

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Кротиков В. Д., Шуко О. Б. Об интегральном радиоизлучении Марса во время противостояния 1971 г.	487
Жмур Л. Е. К вопросу о распределении примесных ионов в области F ионосферы	490
Котик Д. С. К теории неустойчивости в ионосферной токовой струе	497
Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А., Комраков Г. П. Некоторые статистические характеристики сигналов, частично отраженных от D -области ионосферы	504
Ершов А. Т., Наумов А. П., Плечков В. М. Определение вертикального профиля влажности по наземным радиотеплокационным измерениям атмосферного поглощения	510
Крупина А. Е. О влиянии соударений на распространение плазменных волн вблизи гармоник электронной гирочастоты	517
Богданов Е. П., Орлов Л. К., Романов Ю. А. Неустойчивость пространственно-разделенных плазменных пучков III	521
Беспалова М. П., Мишаков Г. А., Пихтелев А. И., Фатеев Б. П., Ульянов А. А., О температурном коэффициенте частоты квантовой ячейки с парами Rb^{87}	528
Кон А. И. Корреляция смещений пространственно-ограниченных световых пучков в турбулентной среде	533
Кляцкин В. И. Об амплитудно-фазовых флуктуациях плоской световой волны в турбулентной среде	540
Каллистратова М. А., Кон А. И. О влиянии размера оптических систем на формирование световых пучков в турбулентной атмосфере	545
Синицын В. Г. О статистических моментах волнового поля при наличии каустик	550
Малахов А. Н., Солин Н. Н., Фабрикант А. Л. Об оптимальных параметрах автогенераторов	557
Музычук О. В., Шепелевич Л. Г. Стабильность частоты одноконтурных параметрических систем	562
Берштейн И. Л., Маркелов В. А. Об исследовании медленных флуктуаций частоты	573
Островский Л. А., Папко В. В., Пелиновский Е. Н. Уединенные электромагнитные волны в нелинейных линиях	580
Бродский Ю. Я., Кондратьев И. Г., Миллер М. А. Электромагнитные пучки в анизотропных средах. II	592
Введенский В. Н., Черняев Е. Н., Крылов И. С., Романов С. И. О преобразовании параметров Стокса при обратном рассеянии электромагнитных волн	601
Эпштейн Э. М. О нелинейной высокочастотной проводимости полупроводниковой пленки	611
Ванке В. А., Тимофеев Ю. М. О насыщении усиления в усилителе циклотронно-синхронных волн	615
Романов П. В., Рошаль А. С., Янкевич П. Ш. Статистическое моделирование стационарных режимов цилиндрического магнетрона	625
Ткаченко В. М., Тютюнник В. Б. К вопросу о роли фотоэмиссии в механизме разряда с полым катодом	631
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Эйдман В. Я. О сверхсветовом синхротронном излучении в вакууме	634
Толмачев М. М., Цейтлин М. Б. О преобразовании объемных и поверхностных волн в плазменных системах	635
Корнев И. Л., Юдин Л. А. Резистивная неустойчивость электронных колец в волноводе	637
Малевиц В. Л., Эпштейн Э. М. Об усилении ультразвука в присутствии электромагнитной волны	640

УДК 523 164 3

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ РАДИОИЗЛУЧЕНИИ МАРСА
ВО ВРЕМЯ ПРОТИВОСТОЯНИЯ 1971 г.**

В. Д. Кротиков, О. Б. Шуко

Приведены результаты расчетов интегрального радиоизлучения Марса для противостояния 1971 года. Показано, что для определения электрических свойств марсианского грунта целесообразно проведение одновременных измерений интегральной радиотемпературы на двух волнах.

При радиоастрономических исследованиях Марса с Земли, ввиду малости его видимых угловых размеров, принимаемое радиоизлучение является интегральным. Спектр этого радиоизлучения определяется тепловым режимом и электрическими свойствами верхнего покрова [1]. В данном сообщении для противостояния 1971 г. устанавливается связь интегральной радиотемпературы Марса с электрическими свойствами его верхнего покрова*.

Эффективная температура участка поверхности с координатами (φ, ψ) на видимой полусфере Марса $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ может быть представлена следующим образом [2]:

$$T_e(t; \varphi, \psi; \lambda) = \int_0^{\infty} [1 - R(\varphi, \psi)] T(y, t; \varphi, \psi) \kappa(\lambda) \sec \rho' e^{-y\kappa(\lambda) \sec \rho'} dy, \quad (1)$$

где $R(\varphi, \psi)$ — коэффициент отражения Френеля, $T(y, t; \varphi, \psi)$ — температура на глубине y , $\kappa(\lambda)$ — коэффициент поглощения, ρ' — угол падения излучения на границу раздела, связанный с углом наблюдения ρ соотношением

$$\cos \rho' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\epsilon - \sin^2 \rho}.$$

Для нахождения интегральной радиотемпературы соотношение (1) интегрировалось по видимой полусфере Марса:

$$T_e(t; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)] \int_0^{\infty} T(y, t; \varphi, \psi) \kappa(\lambda) \sec \rho' e^{-y\kappa(\lambda) \sec \rho'} \times \\ \times dy \cos^2 \psi \cos \varphi d\psi d\varphi. \quad (2)$$

При расчетах $T(y, t; \varphi, \psi)$ было использовано распределение температуры $T(y, t; \varphi^*, \psi^*)$ в ареографической системе координат (φ^*, ψ^*) , связанной с экватором и полуденным меридианом. Это распределение получено на основе результатов расчета теплового режима верхнего покрова Марса [3], а переход к $T(y, t; \varphi, \psi)$ осуществлен с помощью

* Тепловые и электрические свойства марсианского грунта предполагаются не зависящими от глубины и температуры.

соответствующего преобразования координат $(\varphi, \psi) \rightarrow (\varphi^*, \psi^*)$. При этом широта подземной точки ψ^* равна склонению Земли на небе Марса, $\psi^* = D_M$. Значение $\gamma = (k \rho c)^{-1/2}$ было принято равным 200 [4],

$$R(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(R_v(\varphi, \psi) + R_h(\varphi, \psi))$$

— среднеарифметическое коэффициентов отражения для вертикальной и горизонтальной поляризаций [2]. Считая, что вещество верхнего покрова Марса образовано силикатными породами, по аналогии с Луной имеем $\delta_1 = m \lambda$ и, следовательно, $\alpha(\lambda) = \frac{1}{m \lambda L_T}$ [1, 5].

На рис. 1 для $\epsilon = 1; 1,5; 2; 3; 4; 5$ представлены зависимости интегральной радиотемпературы $\bar{T}_e(\epsilon, \delta_1)$ от параметра δ_1 . Из рис. 1 следует, что для любого δ_1 интегральная радиотемпература Марса

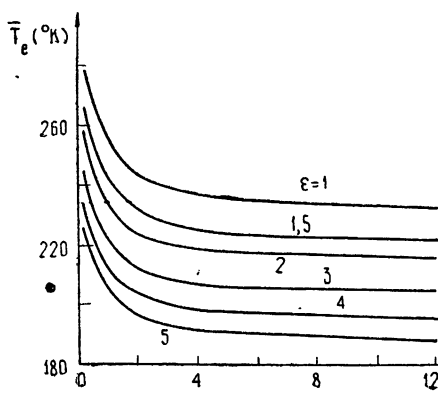


Рис. 1.

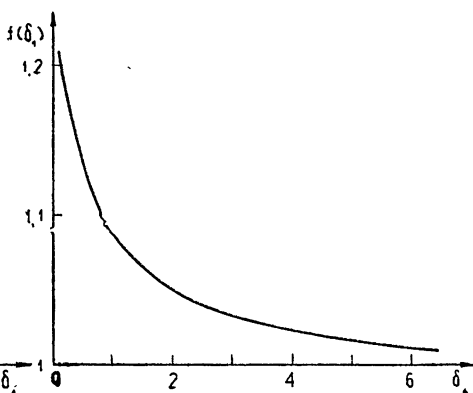


Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость интегральной радиотемпературы Марса от параметра δ_1 при различных значениях диэлектрической постоянной ϵ

Рис. 2. Зависимость отношения $\bar{T}_e(\epsilon, \delta_1)/\bar{T}_e(1)$ от параметра δ_1 .

$\bar{T}_e(\epsilon, \delta_1)$, рассчитанная для какого-либо значения ϵ , может быть выражена через его интегральную радиотемпературу $\bar{T}_e(1, \delta_1)$, полученную в предположении, что $\epsilon = 1$:

$$\bar{T}_e(\epsilon, \delta_1) = (1 - R_{\perp}(\epsilon)) \alpha(\epsilon) \bar{T}_e(1, \delta_1), \quad (3)$$

где $\alpha(\epsilon) = (1 - \bar{R}(\epsilon))/(1 - R_{\perp}(\epsilon))$; $1 - \bar{R}(\epsilon)$ — среднесферическая излучательная способность; $1 - R_{\perp}(\epsilon)$ — излучательная способность при нормальном падении. Зависимость $\alpha(\epsilon)$ приведена в [6].

Как следует из проведенных расчетов, результаты которых представлены на рис. 1, для $\delta_1 > 6$ интегральная радиотемпература Марса практически не зависит от δ_1 и определяется лишь величиной диэлектрической проницаемости вещества верхнего покрова планеты (т. е. для $\delta_1 > 6$, $\bar{T}_e(\epsilon, \delta_1) = \bar{T}_e(1, \delta_1)$). Это обстоятельство и возможность представления $\bar{T}_e(\epsilon, \delta_1)$ в виде (3) свидетельствуют о целесообразности определения коэффициента m по величине отношения интегральных температур, измеренных одновременно на двух разнесенных волнах (например, на волнах миллиметрового и сантиметрового диапазонов). Величина этого отношения, как следует из (3), зависит только от значения $\delta_1 = m \lambda$, соответствующего более короткой волне ($\delta_1 < 6$).

Зависимость $f(\delta_1) = \frac{\overline{T_e(\epsilon, \delta_1)}}{\overline{T_{e0}(\epsilon)}} = \frac{\overline{T_e(1, \delta_1)}}{\overline{T_{e0}(1)}}$ приведена на рис. 2.

Используя графики, представленные на рис. 1 и 2, можно построить спектр величин $\overline{T_e(\epsilon, \lambda)}$ и $f(\lambda)$ для различных m и обобщить полученные результаты на случай, когда на более длинной волне $\overline{T_e(\epsilon, \delta_1)}$ нельзя считать не зависящей от δ_1 .

В заключение приносим благодарность В. С. Троицкому за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. С. Троицкий, Астрон. ж., 47, 384 (1970)
- 2 В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954)
- 3 В. Д. Кротиков, О. Б. Шучко, Астрон. ж., 49, 165 (1972).
- 4 W. M. Sinton, J. Strong, Astrophys. J., 131, 470 (1960).
- 5 Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Я. Лосовский, Астрон. вестн., 4, 231 (1970).
- 6 В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, 1089 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
9 сентября 1971 г.

THE INTEGRAL RADIATION OF MARS DURING OPPOSITION 1971

V. D. Krotikov, O. B. Shchuko

The results of calculating the integral Martian radiation for the oppositions 1971 are given. It is shown that to determine the electrical properties of the Martian soil (ground), it is necessary to measure the integral radio-temperature simultaneously at two waves.

УДК 551 510.535

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРИМЕСНЫХ ИОНОВ В ОБЛАСТИ F ИОНОСФЕРЫ

Л. Е. Жмур

В стационарном случае рассматривается одномерная неизотермическая диффузия в ионосферной плазме (область F). Анализ проводится для двух сортов положительных ионов с учетом процессов ионизации и рекомбинации и влияния силы тяжести

Для концентраций электронов и ионов получена система двух связанных уравнений. Сделан переход к случаю, когда ионы, определяющие диссоциативную рекомбинацию, являются примесными. Для этого случая приведены критерии, при выполнении которых найденное распределение совпадает с полученным Менгом [9] без учета фотохимических процессов

1. Хорошо известно, что, начиная с высот в районе максимума слоя F , существенную роль для распределения заряженных частиц начинает играть амбиполярная диффузия. Во многих работах (см., например, [1-6]) приведены расчеты стационарных высотных профилей для электронов и ионов при учете как диффузии, так и фотохимических процессов. Однако в большинстве такого рода исследований использовались упрощенные представления об ионном составе (рассматривается один сорт положительных ионов). Исключение составляют несколько работ [7-9], на содержании которых мы кратко остановимся.

В [7] решена задача о распределении ионов O^+ и N^+ без учета ионизации и рекомбинации. При этом сделан акцент на довольно большие высоты (выше 800 км). В [8] анализируются уравнения баланса ионизации с учетом диффузии для неизотермической ионосферы, содержащей два сорта положительных ионов. Показано, что распределение концентраций электронов и ионов определяется двумя уравнениями диффузии. Однако в [8] выбрана упрощенная схема фотохимических процессов.

В известном исследовании [9] рассмотрена многокомпонентная плазма в верхней атмосфере в пренебрежении столкновениями и фотохимическими процессами. В стационарном случае найдено распределение для примесных ионов (ионов с малой концентрацией).

Главной целью настоящей работы будет установление условий применимости простого подхода, данного в [9]. Для этого будут учтены процессы ионизации, рекомбинации, а также столкновения заряженных частиц с нейтральными. Электронно-ионные соударения не принимаются во внимание, так как они не влияют на движения электронов и ионов вдоль геомагнитного поля H_0 (вклад поперечных движений в процессы переноса для области F малосуществен). Междуюнные столкновения в рассматриваемом нами районе ($z \approx 300 \div 700$ км) в соответствии с [9] не должны играть определяющей роли. Для простоты ограничимся положительными ионами двух сортов.

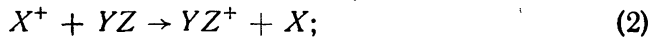
Ниже в разд. 2 будет получена система двух связанных уравнений, которые вместе с условием квазинейтральности определяют концентра-

ции электронов N_e и двух сортов ионов N_1 и N_2 . В разд. 3 осуществим переход к случаю, когда один сорт ионов с концентрацией N_2 является примесным. На основе анализа приближенного решения этой системы установим условие применимости схемы [9]. Покажем, что это условие выполняется выше максимума области F , где вклад диффузии оказывается преобладающим по сравнению с некоторыми фотохимическими процессами.

2. При исследовании вопросов об ионном составе области F в качестве основных фотохимических процессов будем рассматривать реакцию фотоионизации атома X :



а также реакции ионно-молекулярного обмена и диссоциативной рекомбинации:



При дальнейших расчетах следует иметь в виду, что в процессах (1)—(3) примесный ион играет определяющую роль при диссоциативной рекомбинации. Поэтому эти реакции наиболее обоснованно применять для ионов O_2^+ или NO^+ (примесный ион) и O^+ . Случай, когда примесные ионы (например, ионы H^+) не участвуют в диссоциативной рекомбинации, мы детально рассматривать не будем, а приведем ниже только основные результаты.

Уравнения баланса для реакций (1)—(3) в одномерном случае имеют вид

$$\frac{d(N_e u_{ez})}{dz} = q - \alpha N_2 N_e; \quad (4)$$

$$\frac{d(N_1 u_{1z})}{dz} = q - \gamma N_{2n} N_1 = q - \beta N_1; \quad (5)$$

$$\frac{d(N_2 u_{2z})}{dz} = \beta N_1 - \alpha N_2 N_e. \quad (6)$$

Здесь q — скорость ионизации, u_{ez} , u_{1z} , u_{2z} — проекции скоростей электронов и ионов сорта 1 и 2 вдоль оси z (ось z совпадает с вертикалью), N_{2n} — концентрация молекулярной составляющей нейтрального газа, α — коэффициент диссоциативной рекомбинации, $\beta = \gamma N_{2n}$ — линейный коэффициент рекомбинации, γ — скорость реакции ионно-молекулярного обмена (2).

Проектируя уравнения движения для электронов и ионов на ось z , в пренебрежении вязкими и инерционными членами имеем

$$-\frac{e}{m} E_z - \frac{e}{mc} [u_e H_0]_z - \frac{xT_e}{m} \frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{dz} - g - \nu_{em} u_{ez} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{e}{M_1} E_z + \frac{e}{M_1 c} [u_1 H_0]_z - \frac{xT}{M_1} \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dz} - g - \nu_1 u_{1z} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{e}{M_2} E_z + \frac{e}{M_2 c} [u_2 H_0]_z - \frac{xT}{M_2} \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dz} - g - \nu_2 u_{2z} = 0, \quad (9)$$

где m , M_1 , M_2 — массы электрона и положительных ионов сорта 1 и 2, χ — постоянная Больцмана, T_e и T — температуры электронов и ионов, H_0 — внешнее магнитное поле, E — электрическое поле, e — абсолютная величина заряда электрона, c — скорость света, g — ускорение силы тяжести, ν_{em} , ν_1 , ν_2 — частоты соударений электронов и ионов сорта 1 и 2 с молекулами.

Выразим из (7) — (9) $N_e u_{ez}$, $N_1 u_{1z}$, $N_2 u_{2z}$ и подставим значения этих величин в соответствующие уравнения непрерывности (4) — (6). Тогда получаем систему трех уравнений для N_e , N_1 и N_2 , содержащую также неизвестную компоненту E_z . Для ее исключения можно воспользоваться условием $N_e u_{ez} - N_1 u_{1z} - N_2 u_{2z} = A$, которое вытекает из (4) — (6). При этом следует принять постоянную A равной нулю, так как на нижней границе ионосферы $N_e = N_1 = N_2 = 0$. После исключения электростатического поля с учетом условия квазинейтральности $N_1 + N_2 = N_e$ приходим к следующей системе уравнений для переменных N_e и N_2 :

$$\begin{aligned}
 & [-N_e^2 \chi (T_e + T) + N_e N_2 \chi T_e] \frac{d^2 N_e}{dz^2} + N_e^2 \chi T \frac{d^2 N_2}{dz^2} + \\
 & + \left[-N_e^2 \chi (T_e + T) \frac{1}{H_m} + N_e N_2 \chi T_e \frac{1}{H_m} - N_e N_2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_1} + \right. \\
 & + N_2^2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_1} - N_e N_2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_2} + N_e^2 g M_1 \left. \right] \frac{dN_e}{dz} + N_e \chi T_e \frac{dN_e}{dz} \frac{dN_2}{dz} + \\
 & + \left(2N_e N_2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_2} - N_2^2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_2} + N_e^2 \chi T \frac{1}{H_m} + N_e^2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_1} - \right. \quad (10) \\
 & - N_e N_2 \frac{g m \nu_{em}}{\nu_1} - N_e^2 g M_1 \left. \right) \frac{dN_2}{dz} + \left(-\chi T_e \left(\frac{dN_e}{dz} \right)^2 - N_e^2 g M_1 \frac{1}{H_m} \right) N_2 + \\
 & + N_e^3 g M_1 \frac{1}{H_m} = \frac{q [m \nu_{em} N_e (N_e - N_2) + M_1 \nu_1 N_e^2]}{\cos^2 \alpha_0} - \\
 & - \frac{\beta (N_e - N_2) N_e^2 M_1 \nu_1}{\cos^2 \alpha_0} + \frac{\alpha m \nu_{em} N_e^2 N_2 (N_2 - N_e)}{\cos^2 \alpha_0}; \\
 & N_e^2 \chi T \frac{d^2 N_2}{dz^2} - N_e N_2 \chi T \frac{d^2 N_e}{dz^2} + N_e \chi T_e \frac{dN_e}{dz} \frac{dN_2}{dz} + \\
 & + \left(-N_e N_2 \chi T \frac{1}{H_m} + N_e N_2 g M_1 \right) \frac{dN_e}{dz} + \left(N_e^2 \chi T \frac{1}{H_m} - N_e^2 g M_2 + N_e N_2 g M_2 - \right. \\
 & - N_e N_2 g M_1 \left. \right) \frac{dN_2}{dz} + \left(-N_e^2 g M_2 \frac{1}{H_m} + N_e N_2 g M_2 \frac{1}{H_m} - \chi T_e \left(\frac{dN_e}{dz} \right)^2 + \right. \quad (11) \\
 & + N_e^2 g M_1 \frac{1}{H_m} - N_e N_2 g M_1 \frac{1}{H_m} \left. \right) N_2 = \frac{q M_1 \nu_1 N_e N_2}{\cos^2 \alpha_0} - \\
 & - \frac{\beta N_e (N_e - N_2) [M_1 \nu_1 N_2 + (N_e - N_2) M_2 \nu_2]}{\cos^2 \alpha_0} + \frac{\alpha M_2 \nu_2 N_e^2 N_2 (N_e - N_2)}{\cos^2 \alpha_0}.
 \end{aligned}$$

Уравнения (10), (11) получены с точностью до членов порядка m/M .

Учтено, что $\frac{1}{v_{em, 1,2}} \frac{d v_{em, 1,2}}{dz} \approx -\frac{1}{H_m}$, где H_m — высота однородной атмосферы для нейтрального газа ($H_m = \kappa T / M g$, M — масса молекулы), α_0 — угол между вертикалью и полем H_0 .

3. Переходим к случаю, когда концентрация иона сорта 2 является малой по сравнению с концентрацией иона сорта 1 ($N_2 \ll N_1$). Пренебрегая в (11) членами, квадратичными относительно N_2 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_2}{dz^2} + \left(\frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{dz} \frac{T_e}{T} + \frac{1}{H_m} - \frac{gM_2}{\kappa T} \right) \frac{dN_2}{dz} + \left[-\frac{1}{N_e} \frac{d^2 N_e}{dz^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{dz} \frac{1}{H_m} - \frac{T_e}{T} \frac{1}{N_e^2} \left(\frac{dN_e}{dz} \right)^2 + \frac{gM_1}{\kappa T} \frac{1}{H_m} - \frac{gM_2}{\kappa T} \frac{1}{H_m} + \right. \\ \left. + \frac{gM_1}{\kappa T} \frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{dz} - \frac{1}{N_e} \frac{qM_1 v_1}{\kappa T} \right] N_2 = -\frac{\beta M_2 v_2}{\kappa T} N_e + \frac{\alpha M_2 v_2}{\kappa T} N_e N_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Значение N_e в этом уравнении может быть найдено из (10).

Так как $N_2 \ll N_e$, слагаемыми с N_2 в (10) пренебрегаем. Тогда приходим к известному уравнению, определяющему изменение N_e [3]. В [3] показано, что распределение электронной концентрации в области выше максимума слоя F можно приближенно найти без учета рекомбинации. При этом установлено, что зависимость $N_e(z)$ определяется следующей формулой:

$$N_e = \frac{q_0 \left\{ \exp\left(-\frac{z}{2H_1}\right) - \exp\left[-\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_m}\right)z\right] \right\}}{D_{0a} \frac{1}{H_1} \left(\frac{1}{2H_1} + \frac{1}{H_m}\right) \cos^2 \alpha_0}, \quad (13)$$

где D_a — коэффициент амбиполярной диффузии.

При выводе (13) использовались следующие соотношения:

$$q = q_0 \exp\left(-\frac{z}{H_1}\right), \quad D_a = D_{0a} \exp\left(\frac{z}{H_m}\right), \quad \beta = \beta_0 \exp\left(-\frac{z}{H_2}\right),$$

здесь $H_1 = \frac{\kappa T}{M_1 g}$, $H_2 = \frac{\kappa T}{M_2 g}$. Из (13) видно, что при $z = 0$ $N_e = 0$.

Обращение в нуль N_e при $z = 0$ соответствует переходу к нижней ионосфере (подробнее см. [3]).

Далее основное внимание уделяем району высот выше максимума области F . Для этих высот в (13) можно пренебречь в числителе членом $\exp\left[-\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_m}\right)z\right]$, так что

$$N_e \approx \frac{q_0 \exp(-z/2H_1)}{D_{0a} \frac{1}{H_1} \left(\frac{1}{2H_1} + \frac{1}{H_m}\right) \cos^2 \alpha_0}. \quad (14)$$

Используя для N_e соотношение (14), получим условие пренебрежения в (12) вкладом фотохимических процессов. Несложный анализ приводит при $N_2 \ll N_e$ практически к единственному ограничению

$$\frac{v_2}{\tau_p} \ll \frac{g^2}{v_{T11}^2}, \quad (15)$$

где v_{T11} — средняя тепловая скорость ионов сорта 1, $\tau_p = \frac{1}{\alpha N_e}$ — характерное время рекомбинации. Условие (15) имеет очевидный смысл и означает, что время τ_p больше характерного диффузионного времени $D_{эфф}^{-1} H_1^2$, где $D_{эфф} = \kappa T / M_1 v_2$.

На высоте 300 км для минимума солнечной активности $v_2 \sim 8 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}$ [10], $\tau_p \sim 10^2 \text{ сек}$, $g^2 \sim 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}^4$, $v_{T11}^2 \sim 10^9 \text{ см}^2/\text{сек}^2$. При этих значениях параметров критерий выполняется, но неравенство еще не сильное. На высоте 450 км $v_2 \sim 8 \cdot 10^{-3}$ [10], $\tau_p \sim 10^3$ и условие (15) удовлетворяется с большим запасом.

Учитывая распределение (14) и условие (15), а также оставляя в (12) только наибольшие члены, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_2}{dz^2} + \left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{2H_1} \frac{T_e}{T} \right) \frac{dN_2}{dz} + \frac{1}{4H_1^2} \frac{T_e}{T} N_2 = \\ = - \frac{\beta_0 q_0 \exp \left[- \left(\frac{2}{H_2} + \frac{1}{2H_1} \right) z \right]}{D_{02} D_{01} \frac{1}{H_1} \left(\frac{1}{2H_1} + \frac{1}{H_m} \right) \cos^2 \alpha_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь учтено, что T_e на порядок больше T , $\frac{1}{H_m} \approx \frac{1}{H_1}$, $D_2 = \frac{\kappa T}{M_2 v_{2e}} = D_{02} \exp \left(\frac{z}{H_2} \right)$ — коэффициент диффузии ионов сорта 2.

Для решения (16) необходимо выбрать граничные условия. Исходим из того, что ниже максимума F слоя концентрация N_2 определяется процессами ионизации и рекомбинации. Тогда одно граничное условие $N_2 = N_{20}$ при $z = z_0$ ($z_0 < z_{\max}$, где z_{\max} — высота максимума слоя). В качестве другого используем требование равенства нулю потока ионов сорта 2 на больших высотах, которое эквивалентно равенству $D_2 \left[\frac{dN_2}{dz} + \left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{2H_1} \frac{T_e}{T} \right) N_2 \right] = 0$ [3] при $z \rightarrow \infty$.

Решая уравнение (16) и определяя из граничных условий постоянные интегрирования, получаем

$$N_2 = [N_{20} + n(z_0)] \exp \left[\left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{2H_1} \frac{T_e}{T} \right) (z_0 - z) \right] - n(z), \quad (17)$$

где

$$n(z) = \frac{\beta_0 q_0 \exp \left[- \left(\frac{2}{H_2} + \frac{1}{2H_1} \right) z \right] H_{эфф}^2}{D_{02} D_{01} \frac{1}{H_1} \left(\frac{1}{2H_1} + \frac{1}{H_m} \right) \cos^2 \alpha_0},$$

$$\begin{aligned} H_{эфф} = \left(\frac{2}{H_2^2} + \frac{3}{2H_1 H_2} + \frac{1}{4H_1^2} + \frac{T_e}{T} \frac{1}{H_1 H_2} - \frac{2}{H_2 H_m} + \right. \\ \left. + \frac{T_e}{T} \frac{1}{2H_1^2} - \frac{1}{2H_1 H_m} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Определим область применимости распределения [9]

$$N_2 = \bar{N}_2 \exp \left[\left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{2H_1} \frac{T_e}{T} \right) (z_0 - z) \right], \quad (18)$$

где $\bar{N}_2 = N_{20} + n(z_0)$. Учитывая характер зависимостей β , D_2 , с учетом (14) и (18) из требования малости второго слагаемого в (17) по сравнению с первым, имеем $D_2 H_{\text{эфф}}^{-2} N_2 \gg \beta N_e$. Вводя характерные времена диффузии $\tau_{\text{диф}} = D_2^{-1} H_{\text{эфф}}^2$ и ионно-молекулярных процессов $\tau_{\text{и}} = \beta^{-1}$, находим

$$\tau_{\text{и}} N_2 \gg \tau_{\text{диф}} N_e. \quad (19)$$

На высоте 300 км $\beta \sim 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ [11], $N_e \sim 10^6 \text{ см}^{-3}$, $T \sim 10^3 \text{ град}$, $M_2 \sim 3 \cdot 10^{-23} \text{ г}$, $H_{\text{эфф}} \sim 10^6 \text{ см}$, $N_2 \sim 10^5 \text{ см}^{-3}$ [7]. При указанных значениях параметров критерий (19) уже хорошо выполняется. На высоте 450 км при $\beta \sim 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$ [11] $N_e \sim 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $N_2 \sim 2,5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ и условие (19) выполняется с очень большим запасом.

Таким образом, учитывая ограничения (15) и (19), мы приходим к выводу, что распределением (18) можно пользоваться, начиная с высот максимума области F . При этом обоснованность применения (18) улучшается по мере увеличения высоты.

В применении к ионам H^+ распределение (18) интересно в том плане, что их концентрация N_2 растет с высотой по закону $N_2 \approx \bar{N}_2 \exp \left[\frac{1}{2H_1} \frac{T_e}{T} (z - z_0) \right]$. Для ионов H^+ реакции (2) и (3) принимают вид $\text{H} + \text{O}^+ \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{O}$ [12] с коэффициентами прямой и обратной реакций $\beta_{\text{пр}} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ сек}^{-1}$, $\beta_{\text{обр}} = \frac{8}{9} \beta_{\text{пр}}$.

Что касается критериев применимости (18), то здесь условие (15) играет второстепенную роль. Основное значение имеет неравенство (19). На высоте 300 км концентрация $\text{H}^+ \sim 10^{-1} \text{ см}^{-3}$ [7], и на 450 км $\sim 5 \cdot 10^1 \text{ см}^{-3}$ [7]. Отсюда видно, что условие (19) выполняется, причем чем больше высота, тем лучше. Следует подчеркнуть, что для ионов H^+ условие об исчезновении потока при $z \rightarrow \infty$ требует специального рассмотрения. Поэтому сказанное об ионах H^+ в большей степени относится не к распределению (18), а к условию (19), характеризующему вклад различных процессов.

Автор признателен Б. Н. Гершману за постоянный интерес к работе и просмотр рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Сб Диффузия в слое F , изд Мир, М., 1968
- 2 В. М. Поляков, Л. А. Щепкин, Э. С. Казимировский, В. Д. Кокоуров, Ионосферные процессы, изд. Наука, Новосибирск, СО АН СССР, 1968
3. S. A. Bowhill, J. Atm. Terr. Phys., **24**, № 6, 503 (1962).
4. S. A. Bowhill, J. Atm. Terr. Phys., **21**, 272 (1961).
5. J. E. C. Gliddon, P. C. Kendall, J. Geophys. Res., **65**, 2279 (1960).
6. J. E. C. Gliddon, P. C. Kendall, J. Atm. Terr. Phys., **24**, 1073 (1962).
7. Н. Камияма, Report Ionosp. Space Res. Japan, **22**, № 4, 249 (1968).
8. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрномия (в печати).
9. P. Mange, J. Geophys. Res., **65**, № 11, 3833 (1960).
10. Н. Н. Климов, И. А. Кринберг, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца, вып. 7, изд. Наука, М., 1970.
11. A. P. Mitra, Advances in upper Atmosphere Research, Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1963.
12. W. B. Hanson, T. N. L. Patterson, S. S. Degaonkar, J. Geophys. Res. **68**, 6.03 (1963).

ION ADMIXTURE DISTRIBUTION IN THE IONOSPHERIC F-REGION

L. E. Zhmur

A one-dimensional nonisothermal diffusion in the ionospheric plasma (*F*-region) is considered for the stationary case. The analysis is made for two sorts of positive ions with taking into account the ionization and recombination, as well as the influence of the force of gravity.

A system of two related equations have been obtained for electron and ion densities. A reduction is made to the case of admixture ions determining the dissociative recombination. The criteria are given for this case. When they are satisfied, the distribution found coincides with that obtained by Mange [9] without allowance for photochemical processes.

УДК 551.510.535

К ТЕОРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ИОНОСФЕРНОЙ ТОКОВОЙ СТРУЕ

Д. С. Котик

Рассматривается генерация потенциальных волн поперечным током в области ионосферной электроструи. Используется численный метод решения дисперсионного уравнения для случая слабых токов и малых инкрементов. Аналитически исследована область нижнего гибридного резонанса, найдены дисперсионные кривые и зависимость инкрементов от волнового числа и параметров ионосферной плазмы.

Из экспериментов по радиолокационным отражениям от E -слоя ионосферы в диапазоне 50—3000 Мгц известно [1, 2], что в области экваториальной и полярной электроструи существуют мелкомасштабные неоднородности электронной концентрации. Эти нерегулярности сильно вытянуты вдоль магнитного поля, а их поперечные размеры составляют от 10—50 м до 10—15 см. В ряде работ [3—6] показано, что одним из возможных источников таких неоднородностей является генерация электростатических волн током электроструи. Механизм возникновения тока рассмотрен в [7] и определяется различием дрейфовых скоростей ионов и электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях. Это различие в скоростях дрейфа обусловлено выполнением в E -слое ионосферы неравенств $\Omega_e^2 \gg \nu_e^2$ и $\Omega_i^2 \ll \nu_i^2$, где Ω_α , ν_α — гирочастота и частота столкновений заряженных частиц с молекулами, $\alpha = e$ — электроны, $\alpha = i$ — ионы.

Как следует из [3—5], потенциальные колебания становятся неустойчивыми, когда дрейфовая скорость электронов V_0 превышает некоторую пороговую величину порядка тепловой скорости ионов. Выяснено также, что генерация происходит в широком диапазоне частот ω , причем нижняя граница спектра $\omega_{\min} \ll \nu_i$, а верхняя — $\omega_{\max} \gg \nu_i$. Ввиду сложности исходных уравнений, основные результаты в [3, 4, 6] получены численными методами. Только в случае $\omega \ll \nu_i$, как это сделано в [4, 5], удается упростить дисперсионное уравнение и получить аналитические решения. Но полученные таким образом результаты не позволяют установить ω_{\max} при заданной скорости V_0 . В указанных выше работах не выяснена также зависимость частоты от волнового числа k . Знание дисперсионных кривых и границ спектра необходимо для интерпретации экспериментов по радиолокационным отражениям, а также для построения нелинейной теории неустойчивости в электроструе.

