^2 X(x, \theta) \left(\frac{2a}{g}\right)^{5/3}$$

совпадает с асимптотикой ($(2ax_m/g) \gg 1$) структурной функции комплексной фазы плоской волны (см. [10]) и содержит эквивалентное расстояние

$$X(x, \theta) = \frac{x}{C_n^2(h_0)} \int_0^1 C_n^2(x\tau) (1 - \tau)^{5/3} d\tau, \quad (13)$$

равное $3x/8$ для однородной трассы ($C_n^2(x\tau)/C_n^2(h_0) \equiv 1$).

Подставляя формулу (12) в выражение (1), замечаем, что последнее полностью совпадает с исследованной в [8] функцией

$$f(\mu) = 2 \int_0^\infty t \exp(-t^2 - \mu t^{5/3}) dt,$$

где $\mu = \frac{1}{2} D_{1,a}\left(x, \frac{2a}{g}\right)$, характеризующей турбулентное расширение

пучка для однородной трассы. Функция $f(\mu)$ представлена на рис. 2. При $\mu \gg 1$ имеет место асимптотическая формула

$$f(\mu) = 1,1 \mu^{-5/6}.$$

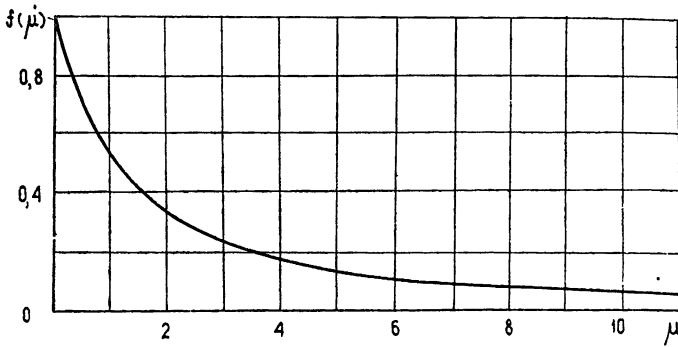


Рис. 2. Функция $f(\mu)$.

Необходимое для определения параметра μ эквивалентное расстояние $X(x, \theta)$ рассчитывалось в случае двух моделей атмосферы по формулам (3)—(5), (8), (13) и (6), (8), (13). Результаты расчета представлены на рис. 3 а, 3 б, при этом значения постоянных h_0, h_0', h_0'' выбирались равными $h_0 = 2 \text{ м}, h_0' = 50 \text{ м}, h_0'' = 10 \text{ км}$.

Как видно из рис. 3 а, 3 б, величина эффективного расстояния по мере

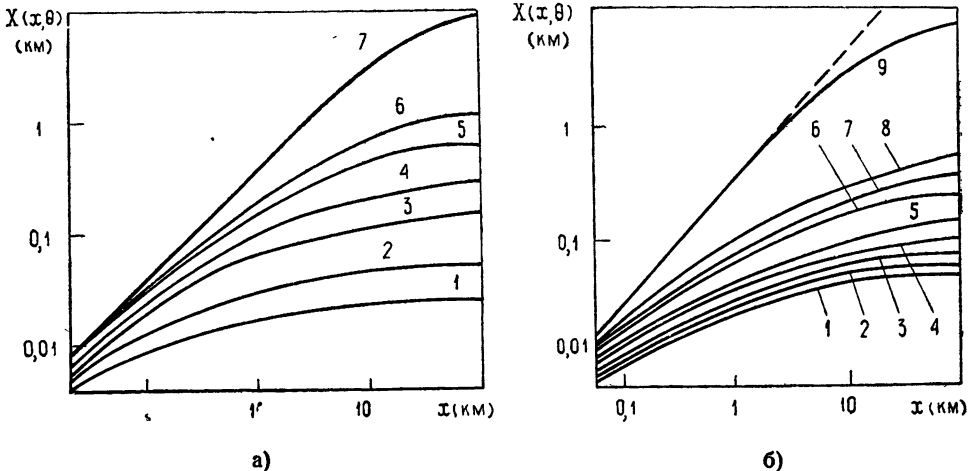


Рис. 3. Зависимость эквивалентного расстояния от длины трассы: а) модель (3)—(5); 1— $\theta = 0^\circ$; 2— $\theta = 60^\circ$; 3— $\theta = 80^\circ$; 4— $\theta = 85^\circ$; 5— $\theta = 88^\circ$; 6— $\theta = 89^\circ$; 7— $\theta = 90^\circ$; б) модель (6) 1— $\theta = 0^\circ$; 2— $\theta = 30^\circ$; 3— $\theta = 50^\circ$; 4— $\theta = 60^\circ$; 5— $\theta = 70^\circ$; 6— $\theta = 80^\circ$; 7— $\theta = 83,5^\circ$; 8— $\theta = 86^\circ$; 9— $\theta = 90^\circ$.

увеличения длины трассы испытывает насыщение, что соответствует полному прохождению турбулентного слоя атмосферы. Уровень насыщения зависит от зенитного угла, который определяет длину участка трассы, находящегося в турбулентной среде. Наибольшее расхождение результатов, полученных для (3)—(5) и (6), наблюдается при больших

длинах трассы, когда различие между моделями атмосферы проявляется в виде интегрального эффекта.

Для модели атмосферы, определяемой формулой (6), зенитных углов $\theta < 80^\circ$ и больших длин трассы ($h(x')/\bar{h}_0 \gg 1$) можно получить асимптотическую оценку уровня насыщения эквивалентного расстояния:

$$X_n(\theta) = 2,68 \frac{\bar{h}_0}{\cos \theta} \left(\frac{h_0}{\bar{h}_0} \right)^{2/3},$$

которая согласуется с расчетными данными рис. 3б.

Если излучающая апертура находится сверху, а приемник вблизи земной поверхности, то для функции $D_1\left(x, \frac{2a}{g}t\right)$ в формуле (1) необходимо использовать выражение (11). В этом случае при больших длинах трассы ($h(x)/\bar{h}_0 \gg 1$) структурная характеристика $C_n^2(x')$ отлична от нуля при значениях $x'/x \ll 1$, и область, существенная для интегрирования в (1), (11), будет соответствовать произвольным значениям аргумента вырожденной гипергеометрической функции, в том числе и при больших значениях параметра ax_m/g .

Воспользовавшись распределением структурной характеристики по высоте вида (6) и приближенной формулой (10), связывающей текущую высоту $h(x')$ с расстоянием x' , выражение (11) запишем в виде

$$D_1\left(x, \frac{2a}{g}t\right) = \tilde{C} x_m^{-5/3} H \int_0^1 \left(1 + \frac{H}{h_0} \tau\right)^{-2/3} \exp\left(-\frac{h_0 + H\tau}{\bar{h}_0}\right) \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\left(\frac{ax_m}{g}t\tau\right)^2\right) - 1 \right] d\tau, \quad (14)$$

где $H = x \cos \theta$ — высота передатчика, $\tilde{C} = 8,7 \tilde{C}_n^2(h_0) k^2 / \cos \theta$ — обобщенный параметр.

Численный расчет турбулентного расширения при распространении сверху вниз проводился для сфокусированного пучка ($g = 1$) с использованием (1), (14). Внутренний и внешний интегралы вычислялись по квадратурным формулам Гаусса [17], при этом алгоритм расчета вырожденной гипергеометрической функции предусматривал использование ряда Куммера и асимптотического ряда [16] в соответствующих областях определения ее аргумента. Результаты расчета представлены на рис 4 а. Здесь же для сравнения приведена кривая 7, соответствующая прямому распространению.

Как следует из рис. 4 а, турбулентное расширение лазерного пучка на наклонных трассах при обратном распространении оказывается меньше, по сравнению со случаем прямого распространения. Этот факт, однако, не противоречит теореме взаимности, если учесть, что передатчик имеет апертуру конечных размеров, в то время как в отношении (1) входит интенсивность, фиксируемая точечным приемником.

Характерной особенностью полученных при обратном распространении результатов является наличие некоторой высоты ($H \approx 2$ км) передающей апертуры, для которой наблюдается наибольшее влияние атмосферной турбулентности на расширение пучка. При дальнейшем увеличении высоты, как видно из рис. 4 б, это влияние монотонно уменьшается.

Заметим также, что величина турбулентного расширения, рассчитанная при прямом распространении путем определения эквивалентного

расстояния $X(x, \theta)$ по формуле (13), с точностью определения по графику совпадает с результатом численного расчета по формулам (1), (2) (кривая 7 на рис. 4 а).

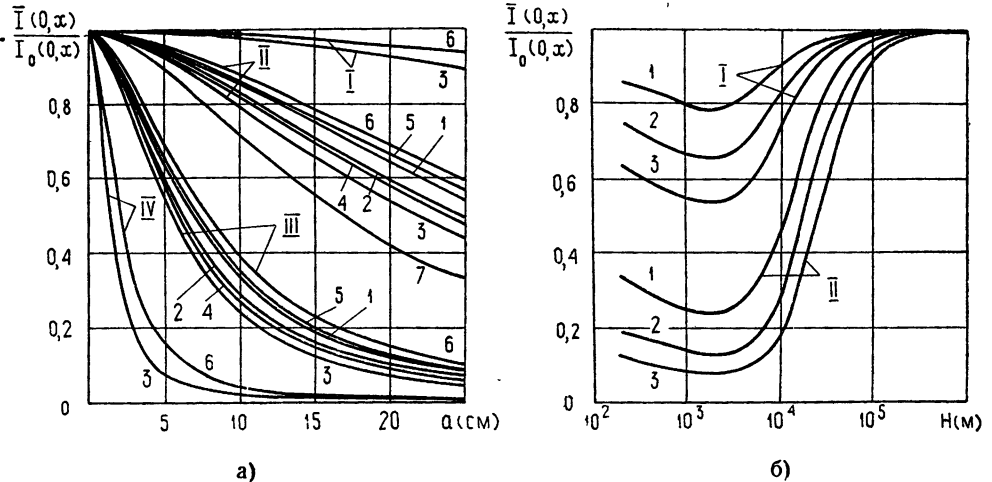


Рис. 4. а) Зависимость турбулентного расширения пучка при обратном распространении от размеров передающей апертуры.

I — $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-8/3}$; II — $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-8/3}$; III — $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-8/3}$; IV — $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-8/3}$.

1 — $H = 0,2 \text{ км}$; 2 — $H = 0,4 \text{ км}$; 3 — $H = 2 \text{ км}$; 4 — $H = 4 \text{ км}$; 5 — $H = 7 \text{ км}$; 6 — $H = 8 \text{ км}$; $l_0 = 0,5 \text{ см}$; 7 — прямое распространение; $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-8/3}$; $H = 2 \text{ км}$; $l_0 = 0,5 \text{ см}$.

б) Зависимость турбулентного расширения пучка при обратном распространении от высоты.

I — $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-8/3}$; II — $\tilde{C} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-8/3}$.

1 — $a = 10 \text{ см}$; 2 — $a = 15 \text{ см}$; 3 — $a = 20 \text{ см}$; $l_0 = 0,5 \text{ см}$.

В заключение авторы приносят благодарность Т. Д. Ивановой и М. С. Беленькому за проведение численных расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 870 (1965).
2. В. М. Комиссаров, ЖЭТФ, 52, № 3, 711 (1967).
3. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
4. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
5. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).
6. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1039 (1970).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
8. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт АН СССР, Отделение океанологии, физики атмосферы и географии, М., 1970.
9. А. И. Кон, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 71 (1970).
10. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
11. Л. Р. Цванг, Изв. АН СССР (сер. геофизич.), № 10, 1594 (1963).
12. М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 50 (1966).

13. R. E. Hufnagel, N. R. Stanley, JOSA, 54, № 1, 52 (1964).
14. D. L. Fried, J. D. Cloud, JOSA, 56, № 12, 1657 (1966).
15. F. P. Carlson, A. Isimaru, JOSA, 59, № 3, 319 (1969).
16. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд. Наука, М., 1965.
17. В. Н. Крылов, Л. Т. Шулъгина, Справочная книга по численному интегрированию, изд. Наука, М., 1966.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
13 сентября 1971 г.

LASER BEAM BROADENING IN THE TURBULENT ATMOSPHERE ALONG THE SLOPING TRACES OF PROPAGATION

V. L. Mironov, S. S. Khmelevtsov

Calculations are given of the turbulent broadening of the laser beam propagating along the sloping traces in the atmosphere. The calculations are based on the solution of the equation for the coherence function of the second order [8], obtained in the approximation of Markov process. The selected model of distribution of the structural fluctuations characteristic of the refractive index over the height corresponds to the unstable temperature stratification in the atmosphere (convective conditions). Diagrams are obtained for the equivalent distance permitting the use the results of [8], corresponding to the uniform traces, for the estimation of the turbulent broadening when propagating upwards. It is shown that when propagating downwards the magnitude of the turbulent broadening has the maximum at the definite height of the transmitter.

УДК 538.571.5

К ПРОБЛЕМЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

О. Н. Найда

Для случая анизотропной двупреломляющей среды построена итерационная процедура нахождения точных решений уравнений Максвелла в виде ряда по ω^{-1} . Решение уравнений доведено до квадратурных формул, причем рассмотрен случай, учитывающий нестационарность, неоднородность, движение среды, магнитные свойства, дисперсию и гиротропию среды, а также модуляцию волны. Для этого же случая получены формулы для групповой скорости волны, а также простые достаточные условия отсутствия поглощения и двулучепреломления в анизотропной среде с комплексными ϵ , μ .

Показано, что получающиеся из итерационной процедуры решения уравнений $\frac{\partial D}{\partial x^0} - \text{rot } H = 0$, $\frac{\partial B}{\partial x^0} + \text{rot } E = 0$ автоматически удовлетворяют уравнениям $\text{div } D = 0$, $\text{div } B = 0$. Указана допустимая степень произвола в выборе начальных условий итерационной процедуры.

Как частный случай получена оценка для разницы поляризационных параметров точного волнового решения уравнений Максвелла и соответствующей нормальной волны. Результат применен к проблеме предельной поляризации: получен способ выбора точки «сшивания» нормальных волн и решений «квазиизотропного» приближения, при котором минимальна ошибка окончательного результата.

Получены выражения для групповой скорости в случае движущейся среды с произвольными ϵ , μ .

1. ВВЕДЕНИЕ

Основное содержание настоящей работы — получение точных решений уравнений Максвелла в виде ряда по ω^{-1} для случая двупреломляющей слабонеоднородной среды, т. е. среды, у которой масштаб l пространственной дисперсии много больше не только длины волны λ , но и периода Δl пространственных биений поляризационных компонент волны*. При этом применена схема построения решений, известная из общей теории гиперболических систем линейных уравнений с частными производными и используемая при построении решений в виде так называемых «бегущих волн» (см., например, книгу [3], гл. VI, § 3, 4, 5, а также работы [4–7]). Здесь эта схема будет доведена до явных формул (применительно к уравнениям Максвелла), позволяющих получить условие сходимости итерационной процедуры и оценку точности нулевого приближения. Целью этих оценок является решение проблемы предельной поляризации, т. е. задачи о нахождении поляризации волны, выходящей из анизотропной среды в изотропную (при плавном измене-

* Таким образом, в настоящей работе речь идет о конкретной реализации в векторной задаче так называемой дебаевской процедуры, которая, применительно к скалярной задаче, была предложена в книге [1]. Для векторной задачи уравнения дебаевской процедуры были выписаны, например, в работе [2]. В настоящей работе эти уравнения решены, т. е. доведены до квадратурных формул. Кроме того, рассмотрен более общий случай, учитывающий нестационарность среды (помимо неоднородности, учтенной в [2]), движение среды, модуляцию волны, а также рассмотрен вопрос о степени допустимого произвола при выборе начальных условий.

нии свойств среды). Как известно, эта задача в общем случае решается лишь с применением на границе сред квазиизотропного приближения (см. [8]). Однако квазиизотропное приближение обладает ограниченной областью применимости. Во-первых, оно неприменимо к случаю сильноанизотропной среды (т. е. при $|\epsilon_{ik} - (1/3)\delta_{ik} \text{Sp } \epsilon| \gtrsim 1$), какой может быть, например, горячая плазма. Во-вторых, из-за применения приближенного уравнения эйконала в уравнениях квазиизотропного приближения, решения последних (например, для поляризационного параметра θ , фигурирующего в формуле (5) работы [8]) по сравнению с точными решениями уравнений Максвелла содержат в себе ошибку, по порядку величины в общем случае не меньшую, чем

$$|\delta\theta| \sim k \left| \int_{(A_0)}^{(A)} (\Delta v_\phi/c)^2 d\sigma \right|. \quad (1.1)$$

Здесь $k = \omega c$ (ω — частота); интегрирование ведется по длине луча (луч берется из приближенного уравнения эйконала); Δv_ϕ — разность фазовых скоростей нормальных волн, соответствующих одному и тому же направлению волнового вектора k ; A_0 — точка на луче, где задано начальное условие для θ ; A — точка, где поляризационный параметр вычисляется по начальному значению согласно уравнению (5) работы [8]. Оценка (1.1) справедлива, например, в случае однородной среды.

Таким образом, решение проблемы предельной поляризации для сильноанизотропной ($\Delta v_\phi/c \sim 1$) либо протяженной среды (при $\delta\theta \sim 1$) требует «сшивания» решений квазиизотропного приближения с решениями, получаемыми в других приближениях, например, с нормальными волнами*. Однако для того, чтобы оптимальным образом выбрать место «сшивания», необходимо иметь оценки степени точности каждого из «сшиваемых» решений. Эти оценки можно получить из итерационных формул для точных решений, что и будет выполнено в разд. 6 настоящей работы.

2. О МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ СРЕДЫ

Произведем в уравнениях Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x^0} - \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^0} + \text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

обычную подстановку, требуемую для перехода к геометрической оптике:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} e^{i\zeta}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{b} e^{i\zeta}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{d} e^{i\zeta}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h} e^{i\zeta}. \quad (2.3)$$

Уравнение для эйконала $\zeta(\mathbf{x})$ будет рассмотрено в разд. 3. Здесь и в дальнейшем x означает набор 4-х координат x^0, \mathbf{r} . Наряду с координатой x^0 будет использоваться также обычная координата $t = x^0/c$. Будем считать, что длина λ и период τ волны много меньше, чем соответственно характерный масштаб l пространственной неоднородности среды и характерный период T нестационарности среды.

Известно, что в случае произвольно движущейся среды, вообще

* Термин «нормальная волна» употребляется здесь в том же смысле, что и в работе [9].

говоря, поглощающей, обладающей дисперсией, неоднородной и анизотропной, векторы E, B, D, H связаны следующими материальными уравнениями:

$$\Phi^{\alpha\beta}(x^0, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{x^0} dx'^0 \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < x^0 - x'^0} d\mathbf{r}' S^{\alpha\beta\mu\nu}(x^0 - x'^0, \mathbf{x}^0; \mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{r}) F_{\mu\nu}(x'^0, \mathbf{r}')^*. \quad (2.4)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} F_{0m} &= -F_{m0} = E_m, & F_{mn} &= -e_{mnp} B_p, \\ \Phi^{m0} &= -\Phi^{0m} = D_m, & \Phi^{mn} &= -e_{mnp} H_p; \end{aligned} \quad (2.5)$$

e_{mnp} означает абсолютно антисимметричный тензор, причем $e_{123} = 1$. Преческие строчные индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские строчные—1, 2, 3. Значения заглавных индексов будут указываться каждый раз отдельно. По повторяющимся индексам (как строчным, так и заглавным), независимо от их расположения, всюду предполагается суммирование, за исключением индексов, заключенных в скобки, по которым суммирование производится лишь при наличии символа Σ .

Исходя из (2.4), легко указать случай, когда связь между векторами e, b, d, h из (2.3) имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{\alpha\beta}(x) &= s^{\alpha\beta\mu\nu}(x^0, k_0; \mathbf{r}, \mathbf{k}) f_{\mu\nu}(x)^{**}, \\ s^{\alpha\beta\mu\nu} &= -s^{\beta\alpha\mu\nu} = -s^{\alpha\beta\nu\mu} \left(k_\nu = \frac{\partial \zeta}{\partial x^\nu} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для того, чтобы связь между $\varphi^{\alpha\beta}$ и $f_{\mu\nu}$ имела вид (2.6), достаточно, чтобы для каждой из 4-х пар переменных $x^{(\tau)}, x^{(\tau)} - x^{(\tau)}$ либо компоненты $S^{\alpha\beta\mu\nu}$ не зависели от $x^{(\tau)}$, либо зависимость $S^{\alpha\beta\mu\nu}$ от $x^{(\tau)} - x^{(\tau)}$ давалась дельта-функцией; соответственно выполнялось бы условие

$$\frac{\partial s^{\alpha'\beta'\mu'\nu'}}{\partial x^{(\tau)}} - \frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial k^{(\tau)}} \equiv 0. \quad (2.7)$$

При выполнении условия (2.7) материальное уравнение (2.6) выполняется для волн, удовлетворяющих ограничениям

$$\frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial k^{(\tau)}} \frac{\partial k^{(\tau)}}{\partial x^\sigma} \equiv 0; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial k^{(\tau)}} \frac{\partial f_{\theta\sigma}}{\partial x^{(\tau)}} \equiv 0 \quad (2.9)$$

при всех значениях фигурирующих в них индексов.

Из результатов работы [11] следует, что при невыполнении условий (2.7) — (2.9) материальные уравнения имеют более сложный вид, чем (2.6). Поэтому, начиная с разд. 5, изложение будет ограничено лишь указанным выше случаем, приводящим к (2.6) и включающим в себя.

* Для случая покоящейся среды с единичным тензором магнитной проницаемости эта формула (в других обозначениях) приведена, например, в книге [10], § 2

** Здесь $\varphi^{\alpha\beta}$ и $f_{\mu\nu}$ связаны с $\Phi^{\alpha\beta}$ и $F_{\mu\nu}$ формулами, аналогичными (2.3): $\Phi^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta} e^{i\zeta}$, $F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} e^{i\zeta}$. Поэтому $f_{\mu\nu}$ и $\varphi^{\alpha\beta}$ связаны с e, b, d, h формулами, аналогичными (2.5):

$$f_{0m} = -f_{m0} = e_m, \quad f_{mn} = -e_{mnp} b_p; \quad \varphi^{mn} = -e_{mnp} h_p, \quad \varphi^{m0} = -\varphi^{0m} = d_m.$$

в частности, случай среды (вообще говоря, движущейся, неоднородной, нестационарной и анизотропной), не обладающей частотной и пространственной дисперсией; для этого более узкого случая тензор $s^{\alpha\beta\mu\nu}(x)$ совпадает с тензором $s^{\alpha\beta\mu\nu}$, введенным Таммом в работе [12]. Для сред с дисперсией ограничениям (2.7)—(2.9) также удовлетворяет ряд важных случаев. Во-первых,—однородная стационарная (вообще говоря, движущаяся, но лишь поступательно) среда с одним или обоими видами дисперсии. Во-вторых,—покоящаяся среда, стационарная, без пространственной дисперсии (но с частотной дисперсией), и, вообще говоря, неоднородная. Эти частные случаи будут использоваться в дальнейшем для иллюстративных целей.