Как будет показано ниже, только исходя из кинетического рассмотрения можно установить зависимость частоты ω и инкремента γ от k во всем спектре возбуждаемых волн. В п. 2 используется численный метод решения дисперсионного уравнения в случае малых инкрементов ($\gamma \ll \nu_i$) и при скоростях V_0 , незначительно превышающих тепловую скорость ионов. В п. 3 найдены аналитические решения в области нижнего гибридного резонанса при дрейфовых скоростях, превосходящих тепловую скорость ионов в несколько раз.

1. Рассмотрим распространение продольных волн в слабоионизованной плазме с током, направленным перпендикулярно внешнему магнитному полю. Электроны замагничены и движутся со скоростью V_0 , направленной по току ($\Omega_e^2 \gg \nu_e^2$). Влиянием магнитного поля на ионы можно пренебречь ($\Omega_i \ll \nu_i$). Исходными являются уравнения Больцмана для кинетических функций распределения электронов и ионов по скоростям и уравнение Пуассона для электрического поля. Поскольку генерируемые частоты сравнимы с ν_e и ν_i , можно использовать столкновительный член в приближении Батнагара—Гросса—Крука [5, 6]. Применяя фурье-преобразование и линеаризуя кинетические уравнения, получим дисперсионное уравнение для потенциальных волн [8]:

$$\varepsilon = 1 + \varepsilon_e + \varepsilon_i = 1 - \frac{2\omega_{0e}^2}{L_e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^{-\alpha} I_n(\alpha)}{\alpha [(\omega' + i\nu_e)^2 - n^2 \Omega_e^2]} + \frac{\omega_{0i}^2 [1 - zS(z)]}{k^2 \nu_{Ti}^2 L_i} = 0, \quad (1)$$

где

$$L_e = 1 - i \left[\frac{\nu_e e^{-\alpha} I_0(\alpha)}{\omega' + i\nu_e} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\nu_e e^{-\alpha} I_n(\alpha) (\omega' + i\nu_e)}{(\omega' + i\nu_e)^2 - n^2 \Omega_e^2} \right],$$

$$L_i = 1 - i \frac{\nu_i}{\sqrt{2} k \nu_{Ti}} S(z), \quad S(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-t^2\}}{z-t} dt,$$

ω_{0e} — плазменная частота, $\alpha = k^2 \nu_{Te}^2 / \Omega_e^2 = k^2 r_g^2$, r_g — гирорадиус электрона, $\nu_{T\alpha} = \sqrt{T_\alpha / m_\alpha}$, T_α и m_α — температура и масса заряженной частицы, $\omega' = \omega - kV_0$, $z = (\omega + i\nu_i) / k \sqrt{2} \nu_{Ti} = x + iy$, $I_n(\alpha)$ — функция Бесселя комплексного аргумента.

Рассмотрим ε_e в уравнении (1) при частотах $\omega^2 \ll \Omega_e^2$. В этом случае $[(\omega' + i\nu_e)^2 - n^2 \Omega_e^2]^{-1} = -[1 + i\nu_e \omega' / n^2 \Omega_e^2] / n^2 \Omega_e^2$. Используя производящую функцию для функции Бесселя [10], можно показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha} I_n(\alpha) = (1 - e^{-\alpha})/2$. Пренебрегая членами порядка $\nu_e \omega' / \Omega_e^2$ и учитывая, что $\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\alpha} I_n(\alpha) / n^2] \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha} I_n(\alpha)$, получим для ε_e выражение, справедливое при произвольном отношении гирорадиуса электрона к длине волны:

$$\varepsilon_e = \frac{\omega_{0e}^2 (1 - e^{-\alpha}) (\omega' + i\nu_e)}{k^2 \nu_{Te}^2 [\omega' + i\nu_e (1 - e^{-\alpha} I_0(\alpha))]} \quad (2)$$

2. Остановимся на численном методе решения дисперсионного уравнения (1). Рассмотрим масштабы, для которых $\alpha \ll 1$. Учитывая (2), запишем (1) в следующем виде:

$$k^2 \rho_D^2 + \frac{\alpha (\omega' + i\nu_e)}{\omega' + i(\alpha \nu_e + \gamma)} + \frac{A(x, y) - iB(x, y)}{a(x, y) - ib(x, y)} = 0, \quad (3)$$

где $\rho_D = \nu_{Te} / \omega_{0e}$ — дебаевский радиус, $a = 1 + y \operatorname{Im} S(x, y)$, $b = y \operatorname{Re} S(x, y)$, $A = a(x, y) - x \operatorname{Re} S(x, y)$, $B = b(x, y) + x \operatorname{Im} S(x, y)$.

В (3) считаем ω действительным и, предполагая, что инкремент $\gamma \ll \nu_i$, пренебрегаем им там, где он входит аддитивно с ν_i или ν_e . Приравняв нулю действительную и мнимую части уравнения (3), получим систему двух уравнений, линейную относительно ω' и γ . Разрешая эту систему и обозначая

$$\omega'/\sqrt{2} k v_{Ti} = x - \beta \quad (\beta = V_0/\sqrt{2} v_{Ti}),$$

найдем

$$x - \beta = \nu_e (d_2 c_2 - d_1 c_1) / \sqrt{2} k v_{Ti} (c_1^2 + c_2^2); \quad (4)$$

$$\gamma = -\nu_e (d_2 c_1 - d_1 c_2) / (c_1^2 + c_2^2), \quad (5)$$

где

$$c_1 = k^2 \rho_D^2 a + A, \quad c_2 = k^2 \rho_D^2 b + B,$$

$$d_1 = \alpha [(1 + k^2 \rho_D^2) b + B], \quad d_2 = \alpha [(1 + k^2 \rho_D^2) a + A].$$

Поскольку $\nu_e/\sqrt{2} k v_{Ti} = \nu_e/\nu_i y$, $\alpha = \delta_1/y^2$ ($\delta_1 = \nu_i^2/2\Omega_e \Omega_i$), $k\rho_D = k v_{Ti}/\omega_{0i} = \delta_2/y$ ($\delta_2 = \nu_i/\delta_2 \omega_{0i}$), уравнение (4) дает возможность найти зависимость x от y , т. е. дисперсионную зависимость $\omega(k)$ при заданном β . А зная $\omega(k)$, из (5) можно определить $\gamma(k)$. Расчет был проведен на ЭВМ при следующих параметрах ионосферной плазмы: $\Omega_e = 10^7 \text{ сек}^{-1}$, $\Omega_i = 2 \cdot 10^3 \text{ сек}$, $\nu_e = 10^4 \text{ сек}^{-1}$, $\nu_i = 10^3 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_{0e} = 5,5 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_{0i} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$, $T_e = T_i$, $\sqrt{2} v_{Ti} = 5 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$.

На рис. 1 представлены результаты для $\beta \gtrsim 1$. Можно видеть, что

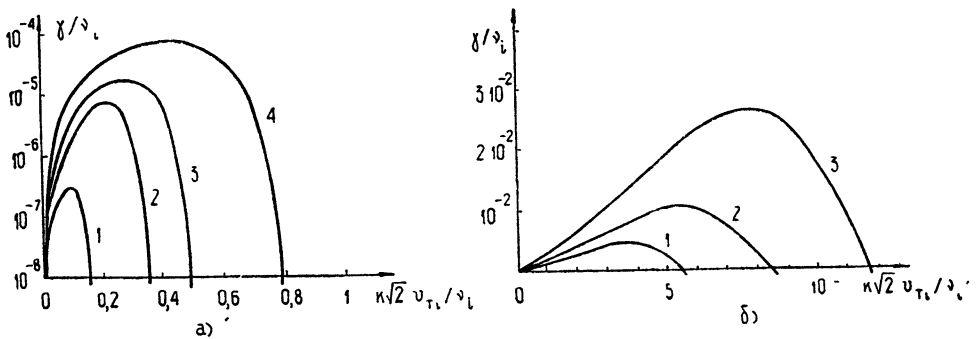


Рис. 1. Кривые на рис. 1 найдены при следующих параметрах β :

а) 1— $\beta=1,01$; 2— $\beta=1,04$; 3— $\beta=1,06$; 4— $\beta=1,1$; б) 1— $\beta=1,28$; 2— $\beta=1,32$; 3— $\beta=1,36$.

с ростом V_0 ширина спектра быстро растет. Так, при $\beta=1,01$ минимальный генерируемый масштаб порядка 20 м ($\lambda_{\min}=2\pi/k=2\pi\sqrt{2}v_{Ti}/0,16\nu_i \approx 19 \text{ м}$), а при $\beta=1,1$ — $\lambda_{\min} \approx 5,8 \text{ м}$. С дальнейшим ростом V_0 (рис. 1 б) спектр возбуждаемых волн значительно расширяется, а инкременты возрастают. (При $\beta=1,32$ $\lambda_{\min}=39 \text{ см}$.) Дисперсионная зависимость $\omega(k)$, определяемая уравнением (4), линейна, в силу чего соответствующие графики здесь не приводятся. В первом приближении можно считать, что $\omega \sim kV_0$ для частот как много меньших, так и сравнимых с ν_i .

Сравнивая результаты, полученные выше, с результатами работы [4], можно видеть, что верхняя граница спектра ω_{\max} в нашем случае значительно отличается от значения, определяемого в рамках гидродинамического приближения. Так, например, при $\beta \sim 1,4$ ω_{\max} в [4] порядка

1,5 ω_{0i} , а ω_{\max} , найденное из (5) и (4), порядка $10 \div 15 \nu_i$, т. е. более чем в 10 раз меньше. С ростом β это различие возрастает. Как будет показано ниже, граничная частота не может превысить $\omega_r = (1/\omega_{0i}^2 + 1/\Omega_e \Omega_i)^{-1/2}$ и тем более ω_{0i} .

Так как в уравнении (3) мы не пренебрегаем инкрементом γ только по сравнению с $\alpha \nu_e$, то при увеличении $\alpha \nu_e$ и приближении к ν_i точность метода падает. (При $y = 0,1$ $\alpha \nu_e/\nu_i = 0,25$.) Однако формулами (4) и (5) можно по-прежнему пользоваться для нахождения верхней границы спектра ω_{\max} (в точке $\omega = \omega_{\max}$ $\gamma = 0$). Нарушение условия $\alpha \nu_e < \nu_i$ происходит при увеличении V_0 на частотах $\omega > 10 \nu_i$.

3. Рассмотрим скорости электронного дрейфа, значительно превосходящие тепловую скорость ионов ($\beta > 2$). Поскольку $\omega \sim kV_0$, а $|z|$ также растет с ростом V_0 , можно воспользоваться асимптотическим выражением для zS в уравнении (1) [8]:

$$zS = 1 + 1/2z^2 - i \sqrt{\pi} z \exp\{-z^2\}.$$

Как следует из [3] и [4], при больших значениях V_0 возбуждаются частоты $\omega \gg \nu_i$. На таких частотах можно положить в (1) $L_i = 1$, что эквивалентно использованию в кинетическом уравнении для ионов столкновительного члена в релаксационном приближении.

Учитывая вышесказанное, запишем дисперсионное уравнение (1) в следующем виде:

$$k^2 \rho_D^2 + \frac{\alpha(\omega' + i\nu_e)}{\omega' + i\alpha\nu_e} - \frac{k^2 v_{Ti}^2}{(\omega + i\nu_i)^2} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}} \right)^3 \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{-\left(\frac{\omega + i\nu_i}{k v_{Ti}}\right)^2\right\} \right] = 0. \quad (6)$$

Опуская ряд малых величин порядка $\sqrt{m_e/m_i}$ и считая $k^2 \rho_D^2 \ll 1$, из (6) получим

$$\omega'(\omega^2 - \omega_0^2) - 2\nu_e \nu_i \frac{\omega_r^2}{\Omega_e \Omega_i} + i\nu_e \frac{\omega_r}{\Omega_e \Omega_i} \omega^2 - \\ - i\nu_e \frac{\omega_r^2}{\Omega_e \Omega_i} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_r \omega' \left(\frac{\omega}{k v_{Ti}} \right)^3 \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{k v_{Ti}}\right)^2\right\} = 0, \quad (7)$$

где

$$\omega_0^2 = k^2 v_{Ti}^2 / (k^2 \rho_D^2 + k^2 r_g^2) = \Omega_e \Omega_i \omega_{0i}^2 / (\omega_{0i}^2 + \Omega_e \Omega_i)$$

— частота нижнего гибридного резонанса.

Исследуем уравнение (7) в области частот $\omega \sim \omega_r$. Перепишем (7) в безразмерных переменных:

$$(f - W)(f - G) - \delta Gf + i\rho Gf^2 - i\rho G W^2/2\beta^2 + \\ + i\sqrt{\pi} G(f - W)(\beta f/W)^3 \exp\{-\beta f/W\} = 0, \quad (8)$$

где

$$f = \omega/\sqrt{\Omega_e \Omega_i}, \quad W = kV_0/\sqrt{\Omega_e \Omega_i}, \quad G = \omega_r/\sqrt{\Omega_e \Omega_i} =$$

$$= (1 + \xi)^{-1/2}, \quad \xi = \Omega_e \Omega_i/\omega_{0i}^2, \quad \delta = \nu_e \nu_i/\sqrt{\Omega_e \Omega_i},$$

$$\rho = \nu_e/2\sqrt{\Omega_e \Omega_i}, \quad k^2 v_{Ti}^2/\Omega_e \Omega_i = k^2 V_0^2/2\beta^2 \Omega_e \Omega_i = W^2/2\beta^2,$$

В (8) учтено, что $(\omega^2 - \omega_1^2) \approx (\omega - \omega_1) 2\omega_1$. Пренебрегая в первом приближении экспоненциальным членом в (8), получим квадратное уравнение:

$$(1 + i\rho G) f^2 - (W + G + \delta) + WG - i\rho W^2/2\beta^2 = 0. \quad (9)$$

Из анализа дискриминанта уравнения (9) можно видеть, что условие $(W - G + \delta) \ll 4\rho G^2 W$ определяет ширину резонансной полосы. Замечая в этом условии знак неравенства на знак равенства, определим область резонанса:

$$W_{(l)} = G(1 + 2\rho G \pm 2\sqrt{\rho G(1 + \rho G)}). \quad (10)$$

В (10) знак «+» соответствует верхней, знак «-» нижней границе области. Здесь учтено, что $\delta \ll \rho G$.

Корни (9) вне резонансной полосы имеют следующий вид:

$$f_1 = W + [(\delta - \rho^2 G^2) W - i\rho G W^2 (1 - 1/2\beta^2)] / (W - G + \delta); \quad (11)$$

$$f_2 = G - [(\delta - \rho^2 G^2) G W - i\rho G (G^2 - W^2/2\beta^2)] / (W - G + \delta). \quad (12)$$

Корень f_1 неустойчив при $W < W_l$, а f_2 — при $W > W_l$. Интересно отметить, что f_1 совпадает в первом приближении с неустойчивым решением для длинноволновых колебаний ($\omega \ll \nu_l$), полученным в гидродинамическом приближении [4, 5].

Для корня f_1 поправка, связанная с затуханием Ландау, пропорциональна $\exp\{-\beta^2\}$ и пренебрежимо мала при достаточно больших скоростях V_0 ($\beta \sim 2,5 \div 3$). В то же время для корня f_2 она может оказаться существенной.

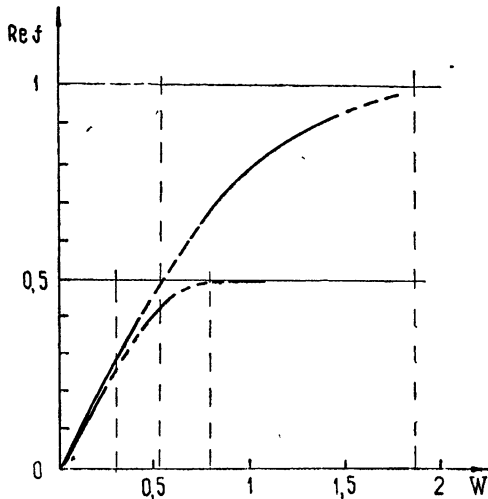


Рис. 2.

С учетом этого обстоятельства найдем инкремент колебаний на частоте нижнего гибридного резонанса:

$$\text{Im } f_2 = \frac{\rho G (G^2 - W^2/2\beta^2)}{W - G + \delta} - \sqrt{\pi} G \left(\frac{\beta G}{W}\right)^3 \exp\left\{-\left(\frac{\beta G}{W}\right)^2\right\}. \quad (13)$$

Рассмотрим область $W_l < W < W_f$. Неустойчивый корень уравнения (9) в этом случае равен

$$f_3 = f_{03} + iG(D - \rho f_{03}), \quad (14)$$

где $f_{03} = \frac{1}{2}(W + G + \delta) - GD$, $D = \sqrt{\rho W/2}(1 - W/4G\beta^2)$.

Учитывая затухание Ландау, получим окончательное выражение для инкремента неустойчивости внутри резонансной полосы:

$$\text{Im } f_3 = G(D - \rho f_{03}) - \sqrt{\pi} \frac{(W - f_{03})}{2DG} \left(\frac{f_{03}\beta}{W} \right)^3 \exp \left\{ - \left(\frac{f_{03}\beta}{W} \right)^2 \right\}. \quad (15)$$

Выражения (10)–(15) иллюстрируются рисунками 2 и 3. На рис. 2 изображена дисперсионная зависимость $\omega(k)$ при двух различных концентрациях электронов в электроструе: $N_1 = 10^6 \text{ см}^{-3}$ (в этом случае $\omega_{0i} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$, $\xi = 0,032$, $\omega_r = \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$) и $N_2 = 10^4 \text{ см}^{-3}$ ($\xi = 3,2$, $\omega_r = 0,49 \sqrt{\Omega_e \Omega_i}$). Понижение концентрации ведет к сужению резонансной полосы и уменьшению верхней граничной частоты. На рис. 3 показана зависимость $\gamma(k)$ при различных скоростях дрейфа V_0 (рис. 3 а, соответствует концентрации N_1 , а рис. 3 б — N_2).

Поскольку $\alpha = k^2 v_{Ti}^2 / \Omega_e \Omega_i = W^2 / 2\beta^2$, а $k^2 \rho_D^2 = k^2 v_{Ti}^2 / \omega_{0i}^2 = \xi W^2 / 2\beta$, из рис. 3 видно, что в области генерации не происходит нарушения условий $k^2 r_g^2 \ll 1$ и $k^2 \rho_D^2 \ll 1$. Отметим также, что изображенная на рис. 3 зависимость $\gamma(k)$ хорошо согласуется с результатами работы [6], в которой уравнение (1) решалось численным методом в области частот $\omega \gg \gamma_i$.

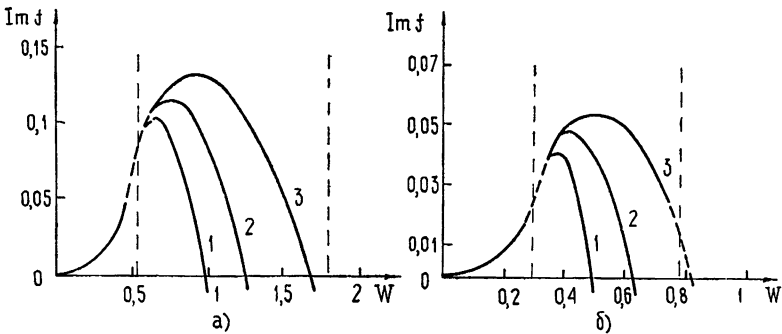


Рис. 3. Кривые на рис. 3 построены при следующих параметрах β :
1 — $\beta = 2,5$; 2 — $\beta = 3$; 3 — $\beta = 3,5$;
За соответствует концентрации N_1 , а 3б — N_2 .

4. Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы относительно неустойчивости в токовой струе. При малых скоростях дрейфа электронов ($\beta \gg 1$) генерируются длинноволновые неоднородности ($\lambda \sim$

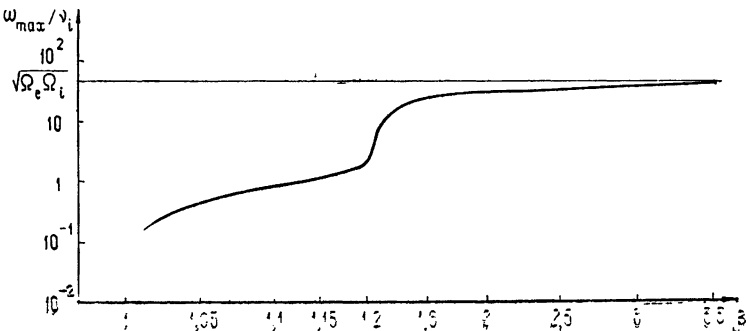


Рис. 4.

$\sim 10 \div 20$ м). С ростом V_0 спектр уширяется, и при $\beta \approx 3$ возможна генерация неоднородностей с размерами порядка 20 см.

Используя результаты пп. 2 и 3, можно построить график зависимости ω_{\max} от параметра β (рис. 4), который может быть полезен при анализе экспериментальных данных по радиоотражениям от токовой струи. Как видно из рис. 3, даже при больших значениях V_0 частота ω_{\max} не превосходит частоту нижнего гибридного резонанса.

В области полярной токовой струи скорость электронного дрейфа может достигать 1,5—2 км/сек, что раза в три превышает тепловую скорость ионов. Из рис. 3 видно, что при таких V_0 ($\beta \sim 3,5$) минимальный генерируемый масштаб $\lambda \sim 20$ см, а максимальная частота, на которой возможны радиоотражения, составляет $f = c/2\lambda \sim 750$ МГц.

Автор благодарит В. Ю. Трахтенгерца за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Leadabrand, A. G. Larson, J. C. Hodges, J. Geophys. Res., **72**, № 15, 3877 (1967).
2. K. L. Bowles, B. B. Basley, R. Cohen, J. Geophys. Res., **68**, № 9, 2485 (1963).
3. D. T. Farley, J. Geophys. Res., **68**, № 22, 6085 (1963).
4. S. Kato, Y. Hirata, Rep. Ionosph. Space Res. Japan, **21**, № 3, 85 (1967).
5. Г. Х. Каменецкая, Геомагнетизм и аэрономия, **9**, № 2, 351 (1969).
6. K. Lee, C. F. Kennel, J. M. Kindel, Radio Science, **6**, № 2, 209 (1971).
7. R. Boström, J. Geophys. Res., **69**, № 23, 4983 (1964).
8. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
9. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений, Физматгиз, М., 1962.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
28 июня 1971 г.

ON THE THEORY OF INSTABILITY IN THE IONOSPHERIC CURRENT JET

D. S. Kotik

The generation of potential waves by a transverse current in the ionospheric electrojet region is considered. A numerical method is used to solve the dispersion equation for the cases of weak current and small increments. The region of the lower hybrid resonance is analytically investigated. The dispersion curves and the dependence of the increments on the wave number and the ionospheric plasma parameters have been found.

УДК 551.510 535

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ, ЧАСТИЧНО ОТРАЖЕННЫХ ОТ D -ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков

Эксперименты, проведенные на установке по исследованию D -области ионосферы методом частичных отражений, показали, что амплитуды сигналов распределены по закону Рэлея и что характерное время τ_0 флуктуаций амплитуд зависит от размеров θ_0 диаграмм направленности антенн. Приводится интерпретация полученных результатов на основе модели «замороженных» неоднородностей, движущихся в горизонтальном направлении со скоростью v

Для определения профилей $N(h)$ электронной концентрации в D -области ионосферы методом частичных отражений радиоволн важно знать свойства неоднородностей, вызывающих обратное рассеяние или частичное отражение радиоволн. Изучение неоднородностей структуры нижней ионосферы представляет также и самостоятельный научный интерес. В настоящей работе приводятся некоторые экспериментальные сведения о статистических свойствах частичных отражений радиоволн и их возможная интерпретация на основе модели «замороженных» неоднородностей, двигающихся в горизонтальном направлении.

Аппаратура и методика наблюдений. В экспериментах была использована установка для изучения D -области ионосферы методом частичных отражений, расположенная около г. Горького. Передатчик установки работал на частоте 5,75 Мгц с импульсной мощностью порядка 750 квт. Длительность изучаемых импульсов была равна 50 мксек, а их частота повторения—50 гц. Передающая антенна (четыре полуволновых диполя) имела расчетную диаграмму направленности около $56^\circ \times 56^\circ$ по уровням половинной мощности и была линейно поляризована. Основная приемная антенна (I) состояла из 36 пар скрещенных диполей. Размеры ее диаграммы направленности по уровням половинной мощности равны $\sim 12^\circ \times 12^\circ$. С помощью этой антенны можно было принимать сигналы как с линейной, так и с обеими круговыми поляризациями*.

В описываемых экспериментах в большинстве случаев сигналы одновременно принимались также на дополнительную антенну с весьма широкой диаграммой направленности. Для этой цели применялась ромбическая антенна (II) типа станции АИС и пара скрещенных диполей—антенна (III), позволявшая принимать радиоволны с круговой поляризацией. В процессе наблюдений сигналы с двух разных антенн подводились поочередно с частотой переключения 25 гц к входу общего приемо-регистрирующего устройства. После детектирования амплитуды сигналов воспроизводились на экране двухлучевого осциллографа с общей высотной разверткой и регистрировались на фотопленку. Время вы-

* Сигналы с круговыми поляризациями при вертикальном распространении весьма близко соответствуют на широте г. Горького поляризациям обыкновенной и необыкновенной компонент.

держки каждого кадра составляло либо 0,1, либо 0,5 сек. В ряде случаев с помощью стробирования записывались непрерывные изменения амплитуд сигналов с определенных высот на движущуюся фотопленку. Сеансы наблюдений продолжались около 5—6 минут.

Эксперименты проводились в отдельные дни весной 1970 г. и частично были повторены в марте 1971 г. Детальной обработке были подвергнуты типичные записи, полученные в часы, близкие к полудню. Обработка заключалась в нахождении функции распределения амплитуд A сигналов для разных фиксированных высот h_0 и в определении автокорреляционных функций амплитуд $\rho_A(h_0, \tau)$.

Результаты наблюдений. На рис. 1 приведены экспериментальные функции распределения $W_1[A_1(h_0)]$ сигналов с линейной (треугольники и квадраты) и обеими круговыми поляризациями (кружки), полученные с помощью антенн I и II для нескольких высот h_0 . Сплошной линией изображена расчетная функция распределения вероятностей амплитуд по нормированному закону Рэлея

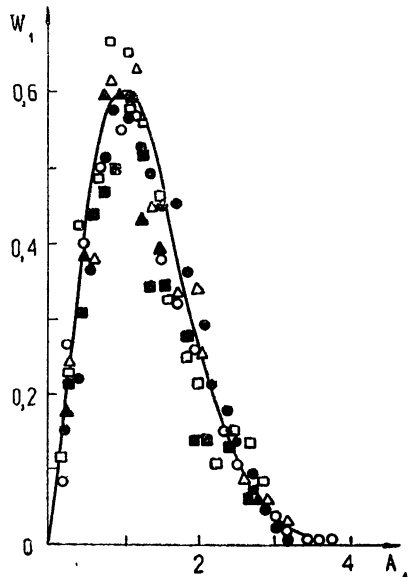


Рис. 1.

$$W_1 = A_1 \exp\left(-\frac{A_1^2}{2}\right), \tag{1}$$

где $W_1 = W\sigma$, $A_1 = \frac{A}{\sigma}$, $2\sigma^2 = \overline{A^2}$ (черта сверху означает статистическое усреднение по времени). Как видно из рис. 1, экспериментальные функции W_1 вполне удовлетворительно описываются законом Рэлея.

На рис. 2 представлены автокорреляционные функции $\rho_A(h_0, \tau)$,

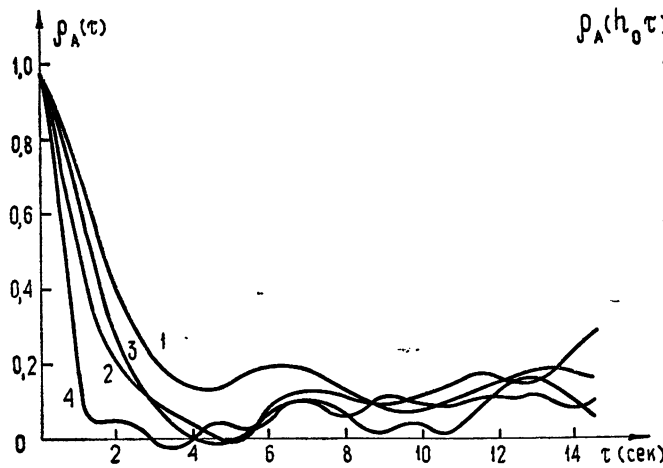


Рис. 2.

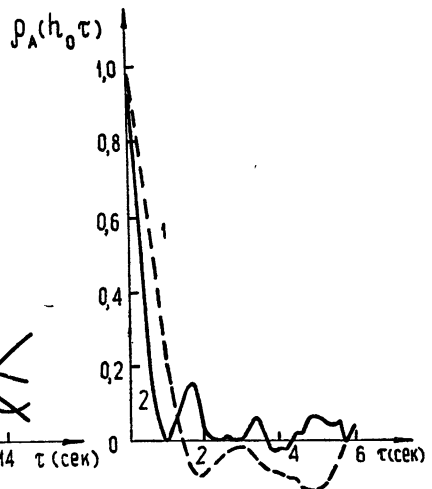


Рис. 3.

вычисленные по осциллограммам $A(h_0, t)$ для высот 73 км (кривые 1 и 2) и 78 км (кривые 3 и 4). При этом кривые 1 и 3 получены с помощью «узкой» диаграммы направленности антенны (антенна I), а кривые 2 и 4 — с помощью «широкой» диаграммы (антенна II). Поляризация антенн в этом случае была линейной. На рис. 3 показаны аналогичные кривые $\rho_A(h_0, \tau)$ для обыкновенной компоненты (антенны I и III, высота $h_0 = 80$ км). Следует обратить внимание на то обстоятельство, что на всех парах кривых более медленное уменьшение ρ_A соответствовало более узкой диаграмме направленности антенн.

В табл. 1 приведены значения временных радиусов корреляции τ_0 , определенные на уровне $\rho_A(\tau_0) = 1/e = 0,37$. Как видно из таблицы, значения τ_0 (II, III), полученные с антеннами II и III, оказались приблизительно в два раза меньше значений τ_0 (I), полученных с помощью антенны I.

Таблица 1

Высота (км)	73	78	90
τ_0 (I) (сек)	2,2	1,7	0,8
τ_0 (II, III) (сек)	1,3	0,8	0,4
τ_0 (I)/ τ_0 (II, III)	1,7	2,1	2,0

Кроме того, значения τ_0 изменяются с переходом от одной высоты h_0 к другой. Последнее видно также из рис. 4, где представлено семейство кривых $\rho_A(h_0, \tau)$, полученное для обыкновенной компоненты с помощью антенны I в диапазоне высот от ~ 75 до 90 км.

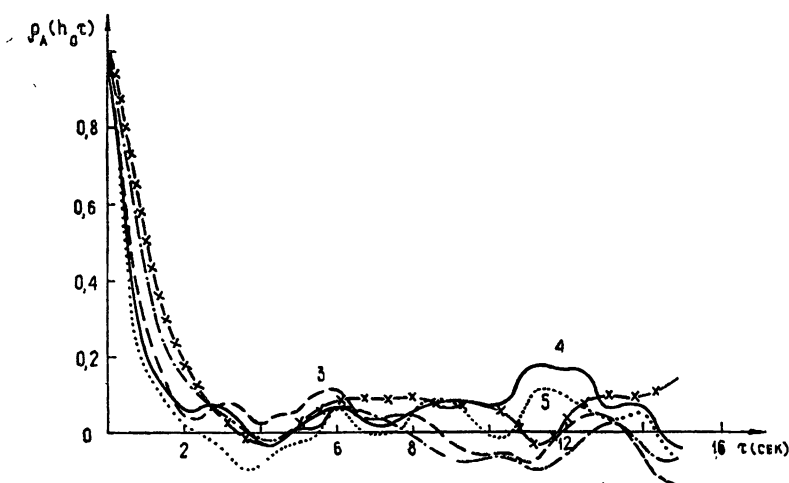


Рис. 4.

Обсуждение полученных результатов. Рэлеевское распределение амплитуд $W_1\{A_1(h_0)\}$ означает, что флуктуации поля частично отраженных сигналов в точке приема распределены по закону Гаусса и что час-

точно отраженные сигналы формируются пучком независимых волн, рассеянных на неоднородностях электронной концентрации. «Зеркальная» компонента поля отсутствует, что указывает на малую роль других механизмов отражения от слоя.

Предположим для простоты дальнейших рассуждений, что неоднородности ионизации изотропны, равномерно распределены в пределах относительно большого объема рассеяния V и перемещаются в горизонтальном направлении с одной и той же скоростью v . В этом случае теория обратного рассеяния радиоволн позволяет получить связь между временным радиусом корреляции τ_0 амплитуд рассеянного поля и скоростью v . Действительно, если пренебречь поглощением радиоволн в объеме V и считать параметры среды в этом объеме не зависящими от координат, то нормированная автокорреляционная функция поля $\Gamma_E(\tau)$ обратно рассеянного сигнала в точке приема будет описываться формулой [1]

$$\Gamma_E(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(r) \exp\left(i2k_0 v \tau \frac{r}{r}\right) dr}{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(r) dr}, \quad (2)$$

где в пределах объема рассеяния $K(r) = \frac{f(\theta, \varphi)}{r^2}$, $f(\theta, \varphi)$ — эффективная диаграмма направленности приемной и передающей антенн (произведение соответствующих диаграмм), r — вектор, направленный из точки приема в точку интегрирования, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — рабочая длина волны, θ — угол места, φ — азимутальный угол. Считается, что объем рассеяния находится в волновой зоне и выполнены условия $\frac{k_0 v^2 \tau^2}{r} \ll 1$ и $l_0^2 \ll \lambda r$, где l_0 — линейные размеры неоднородностей.