Материальные уравнения в случае покоящихся сред будем записывать в виде

$$\mathbf{d} = \hat{\epsilon} \mathbf{e}, \quad \mathbf{h} = \hat{\mu}^{-1} \mathbf{b}, \quad (2.6a)$$

где $\hat{\mu}^{-1}$ есть тензор, обратный тензору $\hat{\mu}$ магнитной проницаемости. Нетрудно получить формулы, выражающие $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}^{-1}$ через $s^{\alpha\beta\mu\nu}$ (для покоящейся среды):

$$\epsilon_{mn} = 2 s^{m00n}, \quad \mu_{mn}^{-1} = \frac{1}{2} e_{mij} s^{ijpa} e_{npq}. \quad (2.10)$$

3. НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ)

Учитывая (2.3), перепишем уравнения (2.1) в виде

$$-i\hat{M}f = Z[f], \quad (3.1)$$

где f, Z — шестирядные векторы, составленные по формулам

$$f = (\mathbf{e}, \mathbf{b}), \quad Z[f] = \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x^0} - \text{rot } \mathbf{h}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x^0} + \text{rot } \mathbf{e} \right),$$

а $\hat{M}(s^{\alpha\beta\mu\nu}; \mathbf{k}_0, \mathbf{k})$ — шестирядная матрица, следующим образом действующая на произвольный 6-вектор $f' = (\mathbf{e}', \mathbf{b}')$ при произвольном 4-векторе \mathbf{k}_v :

$$\hat{M}f' = \mathbf{k}_v \hat{M}' f' = (\mathbf{k}_0 \mathbf{d}' - [\mathbf{k} \mathbf{h}'], \quad \mathbf{k}_0 \mathbf{b}' + [\mathbf{k} \mathbf{e}']); \quad (3.2)$$

$$\mathbf{d}'_m = \varphi'^m{}_0, \quad \mathbf{h}'_m = -\frac{1}{2} e_{mnp} \varphi'^n{}_p, \quad \varphi'^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) f'_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

$$f'_{0m} = -f'_{m0} = \mathbf{e}'_m, \quad f'_{np} = -e_{mnp} \mathbf{b}'_m,$$

т. е. вид матрицы \hat{M} однозначно определяется тензором $s^{\alpha\beta\mu\nu}(x^0, \mathbf{k}_0; \mathbf{r}, \mathbf{k})$. Эйконал ζ , фигурирующий в (2.3), будем выбирать так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$\det \hat{M} = 0, \quad (3.4)$$

где \hat{M} берется согласно (3.2)*.

* Выбирая в (3.2), (3.3) пространственные оси так, чтобы одна из них по направлению совпадала с вектором \mathbf{k} , нетрудно убедиться, что при всяких $\mathbf{k}_v, s^{\alpha\beta\mu\nu}$ определитель $\det \hat{M}$ имеет вид

$$\det \hat{M} = k_0^2 P_4(s^{\alpha\beta\mu\nu}, k_\lambda),$$

где P_4 — полином 4-й степени по k_λ с коэффициентами, составленными из компонент $s^{\alpha\beta\mu\nu}(x^0, \mathbf{k}_0; \mathbf{r}, \mathbf{k})$.

В сопутствующей системе отсчета, где материальные уравнения имеют вид (2.6 а), матрица \hat{M} имеет вид

$$\hat{M} = \left\| \begin{array}{cc} k_0 \varepsilon_{mn}, & e_{mps}^i k_s \mu_{pn}^{-1} \\ -e_{mnp} k_p, & k_0 \delta_{mn} \end{array} \right\|. \quad (3.2a)$$

Подставляя (3.2 а) в (3.4) и вычисляя определитель, получаем для сопутствующей системы отсчета следующее характеристическое уравнение:

$$k_0^2 [k_0^4 - k_0^2 k_p k_c e_{mnp} e_{abc} \varepsilon_{ma}^{-1} \mu_{bn}^{-1} + \det(\varepsilon^{-1} \mu^{-1}) (\varepsilon_{ab} k_a k_b) (\mu_{mn} k_m k_n)] = 0. \quad (3.5)$$

Отсюда легко получить простые достаточные условия для отсутствия поглощения в среде:

$$\varepsilon = \varepsilon^+, \quad \mu = \mu^+ *,$$

и для отсутствия двойного лучепреломления в среде:

$$\varepsilon = a(x) \mu^T. \quad (3.6)$$

Здесь и в дальнейшем символы $^+, ^T$ при квадратных матрицах означают соответственно эрмитовское сопряжение и транспонирование, а $a(x)$ означает произвольную функцию от координат, не обращающуюся в бесконечность.

В книге [13] было показано, что для случая, когда тензоры ε, μ вещественны и симметричны, условие (3.6) является также и необходимым условием отсутствия двулучепреломления в среде. Более простым путем, чем в книге [13], этот результат может быть получен (для симметричных и вещественных ε, μ) непосредственно из (3.5) либо даже из (3.4), (3.2 а) путем перехода от величин ε, μ, k к величинам

$$\varepsilon_{\text{эКВ}} = \mu^{-1/2} \varepsilon \mu^{-1/2}, \quad k_{\text{эКВ}} = (\det \mu)^{-1/2} \mu^{1/2} k,$$

в результате чего уравнение (3.5) будет иметь обычный вид, как при $\mu_{mn} = \delta_{mn}$. Такая процедура была предложена в работе [14].

Решения ненормированного нулевого приближения $\tilde{f}^{(A)} = (\tilde{e}^{(A)}, \tilde{b}^{(A)})$, т. е. амплитуды нормальных волн, для уравнений (3.1) будем искать, как обычно, приравняв нулю левую часть уравнения (3.1) и взяв в ней в качестве k_0 ту или иную функцию $k_0 = k_0^{(A)}(k)$, удовлетворяющую уравнению (3.4). Индекс A нумерует решения $k_0^{(A)}(k)$ и все соответствующие им величины**. В частности, матрицы

* Кроме того, предполагается, что ε и μ достаточно близки к единичному тензору, чтобы исключить, например, случай, когда $\det(\varepsilon \mu) < 0$ или $\text{Sp}(\varepsilon \mu) < 0$.

** Индексу A будут присваиваться значения от 1 до 6, в соответствии с тем, что $\det \hat{M}$ есть полином 6-й степени по k_0 . При этом значения $A = 1, 2$ соответствуют отрицательным корням $k_0^{(A)}(k)$, значения $A = 3, 4$ — положительным и значения $A = 5, 6$ — нулевым корням. При отсутствии дисперсии корни $k_0^{(3)}(k), k_0^{(4)}(k)$ нумеруются таким образом, чтобы выполнялось

$$k_0^{(3)}(k) = -k_0^{(1)}(-k), \quad k_0^{(4)}(k) = -k_0^{(2)}(-k),$$

а амплитуды $\tilde{f}^{(3)}(k)$ и $\tilde{f}^{(4)}(k)$ нормируются таким образом, чтобы выполнялось $\tilde{f}^{(3)}(s^{\alpha\beta\mu\nu}; k) = \tilde{f}^{(1)}(s^{\alpha\beta\mu\nu}; -k), \tilde{f}^{(4)}(s^{\alpha\beta\mu\nu}; k) = \tilde{f}^{(2)}(s^{\alpha\beta\mu\nu}; -k)$; возможность такого сопоставления корней и амплитуд вытекает непосредственно из (3.2), (3.4);

\hat{M} , соответствующие различным $k_0^{(A)}(k)$, будут обозначаться как $\hat{M}_{(A)}$. Выбор нормировки нулевого приближения, обеспечивающей наилучшее приближение к точному решению $f^{(A)}(x)$, будет произведен в разд. 4 методом, использовавшимся, например, в [2], а именно, с помощью какого-либо решения $f_{\tau}^{(A)} = (e_{\tau}^{(A)}, h_{\tau}^{(A)})$ уравнения $\hat{M}_{(A)}^+ f_{\tau}^{(A)} = 0$. Нормировка $f_{\tau}^{(A)}$ выбирается произвольно, как и нормировка $f^{(A)}$.

Если \hat{M} имеет вид (3.2 а), а тензоры $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ эрмитовы, то, как нетрудно показать, $f_{\tau}^{(A)}$ следующим образом выражается через компоненты 6-вектора $\tilde{f}^{(A)}$:

$$f_{\tau}^{(A)}(x) = \chi(x) (\tilde{e}^{(A)}(x), \tilde{h}^{(A)}(x)). \quad (3.7)$$

Здесь $\chi(x)$ означает произвольную функцию от x ; в дальнейшем будем полагать $\chi(x) \equiv 1$. Вектор $\tilde{h}^{(A)}$ берется из формул (3.3) с подстановкой в них $\tilde{f}^{(A)} \rightarrow f'$. Ниже будет употребляться также вектор $\tilde{d}^{(A)}$, получающийся из тех же формул. Исходя из определения (3.2) и используя лоренцовскую инвариантность комбинаций $e^* d' - b^* h'$ и $d^* e' - h^* b'$, нетрудно показать, что если в какой-либо мировой точке тензоры $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$ эрмитовы по отношению к сопутствующей системе отсчета (т. е. в системе, где (2.6) переходит в (2.6 а)), то формула (3.7) в этой мировой точке справедлива не только по отношению к сопутствующей системе, но и по отношению к любой другой системе отсчета.

4. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛНЫ

Вычислим групповые скорости волн. Поскольку волновые пакеты при наличии дисперсии заведомо не удовлетворяют условию (2.9), то при конечных $|k|$ формула (2.6) может быть применена к волновым пакетам лишь приближенно (если есть дисперсия). Однако из рассмотрения, проведенного в работе [11], следует, что при $|k| \rightarrow \infty$ формула (2.6) становится точной и применительно к волновым пакетам в диспергирующих средах. Таким образом, групповую скорость $v_{\text{гп}}^{(A)}$ будем вычислять по обычной формуле

$$v_{\text{гп}}^{(A)} \left(x, \frac{k}{|k|} \right) = -c \frac{\partial k_0^{(A)}(x, k)}{\partial k} \quad (A = 1, 2), \quad (4.1)$$

где $k_0^{(A)}(x, k)$ берется из (3.4). В качестве $s^{\alpha\beta\gamma\nu}(x, k_{\lambda})$ в (3.4) подставляется тензор, применяющийся для волн, удовлетворяющих условиям (2.8), (2.9) в однородной стационарной среде, во всех точках которой макроскопические параметры, определяющие тензор $s^{\alpha\beta\gamma\nu}$, те же, что и в рассматриваемой задаче (в мировой точке x). Мировую линию, определяемую уравнением

$$\frac{dr}{dt} = v_{\text{гп}}^{(A)}(x), \quad (4.2)$$

т. е. бихарактеристику уравнений Максвелла, будем называть мировой линией луча.

Исходя из (3.2), нетрудно получить следующее тождество:

$$\left\{ f_{\tau}^{(A)}, \frac{\partial}{\partial k} (\hat{M}_{(A)} f') \right\} \equiv \left(e_{\tau}^{(A)*} a' + h_{\tau}^{(A)*} b' + e_{\tau m}^{(A)*} f'_{\mu\nu} k_{\tau}^{(A)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial s^{m\tau\mu\nu}}{\partial k_0} \right) \frac{\partial k_0^{(A)}}{\partial k} + \left([e_{\tau}^{(A)*} h'] + [e' h_{\tau}^{(A)*}] + e_{\tau m}^{(A)*} f'_{\mu\nu} \times \right. \\ \left. \times k_{\tau}^{(A)} \frac{\partial s^{m\tau\mu\nu}}{\partial k} \right), \quad (4.3)$$

где f' , как и в (3.2), означает произвольный 6-вектор, и e', \dots, h' означают то же, что в (3.2), (3.3). Запись вида $\{f, Z\}$ здесь и в дальнейшем означает обычную эрмитову свертку 6-векторов: $\{f, Z\} = f_1^* Z_1 + \dots + f_6^* Z_6$. Производные от $s^{m\tau\mu\nu}$ по k_0, k берутся независимо, затем подставляется $k_0 = k_0^{(A)}(k)$.

Полагая в (4.3) $f' = \tilde{f}^{(A)}$ и учитывая (4.1), получаем

$$v_{\text{гп}}^{(A)} = c \Omega^{(A)} / \Omega_0^{(A)}; \quad (4.4)$$

$$\Omega_0^{(A)} = (e_{\tau}^{(A)*} \tilde{a}^{(A)} + h_{\tau}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)}) + e_{\tau m}^{(A)} \tilde{f}_{\mu\nu}^{(A)} k_{\tau}^{(A)} \frac{\partial s^{m\tau\mu\nu}}{\partial_0 k_0} \Big|_{k_0 = k_0^{(A)}(k)}, \quad (4.5)$$

$$\Omega^{(A)} = [e_{\tau}^{(A)*} \tilde{h}^{(A)}] + [\tilde{e}^{(A)} h_{\tau}^{(A)*}] + e_{\tau m}^{(A)} \tilde{f}_{\mu\nu}^{(A)} k_{\tau}^{(A)} \frac{\partial s^{m\tau\mu\nu}}{\partial k} \Big|_{k_0 = k_0^{(A)}(k)}.$$

Формулы (4.4), (4.5) представляют собой частный случай леммы о бихарактеристических направлениях, известной в математической физике (см. [3], гл. VI, § 3, п. 11).

Пусть в сопутствующей системе отсчета тензоры $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ эрмитовы. Тогда, учитывая (3.8), получаем для Ω_0, Ω выражения

$$\Omega_0^{(A)} = (\tilde{e}^{(A)*} \tilde{a}^{(A)} + \tilde{h}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)}) + \tilde{e}_m^{(A)*} \tilde{f}_{\mu\nu}^{(A)} k_{\tau}^{(A)} \frac{\partial s^{m\tau\mu\nu}}{\partial k_0} \Big|_{k_0 = k_0^{(A)}(k)},$$

$$\Omega^{(A)} = [\tilde{e}^{(A)*} \tilde{h}^{(A)}] + [\tilde{e}^{(A)} \tilde{h}^{(A)*}] + \tilde{e}_m^{(A)*} \tilde{f}_{\mu\nu}^{(A)} k_{\tau}^{(A)} \frac{\partial s^{m\tau\mu\nu}}{\partial k} \Big|_{k_0 = k_0^{(A)}(k)}.$$

В сопутствующей системе при эрмитовых $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ выражения для Ω_0, Ω принимают вид

$$\Omega_0^{(A)} = (\tilde{e}^{(A)*} \tilde{a}^{(A)} + \tilde{h}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)}) + k_0^{(A)} \left(\tilde{e}^{(A)*} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial k_0} \tilde{\varepsilon}^{(A)} - \tilde{b}^{(A)*} \frac{\partial \hat{\mu}^{-1}}{\partial k_0} \tilde{b}^{(A)} \right),$$

$$\Omega^{(A)} = [\tilde{e}^{(A)*} \tilde{h}^{(A)}] + [\tilde{e}^{(A)} \tilde{h}^{(A)*}] + k_0^{(A)} \left(\tilde{e}^{(A)*} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial k} \tilde{\varepsilon}^{(A)} - \tilde{b}^{(A)*} \frac{\partial \hat{\mu}^{-1}}{\partial k} \tilde{b}^{(A)} \right).$$

5. ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Построим итерационную процедуру получения точных решений уравнений (2.1) для случаев, когда материальные уравнения имеют вид (2.6), а тензор $s^{\alpha\beta\mu\nu}$ удовлетворяет условиям (2.7). Решения будем искать лишь такие, которые удовлетворяют условиям (2.8), (2.9).

Обозначим решения m -го приближения (для уравнения (3.1)) через $f_{(m)}^{(A)} = (e_{(m)}^{(A)}, b_{(m)}^{(A)})$, полагая $m = -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ и считая

$f_{(-2)}^{(A)} \equiv f_{(-1)}^{(A)} \equiv 0$. Начиная с $m = 0$, решения m -го приближения будем искать по формуле

$$-iM_{(A)}^{\wedge} f_{(m)}^{(A)} = Z[f_{(m-1)}^{(A)}] \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots; A = 1, 2). \quad (5.1)$$

Легко видеть, что при $m \rightarrow \infty$ всякие решения $f_{(m)}^{(A)}(x)$ уравнений (5.1) удовлетворяют уравнениям (3.1); следовательно, функции $E_{(m)}^{(A)}(x) = e_{(m)}^{(A)}(x) e^{i\zeta(x)}$, $B_{(m)}^{(A)}(x) = b_{(m)}^{(A)}(x) e^{i\zeta(x)}$ при $m \rightarrow \infty$ удовлетворяют уравнениям (2.1). Оказывается, однако, что всякие решения $E_{(m)}^{(A)}(x)$, $B_{(m)}^{(A)}(x)$, получающиеся из (5.1), при $m \rightarrow \infty$ удовлетворяют также и уравнениям (2.2)*. В самом деле, переписав (5.1) в виде

$$k_0 d_{(m)}^{(A)} = [kh_{(m)}^{(A)}] + i \left(\frac{\partial d_{(m-1)}^{(A)}}{\partial x^0} - \text{rot } h_{(m-1)}^{(A)} \right),$$

$$k_0 b_{(m)}^{(A)} = -[ke_{(m)}^{(A)}] + i \left(\frac{\partial b_{(m-1)}^{(A)}}{\partial x^0} + \text{rot } e_{(m-1)}^{(A)} \right),$$

получаем из первого уравнения следствие

$$w_{(m)}^{(A)} = ik_0^{-1} \frac{\partial w_{(m-1)}^{(A)}}{\partial x^0}, \quad w_{(m)}^{(A)} = ik d_{(m+1)}^{(A)} + \text{div } d_{(m)}^{(A)}.$$

Отсюда, поскольку $w_{(-1)}^{(A)} \equiv 0$, следует

$$w_{(m)}^{(A)} \equiv 0 \quad (m = -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Следовательно, $E_{(m)}^{(A)} = \lim_{m \rightarrow \infty} E_{(m)}^{(A)}(x)$, $B_{(m)}^{(A)}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} B_{(m)}^{(A)}(x)$ всегда удовлетворяют уравнениям (2.2), причем для этого не обязательно выполнение условий (2.7)–(2.9). Таким образом, всякие предельные (при $m \rightarrow \infty$) решения итерационных уравнений (5.1) автоматически удовлетворяют и уравнениям (2.1), (2.2).

Каждый m -й шаг ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) предлагаемой итерационной процедуры начинается с того, что $f_{(m)}^{(A)}$ выражается явно через $f_{(m-1)}^{(A)}$ путем решения алгебраического уравнения (5.1). Ограничимся случаем, когда двойное лучепреломление имеет место во всех точках рассматриваемой области 4-пространства и, следовательно, каждая из матриц вырождена однократно. Тогда линейная зависимость $f_{(m)}^{(A)}$ от $Z[f_{(m-1)}^{(A)}]$, полученная из (5.1), содержит один неопределенный коэффициент (функцию от x). Эта функция (обозначим ее через $C_{(m)}^{(A)}(x)$) находится из дифференциального уравнения

$$\{f_{\tau}^{(A)}, Z[f_{(m)}^{(A)}]\} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (5.2)$$

Легко видеть, что (5.2) является следствием (5.1), и если $f_{\tau}^{(A)}$ считать известной функцией, в том числе и по амплитуде, то (5.2) есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка по отношению к искомой функции $C_{(m)}^{(A)}(x)$.

Получим решения алгебраических систем уравнений (5.1). По-прежнему ограничимся случаем таких $s^{\text{обл}} \nu$ и k , когда двойное лучепреломление есть. Будем искать решения уравнений (5.1) в виде

$$f_{(m)}^{(A)} = C_{(m)}^{(A)} \tilde{f}^{(A)} + C_{(m)}^{(A)} \Lambda f^{(A)} \quad (\Lambda = 2, 3, \dots, 6; A = 1, 2), \quad (5.3)$$

* Непосредственно из (2.1) уравнения (2.2) вытекают, как известно, лишь для монохроматической волны в стационарной задаче.

где $f^{(A)\Lambda}$ ($s^{\alpha\beta\mu\nu}$, k) означают 6-векторы:

$$f^{(A)2}(k) = \{ f_{\tau}^{(A')} (k), \hat{M}^0 \tilde{f}^{(A')} (k) \}^{-1/2} [k_0^{(A)} (k) - k_0^{(A')} (k)]^{-1/2} \tilde{f}^{(A')} (k) \quad (A' = 3 - A), \quad (5.4)$$

$$f^{(A)P}(k) = \{ f_{\tau}^{(P)} (k), \hat{M}_0 \tilde{f}^{(P)} (k) \}^{-1/2} [k_0^{(A)} (k) - k_0^{(P)} (k)]^{-1/2} \tilde{f}^{(P)} (k) \quad (P = 3, 4, 5, 6),$$

причем 6-векторы $f^{(A)5}$, $f^{(A)6}$ берутся из уравнений

$$e^{(A)5} = k, \quad h^{(A)5} = -k, \quad e^{(A)6} = k, \quad h^{(A)6} = k, \quad (5.4a)$$

а матрица \hat{M}^0 означает, согласно (3.2),

$$\hat{M}^0 = \hat{M}(s^{\alpha\beta\mu\nu}; 1, 0).$$

Все 6-векторы $f^{(A)\Lambda} = (e^{(A)\Lambda}, b^{(A)\Lambda})$ подобраны таким образом, чтобы 5-рядные матрицы

$$W_{(A)}^{\Gamma\Lambda} = \{ f_{\tau}^{(A)\Gamma}, \hat{M}_{(A)} f^{(A)\Lambda} \} \quad (\Lambda, \Gamma = 2, 3, \dots, 6)$$

были единичными матрицами, если нет дисперсии, а тензор $s^{\alpha\beta\mu\nu}$ удовлетворяет условию $s^{\alpha\beta\mu\nu} = s^{\mu\nu\alpha\beta}$ *, что выполняется, например, если ε и μ в сопутствующей системе эрмитовы; $f_{\tau}^{(A)\Lambda}$ получаются из $f^{(A)\Lambda}$ по формуле

$$f_{\tau}^{(A)\Lambda} = (e^{(A)\Lambda}, h^{(A)\Lambda}), \quad (5.4b)$$

где вектор $h^{(A)\Lambda}$ находится из формул (3.3) с подстановкой $f^{(A)\Lambda} \rightarrow f'$.

Подставляя (5.3) в (5.1), получаем

$$f_{(m)}^{(A)} = C_{(m)}^{(A)} \tilde{f}^{(A)} + i (W_{(A)}^{-1})^{\Lambda\Gamma} \{ f_{\tau}^{(A)\Gamma}, Z [f_{(m-1)}^{(A)}] \} f^{(A)\Lambda} \quad (5.5) \quad (A = 1, 2).$$

Здесь $(W_{(A)}^{-1})^{\Lambda\Gamma}$ есть матрица, обратная матрице $W_{(A)}^{\Lambda\Gamma}$. Из (5.5) для разностей $\Delta f_{(m)}^{(A)} = f_{(m)}^{(A)} - f_{(m-1)}^{(A)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) получаем

$$\Delta f_{(m)}^{(A)} = \Delta C_{(m)}^{(A)} \tilde{f}^{(A)} + \delta f_{(m)}^{(A)}, \quad \Delta C_{(m)}^{(A)} = C_{(m)}^{(A)} - C_{(m-1)}^{(A)} \quad (5.6) \quad (C_{(-1)}^{(A)} \equiv 0);$$

$$\delta f_{(m)}^{(A)} = i (W_{(A)}^{-1})^{\Lambda\Gamma} \{ f_{\tau}^{(A)\Gamma}, Z [\Delta f_{(m-1)}^{(A)}] \} f^{(A)\Lambda} \quad (5.7) \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Для того, чтобы получить коэффициент $\Delta C_{(m)}^{(A)}$, а вместе с ним $\Delta f_{(m)}^{(A)}$, необходимо выражение (5.7) для $\Delta f_{(m)}^{(A)}$ подставить в уравнение

$$\{ f_{\tau}^{(A)}, Z [\Delta f_{(m)}^{(A)}] \} = 0, \quad (5.2a)$$

вытекающее из (5.2).

Исходя из определения 6-вектора $Z[f]$, нетрудно получить следующее тождество, справедливое для любой функции $a(x)$:

$$\begin{aligned} & \{ f_{\tau}^{(A)}, Z [a \tilde{f}^{(A)}] \} = a \{ f_{\tau}^{(A)}, Z [\tilde{f}^{(A)}] \} + \\ & + (e_{\tau}^{(A)*} \tilde{a}^{(A)} + h_{\tau}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)}) \frac{\partial a}{\partial x^0} + ([e_{\tau}^{(A)*} \tilde{h}^{(A)}] - [h_{\tau}^{(A)*}, \tilde{e}^{(A)}]) \nabla a. \end{aligned} \quad (5.8)$$

* Доказательство этого утверждения дано в Приложении.

Сопоставляя это выражение с (4.4), (4.5), легко видеть, что если $a(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial k_{(\tau)}} \frac{\partial a}{\partial x^{(\tau)}} = 0$$

при всех значениях индексов, то тождество (5.8) можно переписать в виде

$$\{f_{\tau}^{(A)}, Z[a\tilde{f}^{(A)}]\} = a \{f_{\tau}^{(A)}, Z[\tilde{f}^{(A)}]\} + (e_{\tau}^{(A)*} \tilde{d}^{(A)} + h_{\tau}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)}) \frac{da}{dx^0}.$$

Полная производная берется здесь вдоль бихарактеристики, т. е. вдоль мировой линии, определяемой уравнениями (4.2), (4.1).

Легко видеть, что при выполнении условий (2.7), (2.8) амплитуду $f^{(A)}(x)$ (ненормированную) можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial k_{(\tau)}} \frac{\partial \tilde{f}_{\theta\sigma}}{\partial x^{(\tau)}} = 0.$$

В соответствии с этим условием, а также с требованием (2.9), налагаемым на искомые решения $f^{(A)}(x)$, решения $\Delta C_{(m)}^{(A)}$ уравнения (5.2а) будем искать такие, которые удовлетворяют ограничению

$$\frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial k_{(\tau)}} \frac{\partial \Delta C_{(m)}^{(A)}}{\partial x^{(\tau)}} = 0.$$

Для таких $\Delta C_{(m)}^{(A)}$ уравнение (5.2а) можно переписать в виде

$$c^{-1} \frac{d \Delta C_{(m)}^{(A)}}{dt} + K^{(A)}(t) \Delta C_{(m)}^{(A)} + \Delta F_{(m)}^{(A)}(t) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.9)$$

где обозначено

$$K^{(A)} = (e_{\tau}^{(A)*} \tilde{d}^{(A)} + h_{\tau}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)})^{-1} \{f_{\tau}^{(A)}, Z[\tilde{f}^{(A)}]\}, \quad (5.10)$$

$$\Delta F_{(m)}^{(A)} = (e_{\tau}^{(A)*} \tilde{d}^{(A)} + h_{\tau}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)})^{-1} \{f_{\tau}^{(A)}, Z[\delta f_{(m)}^{(A)}]\}^*.$$

Если в сопутствующей системе тензоры $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ эрмитовы, то (5.10) приобретает вид

$$K^{(A)} = (\tilde{e}^{(A)*} \tilde{d}^{(A)} + \tilde{h}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)})^{-1} \{f_{\tau}^{(A)}, Z[\tilde{f}^{(A)}]\},$$

$$\Delta F_{(m)}^{(A)} = (\tilde{e}^{(A)*} \tilde{d}^{(A)} + \tilde{h}^{(A)*} \tilde{b}^{(A)})^{-1} \{f_{\tau}^{(A)}, Z[\delta f_{(m)}^{(A)}]\},$$

$$f_{\tau}^{(A)} = (\tilde{e}^{(A)}, \tilde{h}^{(A)}),$$

m -й шаг итерации заканчивается применением формул

$$\Delta C_{(m)}^{(A)}(t) = G^{(A)-1}(t) \left[\Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0) - c \int_{t_0}^t \Delta F_{(m)}^{(A)}(t) G^{(A)}(t) dt \right], \quad (5.11)$$

* Уравнения (5.9), вместе с (5.10), представляют собой, применительно к уравнениям Максвелла, так называемые «уравнения переноса», известные в математической физике (см. [3], гл. VI, § 4, п. 4, формула (12)).

$$G^{(A)}(t) = \exp \left(c \int_{t_0}^t K^{(A)}(t) dt \right).$$

Окончательные решения $f^{(A)}(x)$, соответствующие тому или иному выбору начальных условий $\Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0)$, получаются из формулы

$$f^{(A)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta f_{(m)}^{(A)}(x) \quad (A = 1, 2). \quad (5.12)$$

Точное решение уравнений (2.1) формула (5.12) может дать лишь в случае, если ряд в первой части (5.12) сходится. В противном случае (5.12) следует рассматривать лишь как символическую формулу для приближенного решения, получающегося, если в (5.12) отбросить все слагаемые, начиная с того, которое становится больше предыдущего слагаемого. Точность получаемого при этом решения, как правило, порядка первого из отброшенных членов, это было показано в работе [9] автора на примере квазиизотропного приближения.

Начальная точка t_0 , фигурирующая в (5.11), может выбираться по-разному на различных бихарактеристиках, т. е. начальные точки, обозначаемые здесь как t_0 , могут образовывать произвольную трехмерную гиперповерхность, лишь бы она по одному (и только по одному) разу пересекала все бихарактеристики, проходящие через область пространства, где требуется построить решение (по начальным данным). На выбор начальных значений $\Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0)$ уравнения (5.1) также не накладывают никаких ограничений. Нетрудно показать, что при любом выборе начальной гиперповерхности (т. е. точек t_0) окончательный результат итерации, т. е. $f^{(A)}(x)$, зависит от функций $\Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0)$ лишь через посредство суммы $\sum_{m=0}^{\infty} \Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0)$. Поэтому без ограничения общности на функции $\Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0)$ можно наложить условия

$$\Delta C_{(m)}^{(A)}(t_0) = 0 \quad (m \geq 1). \quad (5.13)$$

Таким образом, все возможные решения $f^{(A)}(x)$ уравнений (5.1) можно получить, если всевозможным образом задавать начальные условия для эйконала $\zeta^{(A)}(x)$ и при каждом задании эйконала всевозможным образом задавать начальное условие $\Delta C_{(0)}^{(A)}(t_0) = C_{(0)}^{(A)}(t_0)^*$.

6. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Получим условия, при которых ряд (5.12) сходится. При этом ограничимся случаем, когда тензоры $\overset{\wedge}{\epsilon}$ и $\overset{\wedge}{\mu}$ эрмитовы в сопутствующих системах отсчета и, следовательно, справедливо (3.7). Кроме того, поскольку нормировку 6-векторов $\tilde{f}^{(A)}(x)$ можно выбирать произвольно, то ограничимся случаем, когда $\tilde{f}^{(A)}$ удовлетворяет условию

$$\left(\tilde{e}^{(A)*} \frac{\partial \tilde{a}^{(A)}}{\partial x^0} + \tilde{h}^{(A)*} \frac{\partial \tilde{b}^{(A)}}{\partial x^0} \right) + (\tilde{h}^{(A)*} \text{rot } \tilde{e}^{(A)} - \tilde{e}^{(A)*} \text{rot } \tilde{h}^{(A)}) = 0, \quad (6.1)$$

* Решения $F_{\mu\nu}^{(A)}(x) = f_{\mu\nu}^{(A)}(x) \exp [i \zeta^{(A)}(x)]$, полученные здесь, совпадают с «почти-нормальными» волнами, исследовавшимися в работе [9], и являются частным случаем «полных бегущих волн», рассмотренных в § 4, 5, гл. VI, книги [9]. По схеме, указанной там (§ 4), всякое решение (волнового типа) уравнений Максвелла может быть разложено по «почти-нормальным» волнам в области их существования.

если это условие выполнено, то $K^{(A)} \equiv 0$, $G^{(A)} \equiv 1$ в (5.13)—(5.15).

Нетрудно получить оценки для частных производных от компонент 6-вектора $\tilde{f}^{(A)}$, удовлетворяющего условию (6.1)

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}^{(A)}}{\partial x^\nu} \right| \leq l_{\min}^{-1} |f^{(A)}| \quad (l_{\min} = \min(s, l', l_{\text{ан}}, l_{\text{из}})). \quad (6.2)$$

Символы s , l' , $l_{\text{ан}}$, $l_{\text{из}}$ означают здесь следующее: s — радиус кривизны фазовой поверхности, т. е. расстояние до источника, если оно много больше размеров источника и если нет фокусировки; l' — расстояние, на протяжении которого глубина модуляции волны изменяется до 50% (например, величиной l' может быть минимальный из размеров волнового пакета). Величина $l_{\text{ан}}$ означает масштаб неоднородности среды по отношению к ее анизотропным свойствам, т. е. расстояние, на протяжении которого изменится вдвое величина $k_0^{(1)}(s^{\alpha\beta\mu\nu}(x); \mathbf{k}) - k_0^{(2)}(s^{\alpha\beta\mu\nu}(x); \mathbf{k})$ (взятая при каком-либо фиксированном \mathbf{k}), либо повернутся на угол порядка радиана (при движении вдоль какого-нибудь луча) направления осей поляризационных эллипсов нормальной волны, либо на величину порядка 50% изменится коэффициент круговой поляризации нормальной волны. Величина $l_{\text{из}}$ — масштаб неоднородности среды по отношению к изотропным свойствам, т. е. $l_{\text{из}} = |\nabla \ln n|^{-1}$, где $n(x)$ — коэффициент преломления среды, усредненный по направлениям в мировой точке x ; эквивалентным образом масштаб $l_{\text{из}}$ можно было бы определить так.

$$l_{\text{из}} = \max_{\alpha, \beta, \mu, \nu} |s^{\alpha\beta\mu\nu}| \left[\max_{\sigma, \beta, \mu, \nu, \lambda} \left| \frac{\partial s^{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right| \right]^{-1}.$$

Все масштабы l_{\min} , s , l' , $l_{\text{ан}}$, $l_{\text{из}}$, фигурирующие в (6.2), рассматриваются как функции от x , определенные с точностью до порядка величины. Относительно соответствующих периодов нестационарности среды будем считать, что, умноженные на c , они не меньше, чем соответственно $l_{\text{ан}}$ и $l_{\text{из}}$, т. е. мы рассматриваем умеренно нестационарную среду. Таким образом, l_{\min} есть минимальный пространственный масштаб, характеризующий волну.

Модуль 6-вектора в формуле (6.2) и в дальнейшем означает максимальный из модулей компонент 6-вектора; не изменяя порядка величины, его можно было бы определить как сумму модулей компонент либо корень квадратный из суммы квадратов модулей компонент.

Сопоставляя (5.4), (5.7) и (6.2), получаем следующую оценку для $\delta f_{(m)}^{(A)}$:

$$|\delta f_{(m)}^{(A)}| \leq \frac{\Delta l}{l_{\min}} |\Delta f_{(m-1)}^{(A)}| V(m), \quad (6.3)$$

где $\Delta l = |k_0^{(1)}(\mathbf{k}) - k_0^{(2)}(\mathbf{k})|^{-1}$ есть период пространственных биений между нормальными волнами, а величина $l/V(m)$ есть минимальный характерный масштаб неоднородности, взятый по отношению к m -м частным производным от $f^{(A)}(x)$. Известно, что этот масштаб, вообще говоря, при больших m может существенно отличаться от l в ту или иную сторону (см., например, [9]). Однако $V(m) \sim 1$ при $m \sim 1$.

При получении формулы (6.3) предполагалось, что собственные значения матрицы $W_{(A)}^{\Delta\Gamma}$, фигурирующей в (5.7), по порядку величины совпадают с единицей, т. е. предполагается, что дисперсия умеренная

(если она есть). При этом условии из (6.3), (5.11) при учете (5.13) получаем для $\Delta C_{(m)}^{(A)}$ оценку

$$\Delta C_{(m)}^{(A)} \leq |f^{(A)}|^{-1} |\delta f_{(m)}^{(A)}|^* \quad (6.4)$$

Из (6.3), (6.4), (5.6) получаем для $\Delta f_{(m)}^{(A)}$ оценку

$$\Delta f_{(m)}^{(A)} \leq \frac{\Delta l}{l_{\min}} |\Delta f_{(m-1)}^{(A)}| V(m), \quad (6.5)$$

где $V(m)$ — то же, что и в (6.3). Из этой формулы следует, что достаточным условием, при выполнении которого изложенная выше итерационная процедура сходится либо, по крайней мере, дает конечную цепочку последовательных приближений, есть малость отношения периода Δl пространственных биений нормальных волн и минимального характерного для волны масштаба l_{\min} .

Из (6.5) находим, в частности, оценку разницы между точным решением $f^{(A)}$, получаемым из итерационной процедуры, и нормированным нулевым приближением $f_{(0)}^{(A)}$:

$$|f^{(A)} - f_{(0)}^{(A)}| \leq \frac{\Delta l}{l_{\min}} |f_{(0)}^{(A)}|. \quad (6.6)$$

Эта оценка согласуется с теми величинами поправок к поляризации нормальной волны, которые были вычислены в работе [9] для случая стационарной задачи в рамках квазиизотропного приближения.

Можно показать, что относительная поправка $|f^{(A)} - f_{(0)}^{(A)}| / |f_{(0)}^{(A)}|$ к амплитуде нормальной волны по порядку величины совпадает с поправкой $|\theta^{(A)} - \theta_{(0)}^{(A)}|$ к параметру θ нормальной волны, взятому в соответствии с обозначениями работы [4]. Учитывая это, из формул (6.6) и (1.1) получаем правило выбора точки на луче, в которой следует производить «сшивание» нормальных волн и решений квазиизотропного приближения. А именно, чтобы погрешность решения, вычисляемого в точке A луча по формулам квазиизотропного приближения, была минимальной (по порядку величины), необходимо точку A_0 «сшивания» с нормальными волнами выбирать так, чтобы в этой точке обращалась в минимум сумма

$$\Delta\theta(\sigma_0) = \frac{\Delta l(\sigma_0)}{l_{\min}(\sigma_0)} + k \left| \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\Delta v_{\Phi}/c)^2 d\sigma \right|,$$

где σ_0, σ — координаты точек A_0, A на луче; прочие обозначения те же, что и в предыдущих формулах.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить В. Л. Гинзбурга, а также В. П. Быкова и участников его семинара за обсуждение работы. Автор признателен также М. А. Леонтовичу за критические замечания при постановке задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что если дисперсии нет, двулучепреломление есть, а тензор $s^{\alpha\beta\mu\nu}$ удовлетворяет условию

$$s^{\alpha\beta\mu\nu} = s^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (П.1)$$

то пятирядная матрица $\hat{W}_{(A)}$, фигурирующая в (5.5), является единичной (при $A = 1, 2$).

Легко видеть, что все 6-векторы $f^{(A)\Lambda}$ удовлетворяют условию

* Здесь опущены слагаемые, ответственные за дифракцию.

$$\hat{M}_{(A)} f^{(A)\Lambda} = \Delta k_0^{\Lambda} \hat{M}^0 f^{(A)\Lambda}$$

или

$$\hat{M}_{(A)} \hat{S}^{-1} f^{(A)\Lambda} = \Delta k_0^{\Lambda} \hat{M}^0 \hat{S}^{-1} f^{(A)\Lambda}, \quad (\text{П.2})$$

или

$$\hat{a}^{-1} (\hat{M}_{(A)} \hat{S}^{-1}) \hat{a}^{-1} (\hat{a} f^{(A)\Lambda}) = \Delta k_0^{\Lambda} (\hat{a} f^{(A)\Lambda}), \quad (\text{П.3})$$

где $f^{(A)\Lambda}$, $f_{\tau}^{(A)\Lambda}$, \hat{M}^0 означают то же, что в (3.2), (5.4), (5.4a), (5.4б), а Δk_0^{Λ} означает $\Delta k_0^{A2} = k_0^{(A)}(\mathbf{k}) - k_0^{(A')}(\mathbf{k})$ ($A' = 3 - A$), $\Delta k_0^{AP} = k_0^{(A)}(\mathbf{k}) - k_0^{(P)}(\mathbf{k})$ ($P = 3, 4, 5, 6$); \hat{S} определяется из формулы $(\mathbf{e}', \mathbf{h}') = \hat{S} f'$, и \hat{S}^{-1} есть матрица, обратная к \hat{S} ; \hat{a} есть какой-либо корень уравнения $\hat{a}\hat{a} = \hat{M}^0 \hat{S}$, выбираемый эрмитовым, если эрмитово произведение $\hat{M}^0 \hat{S}^{-1}$.

Явные выражения для \hat{S} , \hat{S}^{-1} , \hat{M}^0 , $\hat{M}^0 \hat{S}^{-1}$ таковы:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ \hat{q} & \hat{\mu}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ -\hat{\mu}\hat{q} & \hat{\mu} \end{pmatrix}, \quad \hat{M}^0 = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & \hat{r} \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.4})$$

$$\hat{M}^0 \hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} - \hat{r}\hat{\mu}\hat{q} & \hat{r}\hat{\mu} \\ -\hat{\mu}\hat{q} & \hat{\mu} \end{pmatrix},$$

где $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}^{-1}$ вычисляются непосредственно из $s^{\alpha\beta\mu\nu}$ по формулам (2.10), \hat{I} означает единичную матрицу, а матрицы \hat{q} , \hat{r} даются формулами

$$q_{mn} = e_{mpq} s^{pq0n}, \quad r_{mn} = s^{m0pq} e_{pqn}.$$

Нетрудно показать, что если выполнено условие (П.1), то выполняются формулы

$$\hat{\varepsilon}^+ = \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\mu}^+ = \hat{\mu}, \quad \hat{q}^+ = -\hat{r}. \quad (\text{П.5})$$

При этих условиях, как легко видеть из (П.4), матрица $\hat{M}^0 \hat{S}^{-1}$ эрмитова, следовательно (см. (3.2)), эрмитова и матрица $\hat{M}_{(A)} \hat{S}^{-1}$, при любых \mathbf{k} , k_0 , а также матрицы \hat{a} , \hat{a}^{-1} и произведение $\hat{a}^{-1} \hat{M}_{(A)} \hat{S} \hat{a}^{-1}$. Следовательно (см. (П.3)), матрицы $\hat{a} f_{\tau}^{(A)\Lambda}$ являются собственными векторами эрмитового оператора, поэтому

$$0 = \{ \hat{a} f_{\tau}^{(A)\Lambda}, \hat{a} f_{\tau}^{(A)\Lambda'} \} = \{ f_{\tau}^{(A)}, \hat{M}^0 \hat{S}^{-1} f_{\tau}^{(A)\Lambda'} \},$$

или

$$\{ f_{\tau}^{(A)\Lambda}, \hat{M}_{(A)} f^{(A)\Lambda'} \} = 0 \quad (\text{П.6})$$

для всех $\Lambda \neq \Lambda'$ ($\Lambda, \Lambda' = 2, \dots, 6$), кроме, быть может, $\Lambda = 5$, $\Lambda' = 6$ либо $\Lambda = 6$, $\Lambda' = 5$, что соответствует кратным корням. Для этих значений выполнение равенства (П.6) следует из (П.2), (П.4), (П.5) и из явного вида 6-векторов $f^{(A)5}$, $f^{(A)6}$, определяемых формулами (5.4a).

Единичность диагональных элементов матрицы $\hat{W}_{(A)}$ вытекает из нормировки 6-векторов $f^{(A)\wedge}$, согласно (5.4).

Проведенные выкладки можно интерпретировать как доказательство того, что уравнения Максвелла (2.1), рассматриваемые как уравнения для E , H , являются симметрично-гиперболической системой линейных уравнений с частными производными не только для случая покоящейся среды с эрмитовыми ϵ , μ (этот случай рассматривался в работах [3-7]), но и в более общем случае, когда тензор $s^{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяет условию (П.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. Дебай, Полярные молекулы, ГОНТИ, Л.—М., 1931
2. Ю. А. Зайцев, Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1802 (1968).
3. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд Мир, М., 1964.
4. P. D. Lax, Duke Math. J. 24, 627 (1957).
5. D. Ludwig, Comm. Pure and Appl. Math., 13, № 3, 473 (1960).
6. R. M. Lewis, Arch. for Ratl. Mech. and Anal., 20, 191 (1965).
7. R. M. Lewis, J. of Diff. Eqs., 3, 360 (1967).
8. Ю. А. Кравцов, Докл. АН СССР, 183, 74 (1968).
9. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 12, 1843 (1971).
10. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
11. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 10, 1470 (1968).
12. Иг. Тамм, ЖРФХО, 56, 248 (1924).
13. Ф. И. Федоров, Оптика анизотропных сред, изд. АН БССР, Минск, 1958.
14. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 4, 569 (1969).