Воспользуемся далее тем обстоятельством, что временная автокорреляционная функция амплитуд обратно рассеянного сигнала $\rho_A(\tau)$ с достаточной степенью точности связана с $\Gamma_E(\tau)$ соотношением [2]

$$\rho_A(\tau) \approx |\Gamma_E(\tau)|^2. \quad (3)$$

Следовательно, подставляя в (2) явный вид функции $f(\theta, \varphi)$, можно из (3) найти $\rho_A(\tau)$.

Особый интерес представляют случаи, когда приближенное аналитическое представление $f(\theta, \varphi)$ приводит к простым выражениям для $\rho_A(\tau)$. Так, например, если узкие диаграммы направленности антенн можно аппроксимировать зависимостью

$$f(\theta, \varphi) = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right), \quad (4)$$

где $\theta_0^2 \ll 1$, то*

$$\rho_A(\tau) \approx \exp\left(-\frac{8\pi^2 v^2 \tau^2 \theta_0^2}{\lambda^2}\right). \quad (5)$$

* Выражение (5) получается, если распространить верхний предел интегрирования в (2) по θ до ∞ , что справедливо при $\theta_0^2 \ll 1$. Пределы интегрирования по r (толщина рассеивающего слоя) в экспериментах по частичным отражениям определяются длительностью зондирующего импульса.

Если же эффективную диаграмму направленности представить в виде

$$f(\theta, \varphi) = \cos^n \theta, \quad (6)$$

то

$$\rho_A(\tau) = \left[2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{J_\nu(2k_0 v \tau)}{(2k_0 v \tau)^\nu} \right]^2, \quad (7)$$

где Γ — гамма-функция, J_ν — функция Бесселя и $\nu = \frac{n+1}{2}$.

На рис. 5 приведено несколько кривых $\rho_A(x)$, вычисленных по формуле (7) для разных n в зависимости от $x = 2k_0 v \tau$. На этом же рисунке помещена кривая *I*, рассчитанная по (5) при $\theta_0 = 0,12$. Как видно из выражений (2), (5) и (7), а также из рис. 5, временной радиус корреляции τ_0 в случае упорядоченного движения «замороженных» неоднород-

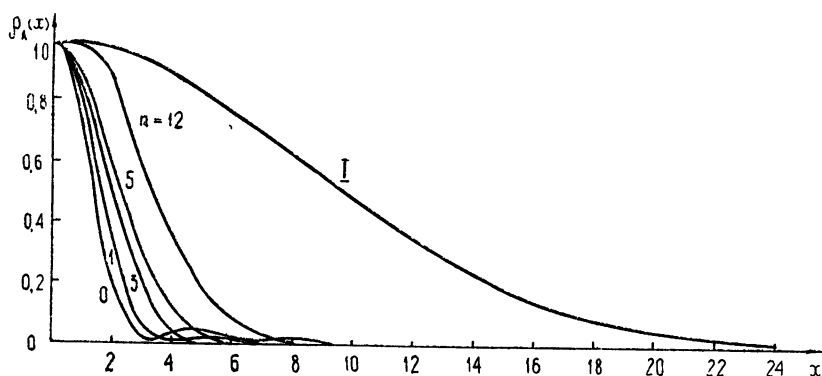


Рис. 5.

ностей зависит от размеров диаграмм направленности антенн. При этом чем «уже» диаграмма направленности, тем больше должно быть, при прочих условиях, τ_0 . В этой связи следует заметить, что иной результат получается в случае хаотических движений «локально замороженных» неоднородностей. Так, при нормальном законе распределения случайных величин скоростей $v_s(\mathbf{r}, t)$ со средним значением $\bar{v}_s = 0$ интегрирование (2) с учетом (3) приводит к

$$\rho_A(\tau) = \exp\left(-\frac{16 \pi^2 v_0^2 \tau^2}{\lambda^2}\right), \quad (8)$$

где $v_0^2 = \frac{1}{3} \overline{v_s^2}$.

Обратимся теперь к результатам наблюдений с разными диаграммами направленности антенн. Как видно из рис. 2 и 3, кривые $\rho_A(\tau)$ показывают явную зависимость от размеров диаграмм направленности антенн, что качественно соответствует предположению об упорядоченном движении замороженных неоднородностей*. Несколько сложнее обстоит дело с количественной проверкой зависимости τ_0 от размеров диаграмм направленности. Функция $f(\theta, \varphi)$ в случае применения антенны *I* вполне удовлетворительно аппроксимируется зависимостью (4) с $\theta_0 = 0,12$ (именно при этом значении θ_0 рассчитана кривая *I* рис. 5). Для описания

* Это предположение подтверждается также опытами по определению скорости движения неоднородностей методом пространственно-разнесенного приема с малой базой с использованием частичных отражений радиоволн от *D*-области ионосферы [3].

эффективной диаграммы направленности при использовании антенн II и III (когда она в основном определяется передающей антенной) можно воспользоваться выражениями типа (6). Однако в этом случае на опыте объем рассеяния ограничивается не размерами диаграмм направленности, а геометрией эксперимента. В самом деле, рассеянные сигналы в проведенных наблюдениях обнаруживались, начиная с высот порядка 70—75 км. Тогда, учитывая сферический фронт волны и длительность зондирующего импульса, легко видеть, что фактические углы θ , в пределах которых происходил прием рассеянных сигналов с высот 70—90 км, были значительно меньше угловых размеров диаграмм направленности антенн.

Это обстоятельство не дает возможности провести детальное количественное сопоставление функций $\rho_A(\tau)$, полученных на опыте с помощью антенн II и III, с одной стороны, и антенны I, с другой стороны. Если полагать, однако, что эффект «обрезания» нижней высотной границей рассеянных сигналов уменьшает размеры эквивалентной диаграммы направленности до 25—30° по уровням половинной мощности, что, по видимому, близко к реальным условиям, то соответствие результатов эксперимента с моделью «замороженных» неоднородностей будет полное.

Выражение (5) позволяет при заданных параметрах θ_0 и λ найти величину скорости v по значениям τ_0 . Воспользовавшись расчетной кривой I рис. 5 и экспериментальными данными относительно τ_0 (см. табл. 1), получаем, например, что в одном случае на высоте 78 км скорость ветра составляла 27 м/сек, а в другом случае на высоте 90 км она была равна 58 м/сек. Результаты наблюдений 26.5.1970 г. (см. рис. 4) показывают, что величина скорости изменялась с высотой от ~ 35—40 м/сек на $h_0 \sim 75$ км до ~ 75 м/сек на $h_0 \sim 85$ —90 км. Учитывая возможности определения скорости v методом пространственно-разнесенного приема [3, 4], было бы желательно провести сравнение скоростей, измеренных обоими методами.

Авторы выражают благодарность В. В. Тамойкину за полезные советы и Т. Н. Федосеевой за помощь, оказанную при расчетах на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1331 (1971).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. G. J. Fraser, J. Atm. Terr. Phys., 30, 707 (1968).
4. G. J. Fraser, A. Kochanowski, Ann. Geophys., 26, № 3, 675 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 июля 1971 г.

SOME STATISTICAL CHARACTERISTICS OF SIGNALS PARTIALLY REFLECTED FROM THE IONOSPHERIC D-REGION

E. A. Benediktov, L. V. Grishkevich, V. A. Ivanov, G. P. Komrakov

The experiments made to investigate the ionospheric D-region by the partial reflection method showed that the signal amplitudes are distributed according to the Rayleigh law and the characteristic time τ_0 of the amplitude fluctuations depends on the radiation pattern sizes θ_0 . The results obtained are interpreted using a model of „frozen“ inhomogeneities moving in the horizontal direction with the velocity v .

УДК 621.371 246

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ВЛАЖНОСТИ ПО НАЗЕМНЫМ РАДИОТЕПЛОЛОКАЦИОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ АТМОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

А. Т. Ершов, А. П. Наумов, В. М. Плечков

Приводятся результаты восстановления вертикальных профилей влажности по наземным радиотеплолокационным измерениям атмосферного поглощения над континентом и океаном на ряде длин волн λ вблизи вращательного резонанса молекул H_2O , центрированного $k\lambda = 1,35$ см. Восстановление профилей влажности в работе осуществлялось методом статистической регуляризации. Обсуждается влияние дополнительной физической информации и различных априорных данных на точность решения задачи. Отмечается перспективность восстановления широкого класса профилей влажности по радиометрическим данным.

В настоящее время радиотеплолокационные методы исследования атмосферы получают все более широкое распространение. Непосредственный интерес для метеорологической практики представляют задачи, решаемые методами радиотеплолокации по определению как интегральных параметров атмосферы (полной массы водяного пара, водности облаков, интегрального содержания озона и других примесных компонент), так и вертикальных распределений метеоэлементов (температуры, давления, отдельных газовых компонент) по измерениям интегрального излучения (поглощения) радиации. В связи с тем, что большое значение при формировании погоды на планете принадлежит водяному пару, то задачи, связанные с исследованием полного влагосодержания атмосферы и распределения паров H_2O по высоте, являются одними из первоочередных.

Экспериментальные исследования влагосодержания выполняются со спутников и наземными способами, в радио- и инфракрасном диапазонах волн. Общее сопоставление методов пассивной локации атмосферы в радио- и инфракрасном диапазонах выполнено, в частности, в работе [1]. Здесь уместно еще раз упомянуть известные достоинства теплолокационных исследований атмосферы в радиодиапазоне, заключающиеся в наличии изолированных линий поглощения газов (H_2O , O_3 , CO и т. д.) в атмосферном спектре и в существовании узкополосной чувствительной приемной радиоаппаратуры. Указанные обстоятельства существенно упрощают интерпретацию физических результатов и позволяют получать метеорологическую информацию с хорошей степенью точности. Справедливость последнего утверждения относительно точности определения полной массы водяного пара при радионаблюдениях атмосферы сверху (со спутников и самолетов) и снизу (наземными способами) показана в работах [2-6].

Что касается возможностей восстановления вертикальных профилей влажности по радиоизмерениям теплового излучения, то они до сих пор были исследованы в гораздо меньшей степени, чем возможности получения интегральных характеристик атмосферы. Это объясняется, с одной стороны, тем обстоятельством, что задачи, связанные с восста-

новлением вертикальных профилей, оказываются более сложными в математическом аспекте, а с другой стороны, недостаточным количеством экспериментального материала, который необходим для исследований (или последовательным) радионаблюдениями атмосферы на нескольких (более двух) длинах волн вблизи резонансов поглощения водяного пара.

Тем не менее в работе [7] рассматривалась методика и был осуществлен численный эксперимент по восстановлению вертикального профиля влажности при возможных спутниковых наблюдениях теплового радиозлучения атмосферы в резонансе H_2O $\lambda = 1,35$ см над океаном. В [8] решена аналогичная задача для наземных радионаблюдений атмосферы и содержатся примеры определения вертикальных профилей влажности по измерениям поглощения радиоволн вблизи резонанса $\lambda = 1,35$ см, выполненным в континентальных условиях и условиях океана.

При всей общности постановки и решения задач о восстановлении вертикальных профилей метеоэлементов по измерениям излучения (поглощения) атмосферы в радиодиапазоне при наблюдениях сверху и снизу, следует отметить, что все-таки существуют принципиальные различия между этими двумя случаями. Для упомянутой задачи определения вертикального профиля влажности по радионаблюдениям атмосферы вблизи $\lambda = 1,35$ см это отличие касается не только конкретной записи исходных физических уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^H K(\lambda, h) \varphi(h) dh = f(\lambda) \quad (1)$$

($\varphi(h)$ — искомая функция высоты, K — ядро уравнения, f — измеряемая величина, λ — длина волны), которые определяются геометрией задачи и излучательной (поглощательной) способностью компонент, лежащих на луче зрения. Разница заключается также и в возможности задания некоторой дополнительной физической информации при решении задачи для случая наземной радиотеплолокации атмосферы. Поясним сказанное.

Решение обратных задач по восстановлению профилей влажности в работах [7, 8] осуществлялось методом статистической регуляризации, развитым в работах [9–11] (см. также обзор [12]). Суть метода состоит в том, что обычная система линейных алгебраических уравнений, к которой в конечном итоге сводится уравнение Фредгольма (1) и которая, как правило, оказывается плохо обусловленной системой (задача некорректна в строгом математическом смысле), доопределяется введением априорной информации о решении, носящей статистический характер. В качестве априорной информации используется автокорреляционная матрица влажности B_{qq} . При этом точное решение исходного интегрального уравнения (1) (которое, однако, в силу неустойчивости, может существенно отличаться от действительной реализации для конкретных измерений $f(\lambda)$) заменяется на некоторое приближенное, «регуляризованное» решение, которое также удовлетворяет соотношению (1), но уже в пределах ошибок измерений $f(\lambda)$.

Такая постановка задачи является вполне приемлемой для практики большого числа исследований и, в частности, для метеорологии. Результаты восстановления профилей удельной влажности $q(h)$ или $q(P)$ (P — атмосферное давление), полученные в [7, 8], свидетельствуют о перспективности такого направления работы при радиометрических измерениях атмосферного излучения. Для широкого класса профилей погрешность восстановления удельной влажности на высотах $h \leq 7$ км не превышает 8–15% [7, 8]. К числу проблем, стоящих перед практиче-

ской реализацией методов восстановления высотных профилей влажности по измерениям интегрального излучения атмосферы в инфракрасном и радиодиапазонах относятся пока трудности восстановления значений $q(P)$ в тех слоях атмосферы, где существуют большие градиенты влажности и инверсии. Такие «неудобные» для восстановления ситуации нередко имеют место в приземном слое (см. также [19]), поэтому возможности уточнения решения в нижних слоях атмосферы заслуживают пристального внимания. Целесообразным представляется и подробное исследование влияния априорной информации на точность восстановления профилей.

В [12] отмечалось, что детализация априорной информации по высоте по сравнению с достигнутым уровнем, которая может быть получена при более подробном аэрологическом зондировании атмосферы, сможет улучшить ситуацию, и это улучшение коснется, конечно, восстановления высотных профилей как по спутниковым, так и наземным измерениям атмосферного излучения. Однако при наземных измерениях существует и другая возможность некоторого улучшения решения обратной задачи (1) путем использования дополнительной информации о значении искомой величины в месте расположения приемной аппаратуры.

В настоящей статье иллюстрируются возможности восстановления высотных профилей влажности методом статистической регуляризации по наземным измерениям вертикального поглощения радиоволн в области вращательного резонанса водяного пара 5₋₁ — 6₋₅, центрированного к длине волны $\lambda = 1,35$ см, с использованием упомянутой дополнительной информации о влажности в месте расположения аппаратуры при различных средноклиматических профилях

Исходными данными для решения задачи служили экспериментальные значения вертикального поглощения радиоволн τ_λ в атмосферных парах воды, полученные с поверхности Земли в континентальных условиях (56°10'N, 44°17'E) и с борта НИС «Академик Курчатов» (V и VIII рейсы) [5, 6, 13, 14] при одновременном аэрологическом зондировании атмосферы. Методика соответствующих радиометрических измерений и выделения из полного вертикального поглощения компоненты, обусловленной водяным паром, описана в [6, 13]. Для восстановления влажности использовались результаты последовательных радионаблюдений атмосферы на 3—6 длинах волн в интервале $\lambda = 1,2 \div 1,6$ см (с общим временем наблюдения, 20—45 минут) для дней только с устойчивыми метеорологическими условиями и при отсутствии облаков.

Уравнение (1) для данной задачи записывается в виде [8]

$$1,02 \cdot 10^{-2} \int_{P_{\min}}^{P_0} \Psi_\lambda(P) q(P) dP = \tau_\lambda + \epsilon_\lambda. \quad (2)$$

Здесь τ_λ выражено в дб; q — в г/кг; P — в мбар; Ψ_λ — весовая функция коэффициента поглощения (см. [15, 16]); ϵ_λ — ошибка, связанная с измерениями τ_λ и расчетами ядра уравнения, т. е. с расчетами функции $\Psi_\lambda(P)$. Оценка возможных ошибок измерений и расчетов содержится в [8]. При решении задачи считалось, что вертикальное распределение температуры $T(P)$ в атмосфере известно.

Решение уравнения (2) в данной работе осуществлялось методом статистической регуляризации, изложенным в работах [11, 17]. Дополнительная информация о влагосодержании у поверхности Земли (океана) вводилась следующим образом:

1) влажность средноклиматического профиля у поверхности (при $P = P_0$) полагалась равной измеренной («истинной») влажности на этом уровне;

2) первый элемент матрицы B_{qq} , характеризующий дисперсию влажности у поверхности, был уменьшен практически до нуля (заменен на число $1 \cdot 10^{-4}$);

3) все остальные элементы первой строки матрицы B_{qq} уменьшились до величин порядка $1 \cdot 10^{-2} \div 1 \cdot 10^{-3}$, поскольку изменение дисперсии влажности у поверхности (см. п. 2) означает почти полное отсутствие вариаций влажности при $P = P_0$ независимо от значений вариаций влажности на остальных уровнях.

Наряду с определением величин $q(P)$ из уравнения (2) по незамкнутой схеме (с использованием измеренных величин τ_λ), нами в методических целях осуществлялся и численный эксперимент по восстановлению профилей влажности с использованием замкнутой схемы счета. В этом случае по вычисленным значениям $\{\Psi_\lambda(P)\}$ и известным из радиозондовых наблюдений величинам удельной влажности рассчитывалось вертикальное поглощение τ_λ . К полученному значению τ_λ прибавлялась случайная нормально распределенная ошибка ε_λ с дисперсией, равной 1% от значения $\bar{\tau}_\lambda$, соответствующего среднеклиматическому профилю $\bar{q}(P)$. Полученная сумма $\tau_\lambda + \varepsilon_\lambda$ использовалась в дальнейшем для восстановления величины $q(P)$ по замкнутой схеме.

На рис. 1—10 профили влажности, восстановленные по незамкнутой схеме счета, сопоставляются с результатами аэрологического зондирования атмосферы («истинным» распределением $q(P)$) и с результатами восстановления по замкнутой схеме. Сопоставление результатов, полученных по замкнутой схеме счета, с данными аэрологического зондирования позволяет судить об оптимальных возможностях восстановления по данному методу, в то время как сопоставление результатов восстановления по замкнутой и незамкнутой схемам свидетельствует о степени приближения, уже реализованного практически.

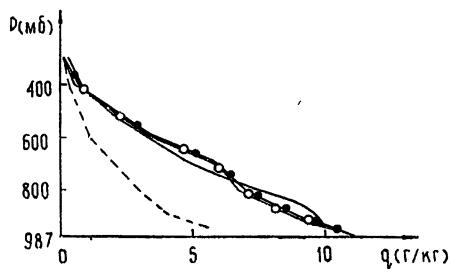


Рис. 1.

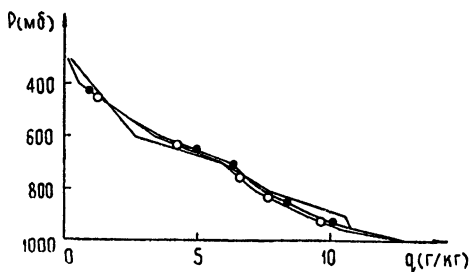


Рис. 2.

Рис. 1. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на шести длинах волн вблизи $\lambda = 1,35$ см над континентом ($56^{\circ}10'N$, $44^{\circ}17'E$), июль 1966 года: сплошная линия (1) — истинный профиль, $\bullet \bullet \bullet$ (2) — восстановление по замкнутой схеме, $\circ \circ \circ$ (3) — восстановление по незамкнутой (по результатам измерений) схеме, — — — (4) — среднеклиматический профиль \bar{q} , который использовался во всех расчетах для континентальных условий (см. рис. 2—4).

Рис. 2. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на четырех длинах волн вблизи $\lambda = 1,35$ см над континентом ($56^{\circ}10'N$, $44^{\circ}17'E$), июль 1966 г. Обозначения те же, что и на рис. 1.

Из приведенных результатов видно, что ошибка восстановления влажности при $P > 800$ мбар не превышает, как правило, 10%. С уменьшением давления ошибка восстановления несколько увеличивается, но при давлениях $P \geq 400$ мбар ($h \leq 7$ км) она все же составляет не больше 15 ÷ 20% для кусочно-монотонных профилей. Слой атмосферы, лежащий выше 7 км, дают в окрестности линии $\lambda = 1,35$ см незначительный вклад в вертикальное поглощение энергии τ_λ (см. [8]), поэтому с помощью наземной радиотеплодокации атмосферы вблизи вращательного

резонанса H_2O $\lambda = 1,35$ см можно восстанавливать профили влажности с указанной степенью точности именно до высот $h \approx 6 \div 7$ км.

Особый интерес представляют, как отмечалось выше, возможности восстановления профилей, обладающих значительными инверсиями. Введение дополнительной априорной информации о значении влажности у поверхности существенно улучшает восстановление приземных инверсий влажности. Благодаря введению дополнительной информации, решение уравнения (2) хорошо «чувствует» приземный инверсионный слой не только в качественном, но и в количественном отношении (погрешность восстановлений для ряда таких случаев также лежит в указанных пределах — $\pm 10\%$; см., например, рис. 3, 4). Однако инверсии влажности на уровнях $P \approx 600 \div 850$ мбар пока еще не восстанавливаются удовлетворительно (рис. 10).

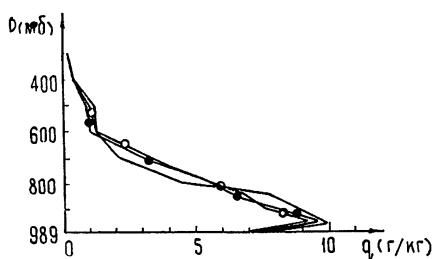


Рис. 3.

Рис. 3. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на шести длинах волн вблизи $\lambda = 1,35$ см над континентом ($56^{\circ}10'N$, $44^{\circ}17'E$), июль 1966 г. Обозначения те же, что и на рис. 1.

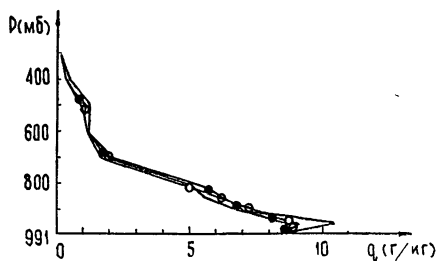


Рис. 4.

Рис. 4. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на четырех длинах волн вблизи $\lambda = 1,35$ см над континентом ($56^{\circ}10'N$, $44^{\circ}17'E$), июль 1966 г. Обозначения те же, что и на рис. 1.

В заключение отметим, что повышению точности восстановления профилей влажности способствует и использование в качестве априорной информации среднеклиматического профиля, который в достаточной степени отражает специфику высотного распределения влаги в том или ином географическом районе земного шара. В работе [8] при восстановлении профилей влажности в континентальных и океанических районах использовался один и тот же среднеклиматический профиль, который был получен из результатов аэрологического зондирования атмосферы

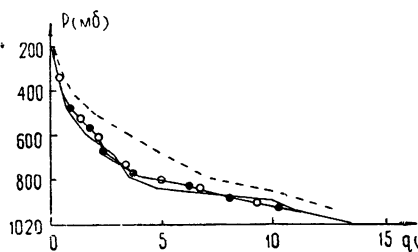


Рис. 5.

Рис. 5. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на четырех длинах волн вблизи $\lambda = 1,35$ см над океаном ($17^{\circ}10'N$, $33^{\circ}02'W$), июнь 1970 г. Обозначения 1, 2, 3 те же, что и на рис. 1; 4 — среднеклиматический профиль \bar{q} , который использовался во всех расчетах для океанических условий (см. рис. 6—10).

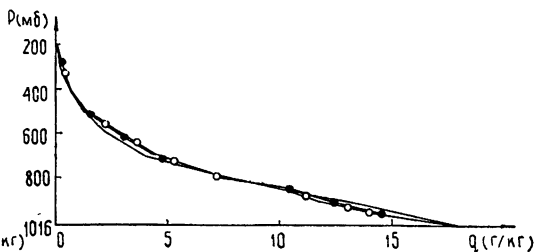


Рис. 6.

Рис. 6. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на четырех длинах волн вблизи $\lambda = 1,35$ см над океаном ($13^{\circ}21'N$, $50^{\circ}09'W$), март 1969 г. Обозначения те же, что и на рис. 1, 5.

только над континентом. Однако известно, что в океанических условиях нередко реализуются профили влажности с градиентами, по высоте в нижнем (приводном) слое примерно в 2—2,5 раза превышающими аналогичные градиенты в континентальных районах. Специфика высотного распределения влажности над океаном находит, естественно, отражение и в соответствующих радиохарактеристиках атмосферы (см., например, [18]). Поэтому в данной работе при восстановлении профилей влажности в континентальных и океанических условиях мы использовали различную априорную информацию. Так, при восстановлении профилей в континентальном районе использовались тот же средноклиматический профиль и матрица B_{qq} , что и в работе [8] (см. рис. 1), а для океанических условий — профиль и матрица B_{qq} , построенные по результатам аэрологического зондирования атмосферы над океаном в тропиках в летний период года (см. рис. 5).

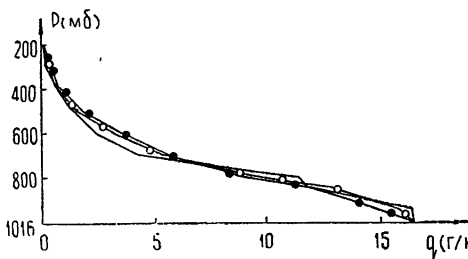


Рис. 7.

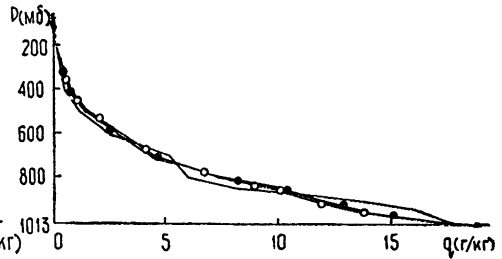


Рис. 8

Рис. 7. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на пяти длинах волн вблизи $\lambda=1,35$ см над океаном ($10^{\circ}47'N$, $51^{\circ}39'W$), март 1969 г. Обозначения те же, что и на рис. 1, 5.

Рис. 8. Восстановление по измерениям вертикального поглощения на пяти длинах волн вблизи $\lambda=1,35$ см над океаном ($8^{\circ}12'N$, $53^{\circ}11'W$), март 1969 г. Обозначения те же, что и на рис. 1, 5.

Приведенные результаты свидетельствуют, по нашему мнению, о широких возможностях восстановления в метеорологической практике профилей влажности по измерениям теплового излучения (поглощения) атмосферы в области резонанса водяного пара $\lambda=1,35$ см. Используемый в работе метод восстановления по измерениям вертикального излучения или поглощения атмосферы в радиодиапазоне, разумеется, может быть использован также при решении других обратных задач, в которых возможно введение дополнительной априорной информации,

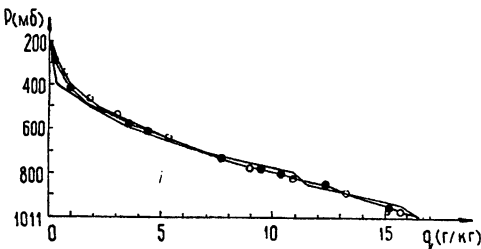


Рис. 9.

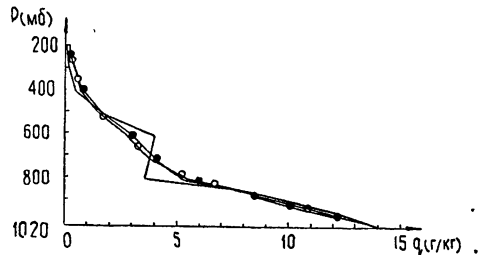


Рис. 10.

Рис. 9. Восстановление по измерениям вертикального поглощения радиоволн вблизи $\lambda=1,35$ см над океаном ($17^{\circ}23'N$, $33^{\circ}31'W$), август 1970 г. Обозначения те же, что и на рис. 1, 5.

Рис. 10. Восстановление по измерениям вертикального поглощения радиоволн вблизи $\lambda=1,35$ см над океаном ($16^{\circ}05'N$, $33^{\circ}10'W$), июнь 1970 г. Обозначения те же, что и на рис. 1, 5.

и, в частности, при определении высотного профиля температуры по наземным измерениям атмосферного излучения в области спин-вращательного резонанса молекулярного кислорода (см. [20, 21]).

Авторы признательны М. С. Малкевичу и А. С. Гурвичу за постоянное внимание к работе и обсуждение полученных результатов, а также И. А. Горчаковой за любезно предоставленную для работы матрицу.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 К. С. Шифрин, Ю. И. Рабинович, Г. Г. Шукин, *Метеорология и гидрология*, № 6, 10 (1969).
- 2 А. С. Гурвич, В. В. Демин, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 6, № 8, 771 (1970).
- 3 А. М. Обухов, А. Е. Башаринов, Ю. В. Васильев, А. С. Гурвич, В. В. Демин, С. Т. Егоров, Б. Г. Кутуза, Л. И. Малафеев, Д. Т. Матвеев, Л. М. Митник, Н. К. Федоров, *Космические исследования*, 9, № 1, 66 (1971).
- 4 Ю. И. Рабинович, Г. Г. Шукин, *Труды ГГО*, вып. 222, 62 (1968).
- 5 В. М. Плечков, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 5, № 9, 970 (1969).
- 6 В. М. Плечков, А. С. Гурвич, В. Г. Снопков, *ДАН СССР*, 193, № 5, 1041 (1970).
- 7 И. А. Горчакова, В. В. Демин, А. Т. Ершов, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 7, № 8, 841 (1971).
- 8 И. А. Горчакова, М. С. Малкевич, А. П. Наумов, В. М. Плечков, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 7, № 7, 731 (1971).
- 9 В. Ф. Турчин, *ЖВММФ*, 7, № 6, 1270 (1967).
- 10 В. Ф. Турчин, В. З. Нозик, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 5, № 1, 29 (1969).
- 11 И. А. Горчакова, М. С. Малкевич, В. Ф. Турчин, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 6, № 6, 565 (1970).
- 12 В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, *УФН*, 102, вып. 3, 345 (1970).
- 13 В. М. Плечков, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 4, № 2, 182 (1968).
- 14 В. М. Плечков, В. Г. Снопков, Ю. А. Романов, *ДАН СССР*, 200, № 5, 1081 (1971).
- 15 С. А. Жевакин, А. П. Наумов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 6, № 4, 674 (1963).
- 16 А. П. Наумов, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 4, № 2, 170 (1968).
- 17 В. Ф. Турчин, М. С. Малкевич, И. А. Горчакова, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 5, № 5, 449 (1969).
- 18 А. П. Наумов, В. М. Плечков, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 7, № 3, 352 (1971).
- 19 В. Б. Гласко, Ю. М. Тимофеев, А. В. Тихонравов, *Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана*, 7, № 6, 583 (1971).
- 20 E. R. Westwater, *J. Res. NBS*, 69D, № 9, 1201 (1965).
- 21 E. R. Westwater, 7-th international symposium on remote sensing of environment, *Summaries, USA*, May 17—21, 1971, p. 45.

Научно-исследовательский радиофизический институт,
Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию
30 июля 1971 г.

DETERMINATION OF VERTICAL PROFILE OF HUMIDITY FROM GROUND-BASED PASSIVE PROBING MEASUREMENTS OF THE ATMOSPHERIC ABSORPTION

A. T. Ershov, A. P. Naumov, V. M. Plechkov

The results are given of restoring the vertical profiles of humidity from ground-based passive probing measurements of the atmospheric absorption above the Earth and Ocean at a number of wavelengths λ near the rotational resonance of H_2O molecule centered to $\lambda=1,35$ cm. In this paper restoration of humidity profiles has been made by the method of statistical regularization. The influence of the additional physical information and various a priori data on the accuracy of the problem solution is discussed. It is noted that the restoration of a wide class of humidity profiles according to the radiometric data is perspective,

УДК 533.951

О ВЛИЯНИИ СОУДАРИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ ГАРМОНИК ЭЛЕКТРОННОЙ ГИРОЧАСТОТЫ

А. Е. Крупина

Рассматривается поперечное распространение плазменных волн в магнитоактивной плазме вблизи гармоник электронной гирочастоты при условии, что длина волны меньше гирорадиуса электрона. Кроме релятивистских эффектов [14], учитываются соударения электронов с другими частицами. Полученное дисперсионное уравнение анализируется в частных случаях слабых и сильных соударений, а также в зависимости от резонансной расстройки по частоте

1. Вопросы кинетической теории распространения высокочастотных волн в плазме перпендикулярно внешнему магнитному полю H_0 рассматривались неоднократно (см., например, статьи [1-4], монографии [5-7]). В последние годы в связи с наблюдением резонансов при верхнем зондировании ионосферы [8, 9] и при проведении ряда экспериментов с лабораторной плазмой [10, 11] возрос интерес к поперечному распространению волн в областях частот $\omega \approx n \omega_H$ (ω_H — гирочастота электронов, $n = 1, 2, 3, \dots$). В ряде работ, результаты которых приведены в обзоре [12], дано качественное объяснение наблюдаемых на гармониках гирочастоты резонансов за счет возбуждения медленных электростатических волн. Хотя в этих работах рассмотрен целый ряд особенностей таких волн, учету диссипативных процессов уделено недостаточно внимания. Имея в виду прежде всего ионосферные применения, нужно указать на необходимость учета соударений при анализе поведения показателя преломления вблизи гармоник гирочастоты.

В связи с вышесказанным в предшествующей работе [13] было рассмотрено влияние соударений и релятивистских эффектов на поперечное распространение обыкновенной и плазменной волн вблизи частот $\omega \approx n \omega_H$. При этом было принято, что $r_H/\lambda \ll 1$ (r_H — гирорадиус электрона, λ — длина волны). Если для обыкновенной и необыкновенной волн при $\omega \approx n \omega_H$ анализ случая $r_H \ll \lambda$ практически достаточен [14], то для продольных волн может реализоваться и обратное условие. Целью данного сообщения и является приближенный учет влияния соударений и релятивистских эффектов на поперечное распространение плазменных волн вблизи гирорезонансов электронов при $r_H/\lambda \gg 1$.

2. Дисперсионное уравнение для плазменных волн при поперечном распространении в областях частот $\omega \approx n \omega_H$ можно получить, используя метод, развитый в [14]. Считая плазменные волны чисто продольными и учитывая соударения электронов с другими частицами

в τ -приближении*, приходим к следующему дисперсионному соотношению:

$$1 - \mu \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} \frac{1}{\rho^{3/2}} \int_0^\rho \frac{\exp \left[-\mu \delta \left(\frac{\rho}{z} - 1 \right) - i \mu \frac{\nu}{\omega} \left(\frac{\rho}{z} - 1 \right) \right] e^{-z} I_n(z) dz}{z^{1/2}} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mu = \frac{m_0 c^2}{T}, \quad \rho = \frac{1}{\mu} \left(\frac{ck}{\omega_H} \right)^2, \quad \delta = 1 - \frac{n \omega_H}{\omega}.$$

В уравнении (1) использованы следующие обозначения: k — волновой вектор, ω_p — плазменная частота, T — температура в энергетических единицах, m_0 — масса покоя, ν — частота соударений электронов, I_n — модифицированная функция Бесселя. В отсутствие соударений ($\nu = 0$) уравнение (1) переходит в соответствующее выражение работы [14].

Как указывалось выше, анализ будет проводиться при $r_H/\lambda \gg 1$, т. е. $|\rho| \gg 1$. Предполагается также, что параметр $\mu = m_0 c^2/T \gg 1$. Поскольку нас интересуют волны, у которых λ мала по сравнению с гирорадиусом электронов, можно воспользоваться асимптотическим разложением функций $I_n(z)$ при больших значениях аргумента, что приведет к уравнению

$$\rho^{3/2} = \mu \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2 \sqrt{2\pi}} \int_{\rho'}^\rho \frac{\exp \left[-\mu \delta \left(\frac{\rho}{z} - 1 \right) - i \mu \frac{\nu}{\omega} \left(\frac{\rho}{z} - 1 \right) \right]}{z} dz, \quad (2)$$

где ρ' — некоторая величина, начиная с которой справедливо указанное выше разложение для $I_n(z)$. При условии $r_H \gg \lambda$ значение интеграла в (1) определяется в основном величинами $|z| \gg 1$. Можно показать, что при интегрировании в (1) больший вклад дает интервал от ρ' до ρ (по сравнению с интервалом $0 < z < \rho'$). Если $\rho \gg \rho'$ и, кроме того, $\ln \rho > \ln \rho'$, то значение интеграла в (2) определяется верхним пределом ρ с логарифмической точностью.

После интегрирования дисперсионное уравнение (2) принимает вид

$$\rho^{3/2} = \mu \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} e^\alpha \left\{ \text{Ei} \left(-\alpha \frac{\rho}{\rho'} \right) - \text{Ei}(-\alpha) \right\}, \quad (3)$$

где $\text{Ei}(-\alpha \rho/\rho')$, $\text{Ei}(-\alpha)$ — интегральные показательные функции комплексного аргумента, $\alpha = \mu \delta + i \frac{\nu}{\omega} \mu$.

3. Поведение показателя преломления плазменных волн вблизи резонансов $\omega \approx n \omega_H$ определяется, как видно из соотношения (3),

* Следует заметить, что релаксационная модель интеграла соударений в данном случае учитывает взаимодействие частиц лишь в грубом приближении. В работе [16] показано, что использование более строгой аппроксимации интеграла столкновений, позволяющей удовлетворить закону сохранения числа частиц, при учете влияния соударений на распространение волн вблизи гирорезонансов $\omega = n \omega_H$ не приводит к существенным отличиям по сравнению с релаксационной моделью. Использование в данной задаче точного интеграла столкновений в форме, предложенной Ландау (как это делается, например, в [17], § 21), представляет известные математические трудности.

функцией $f = e^\alpha \{Ei(-\alpha\rho/\rho') - Ei(-\alpha)\}$. Поскольку в общем виде проследить ее зависимость от параметров $\mu\delta$, $\mu \frac{\nu}{\omega}$ трудно, рассмотрим ряд частных случаев. Предварительно в выражении для f заменим $Ei(-\alpha\rho/\rho')$ и $Ei(-\alpha)$ через функцию Куммера $U(1; 1; x)$, используя известную связь интегральной показательной и вырожденной гипергеометрической функций [15]:

$$f = \exp\left(-\frac{\alpha\rho}{\rho'}\right) U\left(1; 1; \frac{\alpha\rho}{\rho'}\right) + U(1; 1; \alpha). \quad (4)$$

При выполнении неравенства

$$\left|\alpha \frac{\rho}{\rho'}\right| \ll 1 \quad (5)$$

выражение (4) приводится к виду [15]

$$f \approx \exp\left(-\frac{\alpha\rho}{\rho'}\right) \lg \frac{\alpha\rho}{\rho'} - \lg \alpha = \lg \frac{\rho}{\rho'}.$$

Считая величину ρ' экспоненциально малой по сравнению с ρ , получим оценку

$$f \approx \lg \rho.$$

Условие (5) может иметь место при достаточно малых соударениях, так что справедливо неравенство $\mu \frac{\nu}{\omega} = m_0 c^2 / T \frac{\nu}{\omega} \ll 1$, и при малой резонансной расстройке $|\mu\delta| \ll 1$.

При выполнении неравенства

$$|\alpha| \gg 1 \quad (6)$$

из соотношения (4) получим (см. [15])

$$f \approx \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\mu\delta + i \frac{\nu}{\omega} \mu}. \quad (7)$$

Случай (6) может реализоваться при $|\mu\delta| \gg 1$, т. е. при уходе от резонанса $\omega \approx n\omega_H$, а также при $\mu\delta=0$ (точно в резонансе), если при этом $\nu \neq 0$ и $\mu \frac{\nu}{\omega} = m_0 c^2 / T \frac{\nu}{\omega} \gg 1$, т. е. при достаточно больших соударениях.

Если в случае отсутствия столкновений показатель преломления для плазменной волны оценивался [14] как $|\rho|^{3/2} \sim \mu$, то учет соударений приводит к оценке $|\rho|^{3/2} \sim \mu/\alpha$. При достаточно больших соударениях показатель преломления существенно уменьшается. При использовании приближения (7) следует иметь в виду, что это уменьшение не приводит к нарушению основного условия $r_H/\lambda \gg 1$.

Автор благодарит Б. Н. Гершмана за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
2. Б. Н. Гершман, Докл. АН СССР, 137, № 4, 822 (1961).
3. I. V. Verstein, Phys. Rev., 109, 10 (1958).
4. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 40, 1494 (1961); 41, 1527 (1961).

5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1957.
6. T. H. Stix, The theory of plasma waves, New York, 1962.
7. W. P. Allis, S. J. Buchsbaum, A. Bers, Waves in anisotropic plasmas, Cambridge, 1963.
8. G. E. K. Lockwood, Can. J. Phys., 41, 190 (1963).
9. W. Calvert, G. B. Goe, J. Geophys. Res., 68, 6113 (1963).
10. G. Landauer, J. Nucl. Energy, Pt. C, 4, 395 (1962).
11. F. W. Crawford, G. S. Kino, H. H. Weis, Phys. Rev. Lett., 13, 229 (1964).
12. F. W. Crawford, Nucl. Fusion, 5, 73 (1965).
13. А. Е. Крупина, Э. В. Орлова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 6, 817 (1971).
14. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Н. В. Скрыдлов, ЖТФ, 33, 922 (1963).
15. Льюис Дж. Слейтер, Вырожденные гипергеометрические функции, изд. ВЦ АН СССР, М., 1966.
16. А. Е. Крупина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 849 (1970).
17. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, А. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, изд. Наука, М., 1964

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 мая 1971 г

INFLUENCE OF COLLISIONS ON PLASMA WAVE PROPAGATION NEAR ELECTRON GYROFREQUENCY HARMONICS

A. E. Krupina

The paper considers the transverse plasma wave propagation in a magnetoactive plasma near the electron gyrofrequency harmonics under the assumption that the wavelength is smaller than the gyro-radius of an electron. In addition to relativistic effects [14], the collisions of electrons with other particles are taken into account. The dispersion equation derived is analysed for particular cases of weak and strong collisions, as well as for the dependence on the resonance frequency detuning.

УДК 533.9.082

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗДЕЛЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПУЧКОВ. III.

Е. П. Богданов, Л. К. Орлов, Ю. А. Романов

Исследована двухпотоковая неустойчивость пространственно-разделенных плазменных пучков конечной толщины в квазигидродинамическом приближении. Показано, что в пучках конечной толщины область неустойчивости ограничена со стороны как малых, так и больших дрейфовых скоростей. Минимальная дрейфовая скорость, при которой возникает неустойчивость, может быть меньше соответствующей величины в полуграниченных пучках. С уменьшением толщины слоев максимум инкремента усиливаемых волн падает. Выявлено влияние диэлектрической прослойки между пучками на характер неустойчивости.

В предыдущих работах [1, 2] была исследована неустойчивость двух соприкасающихся полуграниченных плазменных пучков. Реализация подобной неустойчивости в полупроводниках связана с необходимостью введения диэлектрической прослойки между полупроводниковыми слоями для предотвращения пробоя в направлении, перпендикулярном слоям. Эта прослойка должна выдерживать достаточно большую поперечную разность потенциалов, т. е. быть достаточно толстой, с одной стороны, и обеспечивать необходимое для возникновения неустойчивости «зацепление» полей пространственно-разделенных пучков, т. е. быть достаточно тонкой, — с другой.

Из общих соображений ясно, что диэлектрическая прослойка, уменьшая эффективную область взаимодействия пучков, приводит к увеличению критической дрейфовой скорости, при которой возникает неустойчивость, и уменьшению инкрементов нарастания волн.

Влияние диэлектрической прослойки на характер неустойчивости пространственно-разделенных пучков впервые исследовалось в [3]. В названной работе рассмотрение ограничено элементарной теорией и поэтому указано лишь на тенденцию уменьшения инкремента усиливаемых волн с ростом толщины прослойки.

Другой немаловажный вопрос связан с учетом влияния конечности толщины пространственно-разделенных пучков на характер неустойчивости. В литературе этот вопрос не обсуждался.

В ограниченных пучках по сравнению с полуграниченными можно ожидать появления новых областей неустойчивости и уменьшения критической дрейфовой скорости. Последнее обусловлено уменьшением роли поперечной диффузии плазменных частиц и переходом ее из двумерной в одномерную при уменьшении толщины слоев.

Настоящая работа посвящена исследованию указанных вопросов в квазигидродинамическом приближении.

Для получения интересующих нас дисперсионных уравнений электромагнитных волн, распространяющихся в различных слоистых структурах, достаточно знать связь между нормальными и тангенциальными компонентами электрического поля на границах каждого слоя. Эта связь может быть найдена из решения уравнений Максвелла и линеаризованных квазигидродинамических уравнений движения плаз-

менных частиц при заданном механизме их взаимодействия с границами слоя. Взаимодействие плазменных частиц с границами слоя будем описывать условием

$$j_n|_s = 0, \quad (1)$$

где $j_n|_s$ — нормальная компонента плотности тока на границах слоя. Как и в предыдущих работах [1, 2], ограничимся рассмотрением квазистатических потенциальных E -волн.

Выберем декартову систему координат так, чтобы плоскость xy была параллельна границам слоя, а ось z — нормальна им. За направление оси x примем направление волнового вектора волны, распространяющейся в интересующем нас многослойном волноводе. Решая указанные выше уравнения с граничным условием (1), получим

$$E_x = i[\sigma(z - D_1)E_z(D_2) - \sigma(z - D_2)E_z(D_1)], \quad (2)$$

где

$$\sigma(z) = \frac{(\omega - k_1 v)(\omega - k_1 v + i\nu)}{(\omega - k_1 v)(\omega - k_1 v + i\nu) - \omega_0^2} \frac{\operatorname{ch} k_1 z}{\operatorname{sh} k_1 d} - \frac{k_1}{x} \frac{\omega_0^2}{(\omega - k_1 v)(\omega - k_1 v + i\nu) - \omega_0^2} \frac{\operatorname{ch} x z}{\operatorname{sh} x d}, \quad (3)$$

а

$$x = \{k_1^2 - 2[(\omega - k_1 v)(\omega - k_1 v + i\nu) - \omega_0^2]v_T^{-2}\}^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь D_1 и D_2 — координаты нижней и верхней границ слоя; d — его толщина; ω и k_1 — частота и волновой вектор волны; v , v_T , ω_0 , ν — дрейфовая скорость, тепловая скорость, плазменная частота и частота соударений носителей заряда пучка соответственно.

Дисперсионные уравнения для различных слоистых структур следуют из (2) и граничных условий

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad \epsilon_{01} E_z^{(1)} = \epsilon_{02} E_z^{(2)}, \quad (5)$$

где ϵ_{0j} — диэлектрическая проницаемость решетки j -го слоя.

1. ВЛИЯНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОСЛОЙКИ МЕЖДУ ПУЧКАМИ

Рассмотрим два полуограниченных пучка, разделенных диэлектрической прослойкой толщины d . Полагая в (2) $D_2 = \infty$ для верхнего слоя, $D_1 = -\infty$ для нижнего, $\omega_0^2 = 0$ для диэлектрической прослойки и используя граничные условия (5), получим следующее дисперсионное уравнение для потенциальных волн, распространяющихся в этой системе:

$$\prod_{j=1}^2 \left\{ \operatorname{cth} k_1 d + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{0j}} \left[\frac{(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i\nu_j)}{(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i\nu_j) - \omega_{0j}^2} - \frac{k_1}{x_j} \frac{\omega_{0j}^2}{(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i\nu_j) - \omega_{0j}^2} \right] \right\} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 k_1 d} = 0. \quad (6)$$

Здесь ϵ_0 , ϵ_{0j} — диэлектрические проницаемости решеток прослойки и полупроводниковых слоев, в которых движутся плазменные пучки, соответственно. В дальнейшем будем полагать $v_1 = 0$, $v_2 = v$, $\epsilon_{01} = \epsilon_{02}$.

Решения уравнения (6) качественно имеют тот же вид, что и для соприкасающихся пучков (см. [2]). Поэтому основной интерес представляет зависимость минимальной дрейфовой скорости v_k , при которой возникает неустойчивость, от толщины диэлектрического слоя d и его проницаемости ϵ_0 .

График зависимости $v_k(d)$ для значений параметров $v_{T2}/v_{T1} = 12$; $\omega_{02}/\omega_{01} = 4$; $\nu_1/\omega_{01} = 0,1$; $\nu_2/\omega_{01} = 10$; $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = \epsilon_0$ представлен на рис. 1. Как и ожидалось, с ростом d скорость v_k смещается в сторону больших значений. При малых d это смещение не очень велико. Например, для приведенных выше параметров и $d\omega_{01}/v_{T1} = 1$ (при $T = 77^\circ\text{K}$ и $n_{01} = 10^{12}\text{см}^{-3}$ это дает $d \sim 0,9\text{ мк}$) имеем $v_k \approx 0,7v_{T2}$ вместо $v_k = 0,5v_{T2}$ при $d = 0$. Данные толщины, как правило, полностью не предотвращают пробоя. Однако, поскольку время развития лавины $\sim 10^{-8}\text{ сек}$, она не успеет развиться, если работать в импульсном режиме.

На том же рис. 1 представлена зависимость $v_k(\epsilon_{01}/\epsilon_0)$ при значениях параметров $v_{T2}/v_{T1} = 12$; $\omega_{02}/\omega_{01} = 4$; $\nu_1/\omega_{01} = 0,1$; $\nu_2/\omega_{01} = 10$; $d\omega_{01}/v_{T1} = 1$. Приведенная кривая указывает на возможность выбора оптимального значения диэлектрической проницаемости прослойки (отношение диэлектрических проницаемостей не должно сильно отличаться от 1).

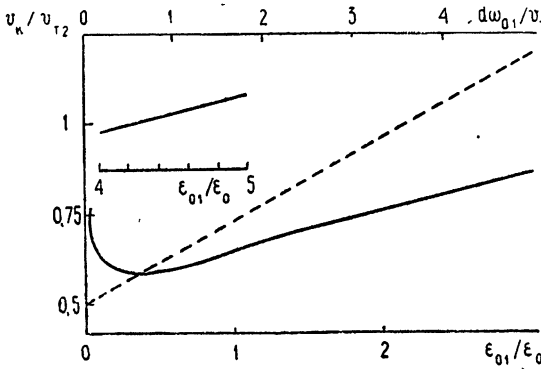


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость критической скорости от толщины и диэлектрической проницаемости прослойки; штриховая линия— $v_k(d)$, $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = \epsilon_0$; сплошная линия— $v_k(\epsilon_{01}/\epsilon_0)$, $d\omega_{01}/v_{T1} = 1$.

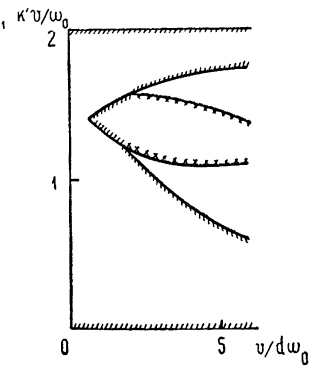


Рис. 2.

Рис. 2. Границы неустойчивости при $\nu = 0,01 \omega_0$.

2. ПУЧКИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим два плоских соприкасающихся полупроводниковых слоя толщиной d_1 и d_2 . Согласно (2)—(5) дисперсионное уравнение для потенциальных волн, распространяющихся в этой структуре, имеет вид

$$\left[\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_1(d_1)}{\epsilon_{01}} \right] \left[\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2(d_2)}{\epsilon_{02}} \right] \left[\frac{\sigma_1(d_1)}{\epsilon_{01}} + \frac{\sigma_2(d_2)}{\epsilon_{02}} \right] = \frac{\sigma_1^2(0)}{\epsilon_{01}^2} \left[\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2(d_2)}{\epsilon_{02}} \right] + \frac{\sigma_2^2(0)}{\epsilon_{02}^2} \left[\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_1(d_1)}{\epsilon_{01}} \right], \quad (7)$$

где ϵ_{01} , ϵ_{02} , ϵ_0 — диэлектрические проницаемости решеток полупроводниковых и ограничивающих их полубесконечных диэлектрических слоев. Толщины полупроводниковых слоев будем считать одинаковыми ($d_1 = d_2$).

Дальнейшее рассмотрение целесообразно сначала провести в приближении элементарной теории ($\nu_{T1} = 0$) для пучков с одинаковыми параметрами. При $\nu = 0$ для граничных кривых неустойчивости получаем в этом случае

$$\omega = k_1 v / 2,$$

$$k_1 v = 0, \quad k_1 v = 2\omega_0, \quad k_1 v = \sqrt{2}\omega_0 [1 \pm \exp(-2k_1 d)]^{1/2}. \quad (8)$$

Кроме этих кривых существует еще пара, для которых аналитическое выражение найти не удалось.

Граничные кривые для $\nu = 0,01 \omega_0$, рассчитанные на ЭВМ, представлены на рис. 2, а инкременты нарастания волн для $\nu = 0,01 \omega_0$ — на рис. 3, 4. Приведенные графики позволяют сделать определенные выводы относительно зависимости характеристик неустойчивых волн в данной структуре от толщины слоев.

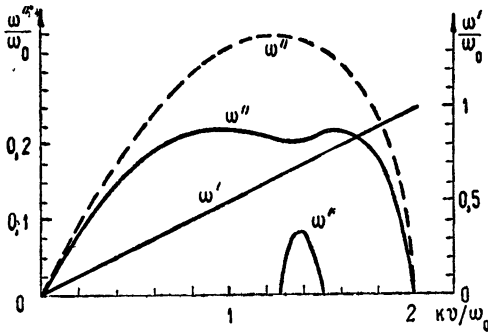


Рис. 3.

Рис. 3. Инкременты и частоты неустойчивых колебаний при $\nu = 0,01 \omega_0$; штриховая линия — $\nu/d \omega_0 = 0,5$; сплошная линия — $\nu/d \omega_0 = 1,5$.

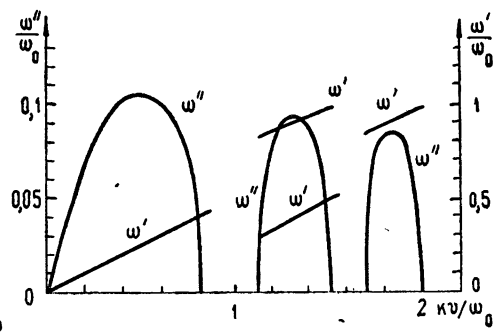


Рис. 4.

Рис. 4. Инкременты и частоты неустойчивых колебаний при $\nu = 0,01 \omega_0$; $\nu/d \omega_0 = 4$.

Для толстых слоев, $d \omega_0 / v > \tilde{d}_{кр}$, характеристики неустойчивых волн в ограниченных слоях близки к соответствующим характеристикам для полуограниченных пучков.

При уменьшении толщины слоев, $d \omega_0 / v < \tilde{d}_{кр}$, появляется вторая неустойчивая ветвь, локализованная вблизи волнового вектора $k_1 v / \omega_0 = \sqrt{2}$ и обладающая, как и первая ветвь, фазовой скоростью, равной $v/2$. Появление второй нарастающей ветви сопровождается провалом в инкременте первой волны. Для разных значений ν $\tilde{d}_{кр}$ порядка 1.

При толщинах, когда инкременты обеих волн сравниваются в окрестности $k_1 v / \omega_0 = \sqrt{2}$, существуют две неустойчивые волны с одинаковым инкрементом, но разными фазовыми скоростями (см. рис. 4). В системе центра масс эти волны распространяются в противоположных направлениях.

При еще меньших толщинах (например, при $\nu = 0,01 \omega_0$ $d \omega_0 / v < 0,5$) существуют три неперекрывающиеся области неустойчивости (см. рис. 4). В двух крайних областях, локализованных вблизи $k_1 v = 0$ и $k_1 v = 2\omega_0$, фазовые скорости равны $v/2$; в средней области существуют две волны с одинаковым инкрементом, но разными фазовыми скоростями. Увеличение частоты столкновений приводит к уменьшению инкрементов.

Наличие четырех нарастающих волн в плазменных пучках конечной толщины можно интерпретировать следующим образом. В каждом

изолированном плазменном слое (в приближении элементарной теории) существуют по два типа плазмонов—нормальные и тангенциальные [4]. Следовательно, в соприкасающихся слоях возможны четыре варианта взаимодействия волн, которые могут привести к неустойчивости пучков: 1) нормальный плазмон первого пучка—нормальный плазмон второго пучка; 2) нормальный плазмон первого пучка—тангенциальный плазмон второго; 3) тангенциальный плазмон первого пучка—нормальный плазмон второго; 4) тангенциальный плазмон первого пучка—тангенциальный плазмон второго пучка. При этом одной из связывающихся волн должно соответствовать возбуждение с положительной энергией, а другой—возбуждение с отрицательной энергией. Ясно, что такое разделение является грубым. В действительности в каждой нарастающей волне реализуются все четыре указанных варианта.

Нетрудно подметить еще одну особенность ограниченных пучков. Если для системы полуограниченных пучков максимальное значение временного инкремента (в элементарной теории) не зависит от дрейфовой скорости, то для ограниченных пучков наблюдается монотонно падающая зависимость ω''_{\max} от $v/d\omega_0$. При $v/d\omega_0 \rightarrow \infty$ область неустойчивости асимптотически исчезает.

На основании сказанного можно ожидать, что наличие теплового движения (диффузии) в пучках конечной толщины приведет к ограничению области неустойчивости не только со стороны малых, но и со стороны больших v (см. ниже).

Учитывая, что при уменьшении толщины слоев роль поперечной диффузии уменьшается, можно ожидать появления неустойчивости при дрейфовых скоростях, несколько меньших, чем в полуограниченных пучках. Однако поскольку и ограниченность пучков, и тепловое движение уменьшают инкременты, то следует ожидать, что максимальные инкременты нарастающих волн в ограниченных пучках будут меньше, чем в системе полуограниченных.

Рассмотрим теперь усиление волн в органических пучках с учетом тепловых эффектов и сравним полученные результаты с результатами работы [2], посвященной полуограниченным пучкам.

Как мы уже знаем [1, 2], в полуограниченных пучках тепловое движение (диффузия частиц) уменьшает инкременты усиливаемых волн и приводит к появлению минимальной дрейфовой скорости, при которой возникает неустойчивость. В пучках конечной толщины поперечная диффузия ослабляется наличием границ, поэтому можно ожидать некоторого уменьшения в них v_k . С другой стороны, как указывалось при $v/d\omega_0 \rightarrow \infty$, область неустойчивости асимптотически исчезает. Поэтому в пучках конечной толщины при наличии теплового движения область неустойчивости будет ограничена не только со стороны малых, но и со стороны больших дрейфовых скоростей. Наконец, тепловые эффекты приводят к появлению в слоях дополнительных (по отношению к выводам элементарной теории) плазменных волн. Часть этих волн может оказаться неустойчивой. С подобным явлением мы уже встречались при рассмотрении полуограниченных пучков [1].

Для количественного рассмотрения вопроса дисперсионное уравнение (7) было решено на ЭВМ для ряда параметров системы. На рис. 5 приведены граничные кривые при нескольких значениях безразмерной величины $d\omega_{01}/v_{T1}$. Из представленных кривых видно, что минимальная дрейфовая скорость, при которой возникает неустойчивость в пучках конечной толщины, несколько меньше, чем в полуограниченных пучках с теми же параметрами ($0,3 v_{T2}$ вместо $0,5 v_{T2}$). С уменьшением толщины пучков область усиления сужается и сдвигается в сторону более низких частот. Из-за относительно больших частот

столкновений в приведенных примерах новых (по сравнению с элементарной теорией) областей неустойчивости не возникает. Более того, тепловые эффекты «зарезают» две из трех областей неустойчивости, имеющих место в элементарной теории.

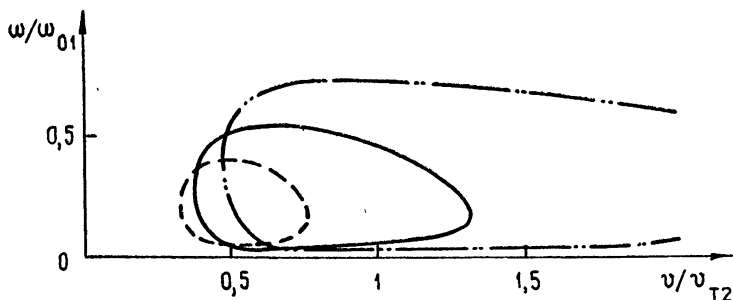


Рис. 5. Границы усиления в квазигидродинамическом приближении; штриховая линия — $d\omega_{01}/v_{T1} = 3$; сплошная линия — $d\omega_{01}/v_{T1} = 5$; штрих-пунктирная линия — $d\omega_{01}/v_{T1} = 10$; $v_{T2}/v_{T1} = 12$; $\omega_{02}/\omega_{01} = 4$; $\nu_1/\omega_{01} = 0,1$; $\nu_2/\omega_{01} = 10$.

На рис. 6 показан график зависимости максимума пространственного инкремента от величины дрейфовой скорости при значениях параметров $\frac{v_{T2}}{v_{T1}} = 12$; $\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = 4$; $\frac{\nu_1}{\omega_{01}} = 0,1$; $\frac{\nu_2}{\omega_{01}} = 10$; $\frac{d\omega_{01}}{v_{T1}} = 5$. Сравнение с рис. 7 работы [2] указывает на его уменьшение из-за ограниченности пучков (как и в элементарной теории), при сохранении качественного вида зависимости от параметров системы.

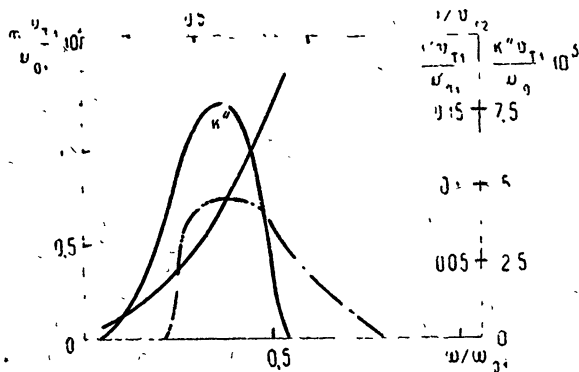


Рис. 6. Зависимость максимума пространственного инкремента от дрейфовой скорости. Зависимость действительной и мнимой части волнового вектора от частоты.

Штрих-пунктирная линия — $k''_m(v)$; сплошная линия — $k_1(\omega)$; $v/v_{T2} = 2/3$.

На том же рис. 6 в качестве примера приведена зависимость $k_1(\omega)$ для параметров $\frac{v_{T2}}{v_{T1}} = 12$; $\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = 4$; $\frac{\nu_1}{\omega_{01}} = 0,1$; $\frac{\nu_2}{\omega_{01}} = 10$; $\frac{v}{v_{T1}} = 8$ (ср. с соответствующей кривой работы [2]).

Приведенные в настоящей работе результаты указывают на возможность реализации двухпучковой неустойчивости в полупроводнико-

вых слоях при соответствующем выборе параметров системы. В случае реализации такой неустойчивости эти системы могут быть использованы в качестве усилителей СВЧ диапазона.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Е. П. Богданов, Л. К. Орлов, Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 228 (1971).
- 2 Е. П. Богданов, Л. К. Орлов, Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 6, 805 (1971).
- 3 V. V. Robinson, G. A. Swartz, J. Appl. Phys., 38, № 6, 2461 (1967).
- 4 Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 5, 828 (1964).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 мая 1971 г

INSTABILITY OF SPATIALLY-SEPARATED PLASMA BEAMS. III

E. P. Bogdanov, L. K. Orlov, Yu. A. Romanov

The two-stream instability of spatially-separated plasma beams of finite thickness in a quasi-hydrodynamic approximation. It is shown that if it is investigated the beams have the finite thickness, the instability region is limited both by small and large drift velocities. A minimum drift velocity at which the instability occurs may be smaller than the corresponding value in semi-bounded beams. The maximum of the increment of amplified waves decreases with decreasing the layer thickness. The influence of the dielectric sublayer between the beams on the instability is studied.

УДК 621.378

О ТЕМПЕРАТУРНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ЧАСТОТЫ КВАНТОВОЙ ЯЧЕЙКИ С ПАРАМИ Rb⁸⁷

*М. П. Беспалова, Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев, Б. П. Фатеев,
А. А. Ульянов*

Исследованы физические процессы, влияющие на температурный коэффициент частоты квантовой ячейки с парами Rb⁸⁷. Показано, что полный ТКЧ ячейки определяется составом газовой смеси, сдвигом частоты эталонного атомного перехода под действием света накачки и адсорбцией газовой смеси на внутренней поверхности ячейки.

Известно [1], что одной из основных частотных характеристик квантовой ячейки с парами Rb⁸⁷ является ее температурный коэффициент частоты (ТКЧ). Имеется несколько работ [2, 3], в которых рассматривается ТКЧ квантовой ячейки, определяемый составом газовой смеси. Однако, как показали исследования, представленные в настоящей статье, полный ТКЧ квантовой ячейки определяется также сдвигом частоты эталонного атомного перехода под воздействием света накачки и адсорбцией газовой смеси на внутренней поверхности ячейки. Ранее в литературе влияние указанных факторов на ТКЧ ячейки не рассматривалось. Однако, как будет показано ниже, они определяют как величину ТКЧ, так и температуру ячейки, при которой он равен нулю (нулевая точка).

1. ТКЧ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЙ СОСТАВОМ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Относительное смещение частоты ячейки на единицу давления газа-наполнителя можно определить выражением [4]

$$\frac{\Delta(T)}{P_0} = \alpha_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^m, \quad (1)$$

где α_0 — постоянная, зависящая от типа газа, P_0 , T_0 — давление и температура газа при наполнении ячейки. С учетом (1) для ТКЧ ячейки можно записать

$$\delta(T) = \frac{\alpha_0 m}{T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{m-1}. \quad (2)$$

Используя постоянные α и δ чистых газов, представленные в работе [1], из выражения (2) легко определить значения m . Например, для аргона и неона они соответственно равны

$$m_{\text{Ar}} = 1,8; \quad m_{\text{Ne}} = 0,2. \quad (3)$$

Тогда для ТКЧ аргон-неоновой смеси имеем

$$\delta_{\text{см}} = 1,8 \gamma_{\text{Ar}} \frac{\alpha_{\text{Ar}}}{T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{0,8} + (1 - \gamma_{\text{Ar}}) \frac{0,2 \alpha_{\text{Ne}}}{T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-0,8}, \quad (4)$$

где $\gamma_{Ar} = P_{Ar}/P_{см}$, P_{Ar} — парциальное давление аргона в ячейке, $P_{см}$ — общее давление газовой смеси.

Состав смеси, обеспечивающей нулевой ТКЧ, согласно (4), определяется выражением

$$\gamma_{Ar} = \frac{1}{1 - 9 \frac{\alpha_{Ar}}{\alpha_{Ne}} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,6}} \quad (5)$$

и, следовательно, определяется не только постоянными составляющих его компонент, но и рабочей температурой ячейки.

Погрешность выставления рабочей температуры ячейки определит ошибку воспроизведения ее ТКЧ:

$$d\delta_{см} \leq [1,44 \gamma_{Ar} \alpha_{Ar} + (\gamma_{Ar} - 1) 0,16 \alpha_{Ne}] \frac{dT}{T^2}. \quad (6)$$

При $dT \sim 1^\circ\text{C}$ выражение (6) дает $|d\delta_{см}| \leq 1 \cdot 10^{-12} \text{ тор}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$. Изменение состава газовой смеси должно смещать температурную точку, соответствующую нулевому ТКЧ, на величину

$$dT = \frac{1}{14,4 \gamma_{Ar}} \frac{\alpha_{Ne}}{\alpha_{Ar}} \left(\frac{d\gamma_{Ar}}{\gamma_{Ar}} \right) T_0. \quad (7)$$

Например, увеличение содержания аргона в смеси на 5% должно снизить нулевую температурную точку на 17°C .

Экспериментально (рис. 1) были измерены ТКЧ ячеек, наполненных смесями 40% Ar и 60% Ne (кривая 1) и 45% Ar, 55% Ne (кривая 2) при давлении 30 тор. Из рисунка видно, что увеличение содержания аргона на 5% привело к снижению нулевой точки на 11°C , что находится в хорошем согласии с расчетом.