Поступила в редакцию
23 апреля 1971 г.

TO THE PROBLEM OF LIMITING POLARIZATION

O. N. Naida

For the case of anisotropic double-refractive medium iterative procedure of finding out the exact solution of Maxwell's equation in the form of a series over ω^{-1} is built. The solution of equations is made in the form of quadrature formulas. The case regarding nonstationarity, inhomogeneity, motion of medium, magnetic properties, dispersion, medium gyrotropy, and also wave modulation is considered. For this case formulas are obtained for the group velocity of a wave and also for simple sufficient conditions of absence of the absorption and the double beam refraction in anisotropic medium with the complex ϵ and μ .

It is shown that the solutions of equations $\frac{\partial D}{\partial x^0} - \text{rot } H = 0$, $\frac{\partial B}{\partial x^0} + \text{rot } E = 0$ obtained from the iterative procedure satisfy automatically equations $\text{div } D = 0$, $\text{div } B = 0$. The degree of arbitrariness in the choice of the initial conditions of the iterative procedure is pointed out.

As a particular case the estimation is obtained for the difference of polarized parameters of the exact wave solution of Maxwell's equations and the corresponding normal wave. The result is applied to the problem of limiting polarization: the method of selection is obtained of the matching point of normal waves and solutions of the „quasi-isotropic“ approximation for the minimum error of the final result.

The expressions are obtained for the group velocity in the case of moving medium with the arbitrary ϵ and μ .

УДК 621.372.413

ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР С ТРЕХГРАННЫМ ОТРАЖАТЕЛЕМ

А. Ф. Курин, Г. П. Новиков, В. Н. Орлов

Описан открытый резонатор, образованный трехгранным и цилиндрическим отражателями. Центральный участок трехгранного отражателя, представляющий собой дифракционную решетку, является элементом связи резонатора. Изменением углов между гранями можно менять распределения полей мод в объеме резонатора, а также осуществлять селекцию мод. Измерения проведены для двух взаимно перпендикулярных поляризаций возбуждающего излучения. Описан способ исследования характеристик резонатора в отраженном излучении.

1. ВВЕДЕНИЕ

Все более широкое использование открытых резонансных электродинамических систем в конструкциях электронных приборов очень коротких радиоволн объясняется существованием в них высокодобротных типов колебаний с достаточно редким спектром собственных частот при размерах, заметно превосходящих длину усиливаемого или генерируемого излучения. Использование открытых систем возможно, очевидно, там, где это позволяют физические механизмы взаимодействия высокочастотного поля с рабочим веществом, а также способы удержания рабочего вещества и создания в нем неравновесного состояния. В данной работе описаны результаты экспериментальных исследований в миллиметровом диапазоне (вблизи $\lambda = 8$ мм) открытого резонатора, образованного парой отражателей. Отражающая поверхность одного из них образована тремя гранями. Другой отражатель может быть цилиндрическим или плоским. Трехгранная геометрия отражателя позволяет без заметного ухудшения добротности путем изменения величин углов между гранями менять в широких пределах распределение высокочастотного поля различных мод в объеме резонатора, в частности, создавать существенно несимметричные распределения. Определенные комбинации углов между гранями обеспечивают также селекцию типов колебаний резонатора как по добротности, так и по расстоянию между ними. Заметим, что аналогичные задачи решены в [1] с резонатором в виде отрезка волновода переменного сечения.

Ввод и вывод излучения в резонаторе осуществляется без применения волноведущих трактов через центральный участок трехгранного отражателя, представляющий собой дифракционную решетку, составленную из медных брусков прямоугольного сечения. Исследованная модель резонатора может найти применение, например, в мощном (поскольку конструкция обеспечивает возможность эффективного охлаждения элементов отражателей) МЦР с высоким КПД (поскольку возможно несимметричное распределение поля в поперечном сечении резонатора [2]).

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

На рис. 1 представлена схематически экспериментальная установка с резонатором, образованным трехгранным 8 и цилиндрическим 9 отражателями. Все детали резонатора изготовлены из меди. Рабочие поверхности обработаны с точностью не хуже $\lambda/100$. Центральный участок апертуры трехгранного отражателя с размерами 60×40 мм² составлен из брусков прямоугольного сечения. Выбором размеров поперечного сечения брусков, а также расстояния между брусками можно регулировать в широких пределах пропускание и отражение от решетки. На рис. 2 показано экспериментально измеренное пропускание решетки S (толщина бруска 2,7 мм, ширина—4 мм) в зависимости от отношения p/λ (p — период решетки) для двух взаимно перпендикулярных поляризаций излучения, падающего нормально поверхности решетки. При этом случаям E - и H -поляризаций соответствуют ориентации электрического вектора волны соответственно вдоль и перпендикулярно щелям решетки.

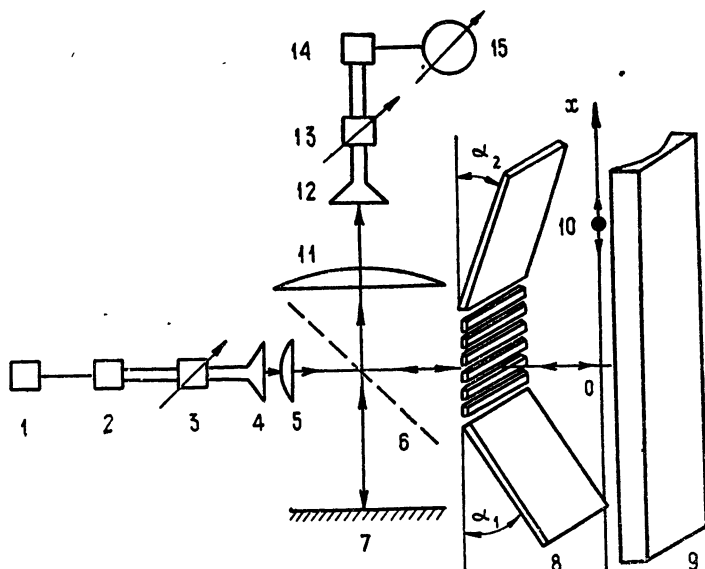


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Имеется возможность сравнить качественно экспериментальную кривую на рис. 2 для случая H -поляризации с результатами вычислений работы [3], где рассматривается дифракция H -поляризованного излучения на решетке из брусков прямоугольного сечения. Сравнение обнаруживает наличие в ходе указанной кривой характерных особенностей поведения модуля нулевой гармоники коэффициента прохождения [3]: наличие минимума в точке $p/\lambda = 1$ и максимума на участке около значения $p/\lambda \sim 0,7$.

Заметим, что описанный способ связи посредством частично прозрачного дифракционного отражателя аналогичен способу, предложенному в конструкции интерферометра миллиметрового диапазона [4], а также использованному в конструкции резонатора МЦР [5]. Однако применение массивных медных брусков в качестве элементов дифракционного отражателя (в отличие от пленочных структур в [4, 5]) обеспечивает возможность работы такого резонатора в устройствах со значительными уровнями мощности, где неизбежен высокочастотный нагрев резонатора. Боковые участки отражателя 8 — плоские и имеют одинаковую

вые размеры 50×60 мм². Предусматривалась возможность изменять форму отражающей поверхности трехгранного отражателя. Это достигалось вращением в пределах $0^\circ \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 20^\circ$ боковых участков отражателя вокруг осей, параллельных брускам решетки и лежащих в плоскости рабочей поверхности решетки. Вогнутый (с радиусом кривизны 10 см) отражатель 9 имеет размеры 60×140 мм².

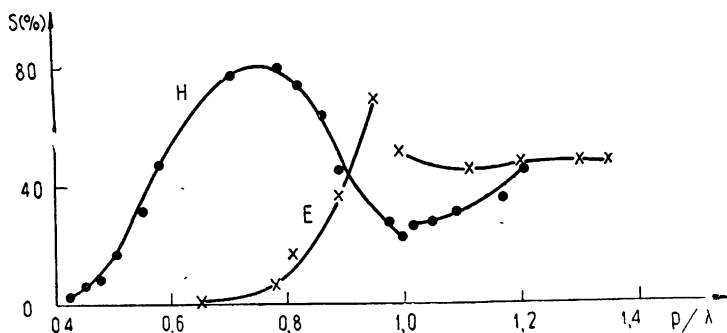


Рис. 2. Пропускание решетки в зависимости от p/λ : E—для E-поляризованного, H—для H-поляризованного излучений.

Установка (рис. 1) для исследования характеристик резонатора представляет собой интерферометр Майкельсона, образованный распределительной решеткой 6, отражателем 7 и отражателем, образованным наружной поверхностью дифракционной решетки отражателя 8 исследуемого резонатора. При этом резонатор оказывается включенным в одно из плеч интерферометра.

Излучение клистрона 2 (1—источник питания) с фиксированной длиной волны λ попадает через attenuатор 3, рупор 4 и линзу 5 в интерферометр. Распределительная решетка 6 образована рядом параллельных прозрачных штрихов, сделанных в слое серебра, напыленного в вакууме на кварцевую плоскую подложку. Излучение, прошедшее через линзу 11, собирается рупором 12, ослабляется attenuатором 13, детектируется 14 и регистрируется электронным потенциометром 15 типа ЭПП-09М1.

В процессе исследования характеристик резонатора сначала перемещением отражателей 7 и 8 проводится настройка интерферометра Майкельсона на максимум излучения в интерферометре. При этом показание ЭПП-09М1 максимально. Поскольку резонатор исследуется не в проходящем, а в отраженном излучении, то настройка его в резонанс перемещением отражателя 9 относительно отражателя 8 сопровождается ослаблением поля в интерферометре и, следовательно, приводит к уменьшению показаний ЭПП-09М1. Минимальное показание имеет место при строгом резонансе в резонаторе. При фиксированной λ параллельное перемещение с постоянной скоростью (с помощью электродвигателя) отражателя 9 относительно отражателя 8 позволяет регистрировать на ленте потенциометра резонансные кривые различных типов колебаний резонатора. Поскольку скорости движения ленты и перемещения отражателя 9 постоянны, легко пересчитать расстояния на ленте в соответствующие величины перемещения отражателя 9. Коэффициент отражения R резонатора определяется формулой

$$R = [(\sqrt{|R_1|} + \sqrt{|R_2|}) \sqrt{I/I_{\max}} - \sqrt{|R_1|}]^2,$$

где I — интенсивность, регистрируемая приемником, I_{\max} — интенсивность в случае расстроенного резонатора, $|R_1|$ и $|R_2|$ — коэффициенты

отражения соответственно отражателя 7 и расстроенного резонатора. В дальнейшем считаем $R_1 = 1$.

Половинному уровню отражения $R_{0,5} = (|R_2| - |R_{\min}|)/2$ соответствует интенсивность

$$I_{0,5} = I_{\max} \left\{ \frac{1 + [0,5|R_2| - 0,5(\sqrt{(I_{\min}/I_{\max})(1 + \sqrt{|R_2|})^2 - 1})^2]^{1/2}}{1 + \sqrt{|R_2|}} \right\}^2, \quad (1)$$

где I_{\min} — минимальная интенсивность, поступающая в приемник при строгом резонансе в резонаторе.

Расстояние между отражателями резонатора, отнесенное к ширине резонансной кривой, которая определяется с помощью формулы (1) и выражается через величину перемещения отражателя 9 относительно отражателя 8, дает добротность типов колебаний резонатора.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Опишем некоторые результаты исследований основных характеристик резонатора, образованного трехгранным и цилиндрическим отражателями.

Рис. 3 дает представление об изменении распределения поля в объеме резонатора за счет выбора определенных комбинаций углов α_1, α_2 между гранями отражателя. Измерения проводились [6] с помощью поглощающего пробного тела — резинового шарика 10 диаметра 3,5 мм, который протягивался вблизи отражателя 9 вдоль образующей цилиндрической поверхности (рис. 1). На рис. 3 интенсивность излучения I в приемнике дана в зависимости от местоположения шарика в резонаторе. Измерения относятся к основному типу колебаний при возбуждении колебаний в резонаторе H -поляризованной волной. Расстояние между отражателями ~ 70 мм. Заметим, что при изменении α_1, α_2 существенно меняются также распределения полей высших типов колебаний (в резонаторе возбуждались типы, имеющие один максимум в направлении меньшего размера отражателей). Все сказанное относится и к случаю возбуждения резонатора E -поляризованным излучением.

С возрастанием α_1, α_2 типы колебаний, очевидно, уже нельзя считать образованными ТЕМ-волнами даже в грубом приближении. Измерения распределения поля показывают трансформацию ТЕМ-мод, имеющих место при малых α_1, α_2 , в типы колебаний с распределениями полей, существенно отличающимися от распределений ТЕМ-мод. Как правило, эта трансформация сопровождается усложнением структуры полей, особенно высших типов колебаний. Поэтому мы вместо обозначений ТЕМ $_{mnq}$ примем нумерацию мод в зависимости от их очередности на шкале частот: тип 1 (основной тип), тип 2, 3 и т. д. Указанные типы колебаний характеризуются одним и тем же числом вариаций поля в направлении от центра цилиндрического отражателя до дифракционной решетки и различаются числом вариаций в x -направлении (аналогично набору ТЕМ $_{mnq}$ -мод с фиксированным продольным индексом q). Наименьшей частотой обладает при этом 1-й тип колебаний. Заметим, что для различных расстояний между отражателями (отличающихся на величину порядка целого числа половин длины волны) и фиксированных α_1, α_2 соответствующие типы колебаний претерпевают изменение в распределении поля в x -направлении.

Определенные комбинации углов α_1, α_2 (при расстоянии между отражателями ~ 70 мм в случае H -поляризации это имеет место для α_1, α_2 , не меньших 8°) приводят к появлению со стороны низких частот по отношению к типу 1 высокодобротной моды, имеющей 3—5 максимумов поля в x -направлении,

Измерение размеров освещенных пятен на отражателях резонатора показывает, что для малых α_1, α_2 значительная часть поля типа 1 приходится на дифракционную решетку, напротив, оба максимума поля типа 2 лежат на непрозрачных участках отражателя. Тип 3 имеет лишь центральный максимум на решетке.

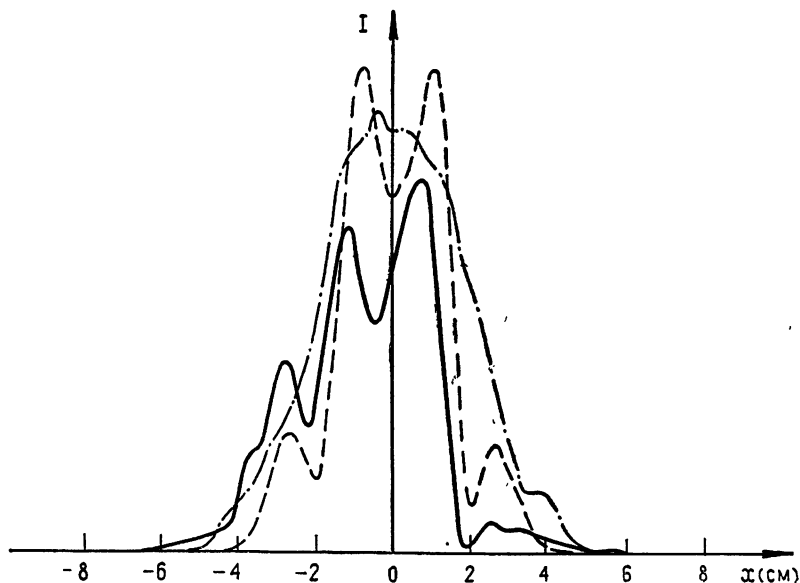


Рис. 3. К распределению поля основного типа колебаний в резонаторе:
 — — — $\alpha_1=14^\circ, \alpha_2=20^\circ$; — — — — $\alpha_1=\alpha_2=16^\circ$; — · — · — $\alpha_1=\alpha_2=0^\circ$.
 Излучение H -поляризовано.

На рис. 4 показаны относительные значения добротности основного типа колебаний для случаев H - и E -поляризаций возбуждающего излучения. При этом расстояние между отражателями составляло ~ 70 мм, добротности Q_0 ($\alpha_1=\alpha_2=0^\circ$) равнялись 940 и 500 соответственно для H - и E -поляризаций. Пропускание решетки для обеих поляризаций $\sim 7\%$. Характерной особенностью кривых (см. также рис. 5) является их колебательный характер, причем малые потери в резонаторе обеспечиваются даже при существенно различных значениях α_1, α_2 , когда

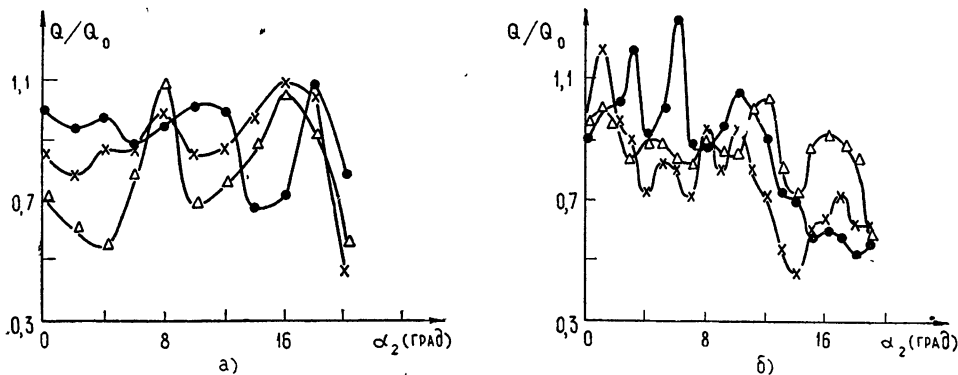


Рис. 4. Относительная добротность основного типа колебаний:
 а) излучение H -поляризовано; ●●● — $\alpha_1=0^\circ$, $\Delta\Delta\Delta$ — $\alpha_1=16^\circ$, $\times\times\times$ — $\alpha_1=8^\circ$,
 б) излучение E -поляризовано; ●●● — $\alpha_1=1^\circ$, $\times\times\times$ — $\alpha_1=3^\circ$, $\Delta\Delta\Delta$ — $\alpha_1=5^\circ$.

распределение поля в резонаторе в значительной степени несимметрично (см. рис. 3).

Рис. 5 иллюстрирует селективные свойства резонатора. Здесь Q_0 — значение добротности типа 1, а $\Delta\omega_0$ — частотное расстояние между типами 1 и 2 в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$ ($\Delta\omega_0/2\pi \sim 100$ Мгц для H -поляризации, $\Delta\omega_0/2\pi \sim 300$ Мгц для E -поляризации); $\Delta\omega$ — частотное расстояние между этими типами в случае произвольных α_1, α_2 . Рис. 5 соответствует расстоянию между отражателями ~ 70 мм. Более высокие значения добротности типа 2, (а иногда и типа 3) по сравнению с типом 1, имеющие место особенно при малых α_1, α_2 , объясняются меньшими потерями типов 2, 3 на излучение через решетку благодаря указанному выше характеру распределения поля вблизи трехгранного отражателя.

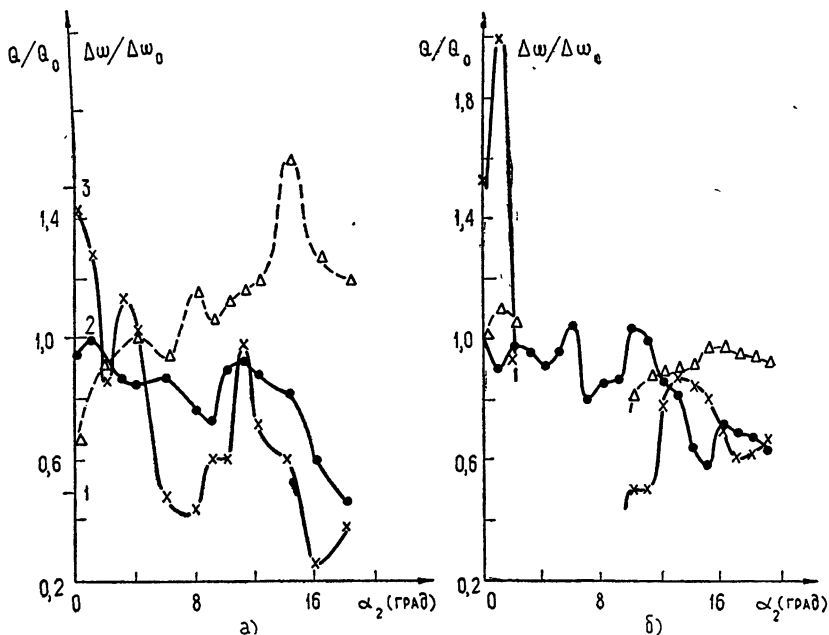


Рис. 5. К селективным свойствам резонатора:

- а) излучение H -поляризовано, $\alpha_1 = 2^\circ$,
 б) излучение E -поляризовано, $\alpha_1 = 0^\circ$.

$$\triangle \triangle \triangle - \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}, \quad \times \times \times - \frac{Q}{Q_0} \text{ — для типа 2,} \quad \bullet \bullet \bullet - \frac{Q}{Q_0} \text{ — для типа 1.}$$

Измерения показали, что лучшими селективными свойствами обладает резонатор с E -поляризованным излучением. Это объясняется, по-видимому, значительным поглощением волн, образующих высшие типы, в решетке, которая имеет в случае E -поляризации значительные расстояния между брусками (в наших экспериментах оно равнялось $3,8$ мм, т. е. $\sim 0,47\lambda$) для получения высокого коэффициента отражения и заметного пропускания.

При малых углах α_1, α_2 всего регистрируется 4—6 типов колебаний. С возрастанием α_1, α_2 подавляются практически все высшие типы, кроме типа 2. Однако в случае E -поляризации существуют области изменения α_1, α_2 , в которых исчезает и этот тип. На рис. 5 для $\alpha_1 = 0^\circ$ это происходит в диапазоне $2^\circ \lesssim \alpha_2 \lesssim 10^\circ$.

В заключение отметим, что результаты, полученные с описанным в данной работе образцом резонатора, могут быть использованы и для

других рабочих длин волн. По принципу подобия все линейные размеры резонатора необходимо при этом изменить во столько раз, во сколько раз изменяется длина волны. Углы α_1 , α_2 остаются неизменными. Теоретический анализ резонатора данной геометрии довольно сложен.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Г. Г. Рогачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1236 (1969).
2. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
3. Я. С. Комиссаров, С. А. Масалов, В. А. Павлюк, В. П. Шестопапов, Радиотехника и электроника, 14, № 1, 9 (1969).
4. Ф. А. Королев, В. И. Гриднев, Оптика и спектроскопия, 16, № 2, 335 (1964).
5. Ф. А. Королев, А. Ф. Курин, Радиотехника и электроника, 15, № 10, 2143 (1970).
6. Р. А. Валитов, С. Ф. Дюбко, В. В. Камышан, В. М. Кузьмичев, Б. И. Макаренко, А. В. Соколов, В. П. Шейко, Техника субмиллиметровых волн изд. Сов. радио, М., 1969.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
24 июня 1971 г.