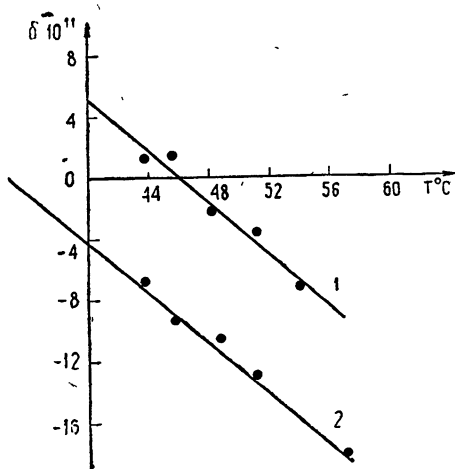


Рис. 1.

Рис. 1. Влияние процентного состава газовой смеси на ТКЧ ячейки

1 — смесь 40% Ar, 60% Ne, 2 — смесь 45% Ar, 55% Ne, $P=30 \text{ тор}$.

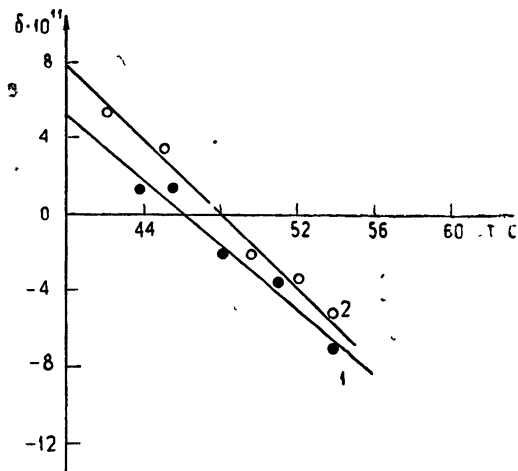


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость ТКЧ ячейки от температуры при различных давлениях газовой смеси (40% Ar, 60% Ne).

1 — $P=30 \text{ тор}$; 2 — $P=50 \text{ тор}$.

2. ВЛИЯНИЕ НА ТКЧ ЯЧЕЙКИ АДсорБИРОВАННЫХ НА ЕЕ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ГАЗОВ

Согласно (5) нулевая точка по ТКЧ не зависит от давления содержащегося в ячейке газа, но, как показали экспериментальные исследования (рис. 2), увеличение давления смеси 40% Ar, 60% Ne на 20 тор, смещает нулевую точку на 2°C. Это смещение можно объяснить адсорбционными свойствами газовой смеси. В ячейке, содержащей газ, часть его всегда адсорбируется на внутренней поверхности. Количество газа, адсорбированного в одном монослое внутренней поверхности при температуре T , определяется выражением [5]

$$a = 3,5 \cdot 10^{15} SP(TM)^{1/2} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_0}{RT}\right), \quad (8)$$

где M — масса атома, T, P — температура газа и его давление, \mathcal{E}_0 — энергия активации, S — коэффициент аккомодации (вероятность адсорбции атома поверхностью ячейки при столкновении с ней) [5]. Адсорбция на поверхности смеси газов происходит согласно правилу вытеснения [6], по которому газ в смеси адсорбируется меньше, чем вне смеси. Причем газ, более адсорбируемый вне смеси, больше адсорбируется и в смеси, т. е. для аргон-неоновой смеси, в которой $\gamma_{Ar} = \gamma_{Ne} \approx 0,5$,

$$a_{Ar}/a_{Ne} = 1/2. \quad (9)$$

Изменение давления газа в ячейке, обусловленное его адсорбцией на внутренней поверхности, приведет к изменению частоты, равному

$$\Delta f_{\text{адс}} = \beta_{Ar} a_{Ar} + \beta_{Ne} a_{Ne}. \quad (10)$$

Здесь β — постоянная, определяемая природой газа и геометрией ячейки [6]. Это изменение частоты ячейки приводит к существованию некоторого ТКЧ адсорбции, который, согласно (8) — (10), определяется выражением

$$\delta_{\text{адс}} \approx \frac{\Delta f_{\text{адс}} \mathcal{E}_0}{RT^2}. \quad (11)$$

Расчет ТКЧ адсорбции для ячейки с поверхностью 100 см, наполненной аргон-неоновой газовой смесью, с учетом одного монослоя на внутренней поверхности дает величину $\sim 8 \cdot 10^{-11}$ град⁻¹. Таким образом, экспериментально наблюдаемое смещение нулевой точки на 2°C при изменении давления на 20 тор можно объяснить увеличением количества атомов, адсорбированных на внутренней поверхности ячейки.

3. ВЛИЯНИЕ СВЕТА НАКАЧКИ НА ТКЧ ЯЧЕЙКИ

Известно [7], что взаимодействие атомов рубидия со светом накачки приводит к сдвигу частоты эталонного атомного перехода. Точное теоретическое определение этого сдвига связано с некоторыми математическими трудностями, и здесь мы лишь качественно покажем, что спектральный состав и интенсивность света накачки определяют ТКЧ квантовой ячейки с парами Rb⁸⁷.

В предположении, что в спектре накачки присутствуют лишь две сверхтонкие компоненты, соответствующие переходам $(5S_{1/2} F = 1 \leftrightarrow 5P_{3/2})$ и $(5S_{1/2} F = 2 \leftrightarrow P_{3/2})$, с учетом фильтрации сверхтонкой компоненты оптического излучения выражение для сдвига частоты можно представить в виде

$$\Delta f_{\text{св}} = \frac{I_0}{I} \left\{ \frac{\alpha_2}{k_{\phi} k_2} \exp(-k_2 l) - \frac{\alpha_1}{k_1} \exp(-k_1 l) \right\}, \quad (12)$$

где k_ϕ — коэффициент фильтрации, α_1, α_2 — коэффициенты, определяемые компонентами света накачки и условиями фильтрации, $k_1 = a_1 n(T)$, $k_2 = a_2 n(T)$ — коэффициенты поглощения сверхтонких компонент света накачки, l — длина ячейки, $n(T)$ — плотность атомов рубидия.

Сдвиг частоты (12) будет зависеть через плотность активных атомов от температуры ячейки и, следовательно, определять ее ТКЧ:

$$\delta_{св} = \frac{I_0}{l} \frac{dn}{dT} \frac{1}{n} \left\{ \alpha_1 \left(\frac{1}{k_1} + l \right) \exp(-k_1 l) - \frac{\alpha_2}{k_\phi} \left(\frac{1}{k_2} + l \right) \exp(-k_2 l) \right\} \quad (13)$$

При условии

$$k_\phi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1/k_2 + l}{1/k_1 + l} \exp[(k_1 - k_2)l] \quad (14)$$

ТКЧ за счет света накачки равен нулю.

Экспериментально была измерена зависимость полного ТКЧ ячейки от ее температуры при разных интенсивностях света накачки (рис. 3). Из рисунка видно, что световой ТКЧ дает значительный вклад в полный ТКЧ ячейки. Уменьшение интенсивности света на 20% существенно уменьшает наклон графика к оси температур.

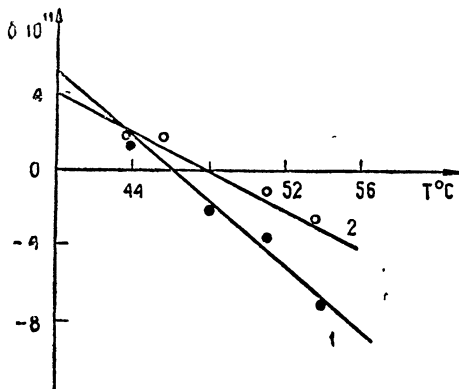


Рис. 3.

Рис. 3. Влияние интенсивности света накачки на ТКЧ ячейки.
1 — интенсивность света I_0 ; 2 — интенсивность света $0,8 I_0$.

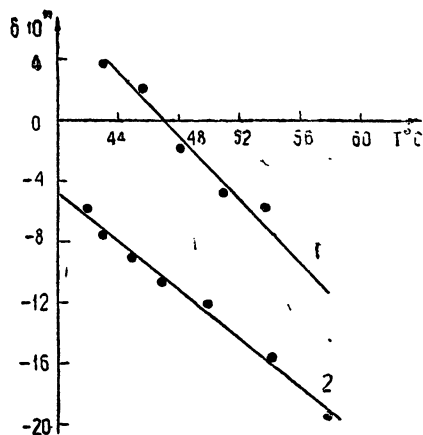


Рис. 4.

Рис. 4. Влияние температуры ячейки фильтра на ТКЧ ячейки.
1 — температура фильтра $\sim 53^\circ\text{C}$; 2 — температура фильтра $\sim 67^\circ\text{C}$.

Изменение режима фильтрации оптического излучения (например, изменение температуры ячейки-фильтра) сказывается как на положении нулевой точки, так и на величине полного ТКЧ ячейки (рис. 4). Сравнивая графики, представленные на рис. 3, 4, можно сказать, что на положение нулевой точки, в основном, влияет спектральный состав света накачки, который в значительных пределах меняется температурой ячейки-фильтра [7]. В то же время величину ТКЧ в большей степени определяет интенсивность света.

Таким образом, ТКЧ ячейки определяется составом газовой смеси, ее адсорбционными свойствами, условиями фильтрации и интенсивностью света накачки. При нахождении условий, обеспечивающих минимальный ТКЧ ячейки, необходимо рассматривать указанные выше факторы,

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Bender, E. C. Beaty, A. R. Chi, Phys. Rev Lett, 1, 311 (1958).
2. А. И. Пихтелев, М. П. Беспалова, Ю. М. Сапожников, Г. А. Мишаков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 5, 712 (1970).
3. Ю. Г. Гужва, В. С. Жолнеров, Вопросы радиоэлектроники, сер 12, вып. 20, 125 (1968).
4. Д. Хастед, Физика атомных столкновений, изд. Мир, М., 1965.
5. Г. Левин, Основы вакуумной техники, изд. Энергия, М., 1969.
6. М. М. Дубинин, Физико-химические основы сорбционной техники, Гостехиздат, Л., 1935.
7. Э. И. Алексеев, Е. Н. Базаров, А. Э. Левшин, Радиотехника и электроника, 14, № 11, 2026 (1969).

Поступила в редакцию
15 мая 1971 г.

THE TEMPERATURE COEFFICIENT OF THE FREQUENCY OF QUANTUM
CELL WITH Rb⁸⁷ VAPOURS

M. P. Bepalova, G. A. Mishakov, A. I. Pikhtelev, B. P. Fateev, A. A. Ul'yanov

Physical processes having effect on the temperature coefficient of the frequency of the quantum cell with Rb⁸⁷ vapours have been investigated. It is shown that the temperature coefficient of the frequency of the cell is determined by a composition of gaseous mixture, the frequency shift of etalon atom transition under the action of pumping light and the gas mixture adsorption on the inner cell surface.

УДК 538.56 535.2

КОРРЕЛЯЦИЯ СМЕЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

А. И. Кон

Рассчитана корреляционная функция смещений осей, пространственно-ограниченных пучков в турбулентной среде в общем случае, когда разнесены и точки входа их в среду, и точки наблюдения. Для турбулентной модели среды проведены конкретные оценки. Показано, что даже при разносах пучков гораздо больших, чем, их начальная ширина, корреляция смещений осей имеет заметное значение.

Для ряда приложений (оптическая связь, геодезические изменения и т. д.) представляет значительный интерес вопрос о смещениях центров тяжести пространственно-ограниченных пучков. Этот вопрос исследовался в работах [1-3], где изучалось поведение среднего квадрата флуктуаций положения центра тяжести изображения, определяемого формулой

$$\rho_c = \frac{\iint \rho I(\rho) d^2\rho}{\iint I(\rho) d^2\rho} \quad (1)$$

($I(\rho)$ — распределение интенсивности в плоскости приема). Нас будет интересовать корреляционная функция случайных «блужданий» центров тяжести пространственно-ограниченных пучков в турбулентной среде в случае, когда их невозмущенные оси, вообще говоря, не параллельны и составляют между собой некоторый угол φ . Задача, по постановке сходная с этой, рассматривалась в [4], где получено выражение для корреляционной функции поперечных смещений лучей, распространяющихся в турбулентной атмосфере.

Для решения поставленной задачи мы будем следовать, в основном, методике, предложенной в [2].

Пусть имеются два одинаковых световых пучка, центры которых разнесены на входе в турбулентную среду на вектор ρ_0 , а точки пересечения невозмущенных осей пучков с плоскостью наблюдения разнесены на некоторый вектор ρ (полагается, что плоскости наблюдения для обоих пучков совпадают).

Поле каждого из пучков задается в начальной плоскости (в общем случае не совпадающей с плоскостью OYZ) формулой

$$u_0(\rho) = A_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a_0^2} - \frac{ik\rho^2}{2F}\right), \quad (2)$$

где ρ — отклонение от оси пучка, $2a_0$ — начальный диаметр, а F — расстояние до центра излучения (если $F = \infty$, то фазовый фронт плоский — коллимированный пучок; если $F < 0$, то имеем пучок, расходящийся из точки $x = F$; если $F > 0$, то пучок фокусируется в точку $x = F$). Не ограничивая общности, будем считать пучки расположенными симмет-

рично относительно начала координат, а векторы ρ и ρ_0 лежащими в плоскости YZ (рис. 1). Тогда, используя результаты работы [2] (слу-

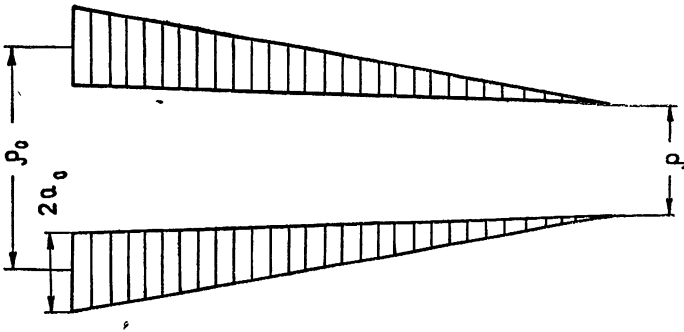


Рис. 1. Схематическое изображение фокусируемых пучков.

чай фокусировки $x = F > 0$), для случайного отклонения осей пучков от невозмущенного положения можно записать следующие выражения*:

$$\rho'_c = -\frac{F}{k\pi a_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\rho' - \rho_0/2)^2}{a_0^2}\right] \nabla_{\rho'} S_1\left(F, \frac{\rho}{2}; 0, \rho'\right) d^2 \rho'; \quad (3a)$$

$$\rho''_c = -\frac{F}{k\pi a_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\rho'' + \rho_0/2)^2}{a_0^2}\right] \nabla_{\rho''} S_1\left(F, -\frac{\rho}{2}; 0, \rho''\right) d^2 \rho'', \quad (3b)$$

где под функциями $S_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ понимается флуктуационный набег фазы в сферической волне, приходящей из некоторой точки \mathbf{r}_2 в точку \mathbf{r}_1 , причем в формулах (3а), (3б) у векторов $\mathbf{r}_{1,2}$ выделена продольная координата. Так как в дальнейшем речь пойдет только о плоскости $x = F$, мы в функциях $S_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ниже будем выписывать зависимость только от поперечных составляющих векторов.

Перейдем теперь в интегралах (3а), (3б) к новым переменным интегрирования:

$$\rho' - \frac{\rho_0}{2} = \rho_1, \quad \rho'' + \frac{\rho_0}{2} = \rho_2.$$

Используя равенства $\nabla_{\rho'} = \nabla_{\rho_1}$ и $\nabla_{\rho''} = \nabla_{\rho_2}$, получим

$$\rho'_c = -\frac{F}{k\pi a_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho_1^2}{a_0^2}\right) \nabla_{\rho_1} S_1\left(\frac{\rho}{2}; \rho_1 + \frac{\rho_0}{2}\right) d^2 \rho_1; \quad (4a)$$

$$\rho''_c = -\frac{F}{k\pi a_0^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho_2^2}{a_0^2}\right) \nabla_{\rho_2} S_1\left(-\frac{\rho}{2}; \rho_2 - \frac{\rho_0}{2}\right) d^2 \rho_2. \quad (4b)$$

* Совершенно аналогично тому, как это делается в [2], для вывода формул (3а), (3б) используется принцип Гюйгенса—Кирхгофа для слабонеоднородной среды [5], а также тот факт, что разность флуктуационных набегов фаз двух лучей, приходящих из различных точек начальной плоскости $x = 0$ в какую-либо точку фокальной плоскости (F, ρ) , существенно более плавная функция ρ , чем соответствующая экспонента в функции Грина.

Перемножая (4 а) и (4 б) и производя статистическое усреднение, получим для корреляционной функции смещений центров тяжести сфокусированных пучков

$$B_{\rho_c} \equiv \langle \rho'_c \rho''_c \rangle = \frac{F^2}{k^2 \pi^2 a_0^4} \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \exp\left(-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{a_0^2}\right) R(\rho_1, \rho_2; \rho_0, \rho), \quad (5)$$

где

$$R = \left\langle \nabla_{\rho_1} S_1\left(\frac{\rho}{2}, \rho_1 + \frac{\rho_0}{2}\right) \nabla_{\rho_2} S_1\left(-\frac{\rho}{2}, \rho_2 - \frac{\rho_0}{2}\right) \right\rangle.$$

Воспользовавшись свойством однородности флуктуаций фазы, легко получить, что функция $R(\rho_1, \rho_2; \rho_0, \rho)$ равна

$$R = \frac{1}{2} \Delta_{\rho_0} D_S(F, \rho; \rho_1 - \rho_2 + \rho_0), \quad (6)$$

где оператор Лапласа Δ действует на структурную функцию флуктуаций фазы сферических волн с разнесенными точками приема. Учитывая (6), формулу (5) можно переписать в виде

$$B_{\rho_c} = \frac{F^2}{2k^2 \pi^2 a_0^4} \int d^2 \rho_1 \int d^2 \rho_2 \exp\left(-\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{a_0^2}\right) \Delta_{\rho_0} D_S(F, \rho; \rho_1 - \rho_2 + \rho_0). \quad (7)$$

Учитывая теперь результаты работы [6], примем для структурной функции D_S следующее выражение:

$$D_S(x, \rho; r) = \pi^2 k^2 \int_0^x d\eta \int_0^\infty \left[1 + \cos \frac{x^2 \eta (x - \eta)}{kx}\right] \Phi_\varepsilon(x) \times \\ \times \left[1 - J_0\left(\frac{\eta}{x} x \left|\rho + \frac{x - \eta}{\eta} r\right|\right)\right] x dx. \quad (8)$$

Здесь $\Phi_\varepsilon(x)$ — трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Подставим в формулу (8) вместо бесселевой функции J_0 ее интегральное представление и вычислим входящий в (7) лапласиан:

$$\Delta_{\rho_0} D_S(F, \rho; \rho_1 - \rho_2 + \rho_0) = \frac{\pi k^2}{2F^2} \int_0^F (F - \eta)^2 d\eta \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty x^2 \Phi_\varepsilon(x) \times \\ + \left[1 + \cos \frac{x^2 \eta (F - \eta)}{kF}\right] \exp\left\{-\frac{\eta}{iF} x \left[\rho + \frac{F - \eta}{\eta} (\rho_1 - \rho_2 + \rho_0)\right]\right\} d^2 x. \quad (9)$$

Подставляя далее (9) в (7), меняя порядок интегрирования и вычисляя интегралы по ρ_1 и ρ_2 , получаем корреляционную функцию смещений центров тяжести в виде

$$B_{\rho_c} = \frac{\pi}{4} \int_0^F (F - \eta)^2 d\eta \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi_\varepsilon(x) \left[1 + \cos \frac{x^2 \eta (F - \eta)}{kF}\right] x^2 \times \\ \times \exp\left[-\frac{x^2 (F - \eta)^2 a_0^2}{2F^2} + \frac{i\eta}{F} x \left(\rho + \frac{F - \eta}{\eta} \rho_0\right)\right] d^2 x. \quad (10)$$

Выполняя интегрирование по угловой переменной и заменяя $\eta = Ft$, приходим к окончательному выражению для корреляционной функции:

$$B_{\rho c} = \frac{\pi^2 F^3}{2} \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_0^\infty \left[1 + \cos \frac{x^2 F}{k} t(1-t) \right] \Phi_\varepsilon(x) \times \\ \times \exp \left[-\frac{x^2 a_0^2 (1-t)^2}{2} \right] J_0 \left(x \left| \rho + \frac{1-t}{t} \rho_0 \right| t \right) x^3 dx. \quad (11)$$

Полагая, например, $|\rho| = |\rho_0| = 0$, мы получим отсюда выражение для среднего квадрата поперечного смещения сфокусированного пучка.

В дальнейшем мы будем использовать спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости $\Phi_\varepsilon(x)$, соответствующий «закону 2/3» Колмогорова — Обухова:

$$\Phi_\varepsilon(x) = A_0 C_\varepsilon^2 x^{-11/3} \quad (A_0 = 0,033). \quad (12)$$

Имея в виду (12), можно рассчитать средний квадрат «качания» сфокусированного пучка как единого целого:

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{A_0 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2\sqrt{2}} \pi^2 C_\varepsilon^2 F^3 (2a_0)^{-1/3} \int_0^1 (1-t)^{5/3} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left[\left(1 - \frac{it}{1-t} g \right)^{-1/6} \right] \right\} dt,$$

где $g = 2F/ka_0^2$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$g \ll 1 \quad (a_0 \gg \sqrt{\lambda F}) \quad (13)$$

(а именно, в этом случае фокусировка приводит к увеличению интенсивности на оси). Тогда

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{3 \Gamma(1/6) A_0 \pi^2}{8\sqrt{2}} C_\varepsilon^2 F^3 (2a_0)^{-1/3}. \quad (14)$$

Коэффициент корреляции смещений центров тяжести сфокусированных пучков естественно определить следующим образом:

$$b_{\rho c} = \frac{B_{\rho c}(\rho, \rho_0)}{\langle \rho_c^2 \rangle}. \quad (15)$$

В общем случае, при $\rho, \rho_0 \neq 0$, согласно (14) и (11), получаем при условии (13)

$$b_{\rho c} = \frac{8\sqrt{2} (2a_0)^{1/3}}{3 \Gamma(1/6)} \int_0^1 (1-t)^2 dt \int_0^\infty \exp \left[-\frac{x^2 a_0^2 (1-t)^2}{2} \right] x^{-2/3} \times \\ \times J_0 \left(x \left| \rho + \frac{1-t}{t} \rho_0 \right| t \right) dx. \quad (16)$$

Рассмотрим три частных случая формулы (16).

1) Пучки с параллельными осями, разнесенными в начальной плос-

кости на расстояние ρ . В этом случае $|\rho| = |\rho_0| = \rho$, и в результате вычисления внутреннего интеграла в (16) приходим к следующей формуле:

$$b_{\rho c} = \frac{8}{3} \int_0^1 t^{5/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a_0^2 t^2}\right) dt, \quad (17a)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При разное осей пучков, малом по сравнению с их шириной,

$$b_{\rho c} \approx 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\rho}{2a_0}\right)^2. \quad (17b)$$

При $\rho \gg 2a_0$

$$b_{\rho c} \approx \frac{8}{9 \cdot 2^{1/6} \Gamma(5/6)} \left(\frac{\rho}{2a_0}\right)^{-1/3}. \quad (17b)$$

2) Пучки, центры которых в начальной плоскости совпадают, а точки наблюдения в фокальной плоскости разнесены. Это соответствует, например, двухмодовому лазеру, когда моды фокусируются в разные точки. Положим в формуле (16) $\rho_0 = 0$, тогда для коэффициента корреляции справедлива формула

$$b_{\rho c} = \frac{8}{3} \int_0^1 (1-t)^{5/3} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a_0^2} \frac{t^2}{(1-t)^2}\right) dt. \quad (18a)$$

При малых $\rho \ll 2a_0$

$$b_{\rho c} \approx 1 - \frac{3}{5} \left(\frac{\rho}{2a_0}\right)^2, \quad (18b)$$

а при разностях, значительно больших, чем ширина $2a_0$,

$$b_{\rho c} \approx \frac{9}{2^{1/6} \cdot 5 \Gamma(5/6)} \left(\frac{\rho}{2a_0}\right)^{-1/3}. \quad (18b)$$

3) Рассмотрим теперь случай фокусировки разнесенных в начальной плоскости пучков в одну точку. Для этого надо в формуле (16) положить $\rho = 0$, тогда для коэффициента корреляции имеем

$$b_{\rho c} = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -\frac{\rho^2}{2a_0^2}\right). \quad (19a)$$

График этой функции представлен на рис. 2. При малых начальных разностях ($\rho \ll 2a_0$) коэффициент корреляции аппроксимируется формулой

$$b_{\rho c} \approx 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{2a_0}\right)^2, \quad (19b)$$

а при больших ($\rho \gg 2a_0$) —

$$b_{\rho c} \approx \frac{1}{2^{1/6} \Gamma(5/6)} \left(\frac{\rho}{2a_0}\right)^{-1/3}. \quad (19b)$$

Очевидно, наименьшее значение при одних и тех же $\rho/2a_0$ коэффициент корреляции имеет для пучков с параллельными осями. Сравни-

вая далее (19в) и (18в), мы видим, что коэффициент корреляции смещений двух мод при больших разносах ρ в 9/5 раза больше, чем для

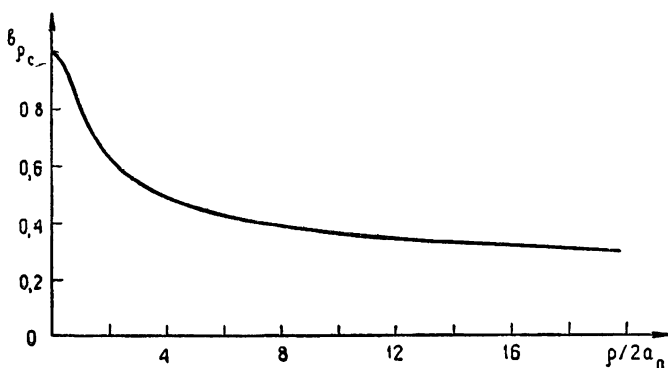


Рис. 2. Коэффициент корреляции смещений центров тяжести двух пучков, сфокусированных в одну точку.

случая фокусировки двух лазеров в одну точку. Это кажется естественным, если обратиться к простейшим геометрическим соображениям. Как легко видеть, пучки больше всего перекрываются во втором случае, что и объясняет более высокую корреляцию смещений их осей.

Характер убывания коэффициента корреляции при больших разносах таков ($\sim (\rho/2a_0)^{-1/3}$), что корреляция остается заметной величиной при довольно больших ρ .

Ясно, что используя полученную в этой работе корреляционную функцию, можно без труда написать выражение для среднего квадрата расстояния между центрами тяжести фокусируемых световых пучков.

Отметим в заключение следующий интересный факт. Как показывают расчеты, совершенно аналогичные приведенным выше, случайное смещение центра тяжести пространственно-ограниченного пучка, а следовательно, и корреляция смещений различных пучков в первом приближении не зависят от того, являются ли эти пучки сфокусированными, коллимированными или слаборасходящимися. Разумеется, это имеет место лишь в том приближении, в котором решалась задача, т. е. тогда, когда справедливы формулы (3 а), (3 б) (в частности, при длине трассы x и радиусе кривизны волнового фронта F , значительно превышающих начальный размер пучка $2a_0$).

Автор выражает свою признательность В. И. Татарскому за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1062 (1970).
4. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 2, 173 (1969).
5. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 886 (1969).
6. А. И. Кон, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 71 (1970).

CORRELATION OF DISPLACEMENTS OF SPATIALLY-BOUNDED LIGHT
BEAMS IN A TURBULENT MEDIUM

А. И. Кон

The correlation function of the axial displacements of spatially-bounded beams in a turbulent medium has been calculated for a general case when the points of beam entrance into the medium and the points of observation are spaced. Concrete estimations for a turbulent medium model have been made. It is shown that even at the beam separations being rather greater than their original width the correlation of the axial displacements is rather important.

УДК 535.224 : 538.56

ОБ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОСКОЙ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

В. И. Кляцкин

Показано, что результаты теоретических расчетов амплитудно-фазовых флуктуаций световой волны в случайно неоднородных средах, основанных на предположении о нормальном законе распределения уровня амплитуды поля с одновременным описанием градиента фазы в соответствии с МПВ, в области сильных флуктуаций противоречат эксперименту.

1. При распространении электромагнитных волн в случайно неоднородных средах флуктуируют как амплитуда, так и фаза волны. Экспериментальное изучение флуктуаций амплитуды волны в опытах по распространению света в турбулентной атмосфере [1-4] показало, что амплитудные флуктуации быстро нарастают с расстоянием (область слабых флуктуаций), вплоть до некоторого расстояния, начиная с которого флуктуации уровня амплитуды начинают убывать (область сильных флуктуаций). Распределение же вероятностей для уровня амплитуды [1] в обоих этих областях близко к нормальному распределению, однако «хвосты» этого распределения в настоящее время плохо изучены, хотя именно они и определяют распределение вероятностей для интенсивности волны.

Что касается флуктуаций угла прихода волны в точку наблюдения, связанных с флуктуациями фазы волны, то они хорошо описываются первым приближением метода плавных возмущений (МПВ) в области как слабых флуктуаций, так и сильных [5, 6]. Флуктуации амплитуды волны в области слабых флуктуаций так же хорошо описываются первым приближением МПВ, в то время как в области сильных флуктуаций становятся непригодными расчеты по теории возмущений [7].

В работах Татарского и автора [8-14] получены уравнения, которые позволяют описывать и область сильных флуктуаций, и развит математический аппарат их исследования. Метод получения этих уравнений основывается на аппроксимации процесса распространения волны в неоднородной среде марковским случайным процессом. В этом приближении для всех моментов волнового поля могут быть получены замкнутые уравнения. Однако аналитическое решение может быть получено только для среднего поля, для функции взаимной когерентности второго порядка, описывающей среднее распределение интенсивности, и для различных средних от произведения конечного числа $\tilde{\epsilon}(x_i, \rho_i)$ и интенсивности волны $I(x, \rho)$ ($\tilde{\epsilon}$ — флуктуации диэлектрической проницаемости).

Для определения статистических величин, связанных с более высокими моментами волнового поля, необходимо каким-либо образом находить приближенные решения указанных уравнений или привлекать некие вспомогательные данные относительно характера амплитудно-фазовых флуктуаций. В таких случаях обычно предполагают, что распреде-

ление вероятностей для уровня амплитуды удовлетворяет нормальному закону и что флуктуации градиентов фазы можно описывать на основе МПВ. Ниже будет показано, что результаты, полученные на основе совокупности этих двух предположений, не согласуются с экспериментальными данными.

2. Будем описывать распространение света в приближении скалярного параболического уравнения

$$2ik \frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} + \Delta_{\perp} u + k^2 \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) = 0, \quad (1)$$

где ось x выбрана по направлению распространения падающей волны, $\rho = \{y, z\}$, $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости, причем $\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$. Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться ниже, граничным условием к (1) является условие

$$u(0, \rho) = 1. \quad (2)$$

Следствием уравнения (1) является уравнение для интенсивности волны $I(x, \rho) = u(x, \rho) u^*(x, \rho)$, имеющее вид

$$k \frac{\partial I}{\partial x} + \nabla_{\perp} (I \nabla_{\perp} S) = 0, \quad I(0, \rho) = 1, \quad (3)$$

где $S(x, \rho)$ — флуктуации фазы волны относительно kx — фазы падающей волны, и уравнение для уровня амплитуды $\chi(x, \rho) = (1/2) \ln I(x, \rho)$ ($I = \exp \{2\chi\}$)

$$2k \frac{\partial \chi}{\partial x} + \Delta_{\perp} S + 2\nabla_{\perp} \chi \nabla_{\perp} S = 0, \quad \chi(0, \rho) = 0. \quad (4)$$

В работах [15–17] в приближении геометрической оптики исследовалось уравнение (4) в предположении, что для $\nabla_{\perp} S(x, \rho)$ можно использовать выражение из первого приближения МПВ, а в [18] на основе полной системы уравнений геометрооптического приближения рассматривался вопрос о возможности такой замены.

Фаза волны в первом приближении МПВ определяется выражением [7]

$$S(x, \rho) = \int dp S_p^0(x) \exp \{ip \rho\}, \quad (5)$$

$$S_p^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \tilde{\epsilon}_p(\xi) \cos \frac{p^2}{2k} (x - \xi).$$

Будем считать, что поле флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$ является однородным изотропным гауссовым случайным полем. В этом случае, усредняя (3) по ансамблю реализаций $\tilde{\epsilon}$, получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle I(x, \rho) \rangle = 2 \left\langle I \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\rangle = 0, \quad (6)$$

выражающее закон сохранения энергии в рассматриваемой задаче.

Умножая (3) на $\chi(x, \rho)$ и усредняя, получаем, с учетом (6) и пространственной однородности, соотношение

$$\langle \chi(x, \rho) I(x, \rho) \rangle = \frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_{\perp} I(\xi, \rho) \nabla_{\perp} S(\xi, \rho) \rangle. \quad (7)$$

Величины, стоящие в левой части (6) и (7), определяются одноточечным распределением вероятностей поля $\chi(x, \rho)$, а величина в правой части (7) связана с корреляцией $\nabla_{\perp} I$ с $\nabla_{\perp} S$.

3. Если одноточечное распределение вероятностей для $\chi(x, \rho)$ гауссово, то следствием (6) будет выражение

$$\langle \chi(x, \rho) \rangle = -\sigma_{\chi}^2, \quad (8)$$

где σ_{χ}^2 — дисперсия уровня, и в этом случае

$$\langle \chi I \rangle = \sigma_{\chi}^2. \quad (9)$$

Если же справедливо при расчете амплитудных флуктуаций предположение о возможности использования для $\nabla_{\perp} S$ выражения, полученного МПВ, то правую часть (7) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_{\perp} I(\xi, \rho) \nabla_{\perp} S^0(\xi, \rho) \rangle, \quad (10)$$

где величина $S^0(x, \rho)$ определяется формулой (5). Выражение (10) может быть вычислено в приближении марковского случайного процесса. В этом приближении реальная корреляционная функция $B_{\varepsilon}(x - x', \rho - \rho') = \langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \tilde{\varepsilon}(x', \rho') \rangle$ заменяется на эффективную корреляционную функцию

$$B_{\varepsilon}^{\text{эфф}}(x, \rho) = \delta(x) A(\rho). \quad (11)$$

Здесь

$$A(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_{\varepsilon}(x, \rho) = 2\pi \int dx \Phi_{\varepsilon}(x) \exp\{ix\rho\} \quad (12)$$

($\Phi_{\varepsilon}(x)$ — трехмерная спектральная плотность поля $\tilde{\varepsilon}(r)$ от двумерного вектора x).

В этом случае может быть получено замкнутое дифференциальное уравнение для величины $\langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \tilde{\varepsilon}(y, \rho_3) \rangle (x > y)$ с соответствующим граничным условием при $x = y$, аналогично тому, как это делается в работе [11]. Такое уравнение можно решить аналитически. Полагая затем в решении $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и действуя соответствующими операторами, мы определим (10). Выражение (10) можно вычислить и непосредственно, аналогично работам [10, 13], представляя интенсивность волны в операторном виде или в виде континуального интеграла, который после выполнения операции усреднения легко вычисляется.

Не приводя указанных выше выкладок, запишем непосредственно результат:

$$\frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_{\perp} I(\xi, \rho) \nabla_{\perp} S^0(\xi, \rho) \rangle = \frac{\pi}{k} \int_0^x dy \int dx \times$$

$$\times \frac{x^2 \Phi_\varepsilon(x)}{D\left[\frac{x}{k}y\right]} \sin\left[\frac{x^2 y}{k}\right] \exp\left\{-\frac{k^2}{4} \int_0^y d\xi D\left[\frac{x}{k}\xi\right]\right\} \times \quad (13)$$

$$\times \left[1 - \exp\left\{-\frac{k^2}{4}(x-y) D\left[\frac{x}{k}y\right]\right\}\right],$$

$$D(\rho) = A(0) - A(\rho).$$

Для флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$, вызванных турбулентными флуктуациями температуры, спектральная плотность $\Phi_\varepsilon(x)$ имеет вид [7]

$$\Phi_\varepsilon(x) = AC_\varepsilon^2 x^{-11/3}, \quad (14)$$

где $A = 0,033$ — численная постоянная, C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от метеорологических условий. В этом случае функция $D(\rho)$ имеет вид

$$D(\rho) = NC_\varepsilon^2 \rho^{5/3}, \quad N = \frac{36\pi^2 A \Gamma(7/6)}{5 \cdot 2^{2/3} \Gamma(11/6)} = 1,46, \quad (15)$$

и выражение (13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_\perp I(\xi, \rho) \nabla_\perp S^0(\xi, \rho) \rangle &= C_1 \int_0^1 \frac{dy}{y^{5/3}} \int_0^\infty dx x^{-7/3} \times \\ &\times \sin(x^2 y) \exp\left\{-\frac{3}{8} C_2 \sigma_0^2 x^{5/3} y^{8/3}\right\} \times \\ &\times [1 - \exp\{-C_2 \sigma_0^2 x^{5/3} y^{5/3}(1-y)\}], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\sigma_0^2 = \frac{9\pi^2}{55} \Gamma(1/6) \sin \frac{\pi}{12} AC_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}$ — дисперсия уровня амплитуды в первом приближении МПВ (величина, определяющая интенсивность флуктуаций амплитуды волны [7]), $C_1 = 0,45$, $C_2 = 4,72$.

В области очень сильных флуктуаций ($\sigma_0^2 \gg 1$) асимптотическое представление правой части (16) имеет вид

$$\frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_\perp I(\xi, \rho) \nabla_\perp S_0(\xi, \rho) \rangle \sim \ln \sigma_0. \quad (17)$$

Таким образом, мы видим, что при совместном использовании предположений о нормальном законе одноточечного распределения вероятностей для уровня амплитуды и о возможности замены $\nabla_\perp S$ на $\nabla_\perp S^0$, найденное МПВ,

$$\sigma_\chi^2 \sim \ln \sigma_0 \quad (\sigma_0^2 \gg 1), \quad (18)$$

что не соответствует экспериментальным данным о проведении σ_χ^2 в зависимости от σ_0^2 [1-4].

Отметим, что экспериментальное изучение поведения величины $\langle \chi I \rangle$ в зависимости от σ_0^2 может подтвердить справедливость первого или второго предположений или же несправедливость их обоих,

Более полную информацию относительно амплитудно-фазовых флуктуаций плоской световой волны можно получить, ограничиваясь случаем справедливости приближения геометрической оптики.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
2. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1360 (1968).
3. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 56 (1970).
4. М. И. Мордухович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 2, 275 (1970).
5. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 1, 66 (1968).
6. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 5, 723 (1969).
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
9. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, № 9, 952 (1969).
10. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 58, № 2, 624 (1970).
11. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1069 (1970).
12. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
13. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 60, № 4, 1300 (1971).
14. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
15. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 48 (1967).
16. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 2, 232 (1967).
17. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 55, № 2, 662 (1968).
18. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1506 (1969).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
28 июня 1971 г.

ON AMPLITUDE-PHASE FLUCTUATIONS OF A PLANE LIGHT WAVE IN THE TURBULENT MEDIUM

V. I. Klyatskin

It is shown that the results of theoretical calculations of amplitude-phase fluctuations of a light wave in randomly-inhomogeneous media contradict the experiment in a region of strong fluctuations. The results are based on the assumption of the normal law of the field amplitude distribution with a simultaneous description of the phase gradient in accord with the smooth perturbation method.

УДК 535.2

О ВЛИЯНИИ РАЗМЕРА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ФОРМИРОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

М. А. Каллистратова, А. И. Кон

Рассчитано влияние начального диаметра пространственно-ограниченного светового пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере, на интенсивность света на оси пучка. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие существование предельного значения интенсивности в центре пучка, не меняющегося при увеличении начального диаметра свыше некоторого значения.

Турбулентные флуктуации показателя преломления ухудшают эффективные параметры оптических систем, формирующих или принимающих световые волны в атмосфере. Так, реальная разрешающая способность больших телескопов при неблагоприятных атмосферных условиях оказывается в десятки и даже сотни раз хуже расчетной [1-2]. Величина эффективного диаметра приемного объектива при супергетеродинном приеме на горизонтальных приземных линиях связи может падать до нескольких миллиметров [3, 4]. Аналогичным образом турбулентность ухудшает возможность оптических систем, формирующих световые пучки.

Размытие светового пучка в атмосфере, приводящее к ухудшению отношения сигнал/шум в линиях связи, можно охарактеризовать, например, либо уменьшением коэффициента направленного действия оптической системы (подобно тому, как это принято для радиоантенн [5]), либо эффективным диаметром оптической системы. Обычно в теории флуктуаций в пространственно-ограниченных пучках [6-9] рассматривается гауссово распределение интенсивности в сечении пучка; такое распределение близко к реальному на выходе гелий-неонового лазера. Поэтому, принимая гауссово распределение интенсивности, мы в дальнейшем будем рассматривать не выходной диаметр оптической системы, а диаметр пучка на выходе системы $2a_0$, измеряемый на уровне половинной мощности.

Исследуем, пользуясь результатами [7, 8], влияние величины $2a_0$ на интенсивность света на оси пространственно-ограниченного пучка на расстоянии L от оптической системы. Для определенности рассмотрим фокусирующую оптическую систему с фокусным расстоянием F и будем считать $L = F$. Заметим на основании [8], что все полученные ниже формулы и оценки легко распространить на случай коллимирующей системы или системы, дающей слаборасходящийся монохроматический пучок. Влияние величины $2a_0$ проявляется двояким образом: с одной стороны, при фиксированном полном потоке $P_0 = \pi a_0^2 u_0^2$ интенсивность в центре пучка на расстоянии F растет пропорционально a_0^2 , а с другой стороны, с увеличением a_0 возрастает дефокусировка, т. е. размытие светового пятна из-за атмосферной турбулентности.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Средняя интенсивность $\langle I_F \rangle$

на оси пучка, как было показано в [7, 8], зависит от параметра μ , равного

$$\mu = D_s(2a_0) = 1,1 k^2 C_n^2 F(2a_0)^{5/3}. \quad (1)$$

Этот параметр совпадает со средним квадратом разности фаз на базе $2a_0$ в сферической волне, прошедшей расстояние F в однородной турбулентной среде ($k = 2\pi/\lambda$, C_n^2 — структурная характеристика флуктуаций показателя преломления). При этом $\langle I_F \rangle$ определяется формулой

$$\langle I_F \rangle = I_0(F, 0) \Phi(\mu) = \frac{u_0^2 k^2 a_0^4}{F^2} \Phi(\mu), \quad (2)$$

где $I_0(F, 0)$ — интенсивность в невозмущенной среде, u_0 — начальная амплитуда в пучке,

$$\Phi(\mu) = \int_0^\infty \exp \left\{ -z - \frac{1}{2} \mu z^{5/6} \right\} dz. \quad (3)$$

Используя упомянутый выше полный поток P_0 , выражение (2) можно переписать в виде

$$\langle I_F \rangle = \frac{k^2 a_0^2 P_0}{\pi F^2} \Phi(\mu). \quad (4)$$

Зависимость от начального размера пучка a_0 входит в эту формулу также через $\Phi(\mu)$, так как параметр μ зависит от a_0 . Подставляя a_0 из формулы (1), в (4) получим

$$\langle I_F \rangle = \frac{P_0 k^{-2/5}}{4\pi F^2 (1,1 C_n^2 F)^{6/5}} f(\mu), \quad (5)$$

где введено обозначение

$$f(\mu) = \mu^{6/5} \Phi(\mu)$$

Теперь начальный размер пучка входит в выражение для средней интенсивности только через параметр μ . Используя (3), можно показать, что функция $f(\mu)$ не имеет максимума и монотонно стремится к постоянному пределу, численно равному $f_\infty = 2,52$.

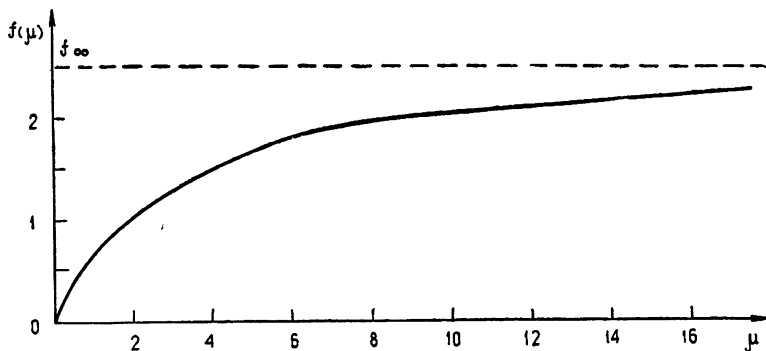


Рис. 1. Функция $f(\mu) = \mu^{6/5} \Phi(\mu)$.

График функции $f(\mu)$ представлен на рис. 1, асимптотическая формула, справедливая при больших μ , имеет следующий вид:

$$f(\mu) \sim \frac{6 \cdot 2^{6/5}}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{6(n+1)}{5}\right)}{n!} (-1)^n \left(\frac{\mu}{2}\right)^n = f_{\infty} - \frac{7,85}{\mu^{6/5}} + \dots \quad (6)$$

Предельное значение интенсивности при $f(\mu) = f_{\infty}$ равно

$$\langle I_F \rangle_{\infty} = \frac{0,088 P_0 \lambda^{2/5}}{F^2 Q^{6/5}}, \quad (7)$$

где $Q = C_n^2 F$. Существование предельного значения интенсивности при увеличении диаметра пучка следует также из результатов работы [9].

Поскольку $f(\mu)$ не имеет максимума, то, вообще говоря, не существует абсолютного значения оптимальной величины $2a_0$, ибо увеличение диаметра не может уменьшить интенсивность в фокальной плоскости. Однако можно вычислить такое значение $(2a_0)_{\alpha}$, при котором интенсивность в точке приема составляет от предельной некоторую долю α . При этом $(2a_0)_{\alpha}$ будет определяться соответствующим μ из соотношения (6)

$$\frac{7,85}{\mu_{\alpha}^{6/5}} = (1 - \alpha) f_{\infty}. \quad (8)$$

Из (8) находим

$$\mu_{\alpha} = 2,57 (1 - \alpha)^{-5/6}. \quad (9)$$

Так, например, если $\alpha = 0,9$, то $\mu_{\alpha} = 17,5$. Из (1) и (9) следует

$$(2a_0)_{\alpha} = \frac{0,96 \mu_{\alpha}^{3/5}}{(k^2 Q)^{3/5}} = \frac{1,69 (1 - \alpha)^{-1/2}}{(k^2 Q)^{3/5}}. \quad (10)$$

Если k измерять в $см^{-1}$, Q в $см^{1/3}$, то $(2a_0)_{\alpha}$ будет получено в сантиметрах.

На рис. 2 приведен график зависимости $(2a_0)_{\alpha}$ от параметра Q при $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$, $\alpha = 0,9$. Наиболее вероятными значениями величины C_n^2 в приземном слое атмосферы являются значения $10^{-15} \div 10^{-14} \text{ см}^{-2/3}$ (по данным [10]). При этом, как видно из рис. 3, при распространении излучения на горизонтальных приземных трассах протяженностью свыше 1 км ($Q \gtrsim 10^{-10}$) увеличение $2a_0$ до величин больше 6 см не оказывает практически влияния на интенсивность на оси пучка (при

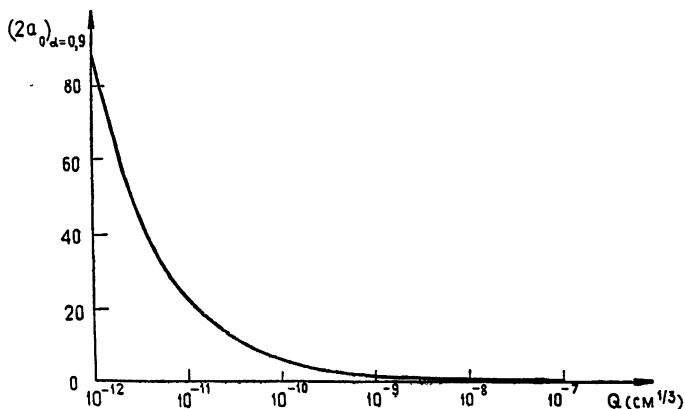


Рис. 2. Зависимость $(2a_0)_{\alpha=0,9}$ от параметра $Q = FC_n^2$.

гауссовом распределении интенсивности в пучке для этого достаточно использовать объектив диаметром не более $15 \div 20$ см). При распространении на более коротких трассах ($300 \div 500$ м) в условиях слабой турбулентности ($C_n^2 \leq 10^{-16}$ см $^{-2/3}$) величина диаметра выходной апертуры, соответствующего $\alpha = 0,9$, возрастает до $10 \div 40$ см.

Экспериментальные исследования дефокусировки при различных значениях $2a_0$ и Q проводились по измерению эффективного диаметра сфокусированного пятна $d_{эфф}$ [11] и по измерению средней интенсивности в фокусе системы $\langle I_F \rangle$ [12]. На рис. 3 данные, полученные по методике [11], представлены в виде, наглядно показывающем справед-

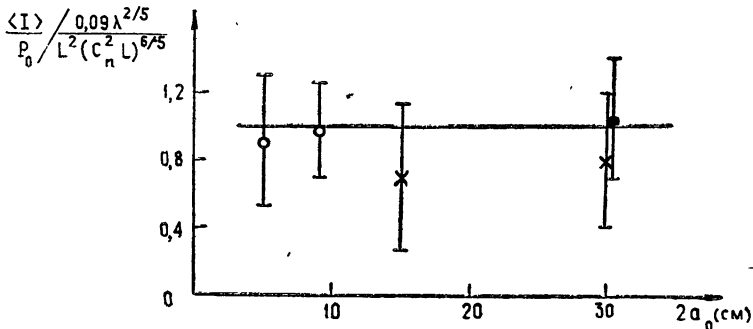


Рис. 3. Зависимость нормированной средней интенсивности в фокусе системы от начального размера пучка:

○ ○ ○ — по измерениям $d_{эфф}$ на трассе 250 м, × × × — по измерениям $\langle I_F \rangle$ на трассе 650 м [1], ● ● ● — по измерениям $d_{эфф}$ на трассе 1750 м. Вертикальными линиями обозначены 5-процентные доверительные интервалы.

ливость формулы (7). По оси абсцисс отложен начальный диаметр пучка (определявшийся по половинной интенсивности), а по оси ординат отношение $\langle I_F \rangle / P_0$ к величине $0,09 \lambda^{2/5} / F^2 Q^{6/5}$. Как следует из (7), это отношение должно быть равно единице, когда $f(\mu)$ достигает насыщения. На этот же график нанесены два значения из [12]. Условия, при которых получены представленные на графике значения, сведены в табл. 1.

Таблица 1

$L = F$ (м)	Высота над землей z (м)	Диапазон C_n^2 (10^{-14} см $^{-2/3}$)	Диапазон Q (10^{-10} см $^{1/3}$)	$2a_0$ (см)	Число измерений
250	0,75	0,6 ÷ 6	1,6 ÷ 15	5	6
				9	21
650	1	0,3 ÷ 3,5	1,8 ÷ 23	15	4
				30	15
1750	2	0,025 ÷ 4	0,4 ÷ 70	30	22

При этом величина μ всегда превышала 30, т. е. выполнялось условие $\mu > \mu_{\alpha=0,9}$. Рис. 3 подтверждает существование предельного значения интенсивности в пучке в реальной атмосфере при величине $2a_0 > (2a_0)_{\alpha=0,9}$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. С. Гурвичу и В. И. Татарскому за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Danjon, A. Couder, Lunettes et Telescopes, Paris, 1935.
2. П. В. Шилов, сб. Атмосферная оптика, изд. Наука, М., 1970, стр. 3.
3. J. Goldstein, P. A. Miles, A. Chabot, Proc. IEEE, **53**, № 9, 1172 (1965)
4. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 9, 1360 (1968).
5. Я. С. Шифрин, Вопросы статистической теории антенн, изд. Сов радио, М., 1970.
6. R. Schmetzer, Quart Appl. Math., **24**, № 4, 339 (1967).
7. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 1, 61 (1970).
8. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт, М., 1970
9. Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 7, 1097 (1970).
10. М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский, Изв. АН СССР, сер. Физика атм. и океана, № 1, 73 (1971).
11. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 8, 1200 (1971)
12. И. А. Старобинец, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати)

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
14 июня 1971 г.

ON THE INFLUENCE OF THE OPTICAL SYSTEM SIZES ON LIGHT BEAM FORMATION IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

M. A. Kallistratova, A. I. Kon

The influence of the initial diameter of a spatially-bounded light beam, propagating in the turbulent atmosphere, on the beam axis light intensity has been calculated. The experimental data supporting the existence of the limit value of intensity in the beam center are presented. This value does not vary with the growth of the initial diameter above a certain value.

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТАХ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ КАУСТИК

В. Г. Синицын

Рассмотрена дифракция скалярного волнового поля на экране, вызывающем случайную и регулярную модуляцию фазы. Регулярный фазовый набег обуславливает фокусировку поля, т. е. возникновение фокусов или каустических поверхностей. Показано, что при сильных флуктуациях фазы для расчета статистических моментов поля пригодна геометрическая оптика — даже в областях фокусировки, если особенность момента на каустике интегрируемая. Это справедливо, в частности, для средней интенсивности. При расчете более высоких моментов необходимо учитывать дифракционные эффекты. Получены оценки флуктуаций интенсивности в области каустической тени.

Многие задачи теории распространения волн в естественных условиях являются задачами о дифракции частично-когерентного поля. В качестве примера можно указать распространение оптического и радиоизлучения в межпланетной среде, в атмосферах звезд или планет. Случайные неоднородности коэффициента преломления среды порождают флуктуации параметров волны, в то время как его регулярные (крупномасштабные) изменения могут приводить к возникновению фокусов или каустик. Это особые области волнового поля, где не применима геометрическая оптика и существенны дифракционные эффекты с пространственным масштабом l_d (в окрестности простой каустики, например, $l_d = k^{-2/3} R_k^{1/3}$; R_k — радиус кривизны каустики, k — волновое число [1]).

При сильных флуктуациях дифракционная картина смазывается, и можно предположить, что для средних величин вновь окажется пригодной геометрическая оптика. Действительно, бесконечное значение интенсивности $I(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})u^*(\mathbf{r})$ на каустике (в фокусе) связано с обращением в нуль поперечника лучевой трубки, в которой переносится энергия поля. При учете дифракции лучевые трубки размываются, вновь обретая конечную ширину. Но такое же размытие может быть обеспечено флуктуационным разбросом лучей при рассеянии в турбулентной среде или на стохастическом экране. Поэтому при достаточно сильных флуктуациях фазы средняя интенсивность $\langle I(\mathbf{r}) \rangle$, рассчитанная по методу геометрической оптики, должна оставаться конечной всюду, в том числе и в областях фокусировки — в фокусе или на каустике.

Легко проверить это предположение, а также выяснить вопрос о более высоких статистических моментах поля, о которых ничего нельзя сказать априори ввиду отсутствия для них наглядных лучевых представлений.

1. Рассмотрим волновой пучок, распространяющийся в направлении z и прошедший фазовый экран в плоскости $z = 0$. Фаза поля на экране имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}') = -k\zeta(\mathbf{r}') + \varphi(\mathbf{r}'), \quad (1)$$

где $k\zeta(r')$ — регулярная компонента, а $\varphi(r')$ — случайная величина с нулевым средним.

Будем рассматривать простейшие фронты, приводящие к фокусировке поля. Пусть

$$\zeta(r') = \frac{x'^2}{2R_0} + \sigma x'^\beta \quad (\beta \geq 2)$$

(одномерный случай). При $\alpha = 0$ излучение концентрировалось бы на фокальной линии $x = 0$, $z = R_0$ (R_0 — фокусное расстояние). Второе слагаемое описывает абберации фокусирующей системы, которые в естественных «линзах» (земной атмосфере [3, 4], солнечной короне [5] и т. п.) велики. При $\beta = 3$ образуется гладкая (простая) каустика, при $\beta = 4$ — симметричная каустика с заострением и т. д. Вообще четным целым β соответствуют каустические поверхности, обладающие симметрией относительно плоскости $x = 0$ и не имеющие теневой области в фокальной плоскости $z = R_0$. При нечетных целых β каустики несимметричны: область $x \neq 0$, $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} \alpha$ является областью геометрической тени.

Луч, проходящий в точку наблюдения $r(x, z)$, описывается уравнением

$$x = x' + \frac{d\zeta}{dx'}(z - \zeta(x')). \quad (2)$$

В отсутствие флуктуаций распределение интенсивности в плоскости наблюдения определяется законом сохранения энергии

$$I(x, z) dx = I_0(x', z = 0) dx'.$$

Используя (2), получим отсюда для случая несимметричной каустики

$$I(x, R_0) = \begin{cases} \frac{2I_0}{(\beta-1)(\beta\alpha R_0)^{1/(\beta-1)} |x|^{1/(\beta-1)}}, & \operatorname{sgn} x = -\operatorname{sgn} \alpha \\ & \text{„свет“} \\ 0, & \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} \alpha \\ & \text{„тень“} \end{cases} \quad (3)$$

При $x \rightarrow 0$ эта функция имеет степенную особенность.

Следуя работе [2], предположим, что влияние неоднородностей экрана (флуктуаций фазы) приводит к случайным смещениям каустики относительно среднего положения, со стандартом $R_0 \sqrt{\langle \Theta^2 \rangle}$, где $\langle \Theta^2 \rangle$ — средний квадрат случайных наклонов эквифазной поверхности. Тогда статистические моменты интенсивности можно записать как

$$\langle I^{p/2}(x, R_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I^{p/2}(x - \xi, R_0) \omega_k(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где $\omega_k(\xi)$ — функция распределения положений каустики. Порядок p момента поля формально считается непрерывным параметром. За счет «блужданий» каустики граница «тень—свет» размывается, поэтому особенность распределения $I^{p/2}(x, R_0)$ сглаживается при усреднении, если только сходится интеграл

$$\langle I^{p/2}(x, R_0) \rangle = \frac{(2I_0)^{p/2}}{(\beta-1)^{p/2} (\beta\alpha R_0)^{p/2(\beta-1)}} \int_0^{\infty} \frac{\omega_k(t+x)}{t^{p[(\beta-2)/2(\beta-1)]}} dt \quad (\alpha > 0).$$

Для этого необходимо выполнение условия

$$p \frac{\beta - 2}{2(\beta - 1)} < 1, \text{ или } p < 2 \frac{\beta - 1}{\beta - 2}.$$

Из этой оценки очевидно, что в линзе без aberrаций ($\beta = 2$) все статистические моменты поля в фокусе можно рассчитывать по геометрической оптике. Уже в случае простой каустики ($\beta = 3$) такой расчет возможен только для моментов не выше третьего (в частности, для средней интенсивности $\langle I(r) \rangle^*$) (рис. 1).

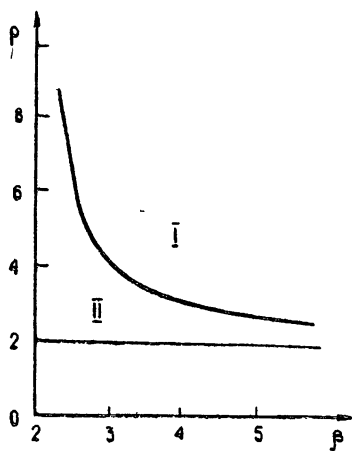


Рис. 1. I—геометрическая оптика не применима;
II—геометрическая оптика применима.

2. Рассмотрим, при каких условиях можно пренебречь дифракционными эффектами (т. е. устремить к нулю их пространственный масштаб l_d) при расчете второго момента. Перенос корреляционной функции комплексного поля u ,

$$W(r_{\perp}, z, \rho) = \langle u(r_{\perp} + \rho/2, z) u^*(r_{\perp} - \rho/2, z) \rangle,$$

описывается формулой

$$W(r_{\perp}, z, \rho) = \frac{k^2}{4\pi^2 z^2} \int W(r'_{\perp}, 0, q) \exp \left[i \frac{k}{z} (r'_{\perp} - r_{\perp}) q - i \frac{k}{z} \times \right. \\ \left. \times (r'_{\perp} - r_{\perp}) \rho \right] dq dr'_{\perp}. \quad (5)$$

Это выражение является формулировкой принципа Гюйгенса для корреляционной функции частично-когерентного поля [7, 8] в частном случае волнового пучка, амплитуда которого медленно изменяется поперек направления распространения. Корреляционная функция на экране, с учетом (1), имеет вид

$$W(r'_{\perp}, 0, q) = u_0(r'_{\perp} + q/2) u_0(r'_{\perp} - q/2) \exp \{ -ik [\zeta(r'_{\perp} + q/2) - \zeta(r'_{\perp} - q/2)] \} \langle \exp \{ i\varphi(r'_{\perp} + q/2) - i\varphi(r'_{\perp} - q/2) \} \rangle$$

(амплитуда u_0 не флуктуирует—фазовый экран).

При сильных фазовых флуктуациях ($\langle \varphi^2 \rangle \gg 1$) можно разложить функции $\varphi(r'_{\perp} \pm q/2)$, $\zeta(r'_{\perp} \pm q/2)$ в ряд по q_x, q_y , удержав члены не выше квадратичных, а значения $u_0(r'_{\perp} \pm q/2)$ взять при $q = 0$. Растянув до $\pm \infty$ пределы, интегрируем выражение (5) по q и получаем

* Это связано с одним общим свойством, которым обладают решения уравнений волнового типа, т. е. уравнений Гельмгольца, Шредингера и т. п. Применительно к задачам дифракции его можно сформулировать следующим образом:

$$\int |u(x, z)|^2 dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int |u_r(x, z)|^2 dx,$$

где $u_r(x, z)$ —геометрооптическое решение. Этим соотношением устанавливается переход к лучевому описанию полей в любой точке пространства [6].

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{r}_\perp, z, \rho) &= \frac{1}{z^2} \int I_0(\mathbf{r}'_\perp) \left\langle \delta \left(\frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{z} + \nabla \zeta(\mathbf{r}'_\perp) - \frac{\nabla \varphi(\mathbf{r}'_\perp)}{k} \right) \right\rangle \times \\
 &\quad \times \exp \left[-i \frac{k}{z} (\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp) \rho \right] d\mathbf{r}'_\perp = \\
 &= \frac{1}{z^2} \int I_0(\mathbf{r}'_\perp) \exp \left[-i \frac{k}{z} (\mathbf{r}'_\perp - \mathbf{r}_\perp) \rho \right] w \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x'} + \frac{x-x'}{z}, \frac{\partial \zeta}{\partial y'} + \frac{y-y'}{z} \right) d\mathbf{r}'_\perp,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $I_0(\mathbf{r}'_\perp) = u_0^2(\mathbf{r}'_\perp)$, а $w(\Theta_x, \Theta_y)$ — функция распределения случайных наклонов фазового фронта, $\Theta_x, \Theta_y = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}, \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right)$. Это соотношение можно назвать некогерентным принципом Гюйгенса для квадратичных величин.

При $\rho = 0$ (6) описывает перенос средней интенсивности $\langle I \rangle$: в точке наблюдения суммируются вклады от элементов экрана, взятые с весом, который зависит от угла

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_\perp) = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x'} + \frac{x-x'}{z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y'} + \frac{y-y'}{z} \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Это угол между нормалью к средней фазовой поверхности $\zeta(\mathbf{r}'_\perp)$ (средним лучом) и направлением из \mathbf{r}'_\perp в точку наблюдения. Очевидно, что такое описание соответствует геометрической оптике (с учетом случайного рассеяния) и изложенным выше представлениям.

Отбросив в разложении $\zeta(\mathbf{r}'_\perp \pm \mathbf{q}/2)$ по степеням \mathbf{q} высшие члены, мы по существу использовали метод стационарной фазы и нашли вклад от «светящихся» точек. При этом окончательные результаты не должны содержать характерных констант дифракционной теории, связанных с «диффузией» поля вдоль волнового фронта, т. е. углов дифракции $\Theta_0 = l_d/z \sim k^{-2/3} \zeta'''^{1/3}(x'_{эфф})$ (оценка Θ_0 для одномерного случая, $x'_{эфф}$ — действующий размер апертуры в (5)). Очевидно, это возможно лишь при

$$\Theta_0 \ll \sqrt{\langle \Theta^2 \rangle}.$$

Оценивая погрешность разложения при $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ (проще всего это сделать для нормального распределения φ), приходим также к требованию

$$\frac{1}{\langle \Theta^2 \rangle} \gg \Theta_0^2 \exp(-\langle \varphi^2 \rangle).$$

Таким образом, геометрооптический расчет среднеквадратичных характеристик флуктуирующего поля возможен при условиях [9]

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi^2 \rangle &\gg 1, \\
 1 &\ll \frac{\langle \Theta^2 \rangle}{\Theta_0^2} \ll \exp(\langle \varphi^2 \rangle).
 \end{aligned}$$

Если в формуле (6) $\rho \neq 0$, то она обобщает известную в оптике теорему ван Циттерта—Чернике [7].

3. Мерой флуктуаций интенсивности служит четвертый момент поля:

$$\delta I^2(\mathbf{r}) = \langle I^2(\mathbf{r}) \rangle - \langle I(\mathbf{r}) \rangle^2.$$

Для расчета $\langle I^2(\mathbf{r}) \rangle$ необходимо с самого начала устранить особенность функции $I(\mathbf{x} - \xi, \mathbf{R}_0)$ в (4) введением «обрезающего фактора» — дифракционных эффектов с конечным масштабом l_d . В работе [2] случайная интенсивность выражена через функцию Эйри — эталонную функцию в задачах дифракции вблизи простой каустики [1, 2]. При сильных фазовых флуктуациях можно получить более простые ответы:

Исходя из принципа Гюйгенса для комплексного волнового поля u , составим комбинации

$$\langle I^2(\mathbf{r}) \rangle = \langle u^2(\mathbf{r}) u^{*2}(\mathbf{r}) \rangle \text{ и } \langle I(\mathbf{r}) \rangle^2 = \langle u(\mathbf{r}) u^*(\mathbf{r}) \rangle^2.$$

Предположив нормальное распределение случайной фазы φ и ограничиваясь одномерным случаем

$$\zeta(x') = \frac{x'^2}{2R_0} + \frac{R_k}{6R_0^3} x'^3$$

(простая каустика), получим после несложных вычислений

$$J^2(x, R_0; \sigma) = I_0^2 \frac{R_0}{2\pi i l_d^3} \sqrt{\frac{2l_d}{R_k}} \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{-\infty-i0}^{\infty-i0} dx \times \exp \left\{ -i \frac{\chi^3}{6} - \frac{l_f^2}{l_d^2} \left[1 - \sigma \frac{K''(r)}{|K''(0)|} \right] \chi^2 - 2i \left[\frac{x}{l_d} + \frac{R_k r^2}{8 l_d R_0^2} \right] \chi \right\} \times \frac{1}{\left\{ \chi^2 - 2i \frac{l_f^2}{l_d^2} \left[1 + \sigma \frac{K''(r)}{|K''(0)|} \right] \chi - \frac{R_k r^2}{2 l_d R_0^2} \right\}^{1/2}}, \quad (7)$$

где $K(r)$ — корреляционная функция фазы φ , $K''(r) = \frac{d^2 K}{dr^2}$, $l_f = R_0 \sqrt{\langle \Theta^2 \rangle}$, а формальный параметр σ принимает значения 0 и 1, причем

$$J^2(x, R_0; \sigma) = \begin{cases} \langle I^2(x, R_0) \rangle & (\sigma = 1) \\ \langle I(x, R_0) \rangle^2 & (\sigma = 0) \end{cases}$$

В теневой области ($x > 0$) при выполнении неравенства $\langle \Theta^2 \rangle \gg \Theta_0^2$ (т. е. $l_f^2/l_d^2 \gg 1$) можно вычислить последовательно асимптотические значения интегралов по $d\chi$ и dr . При первом интегрировании эффективным большим параметром служит величина

$$\frac{l_f^6}{l_d^6} h(r) \equiv \frac{l_f^6}{l_d^6} \left[\frac{x l_d^3}{l_f^3} + \frac{R_k^2 l_d^2 r^2}{8 R_0^2 l_f^2} + \left(1 - \sigma \frac{K''(r)}{|K''(0)|} \right) \right]^2,$$

так как $h(r) \geq 1$ при любых r . Перевальный путь интегрирования параллелен действительной оси и проходит вдали от особых точек подынтегральной функции, если

$$\frac{l_f}{l_d} \ll \frac{x}{l_d} \ll \frac{l_f^4}{l_d^4} \quad (x \gg l_f \text{ — глубокая тень}).$$

В результате получим

$$J^2(x, R_0; \sigma) = I_0^2 \frac{R_0^2}{R_k x} \exp \left[-\frac{x^2}{(1+\sigma) l_f^2} \right] \left\{ \left[\frac{1-\sigma}{1+\sigma} + \frac{x l_d^3}{l_f^4} \frac{1+3\sigma}{(1+\sigma)^3} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[1 + 2 \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{K^{IV}(0) x R_0^2}{|K''(0)| R_k} \right]^{-1/2} \right\}. \quad (8)$$

Отсюда для средней интенсивности в тени простой каустики имеем ($\sigma = 0$)

$$\langle I(x, R_0) \rangle = I_0 \frac{R_0}{\sqrt{R_k x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l_f^2}\right). \quad (9)$$

Это выражение не зависит от l_d , т. е. соответствует геометрикооптическому расчету, как и должно было быть при $\langle \Theta^2 \rangle \gg \Theta_0^2$.