OPEN RESONATOR WITH TRIHEDRAL REFLECTOR

A. F. Kurin, G. P. Novikov, V. N. Orlov

An open resonator formed by a trihedral and a cylindrical reflectors is described. The central section of the trihedral reflector (the diffraction lattice) represents the resonator coupling element. By the variation of angles between the edges one may change the distribution of the mode fields in the resonator volume and also carry out the mode selection. Measurements are made for the two mutually perpendicular polarizations of the exciting radiation. The method of investigation of the resonator characteristics in the reflected radiation is described.

УДК 621.396.67

ВЛИЯНИЕ ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ СРЕДЫ НА ИМПЕДАНС ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН

В. С. Семенов, Л. С. Фрумкис, А. С. Шостак

Получены выражения для собственного импеданса линейной антенны и взаимного сопротивления линейных антенн, расположенных параллельно границам раздела плоско-слоистой среды. Решение получено методом наведенных ЭДС. Используя рекуррентные соотношения, приведенные в работе, удобно рассчитывать на ЭВМ импеданс антенны для произвольного числа слоев. Приведены результаты численных расчетов.

Пусть в среде с произвольным числом горизонтальных слоев параллельно координатной оси X и симметрично относительно координатной плоскости YZ расположены два линейных провода ξ, x (рис. 1). Электрические параметры вышележащих слоев характеризуются волновыми числами $k_2, k_3, \dots, k_i, \dots$, ниже лежащих — $k_2, k_3, \dots, k_i, \dots$. Провод x длиной $2l_1$ расположен на высоте z , провод ξ длиной $2l_2$ — на высоте h . Мощность слоя, в котором расположены провода, равна d , мощность ниже лежащих слоев — $T_2, T_3, \dots, T_i, \dots$, мощность вышележащих слоев — $d_2, d_3, \dots, d_i, \dots$. Определим взаимный импеданс проводов в присутствии границ раздела.

Представим поле в слое с волновым числом k_1 в виде $\Pi = \Pi_0 + \Delta\Pi$, где Π_0 — первичное поле, $\Delta\Pi$ — вторичное поле, связанное с наличием границ раздела.

Задавая гармоническое распределение тока вдоль проводов

$$I_x = I_{0x} \sin k_1 (l_1 - |x|) \exp(j\omega t), \quad (1)$$

$$I_\xi = I_{0\xi} \sin k_1 (l_2 - |\xi|) \exp(j\omega t)$$

и введя вектор Герца вторичного поля для проводов

$$\Delta E = \frac{1}{\epsilon_1} (\text{grad div } \Delta\Pi^a + k_1^2 \Delta\Pi^a), \quad (2)$$

определим взаимную комплексную мощность

$$\Delta W = \frac{1}{j} \int \Delta E I_\xi^* d\xi, \quad (3)$$

где I_ξ^* — комплексно-сопряженная величина тока. Взаимный импеданс

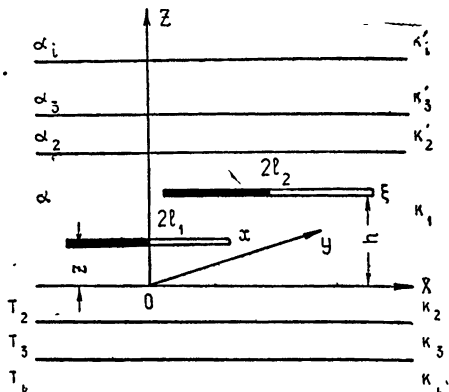


Рис. 1. Геометрия задачи. Антенны расположены симметрично относительно плоскости ZY .

ΔZ , обусловленный наличием границ раздела, получим, поделив ΔW на произведение токов $I_{0x} I_{0z}^*$. Имеем для провода

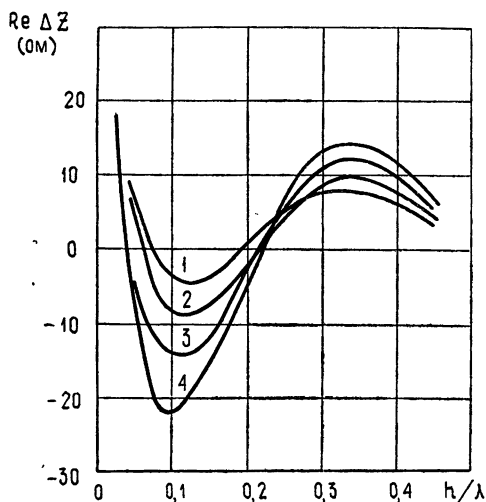


Рис. 2. Активное сопротивление, внесенное в антенну однородным полупространством.

1 — $\varepsilon = 4$, $\eta = 0,01$; 2 — 6, 01; 3 — 10, 1; 4 — 18, 1.

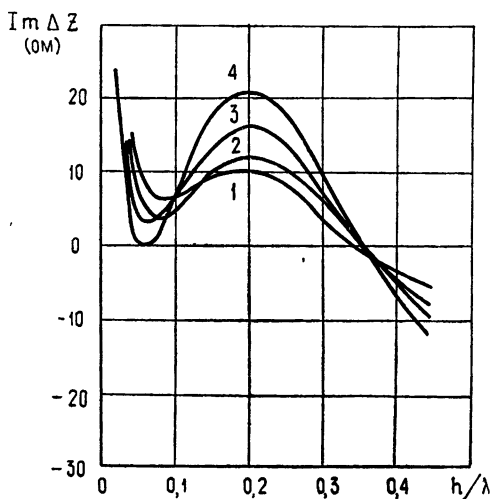


Рис. 3. Реактивное сопротивление, внесенное в антенну однородным полупространством.

1 — $\varepsilon = 4$, $\eta = 0,01$; 2 — 6, 01; 3 — 10, 1; 4 — 18, 1.

$$\Delta \Pi_{x,z}^a = \int_{-I_2}^{I_1} -j \frac{30}{k_1} I_{\xi} \Delta \Pi_{x,z} d\xi, \quad (4)$$

где $\Delta \Pi_{x,z}$ — составляющие вектора Герца элементарного источника:

$$\Delta \Pi_x(x-\xi) = \int_0^{\infty} f_{x\parallel}(\nu) \exp[-(z+h)R_1] J_0(\nu \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}) d\nu, \quad (5)$$

$$\Delta \Pi_z(x-\xi) = \frac{\partial F(x-\xi)}{\partial \xi},$$

а $F(x)$ обозначает следующую величину [1]:

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{R_1}{\nu^2} [f_{x\parallel}(\nu) + f_{z\perp}(\nu)] J_0(\nu \sqrt{x^2 + y^2}) \exp[-(z+h)R_1] d\nu. \quad (6)$$

В уравнениях (5), (6) $R_1 = \sqrt{\nu^2 - k_1^2}$. Функции $f_{x\parallel}(\nu)$, $f_{z\perp}(\nu)$ определяются из выражений

$$\begin{aligned} f_{x\parallel, z\perp} &= [C(\nu) \exp(R_1 z) + D(\nu) \exp(-R_1 z)] \exp[(z+h)R_1], \\ C(\nu) &= \frac{L(\nu)[Q(\nu) \exp[2(h-d)R_1] - P(\nu) \exp(-2dR_2)]}{Q(\nu)N(\nu) + P(\nu)L(\nu) \exp(-2dR_2)} \frac{\nu}{R_1} \exp(-hR_1), \\ D(\nu) &= \frac{P(\nu)[L(\nu) \exp[2(h-d)R_1] + N(\nu)]}{Q(\nu)N(\nu) + P(\nu)L(\nu) \exp(-2dR_2)} \frac{\nu}{R_1} \exp(-hR_1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$P(\nu) = \lambda_{12} + \lambda_{2n} \exp(-2T_2 R_2), \quad Q(\nu) = 1 + \lambda_{12} \lambda_{2n} \exp(-2T_2 R_2),$$

$$\lambda_{i,k}^{k \neq i+1} = \frac{\lambda_{i,i+1} + \lambda_{i+1,k} \exp(-T_{i+1} R_{i+1})}{1 + \lambda_{i+1} \lambda_{i+1,k} \exp(-2T_{i+1} R_{i+1})},$$

причем для $f_{x1}(\nu)$

$$\lambda_{i,i+1} = \frac{R_i - R_{i+1}}{R_i + R_{i+1}},$$

для $f_{z1}(\nu)$

$$\lambda_{i,i+1} = \frac{k_{i+1}^2 R_i - k_i^2 R_{i+1}}{k_{i+1}^2 R_i + k_i^2 R_{i+1}}, \quad R_i = \sqrt{\nu^2 - k_i^2},$$

$$L(\nu) = \lambda_{12} + \lambda_{2n} \exp(-2d_2 R_2),$$

$$N(\nu) = 1 + \lambda_{12} \lambda_{2n} \exp(-2d_2 R_2).$$

Здесь $R_i = \sqrt{\nu^2 - (k'_i)^2}$ и для f_{z1}

$$\lambda_{i,i+1} = \frac{(k'_{i+1})^2 R_i - (k'_i)^2 R_{i+1}}{(k'_{i+1})^2 R_i + (k'_i)^2 R_{i+1}}.$$

После подстановки (1), (4) — (6) в (3) получим выражение для ΔZ , состоящее из суммы двойного и тройного интегралов. Воспользовавшись интегральным представлением функции Бесселя

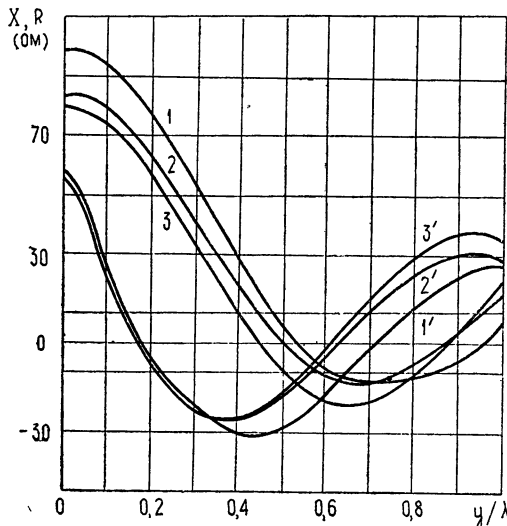


Рис. 4. Взаимное сопротивление полуволновых антенн над однородным полупространством.

1, 2, 3 — активная часть, 1', 2', 3' — реактивная часть, $\epsilon = 10, \eta = 0,1; 1, 1' - h = 0,33 \lambda;$
 2, 2' — $\infty; 3, 3' - 0,6 \lambda.$

$$J_0(\nu \sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\nu x \sin \vartheta) \cos(\nu y \cos \vartheta) d\vartheta$$

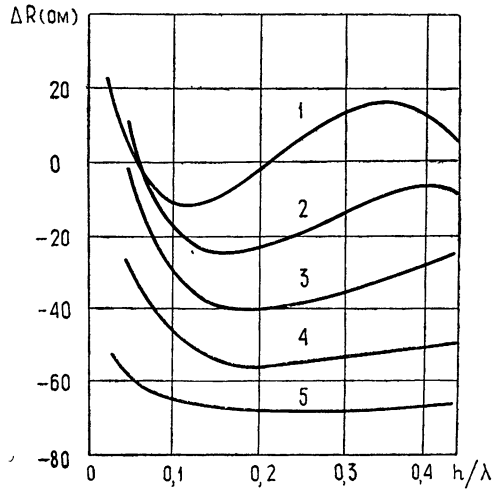


Рис. 5. Активное сопротивление, внесенное в полуволновую антенну полупространством и пассивной полуволновой антенной.

1 — $y = \infty$; 2 — $y = 0,2\lambda$; 3 — $y = 0,15\lambda$;
4 — $y = 0,1\lambda$; 5 — $y = 0,05\lambda$.

и изменив порядок интегрирования в двойном и тройном интегралах, получим окончательно:

$$\begin{aligned} \Delta Z = j \frac{240}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \cos(\nu y \cos \vartheta) \left\{ k_1 \left[\frac{k_1^2}{\nu^2} f_{x\parallel}(\nu) + \left(\frac{k_1^2}{\nu^2} - 1 \right) f_{z\perp}(\nu) \right] \times \right. \\ \times \frac{[\cos(\nu l_1 \sin \vartheta) - \cos k_1 l_1]^2 - k_1^3 \left(\frac{k_1^2}{\nu^2} - 1 \right) (f_{x\parallel}(\nu) + f_{z\perp}(\nu)) \times \\ \times \frac{[\cos(\nu l_1 \sin \vartheta) - \cos k_1 l_1] [\cos(\nu l_2 \sin \vartheta) - \cos k_1 l_2]}{(k_1^2 - \nu^2 \sin^2 \vartheta)^2} \left. \right\} \times \\ \times \exp[-(z+h)R_1] d\nu d\vartheta. \end{aligned} \quad (8)$$

При $l_1 = l_2$ и $y = 0$ (8) дает значения импеданса, внесенного в антенну за счет присутствия границ раздела.

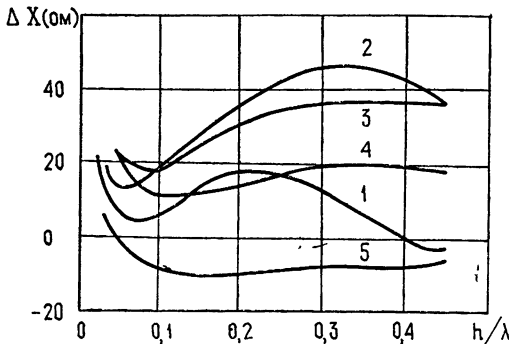


Рис. 6. Реактивное сопротивление, внесенное в полуволновую антенну полупространством и пассивной полуволновой антенной.

1 — $y = \infty$; 2 — $y = 0,2\lambda$; 3 — $y = 0,15\lambda$; 4 — $y = 0,1\lambda$;
5 — $y = 0,05\lambda$.

На рис. 2—6 приведены результаты расчетов по формуле (25) для одной и двух полуволновых антенн. На графиках рис. 2, 3 приведены зависимости составляющих импеданса, внесенных в антенну однородным полупространством, от высоты h/λ (λ — длина волны в свободном пространстве). Значения диэлектрической проницаемости ϵ и потерь $\eta = 60 \sigma \lambda$ соответствуют электромагнитным параметрам земли в диапазоне УКВ.

На графиках рис. 4 приведены зависимости активной и реактивной составляющих взаимного сопротивления антенн, расположенных над однородным полупространством, от расстояния между антеннами. Для сравнения дан случай свободного пространства ($h \rightarrow \infty$). На графиках рис. 5, 6 приведены результаты расчетов импеданса, внесенного в антенну однородным полупространством ($\epsilon = 10$, $\eta = 0,1$) и пассивной антенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. К. Радугин, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 5, 86 (1966).

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
19 августа 1971 г.

THE INFLUENCE OF THE PLANE-STRATIFIED MEDIUM ON THE
IMPEDANCE OF LINEAR ANTENNAS

V. S. Semenov, L. S. Frumkis, A. S. Shostak

Expressions are obtained for the self-impedance of the linear antenna and the mutual impedance of linear antennas located in parallel to the boundaries of the plane-stratified medium. The solution is obtained by the method of the induced e. m. f. Using the recurrence relations given in the paper it is convenient to calculate the antenna impedance for an arbitrary number of layers using the computer. The results of the numerical calculations are given.

УДК 539.2

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТОКОПЕРЕНОС В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

А. И. Руденко

Дается теория нестационарных токов, ограниченных пространственным зарядом, в твердом теле (плоскопараллельная пластина) при выключении напряжения. Анализируются различные случаи выключения.

Нестационарные токи, ограниченные пространственным зарядом (ТОПЗ), являются хорошим инструментом при изучении свойств твердых тел. В [1] дается теория нестационарного ТОПЗ при включении напряжения. В настоящей работе дается теория ТОПЗ при выключении напряжения, что соответствует другому типу начальных и граничных условий в системе уравнений ТОПЗ. Системы нелинейных уравнений с частными производными. (а система ТОПЗ является таковой) не имеют общих методов решения, способ решения с одним типом начальных и граничных условий не распространяется на условия другого типа.

Таким образом, система ТОПЗ с новыми условиями представляет самостоятельную задачу. Задача описывается следующими уравнениями: закон Ома $I_c(x', t') = q\mu n(x', t')E(x', t')$, q — заряд носителя, μ — подвижность носителя, I_c — плотность тока проводимости, n — объемная плотность носителей, E — напряженность поля, t' — время, x' — координата (образец — плоскопараллельная пластина толщиной L с монополярным механизмом проводимости, $0 \leq x' \leq L$); уравнение непрерывности $\frac{\partial}{\partial x'} I_c(x', t') + q \frac{\partial}{\partial t'} \times$

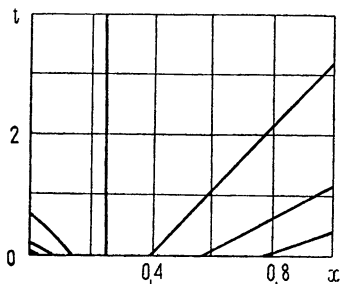


Рис. 1.

$\times n(x', t') = 0$; уравнение Пуассона $\frac{\partial}{\partial x'} E(x', t') = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} n(x', t')$,

ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — диэлектрическая проницаемость. Предполагается, что инжекция носителей в образец происходит с плоскости $x' = 0$ и что число инжектированных носителей значительно превышает число собственных. Если к образцу приложено постоянное напряжение U_0 , то в нем устанавливается стационарный ток, сопровождаемый определенным распределением носителей по координате. Если же в момент $t' = 0$ внешнее напряжение отключается, то это распределение релаксирует, порождая затухающий ток. Введем безразмерные параметры:

$$x = \frac{x'}{L}, \quad t = \frac{\mu U_0 t'}{L^2}, \quad \epsilon = \frac{EL}{U_0}, \quad \rho = \frac{qnL^2}{\epsilon_0 \epsilon U_0};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t) \epsilon(x, t)] + \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \epsilon(x, t) = \rho(x, t). \quad (1)$$

При $t = 0$ распределение ρ по x соответствует стационарному току (см. [1]):

$$\rho(x, 0) = \frac{3}{4} x^{-1/2}. \quad (2)$$

Из (1) следует, что полный ток не зависит от x :

$$j(t) = \rho(x, t) \varepsilon(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(x, t). \quad (3)$$

Граничные условия определяются способом выключения.

1. Образец изолируется. Распределение (2) создает в образце напряженность

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{3}{2} x^{1/2} - \frac{3}{4}. \quad (4)$$

Плоскость $x = 1/4$ делит заряд в образце на две равные части. При $t > 0$ носители из области $0 \leq x < 1/4$ движутся на плоскость $x = 0$, а из области $1/4 < x \leq 1$ на плоскость $x = 1$. В этом случае $\varepsilon(1/4, t) = 0$, откуда следует граничное условие

$$j(t) = 0. \quad (5)$$

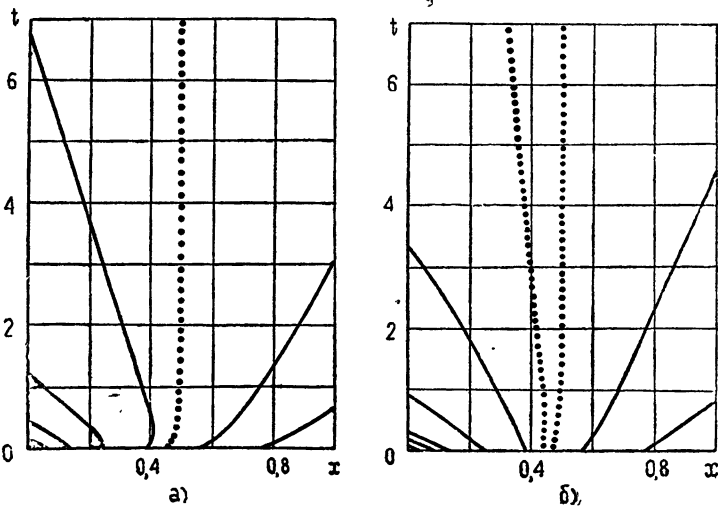


Рис. 2.

2. Заряд стекает с обоих торцов образца $x = 0, x = 1$ «на землю». Следует различать случаи пассивных 2 а. и активных или омических 2 б. контактов на торцах.

2 а. Контакты предполагаются тонкими, уход собственных носителей с них не может оказать влияния на напряженность в образце. Последняя создается только объемным зарядом, а заряд на контактах пренебрежимо мал и не влияет на релаксацию. Контакты служат лишь для стекания заряда. В момент t слой dx' образца создает напряженность $\frac{1}{2} \rho(x', t) dx'$ справа от x' и $-\frac{1}{2} \rho(x', t) dx'$ слева от x' :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x dx' \rho(x', t) - \frac{1}{2} \int_x^1 dx' \rho(x', t). \quad (6)$$

При $t = 0$ (2), (6) дают (4). Из (6) дифференцированием по t с использованием (1) можно получить граничное условие

$$j(t) = \frac{1}{2} \rho(1, t) \varepsilon(1, t) + \frac{1}{2} \rho(0, t) \varepsilon(0, t). \quad (7)$$

В этом случае может быть отключено лишь внешнее напряжение, а напряжение, порожденное объемным зарядом, релаксирует со временем.

2 б. Контакты предполагаются толстыми, имеется возможность образования на контактах заряда противоположного (по отношению к носителям) знака путем ухода с контактов «на землю» собственных носителей. Такие контакты влияют на напряженность в образце и в случае заземления обоих торцов обеспечивают нулевое напряжение:

$$\int_0^1 dx \varepsilon(x, t) = 0. \quad (8)$$

Интегрирование (3) по x от $x = 0$ до $x = 1$ с учетом (1), (8) дает граничное условие, а (2), (8) определяют начальное условие

$$j(t) = \frac{1}{2} [\varepsilon(1, t)]^2 - \frac{1}{2} [\varepsilon(0, t)]^2; \quad (9)$$

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{3}{2} x^{1/2} - 1. \quad (10)$$

3. Заряд стекает с плоскости $x = 0$, а плоскость $x = 1$ изолируется. И здесь различаются случаи пассивного 3 а. и активного 3 б. контакта.