При $\sigma = 1$ получаем

$$\langle I^2(x, R_0) \rangle = I_0^2 \frac{R_0^2}{R_k x} \exp\left[-\frac{x^2}{2l_f^2}\right] \left\{ \frac{x l_d^3}{8l_f^4} \left[1 + \frac{K^{IV}(0)}{|K''(0)|} \frac{R_0^2 x}{R_k} \right] \right\}^{-1/2}. \quad (10)$$

В соответствии с проведенным выше качественным анализом, это выражение расходится, если устремить l_d к нулю.

4. Оценки величины флуктуаций $I(\mathbf{r})$ представляют интерес для радиоастрономии, где получил распространение метод исследования межпланетной среды по наблюдениям «мерцаний» космических радиосисточников [10–12]. При этом вводят нормированную величину

$$m = \left[\frac{\langle I^2(\mathbf{r}) \rangle - \langle I(\mathbf{r}) \rangle^2}{\langle I(\mathbf{r}) \rangle^2} \right]^{1/2},$$

называемую индексом мерцаний.

Как видно из (8), в области каустической тени $\langle I^2(x) \rangle$ уменьшается медленнее, чем $\langle I(x) \rangle^2$, вследствие различия в показателях экспоненты $\exp\left[-\frac{x^2}{(1+\sigma)l_f^2}\right]$. Поэтому индекс мерцаний m должен воз-

растать при углублении наблюдателя в теневую область, например, при наблюдении мерцаний на неоднородностях околосолнечной плазмы. Однако в экспериментах этот эффект не был отмечен. Напротив, с уменьшением углового расстояния между источником и Солнцем индекс мерцаний заметно падает [10, 12]. По-видимому, это можно объяснить двумя причинами. Во-первых, указанные наблюдения проводились на высоких частотах (85 Мгц и выше), так что на уровне земной орбиты наблюдатель находился в «освещенной» области вдали от каустики, и влияние последней еще не сказывалось. Во-вторых, при рассеянии излучения в короне увеличивается видимый угловой размер источника, «замывая» мерцания.

Приблизиться к каустике и попасть в теневую область можно, увеличивая длину волны наблюдений (до $\lambda \approx 10$ м) [5]. Однако при этом влияние рассеяния также возрастает ($\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} \sim \lambda^2$). Чтобы выяснить, существует ли область параметров, в которой указанный эффект наблюдаем, необходим более строгий анализ $\langle I^2(\mathbf{r}) \rangle$ с учетом протяженности турбулентной среды.

В заключение автору приятно поблагодарить П. В. Блюха за постоянное внимание к работе и помощь, а также Ф. Г. Басса и И. М. Фукса за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, ГИФМЛ, М., 1962.
2. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1500 (1969).
3. А. Я. Усиков, П. В. Блюх, Геомагнетизм и аэрономия, 2, 293 (1962).
4. T. Golel, G. Silvers, Planet. and Space Sci., 16, 999 (1968).
5. П. В. Блюх, В. Г. Сеницын, И. М. Фукс, Астрон. ж., 46, 348 (1969).

6. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
7. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
8. G. B. Parrent, J. Opt. Soc. America, **49**, 787 (1959).
9. P. V. Vliokh, V. G. Sinitsin, Доклад на международном симпозиуме по антеннам и распространению волн (1971 ISAP, Japan), Sept 1—3, 1971, Sendai Japan.
10. E. E. Salpeter, Astrophys. J., **147**, 433 (1967); M. H. Cohen, E. J. Gundersmann, Astrophys. J., **155**, 645 (1969)
11. Т. Д. Антонова, В. В. Виткевич, В. И. Власов, ДАН СССР, **168**, 55 (1966)
12. L. T. Little, A. Hewish, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **134**, 222 (1969).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
27 июля 1971 г.

STATISTICAL MOMENTS OF THE WAVE FIELD IN THE PRESENCE OF CAUSTICS

V. G. Sinitsin

The paper considers diffraction of a scalar wave on a thin screen changing the phase both randomly and in a regular manner. The regular phase modulation causes focusing of the field, i. e. foci and/or caustic surfaces. If the phase fluctuations are strong, then some of the field's statistical moments can be calculated by the ray optics everywhere including the regions of focusing, provided the singularities are integrable. This is true, in particular, for the average intensity. To calculate the higher-order moments it is necessary to take into account the effects of diffraction. Expressions have been obtained for the intensity fluctuations in the caustic shadow.

УДК 621.373.42

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

А. Н. Малахов, Н. Н. Солин, А. Л. Фабрикант

Приведена оценка минимальных величин дисперсии естественных и технических амплитудных флуктуаций и естественной ширины спектральной линии обычного и кварцевого автогенераторов, соответствующая оптимальной величине обратной связи. Проведено сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными.

1. Как известно (см., например, [1]), дисперсия амплитудных флуктуаций автогенератора $\langle \alpha^2 \rangle$ и ширина его спектральной линии $\Delta\Omega$ зависят от многих параметров (от мощности автоколебаний, прочности предельного цикла, величины обратной связи и т. д.). В свою очередь, эти параметры зависят от степени возбуждения генератора, т. е. от величины превышения обратной связи над пороговым значением.

При малом превышении над порогом мощность автоколебаний и прочность предельного цикла имеют небольшую величину. Это приводит к большим значениям $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$. С другой стороны, при росте превышения обратной связи величины $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$ возрастают из-за увеличения связи шумящего активного элемента (лампы, транзисторы и т. д.) с контуром. Следовательно, должны иметь место некоторые оптимальные значения превышения, минимизирующие $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$. Настоящая работа посвящена оценке этих минимальных величин $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$.

2. Естественные флуктуации в томсоновском генераторе, обусловленные дробовыми шумами лампы*, характеризуются следующими значениями (см., например, [1]) $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$:

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_1^4}{4R_0^2 \rho} eJ_0 \Gamma^2 M^2, \quad \Delta\Omega = \frac{\pi\omega_1^4}{4R_0^2} eJ_0 \Gamma^2 M^2. \quad (1)$$

Здесь $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и R_0 — частота и амплитуда автоколебаний, ρ —

прочность предельного цикла, $\frac{1}{2\pi} eJ_0 \Gamma^2$ — спектральная плотность дробовых шумов, M — коэффициент взаимной индукции цепи обратной связи.

Введем параметр превышения обратной связи над пороговым значением $\epsilon = \frac{MS}{rC} - 1$ (генератор устойчиво возбужден при $\epsilon > 0$). Будем изменять величину ϵ , полагая r , S и C неизменными. Тогда, с учетом зависимости R_0 , M , ρ от ϵ , выражения (1) примут вид,

$$\langle \alpha^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle_0 \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon)^2 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right); \quad (2)$$

* Во многих реальных схемах тепловые шумы схемы незначительны по сравнению с дробовыми.

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_0(1 + \varepsilon)^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3)$$

где $\langle \alpha^2 \rangle_0 = \frac{3}{16} \beta_0 \frac{eJ_0 \Gamma^2 \Pi}{S^2}$, $\Delta\Omega = \frac{3}{16} \beta_0 \pi \frac{eJ_0 \Gamma^2 \Pi^2}{S^2}$, $\Pi = \frac{\omega_1}{Q}$ —

полоса колебательного контура, Q — его добротность и β_0 — коэффициент нелинейности лампы. Точно такие же выражения для $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$ имеют место и для одноконтурных ламповых кварцевых автогенераторов [2], только в этом случае $\varepsilon = \frac{mS}{\Pi_k} - 1$, где $m = \frac{C_k}{CC_1 + CC_s + C_1C_s}$,

$\Pi_k = \frac{\omega_1}{Q_k}$ — полоса кварцевого контура (при этом переменна m).

Вид зависимостей (2) и (3) изображен на рис. 1, откуда следует, что оптимальные значения превышения равны $\varepsilon_\alpha = 2$ и $\varepsilon_{\Delta\Omega} = 0,5$.

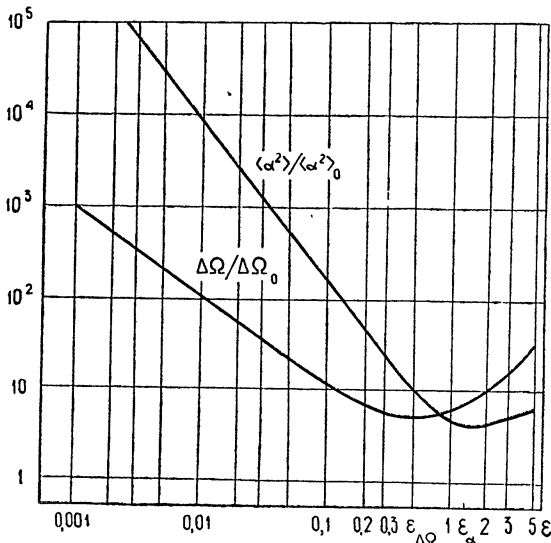


Рис. 1.

3. При проводившихся до сих пор численных оценках $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega$ (см., например, [1]) превышение составляло по порядку величины $\varepsilon \sim 0,001$, что, как видно, далеко от оптимальных значений ε . Поэтому интересно отметить, что, выбирая оптимальные значения превышения, т. е. изменяя ε в пределах от 0,001 до 0,5, можно уменьшить дисперсию на пять порядков, а естественную ширину спектральной линии $\Delta\Omega$ — на два порядка.

Рассмотрим численный пример. Пусть $f_0 = 10^5$ гц, $S = 3$ ма/в, $J_0 = 10$ ма, $\Gamma^2 = 0,2$, $\beta_0 = 1/75$ в⁻², $T = 300^\circ\text{К}$, $r = 1$ ом, $Q = 100$. При этом в [1] для $\varepsilon = 0,0015$ получено значение $\Delta\Omega = 10^{-9}$ рад/сек. При $\varepsilon = 0,01$ найдем $\langle \alpha^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-14}$ и $\Delta\Omega = 1,5 \cdot 10^{-10}$ рад/сек. При $\varepsilon_{\Delta\Omega} = 0,5$ ширина спектральной линии $\Delta\Omega = 1,5 \cdot 10^{-11}$ рад/сек, а $\langle \alpha^2 \rangle = 10^{-16}$ и, наконец, при $\varepsilon_\alpha = 2$ дисперсия $\langle \alpha^2 \rangle = 5 \cdot 10^{-17}$, $\Delta\Omega = 1,6 \cdot 10^{-11}$ рад/сек.

Для одноконтурного кварцевого автогенератора, работающего на той же частоте и в том же режиме, при указанных значениях ε диспер-

сия $\langle \alpha^2 \rangle$ будет в $\left(\frac{\Pi}{\Pi_k}\right)$ раз, а $\Delta\Omega$ в $\left(\frac{\Pi}{\Pi_k}\right)^2$ раз меньше, чем в приведенном примере (ср. с выражением (10) в [2]).

4. Можно определить оптимальную величину обратной связи и для технических флуктуаций автогенератора. Однако поскольку технические флуктуации амплитуды и частоты автоколебания обусловлены обычно флуктуациями различных параметров схемы генератора: флуктуациями параметров колебательных контуров, флуктуациями динамических емкостей, крутизны и т. д. (причем спектральные зависимости технических флуктуаций могут быть совершенно различными в каждом отдельном случае — см. § 6.6 [1], [3]), постольку оптимизация генератора при учете флуктуаций сразу ряда параметров является довольно громоздкой, и мы ее делать не будем.

Ограничимся поэтому здесь лишь простейшим случаем технических амплитудных флуктуаций рассмотренного выше генератора, связанных с флуктуациями контурной емкости $C(t)$. Для этого в дополнение к найденному в [1] (§ 6.3) первому приближению метода усреднения необходимо найти еще и второе. Для этого случая можно применить также метод Митропольского [4], который дает нужный результат уже в первом приближении. И тем и другим способом получаем следующую связь спектральной плотности амплитудных флуктуаций $S_\alpha(\Omega)$ со спектральной плотностью флуктуаций емкости $S_{\delta C}(\Omega)$:

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{1}{4} \frac{\Pi^2(\epsilon - 1)^2 + \frac{1}{4}\Omega^2}{\Pi^2\epsilon^2 + \Omega^2} S_{\delta C}(\Omega). \quad (4)$$

Если ширина полосы спектра $S_{\delta C}(\Omega)$ много меньше $\epsilon\Pi$ и Π , то (4) примет вид

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)^2 S_{\delta C}(\Omega). \quad (5)$$

Формула (5) относится к квазистатическим флуктуациям и может быть получена непосредственно из выражения для стационарной амплитуды автоколебаний R_0 (см., например, (5.5.2) в [1]). Из (5) следует, что при $\epsilon = 1$ ($MS = 2rC$) квазистатические амплитудные флуктуации, обусловленные флуктуациями $C(t)$, обращаются в нуль. Это можно объяснить следующим образом. Предположим, что емкость C получила приращение ΔC . Это приведет к уменьшению тока в контуре за счет ухудшения добротности. Но уменьшение тока, в свою очередь, компенсируется его увеличением за счет уменьшения напряжения на сетке лампы.

Таким образом, при любом характере зависимости $S_{\delta C}$ от Ω должен существовать минимум квазистатических амплитудных флуктуаций при $\epsilon = 1$, чего нельзя сказать относительно частотных флуктуаций, обусловленных флуктуациями $C(t)$. Аналогичная ситуация будет и для одноконтурного кварцевого автогенератора с линейным кварцевым резонатором в случае флуктуаций его динамической емкости. В этом нетрудно убедиться, рассматривая выражение (4) в [2] для R_0 (ср. (4) в [2] с (5.5.2) в [1]). Однако в более общем случае (4) минимум амплитудных флуктуаций достигается при $\epsilon \neq 1$.

5. Рассмотрим два примера.

а) Пусть спектр флуктуаций емкости имеет вид

$$S_{\delta C}(\Omega) = \frac{\langle \delta C^2 \rangle}{\pi} \frac{a}{a^2 + \Omega^2}, \quad (6)$$

где $a = \text{const}$ ($a \ll \epsilon\Pi, \Pi$).

Подставляя (6) в (4) и интегрируя, получим

$$\langle \alpha^2 \rangle = \langle \alpha^2 \rangle_{01} \left[\frac{4\Pi}{a} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon} \right], \quad (7)$$

где $\langle \alpha^2 \rangle_{01} = \frac{a \langle \delta C^2 \rangle}{32\Pi}$ есть значение $\langle \alpha^2 \rangle$ при $\epsilon = 1$. Легко найти,

что $\langle \alpha^2 \rangle$ достигает минимума при $\epsilon_{\delta C} = \frac{8\Pi}{8\Pi - a}$. Если $\Pi = 10^4$ рад/сек

и $a = 10^3$ рад/сек, то зависимость $\langle \alpha^2 \rangle$ от ϵ будет иметь вид, представленный на рис. 2, где $\epsilon_{\delta C} \approx 1$.

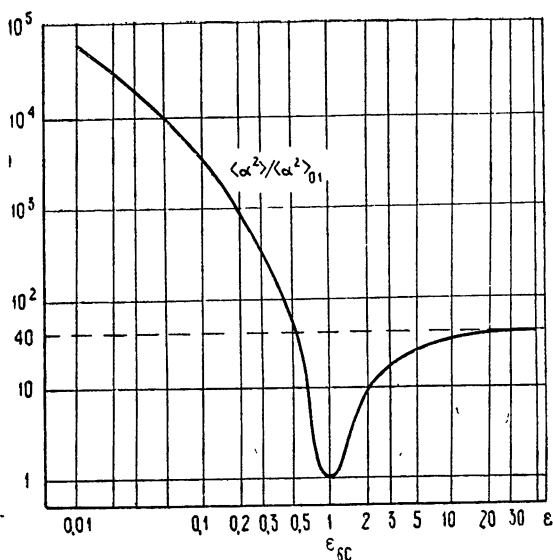


Рис. 2.

б) На практике интересен случай фликкерных флуктуаций емкости со спектром

$$S_{\delta C}(\Omega) = \frac{K}{2\pi |\Omega|^\gamma}, \quad (8)$$

где $K = \text{const}$, а $0 < \gamma < 3$. Если положить $\gamma = 2$ и подставить (8) в (4), то, учитывая, что дисперсия амплитудных флуктуаций будет вследствие нестационарности зависеть от времени наблюдения (см. [1], § 6.4), получим

$$\langle \alpha^2(t) \rangle = \langle \alpha^2 \rangle_{02} \left[4\Pi \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right)^2 t + \frac{1}{\epsilon} \right], \quad (9)$$

где $\langle \alpha^2 \rangle_{02} = K/16\Pi$. Таким образом, в этом случае $\langle \alpha^2(t) \rangle$ достигает минимума при значении $\epsilon_{\delta C} = \frac{8\Pi t}{8\Pi t - 1}$, которое зависит от времени наблюдения t . При $t \gg 1/8\Pi$ можно считать, что $\epsilon_{\delta C} \approx 1$. Из (9) так-

же следует, что для $\varepsilon = 1$ значение $\langle \alpha^2 \rangle$ не зависит от t . Если взять $\Pi = 10^4 \text{ рад/сек}$, а $t \geq 10^{-3} \text{ сек}$, то зависимость $\langle \alpha^2 \rangle$ от ε будет иметь тот же вид, что и на рис. 2.

6. Из рис. 2 видно, что при увеличении ε от 0,01 до 1 дисперсия амплитудных флуктуаций уменьшается в $10^5 \div 10^6$ раз. Частотные же флуктуации при этом в принятом приближении изменяться не должны. То же самое, казалось бы, должно быть и для одноконтурных кварцевых автогенераторов. Однако поскольку в общем случае кварцевый резонатор нелинеен, то кварцевый генератор является неизохронным. Поэтому вместе с уменьшением амплитудных флуктуаций кварцевого генератора должна уменьшаться и часть частотных флуктуаций, связанная при неизохронности с амплитудными. Аналогичная ситуация должна иметь место и для транзисторных автогенераторов, неизохронных из-за нелинейности емкостей $p-n$ переходов (см., например, [5]). (О неизохронном характере автоколебаний транзисторных кварцевых генераторов свидетельствуют также выпуклые спектры их технических частотных флуктуаций [6].) По этой причине мы полагаем, что вышеприведенный анализ может без труда объяснить результаты экспериментальной работы [7], в которой наблюдался минимум спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций автоколебаний (ср. рис. 2 с рис. 1а) в [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
2. Н. Н. Солин, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 14, № 3, 267 (1971).
3. А. Н. Малахов, Н. Н. Солин, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 12, № 4, 529 (1969)
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
5. Н. Н. Солин, А. Е. Чемоданов, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника (в печати).
6. Ю. Д. Крисолов, Ю. К. Филиппский, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 9, № 3, 382 (1966).
7. В. Е. Ямный, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 13, № 5, 658 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 июня 1971 г.

OPTIMUM SELF-OSCILLATOR PARAMETERS

A. N. Malakhov, N. N. Solin, A. L. Fabrikant

The minimum values corresponding to the optimum feed back value of dispersion of inherent and technical amplitude fluctuations and the natural spectral width of ordinary and quartz self-oscillators are estimated. The results obtained are compared with the experimental data.

УДК 621,374.4

СТАБИЛЬНОСТЬ ЧАСТОТЫ ОДНОКОНТУРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. Музычук, Л. Г. Шепелевич

Проведен общий флуктуационный анализ одноконтурной параметрической системы в режиме умножения и деления частоты на два. Получены выражения для кратковременной нестабильности частоты, связанной с естественными и техническими шумами системы.

В настоящее время параметрические умножители и делители частоты находят широкое применение в радиоэлектронике благодаря, главным образом, их широкополосности и малому уровню собственных шумов. Последнее делает предпочтительным их использование в схемах стандартов частоты. Однако флуктуации и шумы в таких системах (особенно в делителях), а следовательно, и связанная с ними нестабильность частоты изучены недостаточно*. Для анализа нестабильности частоты некоторой системы необходимо исследование ее собственных шумов (естественных и технических) и рассмотрение преобразования флуктуаций входного сигнала. Это исследование одноконтурной параметрической системы вместе с оценками нестабильности и проведено в настоящей работе.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ

Для характеристики стабильности частоты (или кратковременной стабильности, согласно принятой терминологии [3, 4]) введем величину

$$I(\tau, t) = \frac{\sigma[\langle \nu \rangle_{\tau, t}]}{\omega_0}, \quad (1)$$

которую будем называть нестабильностью частоты. Здесь ω_0 — средняя частота сигнала, $\nu(t)$ — флуктуации частоты,

$$\langle \nu \rangle_{\tau, t} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \nu(t') dt'$$

— значение флуктуаций частоты, усредненное по интервалу длительностью τ с центром в t , $\sigma^2[\langle \nu \rangle_{\tau, t}]$ — дисперсия процесса $\langle \nu \rangle_{\tau, t}$. Из определения ясно, что в общем случае I зависит как от интервала усреднения τ , так и от момента наблюдения t . Дисперсию нетрудно выразить через спектральную плотность частотных (фазовых) флуктуаций.

Для случая стационарных частотных флуктуаций можно получить**

* В работах [1, 2] проведен анализ естественных флуктуаций в варакторных умножителях и двухконтурных параметрических делителях частоты.

** В [4] это выражение получено для стационарных фазовых флуктуаций, однако оно справедливо и в случае стационарных частотных флуктуаций.

$$\sigma^2 [\langle v \rangle_{\tau, t}] = \frac{2}{\tau^2} [\Phi_{\varphi}(0) - \Phi_{\varphi}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\varphi}(\omega) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau}{2\pi} \right) d\omega, \quad (2)$$

где $\Phi_{\varphi}(\tau)$ и $S_{\varphi}(\omega)$ — функция корреляции и спектр фазовых флуктуаций*.

Если флуктуации частоты нестационарны, но обладают стационарными приращениями, то, считая выполненной «нулевую привязку» $v(t) = 0, t = 0$, можно получить

$$\begin{aligned} \sigma^2 [\langle v \rangle_{\tau, t}] &= \frac{2}{\tau^2} d_{\varphi} [t, t; \tau] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\varphi}(\omega) \left[1 - 2 \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega\tau}{2\pi} \right) \cos(\omega t) + \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau}{2\pi} \right) \right] d\omega, \end{aligned} \quad (3)$$

где $d_{\varphi} [t', t''; \tau]$ — структурная функция фазовых флуктуаций [5]. Как и следовало ожидать, в этом случае дисперсия явно зависит от момента наблюдения.

2. ФЛУКТУАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Как следует из первого раздела, для нахождения неустойчивости частоты системы необходимо знание спектра фазовых (частотных) флуктуаций. Важное значение имеет также вопрос о форме спектральной линии выходного колебания, что требует знания спектра амплитудных флуктуаций и взаимного спектра [5].

Ниже мы получим эти спектры для одноконтурной параметрической системы, учитывая ее собственные шумы, флуктуации параметров и немонокromaticность входного сигнала.

Эквивалентная схема такой системы с учетом внутренних источников шума показана на рис. 1, где $\omega_0 \approx \left\{ \begin{matrix} \Omega_0/2 \\ 2\Omega_0 \end{matrix} \right\}$ — частота входного сигнала**, Ω_0 — собственная частота системы, L_0, R_0, c_0 — параметры кон-

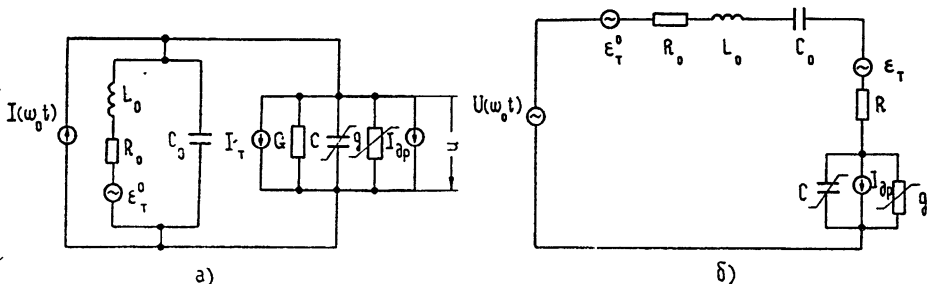


Рис. 1. Эквивалентные схемы одноконтурной параметрической системы с внутренними источниками шума:

ϵ_T^0 — ЭДС теплового шума сопротивления контура R_0 , ϵ_T и I_{dp} — генераторы теплового шума сопротивления R и проводимости G варактора, I_{dp} — генератор дробового гока.

* $\operatorname{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

** Здесь и в дальнейшем верхняя строка в фигурных скобках относится к умножителю, нижняя — к делителю частоты.

тура, c , g — средняя емкость и проводимость варактора. Считаем, что параметры варактора и емкости контура обладают малыми флуктуациями около средних значений. Вольт-кулоновскую и вольт-амперную характеристику варактора аппроксимируем полиномами третьей степени $q(u) = cu + \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u^3$ и $i(u) = gu + \gamma_2 u^3$, где q , i , u — заряд, ток и напряжение на варакторе. Нетрудно записать следующее уравнение системы:

$$\ddot{z} + \Omega_0^2 z = F(z, \dot{z}) + \Omega_0^2 \{ E(t) + E_{\text{ш}}(t) + B(z, \dot{z}, t) \}. \quad (4)$$

Здесь z — динамическая переменная, равная напряжению u на варакторе для параллельной схемы (рис. 1 а) или заряду q для последовательной схемы (рис. 1 б), $F(z, \dot{z})$ включает нелинейности и потери, $E(t)$ — входной сигнал, $E_{\text{ш}}(t)$ — шумовая ЭДС, связанная с тепловыми и дробовыми шумами схемы, $B(z, \dot{z}, t)$ — случайная ЭДС, обусловленная малыми флуктуациями параметров.

Решение (4) ищем в виде

$$z = A_1 \cos \psi_1 + A_s \cos \psi_s,$$

$$\dot{z} = -\omega_0 A_1 \sin \psi_1 - \omega_s A_s \sin \psi_s, \quad (5)$$

$$\psi_1 = \omega_0 t + \varphi_1', \quad \psi_s = \omega_s t + \varphi_s', \quad \omega_s = s \omega_0, \quad s = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1/2 \end{array} \right\},$$

полагая A_1 , A_s и φ_1' , φ_s' медленными функциями времени. Применяя известный метод усреднения [6], получим следующие укороченные уравнения:

$$\frac{dA_s}{dt} = F_1(A_1, A_s, \theta') + f_{\perp}(t), \quad (6)$$

$$A_s \frac{d\varphi_s'}{dt} = F_2(A_1, A_s, \theta') + f_{\parallel}(t).$$

Здесь

$$F_1(A_1, A_s, \theta') = -\frac{\Omega_0}{2}(\delta_0 + \tilde{\delta})A_s + \frac{\Omega_0}{2c}\sigma_1 A_1 \left\{ \begin{array}{l} -A_1/2 \\ A_s \end{array} \right\} \sin \theta',$$

$$F_2(A_1, A_s, \theta') = -\frac{\Omega_0}{2}(\xi + \tilde{\xi})A_s - \frac{\Omega_0}{2c}\sigma_1 A_1 \left\{ \begin{array}{l} A_1/2 \\ A_s \end{array} \right\} \cos \theta',$$

$$\tilde{\delta} \equiv \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_s = \frac{3\gamma_2}{2\Omega_0 c}(A_1^2 + A_s^2/2), \quad \tilde{\xi} \equiv \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_s = \frac{3\sigma_2}{2c}(A_1^2 + A_s^2/2)$$

— нелинейные затухание и расстройка, $\xi = \left(\frac{\omega_s}{\Omega_0}\right)^2 - 1$ — расстройка частоты контура относительно гармоники (субгармоники), $\bar{c} = \bar{c}_0 + c$ — полная емкость системы,

$$\theta' = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_s' - 2\varphi_1' \\ \varphi_1' - 2\varphi_s' \end{array} \right\} \text{ — обобщенная фаза,}$$

$$f_{\perp, \parallel}(t) = \frac{\omega_s}{2A_s} [e_{\perp, \parallel}(t) + A_s b_{\perp, \parallel}(t)],$$

где $e_{\perp, \parallel}$ и $b_{\perp, \parallel}$ — синусная и косинусная составляющие флуктуационных сил $E_{\text{ш}}(t)$ и $B(z, \dot{z}, t)$ на частоте ω_s . Как показано в [5],

$e_{\perp}(t)$, $e_{\parallel}(t)$ можно считать статистически независимыми дельта-коррелированными случайными процессами со спектральной плотностью $S_{\perp}(\omega) = S_{\parallel}(\omega) = 2S_{ш}(\omega_s)$, $S_{ш}(\omega_s)$ — спектральная плотность $E_{ш}(t)$ на частоте ω_s , которая легко выражается (см. [3, 4]) через спектральные плотности тепловых и дробовых шумов, источники которых показаны на рис. 1. Выражения для $b_{\parallel, \perp}$ будут записаны ниже, пока отметим лишь, что $b_{\parallel, \perp}$ в отличие от $e_{\parallel, \perp}$ нельзя считать ни статистически независимыми, ни дельта-коррелированными, поскольку они определяются флуктуациями одних и тех же параметров и обычно являются медленными по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$.

Приравняв нулю производные и флуктуационные члены в (6), можно найти стационарные значения A_s^0 и φ_s^0 , откуда нетрудно видеть, что умножение частоты возможно в принципе при любых значениях амплитуды A_1 и расстройки ξ . Амплитуда гармоники будет максимальной при $\xi = -\tilde{\xi}$, т. е. если расстройка контура компенсирует нелинейную расстройку. При делении частоты существует конечная полоса расстроек — полоса деления, в которой субгармоника отлична от нуля [6]. Генерирование субгармоники возможно также лишь в некоторой динамической полосе амплитуд. Нетрудно показать [6], что центром полосы деления является $\xi = -\tilde{\xi}_1$, такой режим генерации назовем оптимальным.

В дальнейшем будем различать два режима ограничения амплитуды A_s : расстроечный и диссипативный. Первый соответствует преобладающему влиянию нелинейной емкости, второй — нелинейной проводимости. Определив параметр d выражением $d = \tilde{\delta}/\tilde{\xi}$, будем иметь расстроечный режим при $d \ll 1$ и диссипативный — при $d \gg 1$.

Пусть амплитуда и обобщенная фаза колебаний испытывают малые флуктуации околостационарных значений ($\langle \alpha_s^2 \rangle \ll 1$, $\langle \theta'^2 \rangle \ll 1$):

$$A_1(t) = A_1^0 \{ 1 + \alpha_1(t) \}, \quad A_s(t) = A_s^0 \{ 1 + \alpha_s(t) \},$$

$$\theta'(t) = \theta^0 + \theta(t).$$

Тогда, линеаризуя (6) по α_i , θ , получим следующие флуктуационные уравнения*:

$$\hat{Y} = \hat{p}_s \hat{Y} + \hat{F}(t). \tag{7}$$

Здесь

$$\hat{F}(t) = \hat{q}_s \hat{X} + \hat{f}(t) \tag{8}$$

— вектор флуктуационных сил с компонентами F_{\parallel} , F_{\perp} , обусловленный флуктуациями сигнала накачки, естественными и техническими шумами;

$$\hat{X} = (x_1, x_2) \equiv (\alpha_1, \varphi_1), \quad \hat{Y} = (y_1, y_2) \equiv (\alpha_s, \varphi_s)$$

— вектор-столбцы флуктуаций накачки и выходного сигналов;

$$\hat{p}_s = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_s = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix};$$

* Из (7) нетрудно получить условие устойчивости стационарного состояния. вблизи которого ведется весь последующий анализ:

$$p_{11} + p_{22} > 0, \quad p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21} > 0.$$

коэффициенты

$$p_{ij} = \frac{\partial (F_i/A_s)_0}{\partial y_j}, \quad q_{ij} = \frac{\partial (F_i/A_1)_0}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2)$$

суть производные правых частей (6) в стационарном состоянии.

Введем вектор-столбец $\hat{S}_y(\omega)$ с компонентами $S_{y_1}(\omega)$, $S_{y_2}(\omega)$, $S_{y_1, y_2}^0(\omega)$, $S_{y_1, y_2}^1(\omega)$. Тогда, решая систему (7) относительно спектральных плотностей, получим

$$\hat{S}_y(\omega) = \hat{P}(\omega) \hat{S}_F(\omega), \quad (9)$$

где $\hat{S}_F(\omega)$ имеет компонентами спектральные плотности флуктуационных сил $S_{\parallel}(\omega)$, $S_{\perp}(\omega)$, $S_{\parallel\perp}^0(\omega)$, $S_{\parallel\perp}^1(\omega)$, а матрица $\hat{P}(\omega)$ имеет вид

$$\hat{P}(\omega) = \Delta^{-2}(\omega) \times \begin{pmatrix} p_{22}^2 + \omega^2 & p_{12}^2 & -2p_{12}p_{22} & -2p_{12}\omega \\ p_{21}^2 & p_{11}^2 + \omega^2 & -2p_{21}p_{11} & -2p_{21}\omega \\ -p_{11}p_{12} & -p_{22}p_{21} & p_{11}p_{22} + p_{12}p_{21} + \omega^2 & (p_{11} - p_{22})\omega \\ -p_{12}\omega & p_{21}\omega & (p_{22} - p_{11})\omega & p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} + \omega^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\Delta^2(\omega) = \{(\omega - \omega_1'')^2 + \omega_1''^2\} \{(\omega - \omega_2'')^2 + \omega_2''^2\}$, $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}' + j\omega_{1,2}''$ — корни характеристического уравнения системы (7).