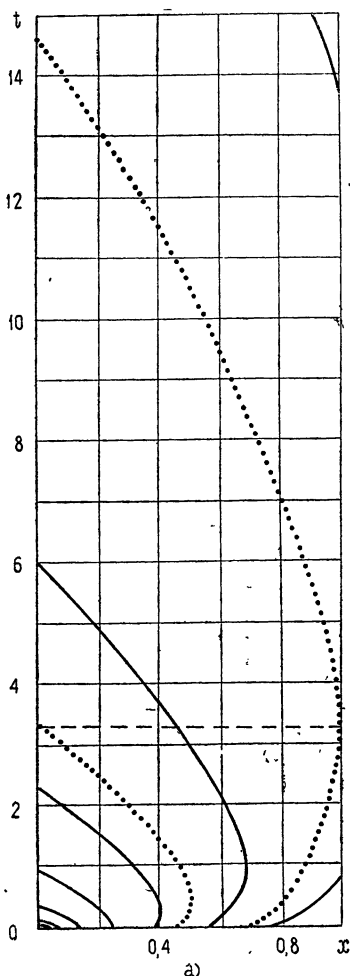
3 а. Напряженность создают заряды, находящиеся в объеме и на торце $x = 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) = & \frac{1}{2} \int_0^x dx' \rho(x', t) - \\ & - \frac{1}{2} \int_x^1 dx' \rho(x', t) - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t dt' \rho(1, t') \varepsilon(1, t'). \end{aligned} \quad (11)$$

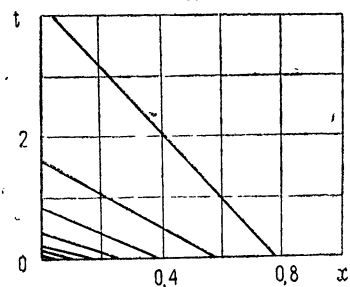
При $t = 0$ (2), (11) дают (4). Дифференцирование (11) по t дает граничное условие

$$j(t) = \frac{1}{2} \rho(0, t) \varepsilon(0, t). \quad (12)$$

3 б. Уход из контакта собственных носителей, общий заряд которых равен (в любой момент t) заряду в образце,



а)



б)

Рис. 3.

обеспечит условие $\varepsilon(1, t) = 0$, из которого следует граничное условие (5) и начальное условие

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{3}{2} x^{1/2} - \frac{3}{2}. \quad (13)$$

4. Заряд стекает с $x = 1$ через пассивный 4 а. или активный 4 б. контакт, $x = 0$ изолируется.

4 а. Аналогично случаю 3 а. справедливо (4), а граничное условие имеет вид

$$j(t) = \frac{1}{2} \rho(1, t) \varepsilon(1, t). \quad (14)$$

4 б. Аналогично 3 б. справедливо $\varepsilon(0, t) = 0$, (5) и начальное условие

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{3}{2} x^{1/2}. \quad (15)$$

Итак, постановка задачи—найти решения нелинейной системы (1) со следующими начальными и граничными условиями: 1. (2), (4), (5); 2 а. (2), (4), (7); 2 б. (2), (10), (9); 3 а. (2), (4), (12); 3 б. (2), (13), (5); 4 а. (2), (4), (14); 4 б. (2), (15), (5). Задача решается методом характеристик. Характеристики системы—интегральные кривые уравнения

$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(x, t)$ —линии тока. Они различаются начальной координатой x_0 и являются функциями двух переменных: $x = x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$. Можно осуществить замену переменных $\varepsilon(x(t, x_0), t) = \varepsilon^*(t, x_0)$, $\rho(x(t, x_0), t) = \rho^*(t, x_0)$ и, используя (1), убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^*(t, x_0) = -[\rho^*(t, x_0)]^2; \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^*(t, x_0) = j(t). \quad (17)$$

(16), (2) дают

$$\begin{aligned} \rho^*(t, x_0) &= \rho^*(0, x_0) [1 + \rho^*(0, x_0) t]^{-1} = \\ &= \rho(x_0, 0) [1 + \rho(x_0, 0) t]^{-1} = \frac{3}{4} \left[x_0^{1/2} + \frac{3}{4} t \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для случаев $j = 0$ (17), (4), (13), (15) дают $\varepsilon^*(t, x_0)$, интегрирование $\varepsilon^*(t, x_0)$ определяет $x(t, x_0)$:

$$\varepsilon^*(t, x_0) = \varepsilon^*(0, x_0) = \varepsilon(x_0, 0): \quad 1. \quad \varepsilon^*(t, x_0) = \frac{3}{2} x_0^{1/2} - \frac{3}{4}; \quad (19)$$

$$3б. \quad \varepsilon^*(t, x_0) = \frac{3}{2} x_0^{1/2} - \frac{3}{2}; \quad 4б. \quad \varepsilon^*(t, x_0) = \frac{3}{2} x_0^{1/2};$$

$$x = x(t, x_0) = \varepsilon(x_0, 0) t + x_0: \quad 1. \quad x(t, x_0) = \frac{3}{2} x_0^{1/2} t - \frac{3}{4} t + x_0; \quad (20)$$

$$3б. \quad x(t, x_0) = \frac{3}{2} x_0^{1/2} t - \frac{3}{2} t + x_0; \quad 4б. \quad x(t, x_0) = \frac{3}{2} x_0^{1/2} t + x_0.$$

(20) определяет обратную замену $\varepsilon^*(t, x_0(x, t)) = \varepsilon(x, t)$, $\rho^*(t, x_0(x, t)) = \rho(x, t)$ в (19), (18):

$$\begin{aligned} 1. \quad \varepsilon(x, t) &= \frac{3}{2} \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t + x \right]^{1/2} - \frac{9}{8} t - \frac{3}{4}; \quad \rho(x, t) = \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t + x \right]^{-1/2}; \quad \varepsilon(x, t) \approx \frac{4x-1}{4t}, \\ &\rho(x, t) \approx \frac{1}{t} \quad (t \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} 36. \quad \varepsilon(x, t) &= \frac{3}{2} \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{2} t + x \right]^{1/2} - \frac{9}{8} t - \frac{3}{2}; \quad \rho(x, t) = \\ &= \frac{3}{4} \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{2} t + x \right]^{-1/2}; \quad \varepsilon(x, t) \approx \frac{x-1}{t}, \\ &\rho(x, t) \approx \frac{1}{t} \quad (t \rightarrow \infty); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 46. \quad \varepsilon(x, t) &= \frac{3}{2} \left[\frac{9}{16} t^2 + x \right]^{1/2} - \frac{9}{8} t; \quad \rho(x, t) = \frac{3}{4} \left[\frac{9}{16} t^2 + x \right]^{-1/2}; \\ &\varepsilon(x, t) \approx \frac{x}{t}, \quad \rho(x, t) \approx \frac{1}{t} \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (23)$$

Для случаев $i \neq 0$ вводятся функции $k(t) = \int_0^t dt' j(t')$, $l(t) = \int_0^t dt' k(t')$. (17), (4), (10) дают $\varepsilon^*(t, x_0)$, интегрирование $\varepsilon^*(t, x_0)$ определяет $x(t, x_0)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(t, x_0) &= k(t) + \varepsilon(x_0, 0): \quad 2a., 3a., 4a. \quad \varepsilon^*(t, x_0) = \\ &= k(t) + \frac{3}{2} x_0^{1/2} - \frac{3}{4}; \quad 26. \quad \varepsilon^*(t, x_0) = k(t) + \frac{3}{2} x_0^{1/2} - 1; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x = x(t, x_0) &= l(t) + \varepsilon(x_0, 0)t + x_0: \quad 2a., 3a., 4a. \quad x = l(t) + \\ &+ \frac{3}{2} x_0^{1/2} t - \frac{3}{4} t + x_0; \quad 26. \quad x = l(t) + \frac{3}{2} x_0^{1/2} t - t + x_0. \end{aligned} \quad (25)$$

(25) определяет обратную замену $\varepsilon^*(t, x_0(x, t)) = \varepsilon(x, t)$, $\rho^*(t, x_0(x, t)) = \rho(x, t)$ в (24), (18):

$$\left. \begin{aligned} 2a., 3a., 4a. \quad \varepsilon(x, t) &= \frac{3}{2} \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t + x - l \right]^{1/2} - \frac{9}{8} t - \frac{3}{4} + k, \\ \rho(x, t) &= \frac{3}{4} \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t + x - l \right]^{-1/2}; \\ 26. \quad \varepsilon(x, t) &= \frac{3}{2} \left[\frac{9}{16} t^2 + t + x - l \right]^{1/2} - \frac{9}{8} t - 1 + k, \\ \rho(x, t) &= \frac{3}{4} \left[\frac{9}{16} t^2 + t + x - l \right]^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Использование (26) при $x = 0$, $x = 1$ и граничных условий (7), (9), (12), (14) дает

$$2a. \quad l'' = -\frac{3}{8} \left(\frac{9}{8} t + \frac{3}{4} - l' \right) \left(\left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t - l + 1 \right]^{-1/2} + \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t - l \right]^{-1/2} \right) + \frac{9}{8}; \quad (27)$$

$$2b. \quad l'' = -\frac{3}{2} \left(\frac{9}{8} t + 1 - l' \right) \left(\left[\frac{9}{16} t^2 + t - l + 1 \right]^{1/2} - \left[\frac{9}{16} t^2 + t - l \right]^{1/2} \right) + \frac{9}{8}; \quad (28)$$

$$3a. \quad l'' = -\frac{3}{8} \left(\frac{9}{8} t + \frac{3}{4} - l' \right) \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t - l + 1 \right]^{-1/2} + \frac{9}{16}; \quad (29)$$

$$4a. \quad l'' = -\frac{3}{8} \left(\frac{9}{8} t + \frac{3}{4} - l' \right) \left[\frac{9}{16} t^2 + \frac{3}{4} t - l \right]^{-1/2} + \frac{9}{16}. \quad (30)$$

Решая (27)–(30) с учетом $l(0) = l'(0) = 0$, можно получить для каждого случая $l(t)$, $k(t)$, $j(t)$, после чего (25), (26) дают $x(t, x_0)$, $\varepsilon(x, t)$, $\rho(x, t)$:

$$2a. \quad \left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{1 - \frac{16}{9} j}{2 \left[-\frac{16}{9} j \left(2 - \frac{16}{9} j \right) \right]^{1/2}} + \frac{1}{2} \right\}^{3/2} - \\ & - \left\{ \frac{1 - \frac{16}{9} j}{2 \left[-\frac{16}{9} j \left(2 - \frac{16}{9} j \right) \right]^{1/2}} - \frac{1}{2} \right\}^{3/2} = \frac{9}{8} t + 1, \end{aligned} \right\}; \quad (31)$$

$$j < 0, \quad j(t) \approx -\frac{3^{3/2}}{16} \frac{1}{t^{1/2}} \quad (t \rightarrow 0), \quad j(t) \approx -\frac{2}{9} \frac{1}{t^4} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\left[\left(\frac{3}{4} t + x_0^{1/2} \right)^2 - x + 1 \right]^{3/2} - \left[\left(\frac{3}{4} t + x_0^{1/2} \right)^2 - x \right]^{3/2} = \frac{9}{8} t + 1, \quad (32)$$

$$x(t, x_0) \approx \left(\frac{3}{2} x_0^{1/2} - 1 \right) t + x_0 + \frac{1}{18} \quad (t \rightarrow \infty);$$

$$\left(\frac{9}{16} \frac{1}{\rho^2} - x + 1 \right)^{3/2} - \left(\frac{9}{16} \frac{1}{\rho^3} - x \right)^{3/2} = \frac{9}{8} t + 1, \quad (33)$$

$$\rho(x, t) \approx \frac{1}{t} - \frac{8}{9} \frac{1}{t^2} + \frac{100}{81} \frac{1}{t^3} - \frac{8}{9} \frac{x}{t^3} \quad (t \rightarrow \infty);$$

$$\varepsilon(x, t) \approx \frac{2x-1}{2t} - \frac{4}{9} \frac{2x-1}{t^2} + \frac{50}{81} \frac{2x-1}{t^3} - \frac{2}{9} \frac{2x^2-1}{t^3} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (34)$$

$$26. \quad t = 2^{1/4} \cdot 3^{-3/4} (-j)^{-1/4} - \frac{2}{3} - 2^{1/2} \cdot 3^{-5/4} \times$$

$$\times \left\{ \ln \left[\frac{1 + 2^{5/4} \cdot 3^{-1/2} (-j)^{1/4} + 2^{3/2} \cdot 3^{-1} (-j)^{1/2}}{1 - 2^{5/4} \cdot 3^{-1/2} (-j)^{1/4} + 2^{3/2} \cdot 3^{-1} (-j)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{5/4} \cdot 3^{-1/2} (-j)^{1/4}}{1 - 2^{3/2} \cdot 3^{-1} (-j)^{1/2}} \right] - \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] + 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] \right\},$$

$$j < 0, \quad j(t) \approx -\frac{3}{8} + \frac{3}{2} t^{1/2} \quad (t \rightarrow 0), \quad j(t) \approx -\frac{2}{27} \frac{1}{t^4} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$x(t, x_0) \approx \left(\frac{3}{2} x_0^{1/2} - \frac{3}{4} - 2^{-5/2} \cdot 3^{3/4} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] \right\} \right) t + x_0 +$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(1 + 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/4} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] \right\} \right)^2 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\rho(x, t) \approx \frac{1}{t} - \left(1 + 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/4} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] \right\} \right) \frac{2}{3t^2} +$$

$$+ \left(1 + 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/4} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] \right\} \right)^2 \frac{4}{9t^3} - \frac{2(2x-1)}{9t^3} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\varepsilon(x, t) \approx \frac{2x-1}{2t} - \left(1 + 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/4} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] \right\} \right) \frac{2x-1}{3t^2} + \frac{1}{27t^3} +$$

$$+ \left(1 + 2^{-1/2} \cdot 3^{-1/4} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{2^{1/2} \cdot 3^{-1/4}}{1 - 3^{-1/2}} \right] - \right. \right.$$

$$\left. - \ln \left[\frac{1 + 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}}{1 - 2^{1/2} \cdot 3^{-1/4} + 3^{-1/2}} \right] \right\} \right)^2 \frac{2(2x-1)}{9t^3} - \frac{(2x-1)^2}{9t^3} \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$3a. \frac{\left(3 - \frac{32}{9}j\right)\left(\frac{32}{9}j\right)^2}{\left(1 - \frac{32}{9}j\right)^3} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{4}t\right)^3} \quad (j < 0), \quad (39)$$

$$j(t) \approx -\frac{3^{3/2}}{2^{3/2}} \frac{1}{t^{1/2}} \quad (t \rightarrow 0), \quad j(t) \approx -\frac{1}{4} \frac{1}{t^{3/2}} \quad (t \rightarrow \infty);$$

$$\left. \left\{ \left[\left(\frac{3}{4}t + x_0^{1/2} \right)^2 - x \right]^{1/2} - \frac{3}{4}t - 1 \right\}^2 \left\{ \left[\left(\frac{3}{4}t + x_0^{1/2} \right)^2 - x \right]^{1/2} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}, \right. \quad (40)$$

$$x(t, x_0) \approx \frac{3}{2} (x_0^{1/2} - 1)t + t^{1/2} - 1 + x_0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\left[\left(\frac{9}{16} \frac{1}{\rho^2} - x \right)^{1/2} - \frac{3}{4}t - 1 \right]^2 \left[\left(\frac{9}{16} \frac{1}{\rho^2} - x \right)^{1/2} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}, \quad (41)$$

$$\rho(x, t) \approx \frac{1}{t} \quad (t \rightarrow \infty);$$

$$\varepsilon(x, t) \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{t^{1/2}} + \frac{x}{t} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (42)$$

$$4a. \frac{\left(3 - \frac{32}{9}j\right)\left(\frac{32}{9}j\right)^2}{\left(1 - \frac{32}{9}j\right)^3} = \frac{128}{27} \frac{1}{t^3} \quad (j > 0), \quad j(t) \approx \frac{9}{32} - \quad (43)$$

$$-\frac{27}{128}t \quad (t \rightarrow 0), \quad j(t) \approx \frac{1}{2^{3/2}} \frac{1}{t^{3/2}} \quad (t \rightarrow \infty);$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{3}{4}t + x_0^{1/2} \right)^2 + 1 - x \right]^{1/2} - \frac{3}{4}t \right\}^2 \left\{ \left[\left(\frac{3}{4}t + x_0^{1/2} \right)^2 + 1 - x \right]^{1/2} + \frac{3}{8}t \right\} = 1, \quad x(t, x_0) \approx \frac{3}{2} x_0^{1/2} t - 2^{1/2} t^{1/2} + 1 + x_0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (44)$$

$$\left[\left(\frac{9}{16} \frac{1}{\rho^2} + 1 - x \right)^{1/2} - \frac{3}{4}t \right]^2 \left[\left(\frac{9}{16} \frac{1}{\rho^2} + 1 - x \right)^{1/2} + \frac{3}{8}t \right] = 1, \quad (45)$$

$$\rho(x, t) \approx 1/t \quad (t \rightarrow \infty);$$

$$\varepsilon(x, t) \approx \frac{1}{2^{1/2}} \frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1-x}{t} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (46)$$

Точные выражения для ε громоздки и не приводятся. Линии тока для случаев 1., 2 а., 2 б., 3 а., 3 б. показаны на рисунках. При любом t между соседними (сплошными) линиями находится одинаковый заряд. На рис. 2 а пунктирная линия имеет $x_0 = 0,44$. На рис. 2 б левая пунктирная линия имеет $x_0 = 0,44$, а правая $x_0 = 0,47$, любая линия, находящаяся между ними, имеет точку поворота. На рис. 3 а левая пунктирная линия

имеет $x_0 = 0,46$, а правая $x_0 = 0,70$; они приходят на торцы при $t = 3,3$; линии из области $0,70 \leq x_0 \leq 1$ сначала идут на плоскость $x = 1$, а затем снова входят в образец.

Автор благодарит М. И. Рязанова.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Manu, G. Rakavy, Phys. Rev., 126, 1980 (1962).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
6 сентября 1971 г.

NONSTATIONARY CURRENT TRANSFER IN SOLIDS

A. I. Rudenko

The theory is given of nonstationary currents limited by the space charge in the solid (plane-parallel plate) at the voltage switched off. Different cases of switching off are analysed.

УДК 621.385.6

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОНЕ

М. И. Кузнецов, И. Н. Железцова, С. В. Степанов

Предлагается метод расчета собственных частот электронного облака в цилиндрическом магнетроне для напряженности магнитного поля, превышающей критическое значение более чем в 1,2—1,5 раза. По экспериментальным данным и результатам теории электронное облако в этом случае состоит из прикатодного двухпоточного слоя и статического синхронного слоя, занимающего все остальное пространство. Для такой структуры облака вычислены низшие частоты собственных колебаний и проведено сопоставление с экспериментальными данными. Установлено, что предлагаемый метод дает лучшее совпадение теории с экспериментом, чем формула Хартри, наиболее часто применяемая для расчета собственных частот.

Собственные колебания электронного облака в магнетроне рассматривались целым рядом исследователей, например, [1^{—6}]. В этих работах предполагалось, что вне регулярной* части электронного облака заметного пространственного заряда нет. Однако при большой напряженности магнитного поля ($H > 1,2 \div 1,5 H_{кр}$) регулярная часть электронного облака имеет незначительную толщину, и даже при относительно небольшой плотности заряда в нерегулярной части электронного облака общий заряд последней может оказаться сравнимым с зарядом регулярной части.

Очевидно, в этом случае при расчете собственных колебаний электронного облака должна учитываться и его нерегулярная часть. Чтобы такой расчет оказался возможным, необходимо знать статическое распределение потенциала и траекторий электронов не только в регулярной, но и в нерегулярной части электронного облака. Новейшие теоретические исследования [7] показали, что в цилиндрических магнетронах ($r_a/r_k > 1,5 \div 2$) при $H > 1,2 \div 1,5 H_{кр}$ при реально существующем разбросе начальных скоростей электронов регулярная часть электронного облака может представлять собой только один слой с двухпоточным движением электронов. Ни бриллюэновское, ни многослойное состояния электронного облака при указанных условиях существовать не могут. Методы расчета полей и траекторий электронов в этом двухпоточном слое детально разработаны в [7].

Движение электронов и распределение заряда в нерегулярной части электронного облака теоретически изучены еще недостаточно. Однако экспериментальные данные о полях в нерегулярной части электронного облака показывают, что при $r_a/r_k > 5 \div 2$ и $H > 1,2 \div 1,5 H_{кр}$ величина пространственного заряда в области между регулярной частью электронного облака и анодом довольно существенна [8]. Обработка зондовых измерений показала, что этот заряд создает такие поля, при которых средняя угловая скорость дрейфа электронов θ практически не зависит от радиуса. Это позволяет предполагать, что состояние пространственного заряда в нерегулярной части электронного

* Мы называем регулярной ту часть электронного облака, в которую электроны могут попасть с поверхности катода без помощи флуктуационных процессов, т. е. под воздействием полей регулярного характера.

облака близко к так называемому статическому синхронному [9, 10], т. е. к такому состоянию, в котором вся нерегулярная часть электронного облака вращается как твердое тело.

Таким образом, можно предполагать, что состояние электронного облака магнетрона в указанных режимах может быть отображено при помощи модели, состоящей из двух слоев: прикатодного—двухпоточного регулярного слоя и статического синхронного слоя в остальной части междуэлектродного пространства. Адекватность этой модели может быть показана путем расчета частот ее собственных колебаний и сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными.

В рамках такой модели электронного облака его собственные колебания до сих пор не исследовались и впервые рассматриваются в настоящей работе. Мы будем рассчитывать собственные частоты колебаний низших номеров ($n=1,2$), которые играют решающую роль в формировании электронного облака [11]. Они по крайней мере на порядок меньше циклотронной частоты. Поэтому для расчета переменных полей в двухпоточном слое можно воспользоваться в первом приближении статическими потенциалами $\varphi(r, I)$, т. е. можно полагать, что переменная составляющая равна

$$\varphi(r) = \frac{\partial \varphi(r, I)}{\partial I} \tilde{i},$$

где r — радиус точки наблюдения, I — постоянная составляющая линейной плотности радиального тока в одном из потоков, \tilde{i} — ее переменная составляющая.

В соответствии с общепринятой методикой для вычисления переменного поля $\tilde{E}(\bar{r})$ на границе между слоями будем считать, что радиальная компонента переменного поля на невозмущенной границе между слоями равна сумме радиальных компонент поля $\tilde{E}_{1r}(\bar{r})$ и $\tilde{E}_{2r}(\bar{r})$, обусловленных соответственно электронами двухпоточного слоя на его действительной колеблющейся границе и колебаниями границы статического синхронного слоя.

При расчете $\tilde{E}_{1r}(\bar{r})$ учтем, что в практически интересных случаях толщина двухпоточного слоя ($r - r_k$) значительно меньше радиуса катода r_k , $\varphi(r, I) = 10 \div 1000$ в, $T_k = 1000^\circ\text{K}$. Используя результаты, полученные в [7], можно показать, что в этих случаях

$$\tilde{E}_{1r}(\bar{r}) = -\kappa \frac{\tilde{\varphi}(\bar{r})}{r - r_k}, \quad (1)$$

где $\kappa = 2 \div 4$, $\tilde{\varphi}(\bar{r})$ — переменный потенциал на невозмущенной границе между слоями. Принимая во внимание, что переменная составляющая потенциала для n -го вида собственных колебаний электронного облака имеет вид

$$\tilde{\varphi}_n(r) = \hat{\varphi}(r) e^{j(\omega t - n\theta)},$$

можно показать, что переменная составляющая радиальной координаты границы статического слоя равна

$$\tilde{r}_{\text{ст}}^{(n)} = - \frac{\hat{\varphi}_n(\bar{r}) n e^{j(\omega t - n\theta)}}{(\omega - n\theta) B r}.$$

Следовательно,

$$\tilde{E}_{2r}(\bar{r}) = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \tilde{r}_{гп} = - \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \frac{\hat{\varphi}_n(\bar{r})n}{(\omega - n\Theta)Br}. \quad (2)$$

Расчет переменных полей потенциалов в статическом синхронном слое не вызывает затруднений в силу того, что средние азимутальные скорости всех электронов этого слоя одинаковы, а постоянная составляющая плотности заряда не зависит от радиуса ($\bar{\rho} = \bar{\Theta} B \epsilon_0$). Используя методы, развитые в [1-4], можно показать, что при этих условиях $\tilde{\rho} = 0$, т. е. переменное поле в статическом синхронном слое обусловлено только наличием переменного поля на границе его с двухпоточным слоем. Следовательно,

$$\tilde{E}_r(r) = \tilde{E}_r(\bar{r}) \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1} \right] \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1} \right]^{-1}. \quad (3)$$

Учтем, что $\tilde{\varphi}_n(r_a) = 0$, или

$$\tilde{\varphi}_n(\bar{r}) - \int_r^{r_a} \tilde{E}_r dr = 0. \quad (4)$$

Из (1) — (4) получим характеристическое уравнение для собственной частоты ω_n :

$$\begin{aligned} & \hat{\varphi}_n(\bar{r}) + \left\{ \frac{x \hat{\varphi}_n(\bar{r})}{\bar{r} - r_k} + \frac{-\hat{\rho} \hat{\varphi}_n(\bar{r})n}{\epsilon_0(\omega_n - n\Theta)Br} \right\} \times \\ & \times \frac{\bar{r}}{n} \frac{\left(\frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{n+1} - \left(\frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{-n+1}}{\left(\frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{-n+1}} = 0 \\ & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_n = n\bar{\Theta} \frac{1 + n \frac{\Delta r}{x r} \left\{ \frac{\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1}}{\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1}} \right\} - \frac{\Delta r}{x r}}{1 + \frac{n \Delta r}{x r} \left\{ \frac{\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1}}{\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} - \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1}} \right\}} & \approx n\bar{\Theta} \left(1 - \frac{\Delta r}{x r} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

В заключение сопоставим рассчитанные нами частоты с экспериментальными данными, полученными на двух макетах магнетронного диода с отношением радиусов анода и катода 1,83 и 2,77. Для этого необходимо рассчитать r , т. е. положение границы регулярной части электронного облака. Такой расчет был произведен в предположении,

что между границей регулярной части облака и анодом находится статический синхронный слой электронов, т. е. все электроны, находящиеся вне регулярной части облака, двигаются с одинаковой угловой скоростью по траекториям, близким к круговым.

Учтем, что напряженность электрического поля в статическом синхронном слое пропорциональна радиусу точки наблюдения, а потенциал—квадрату этого радиуса [10]. Это дает следующее выражение для границы регулярной части электронного облака \bar{r} :

$$h^{-2} = \left(1 - \frac{r_k^2}{r_a^2}\right)^{-2} \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2} - 2 \frac{r_k^2}{r_a^2}\right), \quad (7)$$

где $h = H/H_{кр}$. Формула (7) позволяет определить \bar{r} как функцию $H/H_{кр}$, а следовательно, $\bar{\theta}$ и ω_n .

Найденные значения собственных частот электронного облака для магнетронного диода с отношением радиуса анода к катоду 1,83 приведены на рис. 1 вместе с экспериментальными результатами. Сравнение показывает, что полученные расчетные данные для собственных частот ближе к экспериментальным, чем вычисленные по формуле Хартри, обычно используемой для определения собственных частот колебаний электронного облака в магнетроне. Они отличаются от экспериментально наблюдаемых не более чем на 10—15%. Это отличие вполне может быть объяснено приближенным характером наших вычислений. Необходимо отметить, что наши результаты получены при анодном напряжении меньше 1000 в.

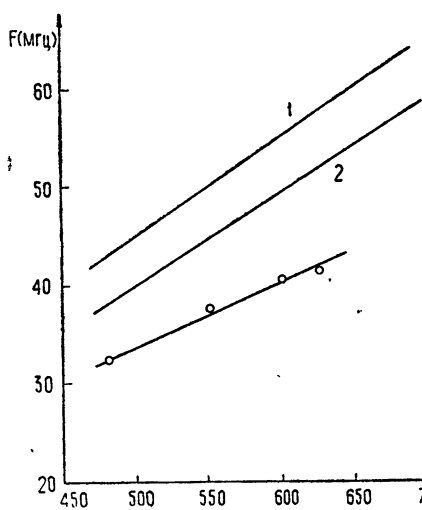


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимости собственных частот электронного облака цилиндрического магнетрона от анодного напряжения при $H=407$ эрст для $r_a/r_k=1,83$.

○ ○ ○ — экспериментальные значения; 1 — кривая, рассчитанная по формуле Хартри; 2 — кривая, рассчитанная по формуле (6).

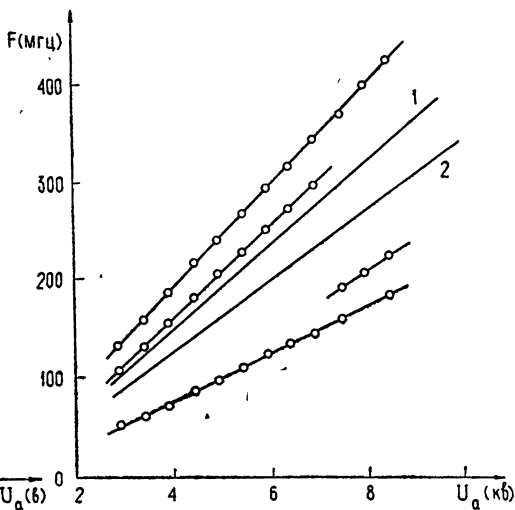


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость собственных частот электронного облака цилиндрического магнетрона от анодного напряжения при $H=1418$ эрст для $r_a/r_k=2,77$.

○ ○ ○ — экспериментальные значения; 1 — кривая, рассчитанная по формуле Хартри; 2 — кривая, рассчитанная по формуле (6).

В высоковольтных режимах (φ_a от 3 до 10 кВ) эксперимент по определению собственных частот электронного облака был проведен в магнетронном диоде с $r_a/r_k = 2,77$. Оказалось, что при анодных напряжениях более 3 кВ происходит «расщепление» линий, соответствующих

номерам колебаний $n = 1, 2, \dots$, в группы с теми же номерами по несколько линий в каждой (рис. 2). Теоретические кривые собственных частот находятся примерно в середине группы экспериментальных данных. Это расщепление, по-видимому, обусловлено значительной вторичной эмиссией катода, которая может существенно влиять на колебательные процессы в двухпоточной части облака (см., например, [12]).

Таким образом, можно считать, что полученное соответствие теории с экспериментом подтверждает возможность описания процессов в цилиндрическом магнетроне с помощью принятой выше модели электронного облака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mac-Farlane, H. G. *Nay, Phys. Soc.*, part B, 63, 407 (1950).
2. В. П. Тычинский, Ю. Г. Деркач, *Радиотехника и электроника*, 1, 233 (1956).
3. О. Банеман, сб. *Электронные СВЧ приборы со скрещенными полями*, ИЛ, М., 1, 1961 г., стр. 310.
4. Г. Л. Соболев, А. В. Соболева, сб. *Вопросы электроники СВЧ*, изд. Саратовского университета, вып. 5, 1969 г., стр. 103.
5. М. И. Кузнецов, Э. Г. Васильев, С. В. Степанов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 10, № 12, 1770 (1967).
6. М. И. Кузнецов, Э. Г. Васильев, *Электронная техника*, сер. 1, *Электроника СВЧ*, вып. 12, 80 (1970).
7. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Л. С. Родыгина, А. Д. Юнаковский, Тезисы докладов на VI межвузовской конференции по электронике СВЧ, Минск, 1969 г., стр. 124.
8. В. А. Бербасов, *Электронная техника*, сер. 1, 48 (1970).
9. O. Doeschler, *Ann. radioelectr.*, 3, 27 (1948).
10. С. И. Бычков, *Вопросы теории и практического применения приборов магнетронного типа*, изд. Сов. радио, М., 1967.
11. М. И. Кузнецов, В. А. Бербасов, С. В. Степанов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 11, № 9, 1428 (1968).
12. В. А. Бербасов, В. Г. Цыбко, *Электронная техника*, сер. 1, *Электроника СВЧ*, вып. 6, 80 (1971).

Поступила в редакцию
31 августа 1971 г.

NATURAL OSCILLATIONS OF AN ELECTRON CLOUD IN A CYLINDRICAL MAGNETRON

M. I. Kuznetsov, I. N. Zheleztsova, S. V. Stepanov

A method is suggested to calculate the natural frequency of an electron cloud in a cylindrical magnetron for the magnetic field intensity exceeding the critical value more than 1,2—1,5 times. According to experimental and theoretical data the electron cloud in this case consists of near-cathode two-stream layer and static synchronous layer occupying the whole rest space. The lowest frequencies of natural oscillations are calculated for such a cloud structure. The comparison with experimental data is made. It is established that the suggested method gives a better agreement of the theory with the experiment than the Hartry's formula does which is frequently used for calculating the natural frequencies.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 537.291

**О НЕСТАЦИОНАРНЫХ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОТОКАХ
ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

С. Н. Огородников

1. В [1] рассмотрен двумерный нестационарный нерелятивистский соленоидальный регулярный поток одноименно заряженных частиц в отсутствие магнитного поля. В [2] указан один класс таких течений в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости движения. В настоящей работе рассматривается аналогичный поток в произвольном магнитном поле

2. Нестационарный нерелятивистский соленоидальный регулярный поток одноименно заряженных частиц описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + m\mathbf{v}^2/2 + q\varphi = 0, \quad \nabla W = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}/c, \quad \nabla^2 W = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь W — функция действия, \mathbf{v} — вектор скорости, \mathbf{A} — вектор-потенциал магнитного поля \mathbf{H} ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$), φ — потенциал электрического поля \mathcal{E} ($\mathcal{E} = -\nabla\varphi - c^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$), ρ — плотность пространственного заряда, m — масса частицы, q — ее заряд, c — скорость света, собственным магнитным полем и током смещения пренебрегаем [1]

Рассмотрим течения, для которых магнитное поле не зависит от времени и имеют место плоско-симметричные системы координат с конформной метрикой. Тогда система (1) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{m\partial(Q'Q^{*'})}{\partial t} + Q''Q^{*'}Q^* + Q^{*''}Q'Q + i\omega_0(Q''Q^{*'}s - Q^{*''}Q's^*) + \\ + 2(Q^*\chi''\chi^{*'} + Q\chi^{*''}\chi') + 2i\omega_0(\chi''\chi^{*'}s - \chi^{*''}\chi's^*) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом основные характеристики потока и компоненты магнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned} mv_x + imv_y = Q^* + i\omega_0 s, \quad mv_z = \chi + \chi^*, \quad \varphi = -(1/2mq) \times \\ \times [QQ^* + i\omega_0(Qs - Q^*s^*) + \omega_0^2 ss^* + (\chi + \chi^*)^2] - (1/2q) \frac{\partial(f + f^*)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho = (1/2\pi mq)(Q'Q^{*'} + 2\chi'\chi^{*'} + \omega_0^2), \quad W = (f + f^*)/2,$$

$$H_x + iH_y = 2ic\chi^{*'}/q, \quad H_z = H_0.$$

Здесь $Q = \frac{\partial f}{\partial s}$; $\omega_0 = -qH_0/2c$ — ларморовская частота, $f(s, t)$, $\chi(s)$ — произвольные аналитические функции $s = x + iy$; H_0 — произвольная постоянная; индекс * обозначает комплексно-сопряженную величину; штрих — дифференцирование по s . Уравнение (2) является основным уравнением

3. Укажем все существенно различные решения уравнения (2).

- 1) $Q = a_1, \omega_0 = 0, \chi' = \alpha_0 \exp(i \beta s)$;
- 2) $Q = a_1 + ia_2, \omega_0 \neq 0, \chi' = \alpha$;
- 3) $Q = -i \omega_0 s + ib_2, \omega_0 \neq 0, \chi' = \alpha_0 \exp(\beta_1 s)^*$;
- 4) $Q = ibs \exp(i \gamma) + b_1 + ib_2, \omega_0$ —произвольная, $\chi' = a$.

Соотношения (3) для основных характеристик и компонент магнитного поля дают

$$mv_x = -by \cos \gamma - bx \sin \gamma - \omega_0 y + b_1,$$

$$mv_y = -bx \cos \gamma + by \sin \gamma + \omega_0 x - b_2, \quad mv_z = 2ax,$$

$$\varphi = -(1/2mq) \left\{ (\omega_0^2 + b_2^2)(x^2 + y^2) - 2bb_1(x \sin \gamma + y \cos \gamma) + 2bb_2(x \cos \gamma - y \sin \gamma) + 4a^2x^2 - 2b\omega_0[(x^2 - y^2) \cos \gamma - 2xy \sin \gamma] + b_1^2 + b_2^2 - 2\omega_0(b_1y + b_2x) \right\} - \quad (4)$$

$$- (1/q) \{ (b \dot{\gamma}/2)[2xy \sin \gamma - (x^2 - y^2) \cos \gamma] + (\dot{b}_1 x - \dot{b}_2 y + \dot{c}_1) \},$$

$$\rho = (1/2\pi mq) (\omega_0^2 + b^2 + 2a^2), \quad W = -(b/2)[2xy \cos \gamma + (x^2 - y^2) \sin \gamma + b_1x - b_2y + c_1],$$

$$H_x = 0, \quad H_y = 2a c/q, \quad H_z = H_0.$$

- 5) $Q = ia^{-1}(s + c_1 + ic_2)^{-1} - m(\dot{c}_1 - i\dot{c}_2) - i\omega_0(c_1 - ic_2), \omega_0$ —произвольная, $\chi' = a$.

Основные характеристики имеют вид

$$mv_x = a^{-1}(y + c_2)[(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2]^{-1} - \omega_0(y + c_2) - m\dot{c}_1,$$

$$mv_y = -a^{-1}(x + c_1)[(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2]^{-1} + \omega_0(x + c_1) - m\dot{c}_2,$$

$$mv_z = 2ax, \quad \varphi = -(1/2mq) \left\{ \omega_0^2(x^2 + y^2) + 4a^2x^2 + 4m\omega_0(\dot{c}_1y - \dot{c}_2x) + 2\omega_0^2(c_1x + c_2y) - 2m^2(\dot{c}_1x + \dot{c}_2y) + a^{-2}[(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2]^{-1} + m^2(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2) + \omega_0^2(\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2) + 2m\omega_0(\dot{c}_1c_2 - \dot{c}_2c_1) - 2\omega_0a^{-1} + 2m\dot{a}_1 \right\},$$

$$\rho = (1/2\pi mq) \{ a^{-2}[(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2]^{-2} + \omega_0^2 + 2a^2 \},$$

$$W = \omega_0(c_1y - c_2x) - m(\dot{c}_1x + \dot{c}_2y) - a^{-1} \arctg[(y + c_2)/(x + c_1)] + \alpha_1.$$

Компоненты магнитного поля определяются (4).

- 6) $Q = -\frac{ib}{a} \exp\left(-\frac{i\omega_0}{m} t\right) \operatorname{tg} \left[bs \exp\left(-\frac{i\omega_0}{m} t\right) + c_1 + ic_2 \right] - \frac{m}{b} \times$
 $\times (\dot{c}_1 - i\dot{c}_2) \exp\left(-\frac{i\omega_0}{m} t\right), \omega_0$ —произвольная, $\chi' = a$.

Для основных характеристик получаем

$$mv_x = a^{-1}b \left(\cos \frac{\omega_0}{m} t \operatorname{sh} 2\gamma_2 - \sin \frac{\omega_0}{m} t \sin 2\gamma_1 \right) (\cos 2\gamma_1 + \operatorname{ch} 2\gamma_2)^{-1} -$$

$$- mb^{-1} \left(\dot{c}_1 \cos \frac{\omega_0}{m} t - \dot{c}_2 \sin \frac{\omega_0}{m} t \right) - \omega_0 y,$$

$$mv_y = a^{-1}b \left(\cos \frac{\omega_0}{m} t \sin 2\gamma_1 + \sin \frac{\omega_0}{m} t \operatorname{sh} 2\gamma_2 \right) (\cos 2\gamma_1 + \operatorname{ch} 2\gamma_2)^{-1} -$$

$$- mb^{-1} \left(\dot{c}_2 \cos \frac{\omega_0}{m} t + \dot{c}_1 \sin \frac{\omega_0}{m} t \right) + \omega_0 x,$$

$$mv_z = 2ax, \quad \gamma_1 = bx \cos \frac{\omega_0}{m} t + by \sin \frac{\omega_0}{m} t + c_1,$$

* Решения 1)–3) получаются из стационарных решений [3] добавлением к mv_x, mv_y произвольных функций времени [1].

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= by \cos \frac{\omega_0}{m} t - bx \sin \frac{\omega_0}{m} t + c_2, \quad \varphi = - (1/2mq) \left\{ \omega_0^2(x^2 + y^2) + b^2 a^{-2} (\text{ch} 2\gamma_2 - \right. \\ &\quad \left. - \cos 2\gamma_1) (\text{ch} 2\gamma_2 + \cos 2\gamma_1)^{-1} + 4a^2 x^2 + m^2 b^{-2} (\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2) \right\} + \\ &\quad + (m/bq) \left[(\dot{c}_1 x + \dot{c}_2 y) \cos \frac{\omega_0}{m} t + (\dot{c}_1 y - \dot{c}_2 x) \sin \frac{\omega_0}{m} t \right] - \dot{a}_1/q, \\ \rho &= (1/2\pi mq) \left[\omega_0^2 + 2a^2 + 4b^4 a^{-2} (\cos 2\gamma_1 + \text{ch} 2\gamma_2)^{-2} \right], \\ W &= a^{-1} \text{arctg}(\text{tg} \gamma_1 \text{th} \gamma_2) - mb^{-1} \left[(\dot{c}_1 x + \dot{c}_2 y) \cos \frac{\omega_0}{m} t + (c_1 y - \dot{c}_2 x) \sin \frac{\omega_0}{m} t \right] + a_1. \end{aligned}$$

Компоненты магнитного поля, как и выше, даются (4). Здесь $a_1 (\neq 0)$, a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , α_1 , γ — произвольные функции времени; α_0 , β_1 , a , b (отличные от нуля), a , β — произвольные постоянные; точка означает дифференцирование по t .

4. В случае отсутствия зависимости от времени уравнение (1) при $Q \neq 0$ имеет девять существенно различных решений, семь из которых рассмотрены в [3]. Укажем оставшиеся нерассмотренными в [3] два решения. При этом перейдем от координат s , s^* , z к координатам $f = \xi + i\eta$, $f^* = \xi - i\eta$, z .

$$1) Q = 1, \quad \omega_0 \neq 0, \quad d\chi/df = \alpha(1 + i\omega_0 f)^\beta, \quad f = s.$$

Основные характеристики и компоненты магнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned} mv_x &= r \cos \theta, \quad mv_y = r \sin \theta, \quad mv_z = [2a/\omega_0(1 + \beta)] r^{\beta+1} \sin(\beta + 1) \theta, \\ \varphi &= - (r^2/2mq) \left[1 + 4a^2 \omega_0^2 (1 + \beta)^{-2} r^{2\beta} \sin^2(\beta + 1) \theta \right], \quad \rho = (1/2\pi mq) (\omega_0^2 + 2a^2 r^{2\beta}), \\ H_x &= (2a c/q) r^\beta \sin \theta, \quad H_y = (2a c/q) r^\beta \cos \theta, \quad H_z = H_0, \\ r^2 &= (1 - \omega_0 y)^2 + \omega_0^2 x^2, \quad \theta = \text{arctg}[\omega_0 x / (1 - \omega_0 y)]. \end{aligned}$$

Траектории заряженных частиц даются уравнениями

$$\begin{aligned} 2ar^{\beta+1} \cos(1 + \beta)\theta + \omega_0^2(1 + \beta)^2 z &= \text{const}, \quad r = \text{const}, \quad \beta \neq -1, \\ a\theta^2 - \omega_0^2 z &= \text{const}, \quad r = \text{const}, \quad \beta = -1. \end{aligned}$$

$$2) Q^2 = a \sin 2bf, \quad d\chi/df = (b/\sqrt{2})(a \sin 2bf)^{1/2}, \quad \omega_0 = 0,$$

$$f = (1/2b) \arcsin \text{cn}^2(\sqrt{2}abs, 1/\sqrt{2}), \quad \text{cn} — \text{эллиптический косинус.}$$

Для основных характеристик и компонент магнитного поля имеем

$$\begin{aligned} mv_\xi &= \sqrt{a} (\text{ch}^2 2b\eta - \cos^2 2b\xi)^{1/4}, \quad v_\eta = 0, \quad mv_z = 2\text{Re} \chi, \\ \varphi &= - (1/2mq) [a (\text{ch}^2 2b\eta - \cos^2 2b\xi)^{1/2} + 4(\text{Re} \chi)^2], \quad \rho = (a^2 b^2 / 2\pi mq) \text{ch} 4b\eta, \\ H_\xi &= (\sqrt{2} abc/q) (\text{ch}^2 2b\eta - \cos^2 2b\xi)^{1/2} \sin(\theta/2), \quad \theta = \text{arctg}(\text{ctg} 2b\xi \text{th} 2b\eta), \\ H_\eta &= (\sqrt{2} abc/q) (\text{ch}^2 2b\eta - \cos^2 2b\xi)^{1/2} \cos(\theta/2), \quad H_z = H_0. \end{aligned}$$

Траектории заряженных частиц лежат на поверхностях $\text{Im} f(s) = \text{const}$. Рассматриваемый поток в отсутствие магнитного поля существовать не может

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Сыровой, ПМТФ, вып. 3, 56 (1965).
2. М. С. Pease, J. Appl. Phys., 31, № 1, 70 (1960).
3. С. Н. Огородников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1577 (1969).

Поступила в редакцию
26 августа 1970 г.,
после доработки
6 января 1972 г.

ОБ ОДНОМ СИНХРОНИЗМЕ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ГАРМОНИК СВЕРХКОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ СВЕТА

Г. В. Кривоцеков, Н. Г. Никулин, Р. И. Соколовский

Интерес к нестационарным явлениям при возбуждении второй гармоники обусловлен появлением оптических квантовых генераторов (ОКГ), генерирующих сверхкороткие импульсы. Динамика возбуждения второй гармоники одиночным сверхкоротким импульсом исследована достаточно подробно [1-6]. В настоящей работе изучается возбуждение второй гармоники периодической последовательностью сверхкоротких импульсов.

При достаточной длине кристалла импульсы второй гармоники, возбуждаемые соседними импульсами накачки, будут перекрываться. Из приведенных в работе [3] спектральных исследований возбуждения гармоники когерентный характер этого явления сразу не виден и более наглядно проявляется при изучении пространственно-временных характеристик второй гармоники.

Пусть на границу нелинейной недиссипативной среды нормально падает амплитудно-модулированная волна (импульс) с плоским фазовым фронтом. Направим ось z внутрь кристалла по нормали к границе. В приближении заданного поля процесс возбуждения второй гармоники описывается уравнением [7]

$$\frac{\partial A_2(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial A_2(z, t)}{\partial t} = -i \gamma A_1^2 \left(t - \frac{z}{u_1} \right) e^{-i \Delta k z}. \quad (1)$$

Здесь индексы 1, 2 относятся к накачке и второй гармонике соответственно; $A_{1,2}$ — медленные комплексные амплитуды; $u_{1,2}$ — групповые скорости; $\Delta k = 2k_1 - k_2$ — расстройка волновых векторов взаимодействующих волн; $\gamma = \frac{2\pi(2\omega)^2}{k_2} e_2 \chi : e_1 e_1$ — нелинейная константа; $e_{1,2}$ — векторы поляризации. Из уравнения (1) находим амплитуду гармоники [6]

$$A_2(z, t) = -i \frac{\gamma}{v} \int_{t-z/u_2}^{t-z/u_1} A_1^2(\tau') \exp \left[i \omega_p \left(t - \tau' - \frac{z}{u_2} \right) \right] d\tau', \quad (2)$$

где $\omega_p = \Delta k/v$, величина $v = 1/u_2 - 1/u_1$ характеризует расстройку групповых скоростей.

Предположим теперь, что накачка представляет собой импульс длительностью $\tau \ll T$, где $T = 2\pi/\omega_p$ — период осцилляций амплитуды второй гармоники, и рассмотрим зависимость от времени амплитуды второй гармоники $A_2(z, t)$ в точке z , удаленной от границы настолько, чтобы $z(1/u_2 - 1/u_1) \equiv v z \gg T$. Так как время действия накачки $\tau \ll T$, то экспоненту под знаком интеграла в формуле (2) можно положить равной единице. На отрезке времени $\frac{z}{u_1} < t < \frac{z}{u_2}$ величина $A_2(z, t)$ будет колебаться с частотой ω_p , амплитуда колебаний $A_2(z, t)$ пропорциональна полной энергии импульса накачки:

$$A_2(z, t) = -i \frac{\gamma}{v} \exp \left[i \omega_p \left(t - \frac{z}{u_2} \right) \right] \int_0^{\tau} A_1^2(\tau') d\tau'. \quad (3)$$

Представим накачку последовательностью сверхкоротких импульсов. Каждый импульс накачки возбуждает импульс второй гармоники, который состоит из $N = v z/T$ колебаний с частотой ω_p (цуг). Передние фронты возбуждаемых импульсов гармоники следуют за передними фронтами импульсов накачки. Следовательно, они отстают по времени друг от друга на величину периода повторения импульсов накачки T_n . С ростом z длительность импульсов гармоники увеличивается, и импульсы гармоники (цуги), возбуждаемые соседними импульсами накачки, начинают накладываться друг на друга. Как видно из формулы (3), при $T_n = jT$ ($j = 1, 2, \dots$) цуги гармоник от различных импульсов накачки будут в фазе, и поле гармоники начнет расти линейно с z . Это явление естественно назвать «цуговым синхронизмом».

Проиллюстрируем вышеизложенные рассуждения количественным расчетом. Представим квадрат амплитуды накачки в виде следующего ряда:

$$A_2^2(t) = A_0^2 \tau \sum_{j=0}^m \delta(t - jT_n), \quad (4)$$

где T_n — период повторения импульсов накачки, τ — длительность единичного импульса. Подставляя ряд (4) в уравнение (2), найдем квадрат модуля амплитуды поля второй гармоники

$$|A_2(z, t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\nu^2} \tau^2 A_0^4 \frac{\sin^2(\omega_p/2)(m+1)T_n}{\sin^2(\omega_p/2)T_n}, \quad (5)$$

где $m = \nu z/T_n$. Максимальные значения амплитуды соответствуют нулям знаменателя (5) и периодам повторения $T_n = jT$ ($j = 1, 2, \dots$). Ширина «цугового синхронизма», очевидно, определяется условием обращения в нуль числителя в формуле (5). После несложных выкладок находим, что $\delta T_n \sim \pi jT/\Delta k z$.

Особенности возбуждения второй гармоники последовательностью коротких импульсов позволяют получить линейный рост амплитуды гармоники с длиной нелинейной среды. Для этого необходимо, чтобы отношение периода T модуляции к периоду световой волны было много больше единицы $\left(\frac{\omega}{\Delta n} \frac{\partial n}{\partial \omega} \gg 1\right)$ и на длине цуга укладывалось

достаточно много колебаний $\left(N = \frac{\nu z}{T} \gg 1\right)$. Отсюда следует, что либо среда должна обладать большой частотной дисперсией, либо разница между показателями преломления $\Delta n = n(2\omega) - n(\omega)$ должна быть достаточно мала. У кристалла LiNbO_3 частотная дисперсия $\omega \frac{dn}{d\omega} \sim 10^{-1}$ [8]. Для $\Delta n = 10^{-4}$ период осцилляций $T = 10^{-12}$ сек, и при длине кристалла $z = 5$ см $N = 10$.

Явление фазовой модуляции накладывает ограничение на длину когерентно складывающихся цугов. Из работы [9] известно, что за длительность τ импульса частота уходит на величину, приблизительно равную его спектральной ширине. Следовательно, при $\tau/T = 10$ последние колебания у цугов с $N \sim 10$ оказываются несфазированными. Это говорит о том, что в случае, когда есть частотная модуляция, достичь более чем десятикратного усиления довольно сложно.

Авторы выражают глубокую признательность С. А. Ахманову за полезные критические замечания

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Comly, E. Garmire, Appl. Phys. Lett., 12, 7 (1968).
2. S. L. Shapiro, Appl. Phys. Lett., 13, 19 (1968).
3. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 55, 1430 (1968).
4. Р. Ю. Орлов, Т. Усманов, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 57, 1069 (1969).
5. W. H. Glenn, IEEE, J. of Quant. Electron., QE-5, 284 (1969).
6. В. В. Бакланова, А. С. Чиркин, ЖПС, 7, 202 (1967).
7. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
8. G. D. Boyd, W. L. Bond, H. L. Carter, J. Appl. Phys., 38, 1941 (1967).
9. E. V. Treacy, Appl. Phys. Lett., 17, 14 (1970).

Институт физики полупроводников
СО АН СССР

Поступила в редакцию
2 апреля 1971 г.

УДК 539.285

«МЕДЛЕННЫЕ БИЕНИЯ» В ДВУХЧАСТОТНОМ СПИНОВОМ ЭХО

А. Д. Гордеев, В. С. Гречишкин, Е. М. Шишкин

Двухчастотное спиновое эхо в ядерном квадрупольном резонансе возникает при одновременном возбуждении двух соседних переходов, например, переходов $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ (частота ν_1) и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ (частота ν_2) в случае ядерного спина $5/2$ [1, 2].

В одночастотном эхо было исследовано явление «медленных биений», возникающее при изменении интервала времени между первым и вторым импульсами, когда

амплитуда спинового эха при наложении слабого магнитного поля спадает не по экспоненте, а испытывает периодические осцилляции [3, 4]. Возникновение этих осцилляций при наложении внешнего магнитного поля H_0 связано со смешиванием состояний $|+1/2\rangle$ и $|-1/2\rangle$. Как было показано в работе [4], наложение внешнего поля H_0 при параметре асимметрии $\eta = 0$ приводит к «медленным биениям» в одночастотном случае лишь для перехода $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$.

Положение качественно изменяется в случае двухчастотного эха. Мы выбрали в качестве объекта исследования кристалл CdI_2 (резонанс ядер I^{127}).

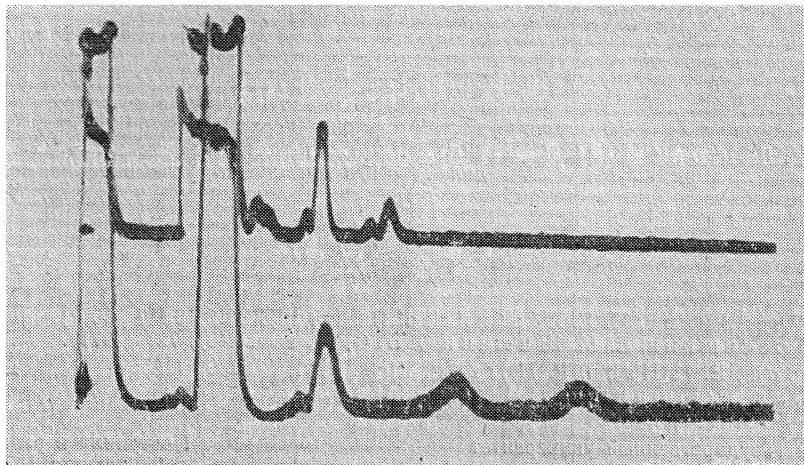


Рис. 1. Картина двухчастотных эхо в CdI_2 при $77^\circ K$ на ядрах I^{127} . Одновременное возбуждение переходов $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ (верхний луч) на частоте $\nu_2 = 29,4$ Мгц и $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2$ (нижний луч) на частоте $\nu_1 = 14,7$ Мгц.

Картина двухчастотных эхо приведена на рис. 1. В этом кристалле $\eta = 0$, поэтому сигналы двухчастотного эха наблюдаются в моменты времени $t = 2\tau$, $3/2\tau$, $5/2\tau$, 3τ и 4τ , где τ — интервал времени между импульсами. Если теперь наложить внешнее магнитное поле H_0 , то на частоте ν_1 все сигналы эха (в моменты времени $t = 2\tau$, 3τ и 4τ) испытывают «медленные биения», тогда как на частоте ν_2 сигнал эха при $t = 2\tau$ не дает «медленных биений», а сигналы эха при $t = 3/2\tau$ и $5/2\tau$ обнаруживают периодические осцилляции (см. рис. 2).

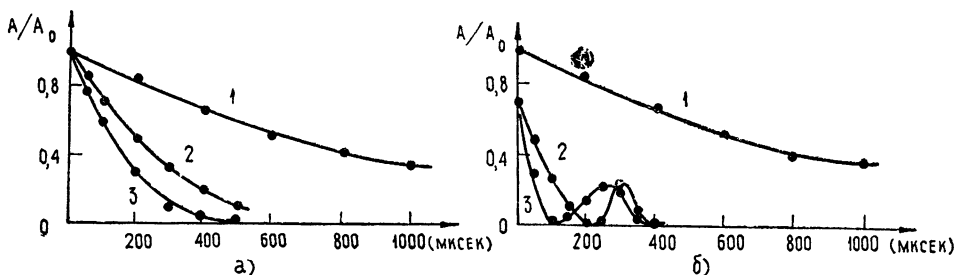


Рис. 2. Зависимость спин-спиновой релаксации от времени на переходе $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2$ ($\nu_2 = 29,4$ Мгц) от ядер I^{127} в CdI_2 при $77^\circ K$;

1—для основного эха в момент $t = 2\tau$; 2—для дополнительного сигнала в $t = 2,5\tau$; 3—для эха при $t = 1,5\tau$, где τ — расстояние между импульсами; а) без поля ($H_0 = 0$); б) с внешним магнитным полем ($H_0 \sim 10$ эрст).

В последнем случае помимо уменьшения амплитуд двухчастотных эхо видна картина «медленных биений».

Обнаруженный эффект находит себе четкое объяснение. Сигнал основного эха на частоте ν_2 при $t = 2\tau$ в случае $\eta = 0$ возникает от несмешанных состояний $|\pm 3/2\rangle$ и $|\pm 5/2\rangle$, поэтому он не обнаруживает «медленных биений». Все же остальные сигнала

лы двухчастотного эха включают и смешанные состояния $|\pm 1/2\rangle$, поскольку дополнительные сигналы эха возникают в моменты времени

$$\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\tau; \left(2 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\tau; \left(1 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\tau \text{ и } \left(2 + \frac{\nu_2}{\nu_1}\right)\tau.$$

Если $\eta \neq 0$ (например, в BiCl_3), то все состояния будут смешанными, поэтому в этом случае «медленные биения» наблюдались для всех сигналов двухчастотного спинового эха.

Теоретические расчеты, выполненные методом Даса и Сахи [4] в энергетическом представлении, полностью подтверждают экспериментальные результаты.

Тот факт, что все дополнительные сигналы эха являются «смешанными», приводит к различному воздействию внутренних локальных магнитных полей на основные и дополнительные сигналы. При $\eta = 0$ в CdI_2 время поперечной релаксации для сигнала эха в момент $t = 2\tau$ на частоте ν_2 при 77°K было равно 1,2 мсек, а на частоте ν_1 для основного сигнала $T_2 = 350$ мсек. С другой стороны, дополнительные сигналы эха на частоте ν_1 имели $T_2 = 150$ мсек. На частоте ν_2 эхо в момент времени $t = 1,5\tau$ имело $T_2 = 170$ мсек, а сигнал в $t = 2,5\tau$ дал $T_2 = 270$ мсек. Это указывает на возможность использования двухчастотных эхо для изучения распределения электрических и магнитных полей в кристаллах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гречишкин, Н. Е. Айнбиндер, Письма в ЖЭТФ, 5, 87 (1967).
2. В. С. Гречишкин, Е. М. Шишкин, ЖЭТФ, 61, вып. 2(8), 727 (1971).
3. M. Bloom, E. L. Hahn, R. Herzog, Phys. Rev., 97, 1699 (1955).
4. T. P. Das, A. K. Saha, Phys. Rev., 98, 516 (1955).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
23 августа 1971 г.

УДК 621.371.332.1

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ В ФОКУСИРОВАННОМ СВЕТОВОМ ПУЧКЕ, ПРОШЕДШЕМ ЧЕРЕЗ ТОЛЩУ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЫ

В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык

Целью данной работы было экспериментальное исследование флуктуаций интенсивности в фокусе пучка как на оси оптической системы, так и в случайно блуждающем пучке и применимости результатов расчета [1] к описанию флуктуаций в фокусированном пучке.

Измерения флуктуаций интенсивности в фокусированном световом пучке проводились двумя методами на трассах от 20 м до 1360 м, которые проходили над весьма ровным участком местности, и на трассе 3,5 км над пересеченной местностью. Средняя высота луча над подстилающей поверхностью равнялась 1,5 и 30 м. В качестве источника излучения использовались лазеры ЛГ-35М с длиной волны излучения $\lambda = 0,63$ мк, рубиновый одномодовый лазер и зеркальная телескопическая система с максимальным диаметром 260 мм и кружком рассеяния, близким к дифракционному.

Первый метод заключался в измерении флуктуаций интенсивности излучения на оси оптической системы в фокусе с помощью приемника с малым входным отверстием. Приемником служил фотоумножитель ФЭУ-28 с набором диафрагм, размеры которых были в 5 раз меньше, чем $\lambda L/a$. Модулированный частотой 5500 гц сигнал с ФЭУ-28 подавался на селективный усилитель, затем детектировался и обрабатывался с помощью аналоговой машины МН-7. Величина дисперсии флуктуаций интенсивности $\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1$ определялась как среднеарифметическое из 10 измерений

дисперсии, выполненных последовательно и полученных из реализаций длительностью 50 сек.

Второй метод измерения флуктуаций логарифма интенсивности в фокусе заключался в фотографировании пучка с выдержкой 0,01 сек. Такое фотографирование непрерывного фокусированного излучения в плоскости фокуса дополнялось фоторегист-

рацией фокусированного излучения импульсного одномодового рубинового лазера с той же геометрией, продолжительность импульса которого равна 0,001 сек. В обоих случаях время экспозиции не превышало времени, за которое пучок смещается на 0,1 экспериментального радиуса корреляции флуктуаций логарифма интенсивности ρ_0 . Ширина фотоматериалов равнялась 30—40; все измерения выполнены в пределах прямолинейного участка характеристической кривой фотоматериала. На полученных негативах делались фотометрические разрезы длиной не менее 300 ÷ 400 ρ_0 , величина которых оказалась близкой к величине $\lambda L/a$. Это обстоятельство иллюстрируется данными измерений радиусов корреляции флуктуаций интенсивности, показанных на рис. 1. Рассчитанная на ЭВМ по данным фотометрирования дисперсия флуктуаций логарифма интенсивности практически не зависела от случайных блужданий пучка в фокальной плоскости.

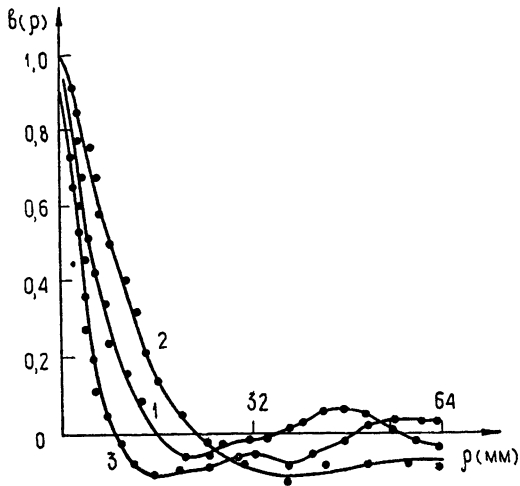


Рис. 1. Корреляционные функции флуктуаций интенсивности в фокусированном пучке (1 — $L = 1,2$ км, $d_{\text{перед}} = 16$ см; 2 — $L = 3,5$ км, $d_{\text{перед}} = 23$ см; 3 — $L = 1,2$ км, $d_{\text{перед}} = 23$ см).

Одновременно с оптическими измерениями на трассе определялась структурная постоянная флуктуаций температуры C_T^2 , которая затем использовалась для расчета структурной постоянной флуктуаций показателя преломления C_n^2 . Использовались две методики измерений C_T^2 — описанная в [2] и заключающаяся в измерении средних значений и градиентов температуры и скорости ветра и разработанная в Институте физики атмосферы методика измерений спектральной плотности мощности флуктуаций температуры с помощью микротермометра.

Обе методики дали близкие результаты. По измерениям C_n^2 , эффективным размерам пучка на выходе системы и величинам дистанций распространения рассчитывались значения структурной функции флуктуаций фазы D_s :

$$D_s(\rho) = \frac{3}{8} 2,91 C_n^2 L k^2 \rho^{5/3}.$$

Здесь L — дистанция распространения, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны, ρ — эффективный размер пучка на выходе системы.

Результаты измерений дисперсии флуктуаций интенсивности на оси системы показаны на рис. 2. Непрерывная кривая — расчет Гочелашвили [1]. Из рисунка видно, что экспериментальные точки в области малых D_s значительно выше расчетной кривой и резкое уменьшение среднего квадрата флуктуаций интенсивности достигается при значениях $D_s < 1$.

На рис. 3 приведены результаты измерений флуктуаций логарифма интенсивности в случайно блуждающем фокусированном пучке вторым методом. Видно, что уровень флуктуаций здесь значительно меньше, чем уровень флуктуаций логарифма интенсив-

ности, измеренный в [3]. Результаты этого эксперимента являются прямым доказательством предположения о значительном влиянии случайных блужданий сфокусированного пучка на дисперсию флуктуаций интенсивности, сделанного в [4, 5].

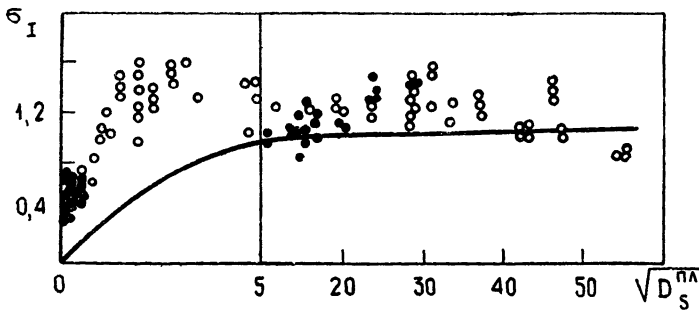


Рис. 2. Сравнение экспериментально измеренных флуктуаций интенсивности в фокусе и расчетных данных [7].

●●● — $Q = 5 \div 10$, ○○○ — $Q > 10$.

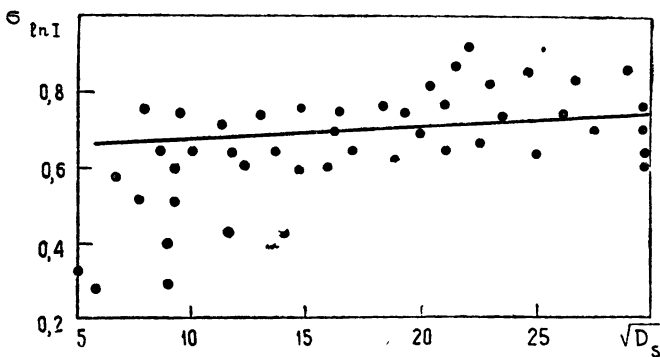


Рис. 3. Результаты измерения флуктуаций логарифма интенсивности в случайно блуждающем фокальном пятне фотографическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 592 (1971).
2. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 886 (1961).
3. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец, Радиотехника и электроника, № 6, 1290 (1970).
4. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Тезисы доклада на I Всесоюзной конференции по передаче информации лазерным излучением, г. Киев, 1968.
5. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 149 (1969).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
10 мая 1971 г.