С помощью (9) можно определить интересующие нас спектры флуктуаций, обусловленные естественными шумами, флуктуациями параметров и флуктуациями входного сигнала. Поскольку эти флуктуации входят аддитивным образом и некоррелированы между собой, то можно рассматривать их влияние на работу системы по отдельности.

3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ШУМЫ СХЕМЫ

Спектральные плотности тепловых и дробовых шумов схемы можно представить в виде

$$S_{\parallel}(\omega) = S_{\perp}(\omega) = \frac{\omega_s^2}{2A_s^2} S_{ш}(\omega_s) \equiv \frac{D}{2\pi}, \quad S_{\parallel\perp}^{0,1}(\omega) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем будем рассматривать лишь оптимальный режим работы системы.

Введем в рассмотрение следующие параметры: $2\Pi_0 \equiv \Omega_0 \delta_0$, $2\Pi \equiv \Omega_0 (\delta_0 + \tilde{\delta})$ — полосы пропускания «холодного» и «горячего» контура, $p \equiv \Omega_0 \tilde{\delta}_s$, $q \equiv \Omega_0 \tilde{\xi}_s$. Тогда для расстроенного режима ограничения находим из (6)

$$\hat{p}_2 = \begin{pmatrix} -\Pi_0 & 0 \\ -q & -\Pi_0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{1,2} = -\Pi_0, \quad (11)$$

$$\hat{p}_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & -2\Pi_0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{1,2} = -\Pi_0 \pm j\sqrt{q^2 - \Pi_0^2}.$$

В последнем случае нетрудно получить, что $(q/2\Pi_0)^2 = \chi^2$, где χ^2 — параметр регенерации, показывающий превышение порога накачки. Таким образом, для обычных амплитуд накачки ($\chi^2 > 1/4$) имеет место осцилляторный режим затухания амплитудных и фазовых флуктуаций дели-

теля частоты, в отличие от умножителя, где характер затухания аperiодический.

Для диссипативного механизма амплитудного ограничения

$$\hat{p}_2 = \begin{pmatrix} -\Pi & 0 \\ 0 & -\Pi \end{pmatrix}, \quad \omega_{1,2} = -\Pi, \quad (12)$$

$$\hat{p}_{1/2} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -2\Pi \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = -p, \quad \omega_2 = -2\Pi.$$

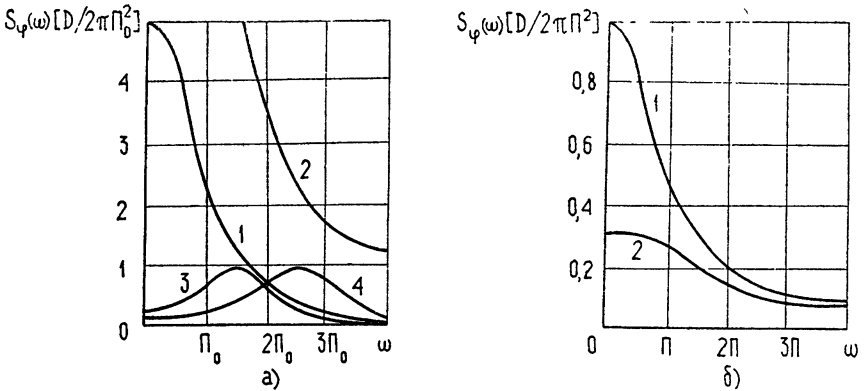


Рис. 2. Спектральная плотность фазовых флуктуаций:

- а) в расстроенном режиме ограничения амплитуды:
 - 1) $s = 2, q = 2\Pi_0$; 2) $s = 2, q = 3\Pi_0$;
 - 3) $s = 1/2, q = 2\Pi_0$; 4) $s = 1/2, q = 3\Pi_0$;
- б) в диссипативном режиме:
 - 1) $s = 2$; 2) $s = 1/2$.

Спектры фазовых флуктуаций легко получаются на основании (9) — (12): для расстроенного ограничения (рис. 2 а)

$$S_\varphi(\omega) = \left\{ \frac{\frac{\Pi_0^2 + q^2 + \omega^2}{(\Pi_0^2 + \omega^2)^2}}{\frac{q^2 + \omega^2}{(q^2 - \omega^2)^2 + 4\Pi_0^2\omega^2}} \right\} \frac{D}{2\pi},$$

для диссипативного ограничения (рис. 2 б)

$$S_\varphi(\omega) = \left\{ \frac{\frac{1}{\Pi^2 + \omega^2}}{\frac{1}{4\Pi^2 + \omega^2}} \right\} \frac{D}{2\pi}. \quad (13)$$

Таким образом, спектры фазовых флуктуаций имеют «резонансный» характер (максимум около частоты $\omega \approx q$) для делителя частоты в расстроенном режиме и аperiодический во всех остальных случаях (для умножителя и делителя в диссипативном режиме).

На основании (13) и (2) находим для нестабильности частоты, обусловленной естественными шумами схемы, следующие выражения: для диссипативного режима

$$I^2(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Pi} (1 - e^{-\Pi\tau}) \\ \frac{1}{2\Pi} (1 - e^{-2\Pi\tau}) \end{array} \right\} \frac{D}{(\Omega_0\tau)^2}, \quad (14)$$

для расстроенного режима

$$I^2(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\Pi_0^2 + q^2}{2\Pi_0^3} (1 - e^{-\Pi_0\tau}) \\ \frac{1}{\Pi_0} (1 - e^{-\Pi_0\tau} \cos \sqrt{q^2 - \Pi_0^2}\tau) \end{array} \right\} \frac{D}{(\Omega_0\tau)^2}.$$

Нетрудно видеть, что в диссипативном режиме при $\tau < \Pi^{-1}$ $I \sim \tau^{-1/2}$, а при $\tau > \Pi^{-1}$ $I \propto \tau^{-1}$, в то время как для делителя в расстроенном режиме $I = \text{const}$ при $\tau < (\Pi_0^{-1}, q^{-1})$.

Условия справедливости линейного приближения ($\langle \alpha_1^2 \rangle \ll 1$, $\langle \theta^2 \rangle \ll 1$) дают следующие ограничения на интенсивность естественных шумов: $D \ll \Pi$ в диссипативном и $D \ll \Pi_0$ в расстроенном режиме.

4. ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СХЕМЫ

Как известно [5], флуктуации параметров, в отличие от естественных шумов, могут быть медленными и нестационарными. Выражения для флуктуационных сил $b_{\parallel, \perp}(t)$ можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} b_{\parallel} \\ b_{\perp} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} \lambda_i(t) - \frac{2}{\Omega_0} \begin{pmatrix} m_i \\ l_i \end{pmatrix} \dot{\lambda}_i(t), \quad (15)$$

где $\lambda_1(t) \equiv \delta c_0(t)$, $\lambda_2(t) \equiv \delta c(t)$, $\lambda_3(t) \equiv \delta g(t)$ — флуктуации контурной емкости, емкости и проводимости варактора.

Для коэффициентов l_i, m_i можно получить

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 - k, \quad l_2 = k + \xi, \quad l_3 = 0, \\ m_1 &= 0, \quad m_2 = -2\Pi/\Omega_0, \quad m_3 = g/\Omega_0 c + \tilde{\delta}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $k = c\bar{c}$ — коэффициент включения емкости варактора в контур. Из (12) и (16) получим общие выражения спектральных плотностей $S_{\parallel, \perp}(\omega)$ через спектральные плотности флуктуирующих параметров схемы. Ограничимся для простоты рассмотрением лишь медленных (квазистатических) флуктуаций. Это приближение обычно является оправданным, поскольку флуктуации параметров оказывают существенное влияние лишь в области низких частот $\omega \ll \Pi$. Из (9) и (15) находим спектральную плотность фазовых флуктуаций:

$$\begin{aligned} S_{\varphi}(\omega) &= \Delta^{-2}(\omega) \{ (p_{11}^2 + \omega^2) S_{\parallel}(\omega) + p_{21}^2 S_{\perp}(\omega) - \\ &\quad - 2p_{21}p_{11} S_{\parallel\perp}^0(\omega) + 2p_{21}\omega S_{\parallel\perp}^1(\omega) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\parallel}(\omega) &= l_1^2 S_1(\omega) + l_2^2 S_2(\omega), \\ S_{\perp}(\omega) &= m_2^2 S_2(\omega) + m_3^2 S_3(\omega) + 2m_2m_3 S_{23}^2(\omega), \\ S_{\parallel\perp}^0(\omega) &= l_2m_3 S_{23}^0(\omega), \quad S_{\parallel\perp}^1(\omega) = l_2m_3 S_{23}^1(\omega). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что влияние флуктуаций того или иного параметра зависит от режима работы схемы. Так, например, в диссипативном режиме медленные флуктуации проводимости не оказывают влияния на спектр фазовых флуктуаций.

Пусть спектры флуктуаций параметров имеют фликкерный характер, т. е.

$$S_i(\omega) = A_i/\omega^{\gamma_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad 1 < \gamma_i < 3. \quad (18)$$

Спектры флуктуационных сил при этом можно записать в виде

$$S_{\parallel, \perp}(\omega) = A_{\parallel, \perp}/\omega^{\gamma}, \quad S_{\parallel, \perp}^0(\omega) = A_{\parallel, \perp}^0/\omega^{\gamma},$$

где $A_{\parallel, \perp}$, $A_{\parallel, \perp}^0$, γ определяются флуктуациями того параметра, который дает преобладающий вклад для заданного режима работы схемы.

Из (17), (11), (12), (18) находим спектры фазовых флуктуаций:

для расстроенного режима

$$S_{\varphi}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(\Pi_0^2 + \omega^2)^2} [(\Pi_0^2 + \omega^2) A_{\parallel} + q^2 A_{\perp} - 2\Pi_0 q A_{\parallel, \perp}^0 - 2q\omega A_{\parallel, \perp}^1] \\ \frac{1}{(q^2 - \omega^2)^2 + 4\Pi_0^2 \omega^2} [\omega^2 A_{\parallel} + q^2 A_{\perp} - 2q\omega A_{\parallel, \perp}^1] \end{array} \right\} \Omega_0^2/\omega^{\gamma}, \quad (19)$$

для диссипативного режима

$$S_{\varphi}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} A_{\parallel}/(\Pi^2 + \omega^2) \\ A_{\parallel}/(4\Pi^2 + \omega^2) \end{array} \right\} \Omega_0^2/\omega^{\gamma}.$$

Из (3) и (19) можно получить выражения для неустойчивости частоты, связанной с техническими шумами схемы. Ограничившись асимптотическими формулами, справедливыми при больших и малых (по сравнению с постоянной времени Π^{-1}) временах усреднения τ , получим*:

для диссипативного режима

$$I_2^2(\tau) = A_{\parallel} \left\{ \begin{array}{ll} B_1(\gamma) \Pi^{1-\gamma} & (\tau \ll \Pi^{-1}) \\ B_2(\gamma) \Pi^{-2} \tau^{\gamma-3} & (\tau \gg \Pi^{-1}) \end{array} \right\}$$

где

$$B_1(\gamma) = \Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right), \quad (20)$$

$$B_2^{-1}(\gamma) = 2\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi(\gamma-1)}{2},$$

$\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция;

для расстроенного режима при $\tau \gg \Pi_0^{-1}$

$$I_{1/2}^2(\tau) = \frac{A_{\perp}}{q^2} B_2(\gamma) \tau^{\gamma-3}.$$

Отсюда следует, что неустойчивость I имеет различный вид при больших и малых τ , а именно, не зависит от τ при $\tau \ll \Pi^{-1}$, и спадает как $\tau^{\gamma-3}$ при $\tau \gg \Pi^{-1}$. При этом скорость спада зависит от показателя спектра γ . Она зависит также от режима работы схемы, и если при диссипативном ограничении характеризуется полосой «горячего» контура Π , то при расстроенном — параметром q , который равен полосе деления в оптимальном режиме.

* Неустойчивость делителя $I_{1/2}^2(\tau)$ получается из (20) заменой Π на 2Π .

Полная нестабильность системы, связанная с естественными (14) и техническими (20) шумами, в диссипативном режиме показана на рис. 3. Здесь τ_0 — характерный параметр «шумящей» системы, определяемый из равенства «естественной» и «технической» нестабильности $I^e(\tau_0) = I^r(\tau_0)$. Ясно, что при $\tau < \tau_0$ полная нестабильность определяется естественными, а при $\tau > \tau_0$ техническими шумами схемы. Кривая *a* соответствует $\tau_0 < \Pi^{-1}$, или $D/\Omega_0^2 A_{\parallel} B_1(\gamma) < \Pi^{-\gamma}$, т. е. относительно большим техническим флуктуациям, кривая *б* — $\tau_0 > \Pi^{-1}$, или $D/\Omega_0^2 A_{\parallel} B_2(\gamma) > \Pi^{-\gamma}$ — относительно малым.

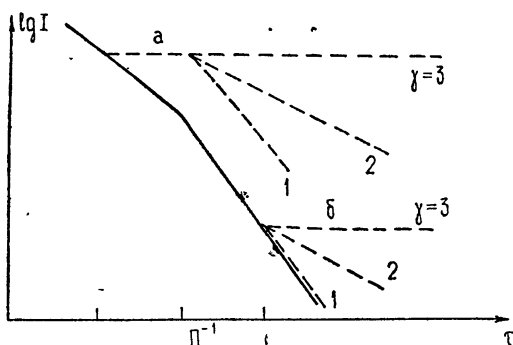


Рис. 3. Нестабильность частоты, обусловленная естественными $I^e(\tau)$ (—) и техническими $I^r(\tau)$ (---) шумами схемы.

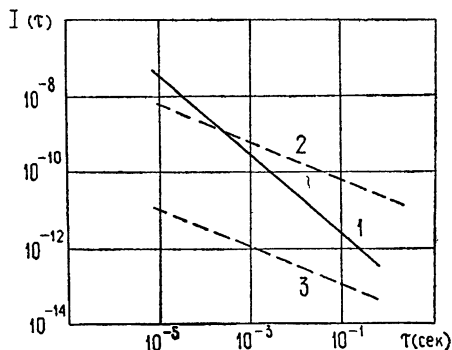


Рис. 4. 1 — «естественная» нестабильность умножителя и делителя, 2 — «техническая» нестабильность системы в диссипативном режиме, 3 — «техническая» нестабильность делителя в расстроеном режиме.

Выше были рассмотрены нестационарные флуктуации параметров с $1 < \gamma < 3$, дисперсия которых зависит от длительности интервала наблюдения T . Условие справедливости линейного приближения ($\langle \varphi^2 \rangle_T \ll 1$) накладывает ограничения на T :

$$T^{\gamma-1} < \begin{cases} 2^{\gamma} \Pi^2 (\gamma - 1) / A_{\parallel} \Omega_0 \\ 2^{\gamma} q^2 (\gamma - 1) / A_{\perp} \Omega_0 \end{cases}.$$

Для оценки нестабильности частоты конкретной параметрической системы на варакторе зададимся следующими параметрами схемы: $A_s = 1$ в, $\Pi = 1$ Мгц, $\Omega_0/2\pi = 10$ Мгц, а также спектральными плотностями естественных шумов и флуктуаций параметров [5]:

$$S_{ш}(\Omega_0) = 5 \cdot 10^{-22} \text{ в}^2/\text{гц}, \quad S_1(\omega) = \frac{10^{-9}}{\omega^2} \text{ гц}, \quad S_2(\omega) = S_3(\omega) = \frac{10^{-12}}{\omega^2} \text{ гц}.$$

Для «коэффициентов включения» флуктуирующих параметров в схему получим следующие значения: $l_1^2 = 1$, $m_2^2 \approx m_3^2 \approx 3 \cdot 10^{-2}$. Зависимость нестабильности частоты от времени усреднения показана на рис. 4.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НАКАЧКИ

Для вектора спектральной плотности флуктуационных сил (8), обусловленных флуктуациями амплитуды и фазы накачки, нетрудно получить

$$\hat{S}_F(\omega) = \hat{Q} \hat{S}_x(\omega), \quad (21)$$

где

$$\hat{S}_x(\omega) = (S_{x_1}(\omega), S_{x_2}(\omega), S_{x_1, x_2}^0(\omega), S_{x_1, x_2}^1(\omega))$$

— вектор-столбец спектральной плотности флуктуации накачки, а матрица преобразования имеет вид

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11}^2 & q_{12}^2 & 2q_{11}q_{12} & 0 \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 & 2q_{22}q_{21} & 0 \\ q_{11}q_{21} & q_{12}q_{22} & q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21} & 0 \\ q_{11}q_{21} & q_{12}q_{22} & 0 & q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Из (9) и (21) находим для вектора спектральной плотности выходного колебания

$$\hat{S}_y(\omega) = \hat{K}(\omega) \hat{S}_x(\omega), \quad (23)$$

где

$$\hat{K}(\omega) = \hat{P}(\omega) \hat{Q}.$$

Таким образом, зная матрицу преобразования $\hat{K}(\omega)$, можно получить спектральные плотности выходного сигнала по заданным спектрам флуктуаций накачки.

Матрицы \hat{p}_s для различных режимов приведены выше (см. (11), (12)). Соответствующие выражения для \hat{q}_s имеют вид:
для расстроенного режима

$$\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 2\Pi_0 & 0 \\ \zeta & 2\Pi_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_{1/2} = \begin{pmatrix} \Pi_0 & -q/2 \\ \zeta & -\Pi_0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

для диссипативного

$$\hat{q}_2 = \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & -2\Pi \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_{1/2} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & \Pi \end{pmatrix},$$

где $\zeta \equiv \Omega_0 \xi$ — размерная расстройка контура.

Поскольку в расстроенном режиме q_{ij} при $i \neq j$ не равны нулю, то амплитудные и фазовые флуктуации выходного сигнала будут коррелированными при некоррелированных флуктуациях на входе. В диссипативном режиме q_{ij} при $i \neq j$ равны нулю, матрица \hat{Q} (а значит и $\hat{K}(\omega)$) будет диагональна, что означает отсутствие в системе перекрестного преобразования флуктуаций.

Часто системы кратного преобразования частоты представляют собой линейки N последовательно соединенных параметрических умножителей (делителей). Нахождение спектров флуктуаций выхода такой системы сводится к последовательному применению преобразования (23): В общем случае эта операция приводит к довольно громоздким результатам. Если же в системе отсутствует перекрестное преобразование амплитудных и фазовых флуктуаций (оптимальная настройка, диссипативный режим), то для спектра фазовых флуктуаций имеем простое выражение:

$$S_\varphi^{(N)}(\omega) = K^N(\omega) S_{\varphi_0}(\omega) + \sum_{j=1}^N K^{N-1}(\omega) S_{\varphi_j}(\omega), \quad (25)$$

где

$$K(\omega) \equiv K_{22}(\omega) = \sum_{i=1}^4 P_{2i}(\omega) Q_{i2} \quad (26)$$

— коэффициент передачи фазовых флуктуаций одного элемента линейки,
 $S_{\varphi_0}(\omega)$ — спектр фазовых флуктуаций на входе 1-го элемента, $S_{\varphi_j}(\omega)$
 — спектр фазовых флуктуаций на выходе j -го элемента, если на его вход
 подан монохроматический сигнал (см. (13) для естественных и (19) для
 технических шумов).

Для диссипативного режима коэффициент передачи

$$K(\omega) = \left\{ \frac{4\Pi^2}{\omega^2 + \Pi^2} \right\} \left\{ \frac{\Pi^2}{\omega^2 + 4\Pi^2} \right\}.$$

В случае квазистатических флуктуаций имеем соответственно $K_0 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1/4 \end{matrix} \right\}$,
 при этом зависимость дисперсии средних флуктуаций частоты линейки
 преобразователей от числа каскадов имеет вид

$$\sigma_{(N)}^2(\tau) = \sum_{j=1}^N K_0^{j-1} \sigma_j^2(\tau).$$

Если дисперсии всех каскадов одинаковы: $\sigma_j(\tau) = \sigma(\tau)$, то

$$\sigma_{(N)}^2(\tau) = \frac{K_0^N - 1}{K_0 - 1} \sigma^2(\tau).$$

Для $N \gg 1$ получим

$$\sigma_{(N)}^2 = \left\{ \begin{matrix} \frac{4N}{3} \\ \frac{4}{3} \end{matrix} \right\} \sigma^2(\tau).$$

Отсюда видно, что дисперсия $\sigma_{(N)}(\tau)$ линейки умножителей резко воз-
 растает с ростом N , а линейки делителей—увеличивается незначительно.

В заключение отметим, что проведенный анализ можно распростра-
 нить на амплитудные и амплитудно-фазовые флуктуации схемы, вычис-
 лив все компоненты вектора спектральной плотности, и, таким образом,
 получить полную информацию о спектре выходного колебания.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за обсуждение работы и ценные
 замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 15, № 8, 1626 (1970).
2. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 716 (1970)
3. E. J. Baghdady, R. N. Lincoln, B. D. Nelson, Proc. IEEE, 53, № 7, 811 (1965).
4. L. S. Culter, C. L. Searle, Proc. IEEE, 54, № 2, 41 (1966).
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
6. А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов, Параметрические генераторы
 и делители частоты, изд. Сов. радио, М., 1966

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
 7 июля 1971 г.

THE FREQUENCY STABILITY OF ONE-CIRCUIT PARAMETRIC SYSTEMS

O. V. Muzychuk, L. G. Shepelevich

A general fluctuation analysis is made of a one-circuit parametric system in the
 regime of multiplication and division of the frequency by two. Expressions are obtain-
 ed for a short time frequency instability connected with natural and technical noises
 of the system.

УДК 621.378.33

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ МЕДЛЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ

И. Л. Берштейн, В. А. Маркелов

Рассматриваются возможности экспериментального исследования флуктуаций частоты колебаний при помощи цифрового электронного частотомера. Проводится сопоставление результатов измерений со спектром флуктуаций, а также анализ погрешностей измерений.

Известно, что флуктуации частоты колебания вызваны естественными источниками флуктуаций в генераторе, а также непостоянством параметров его схемы. Флуктуации частоты из-за второй причины, получившие название технических, имеют обычно спектральную плотность, сильно возрастающую с понижением частоты наблюдения (эффект часто называют фликкерным).

Техника исследования сравнительно высокочастотных («быстрых») флуктуаций частоты хорошо разработана: при помощи дискриминатора того или иного типа (линия задержки, резонансная система) флуктуации частоты превращаются во флуктуации амплитуды колебания, спектр которых определяется при помощи обычных спектроанализаторов. Рассмотрение вопроса можно найти в монографии [1].

Значительно сложнее обстоит дело с исследованием весьма медленных флуктуаций частоты. Такие изменения частоты тесно связаны с вопросом ее долговременной стабильности*. Непосредственное измерение спектра флуктуаций на частотах значительно меньших герца по ряду причин практически невозможно. Вместе с тем актуальность задачи велика, и на практике применяются разные способы ее решения.

Обычно исследуемое колебание «сбивают» с колебанием от идентичного генератора (если возможно — с колебанием от существенно более стабильного по частоте источника) для получения разностной, значительно более низкой, частоты. Исследование статистических характеристик проводят путем записи (магнитной, фото) разностного колебания и последующей аналоговой или цифровой обработки**. В работе [2], например, описывается исследование разностного колебания с применением оптических методов обработки сигналов. Однако такая процедура изучения флуктуаций частоты весьма трудоемка и сложна.

Задача исследования медленных флуктуаций частоты значительно облегчилась с развитием техники цифровых электронно-счетных частотомеров (ЭЧ). В настоящее время ЭЧ нашли широкое применение и позволяют просто и сравнительно быстро определять статистические характеристики частоты. Разумеется, если частота высока, необходимо применить упомянутое выше гетеродинирование. Метод исследования с ЭЧ можно назвать интегральным, поскольку его показания отмечают набеги фазы колебания за некоторый промежуток времени.

* Понятие долговременности, конечно, весьма растяжимое: для одних задач интересен промежуток времени порядка 1 сек и менее, для других — часы, дни и более.

** Отмеченный метод гетеродинирования применяется иногда и для исследования «быстрых» флуктуаций частоты; в этом случае разностная частота может быть отнюдь не малой.

Насколько нам известно, в литературе отсутствует достаточно полное рассмотрение вопроса (количественно) о связи между показаниями ЭЧ и спектром флуктуаций частоты, с соответствующим анализом погрешностей измерений*. Целью настоящей работы является восполнить этот пробел.

Из возможных причин погрешностей показаний ЭЧ ниже будут рассмотрены две наиболее существенные: дискретность счета и аддитивный шум на входе ЭЧ. Этот шум может быть шумом смесителя (при «сбивании» двух колебаний), шумом усилителя, применяемого для усиления исследуемого сигнала перед его подачей на вход ЭЧ. Другой его причиной может быть дробовой эффект фотоприемника; этот случай имеет, например, место при исследовании колебания разностной частоты, получаемой в результате интерференции двух встречных лучей лазера с кольцевым резонатором. Все шумы такого происхождения, как правило, не связаны с исследуемыми флуктуациями фазы (частоты) колебания и поэтому названы аддитивными. Погрешностями показаний ЭЧ из-за нестабильности частоты его внутреннего калибратора пренебрежем**.

Положим, что на входе ЭЧ напряжение равно

$$\sqrt{2} U_c \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] + v(t) \equiv \sqrt{2} U \cos[\omega_0 t + \Phi(t) + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $\Phi(t)$ — флуктуация фазы, статистические закономерности которой подлежат исследованию, $v(t)$ — аддитивный шум, а $\varphi(t)$ — дополнительная флуктуация фазы из-за этого шума. Примем, что $\overline{v^2(t)} \ll U_c^2$; кроме того, полагаем, что флуктуации амплитуды колебания невелики и входные цепи ЭЧ построены так, что эти флуктуации несущественны для его работы.

Число циклов за время T , отмечаемое ЭЧ, равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^T [\omega_0 + \dot{\Phi}(t) + \dot{\varphi}(t)] dt + \varepsilon = \frac{1}{2\pi} [\omega_0 T + \Delta_T \Phi + \Delta_T \varphi] + \varepsilon, \quad (2)$$

где для краткости обозначено $\Delta_T \Phi = \Phi(T) - \Phi(0)$, $\Delta_T \varphi = \varphi(T) - \varphi(0)$, а ε — погрешность показаний из-за дискретности счета. Для дисперсии величины N имеем***

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{1}{4\pi^2} [\overline{(\Delta_T \Phi)^2} + \overline{(\Delta_T \varphi)^2}] + \overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2}. \quad (3)$$

Отметим, что выше положено $\omega_0 = \text{const}$; на практике, однако, имеют место случаи, когда в процессе измерения ω_0 изменяется по какому-то динамическому закону. Для проводимого анализа флуктуаций это несущественно; при $\omega_0 \neq \text{const}$ следует заменить в (2) $\omega_0 T$ на $\int_0^T \omega_0(t) dt$.

Величина $\overline{(\Delta_T \varphi)^2}$ связана со спектральной плотностью величины $\varphi(t)$, которую обозначим $\overline{\varphi_\Omega^2}$, известным соотношением

$$\overline{(\Delta_T \varphi)^2} = 4 \int_0^\infty \overline{\varphi_\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega T}{2} d\Omega, \quad (4)$$

* Некоторые аспекты измерений флуктуаций частоты цифровым методом затронуты, например, в [3].

** Учет этого не представляет затруднений, однако ЭЧ применяют обычно для исследования колебаний, имеющих значительно большую нестабильность частоты.

*** Полагаем флуктуации частоты стационарным процессом.

справедливым при отсутствии связи между спектральными составляющими $\varphi(t)$.

Значение $\overline{\varphi_{\Omega}^2}$ легко находится, при сделанном предположении о малости $\overline{v^2(t)}$, из спектральной плотности $v(t)$, которую обозначим $\overline{v_{\Omega}^2}$:

$$\overline{\varphi_{\Omega}^2} = \frac{1}{2U_c^2} [\overline{v_{\omega_0+\Omega}^2} + \overline{v_{\omega_0-\Omega}^2}]. \quad (5)$$

Положим для простоты, что спектр аддитивного шума отличен от нуля лишь в полосе частот от ω_1 до ω_2 , причем $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, а в пределах этой полосы спектральная плотность шума постоянна и равна a . При этом из (5) и (4) путем элементарных расчетов получаем

$$(\overline{\Delta_T \varphi})^2 = \frac{a'}{U_c^2} \left\{ (\omega_2 - \omega_1) - \frac{\sin(\omega_2 - \omega_0)T + \sin(\omega_0 - \omega_1)T}{T} \right\} \approx \frac{a(\omega_2 - \omega_1)}{U_c^2} = \frac{P_{\text{ш}}}{P_c}, \quad (6)$$

$P_{\text{ш}}/P_c$, очевидно, — отношение мощностей аддитивного шума и сигнала. Вторым членом в фигурных скобках мы пренебрегли, так как обычно $T \gg 2\pi/\omega_0$, а полоса $\omega_2 - \omega_1$ предполагается не слишком малой по сравнению с ω_0^* . Впрочем, в отдельных случаях учет этого слагаемого существен; при этом влияние аддитивного шума уменьшится.

Рассмотрим сейчас погрешность ε . Обычно ЭЧ подсчитывает число импульсов, местоположение которых примерно соответствует прохождению входного напряжения через нуль с положительной производной. При этом всегда $\varepsilon \leq 0$. Предполагая сдвиг по времени между началом счета и поступлением на схему счета первого импульса случайным и равномерно распределенным по периоду сигнала и аналогичную ситуацию для конца счета, получим для средних значений $\overline{\varepsilon} = -1$ и $\overline{\varepsilon^2} = 7/6$. Отсюда $(\varepsilon - \overline{\varepsilon})^2 = 1/6$.

С учетом (6) перепишем (3) в виде

$$(\overline{\Delta N})^2 = \frac{1}{4\pi^2} [(\overline{\Delta_T \Phi})^2 + \frac{P_{\text{ш}}}{P_c} + 7]. \quad (7)$$

Дисперсия частоты, измеряемой за время T по показаниям ЭЧ, равна

$$(\overline{\Delta\omega})_T^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} (\overline{\Delta N})^2 = \frac{1}{T^2} [(\overline{\Delta_T \Phi})^2 + \frac{P_{\text{ш}}}{P_c} + 7]. \quad (8)$$

Очевидно, что искомый процесс можно исследовать при достаточной малости погрешностей, т. е. при $(\overline{\Delta_T \Phi})^2 \gg \frac{P_{\text{ш}}}{P_c} + 7$. В ряде случаев это неравенство может быть реализовано лишь при сравнительно больших значениях T .

Положим, что частота ω_0 в процессе измерения постоянна, не изменяется по причинам динамического характера. В этом случае погрешность измерений из-за дискретности счета можно значительно уменьшить, если проводить с ЭЧ измерения длительности определенного целого числа n периодов процесса**. При этом $\overline{T} = n \frac{2\pi}{\omega_0}$, а для флуктуации T , отмечаемой ЭЧ, имеем

* Заметим, что проведенный расчет $(\overline{\Delta_T \varphi})^2$ справедлив лишь для случая (обычно имеющего место на практике), когда полоса шума $\omega_2 - \omega_1$ много больше спектральной ширины исследуемого сигнала, обязанной флуктуациям его фазы (частоты).

** В работе [4] такой способ применен — без учета влияния аддитивного шума — для измерения стабильности частоты расщепления в кольцевом лазере.

$$\Delta T = -\frac{1}{\omega_0} [\Delta_T \Phi + \Delta_T \varphi] + \varepsilon T_s, \quad (9)$$

где $T_s = 2\pi/\omega_s$ — период частоты ω_s калибратора (опорного генератора) ЭЧ. Набег фазы за время T можно с достаточной точностью заменить набегом фазы за время \bar{T} . Для дисперсии величины T с учетом (6) получаем

$$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left[\overline{(\Delta_T \Phi)^2} + \frac{P_{ш}}{P_c} + 7 \left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^2 \right]. \quad (10)$$

Сравнение с (8) показывает, что в этом случае относительная погрешность из-за дискретности счета значительно меньше, так как обычно $\omega_0 \ll \omega_s$; основным источником погрешностей, лимитирующим, в частности, возможность проведения исследований при малых значениях T , при этом можно принять мощность (относительную) аддитивного шума.

Показания ЭЧ обычно отмечают длительность одного периода процесса $T_1 = T/n$; дисперсия этой величины, очевидно, равна $\overline{(\Delta_n T_1)^2} = \frac{1}{n^2} \overline{(\Delta T)^2}$ (значок внизу n относится к результату, полученному при измерении длительности n периодов).

Перейдем к рассмотрению величины $\overline{(\Delta_T \Phi)^2}$, интересующей, в основном, нас. Введем $\overline{\Phi_\Omega^2}$ и $\overline{\dot{\Phi}_\Omega^2}$ — спектральные плотности фазы $\Phi(t)$ и скорости ее изменения $\dot{\Phi}(t)$ (равной мгновенной флуктуации частоты); очевидно, $\overline{\dot{\Phi}_\Omega^2} = \Omega^2 \overline{\Phi_\Omega^2}$. Аналогично (4) можно записать

$$\overline{(\Delta_T \Phi)^2} = 4 \int_0^\infty \frac{1}{\Omega^2} \overline{\Phi_\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega T}{2} d\Omega. \quad (11)$$

В принципе, определяя из опыта значения дисперсии $\overline{(\Delta_T \Phi)^2}$ при разных значениях T , можно найти $\overline{\Phi_\Omega^2}$ для всех значений Ω (за исключением $\Omega = 0$) по соотношению

$$\overline{\Phi_\Omega^2} = -\frac{1}{2\pi} \Omega^2 \int_0^\infty \overline{(\Delta_T \Phi)^2} \cos \Omega T dT \quad (\Omega \neq 0)^*. \quad (12)$$

Однако трудоемкость такого процесса исследования, существенная зависимость результата от погрешностей измерений делают эту процедуру практически малоприменимой.

Более целесообразно, как нам представляется, определить дисперсию величины $\Delta_T \Phi$ при разных аппроксимациях для функции $\overline{\dot{\Phi}_\Omega^2}$; сопоставление опытных данных с расчетом позволит определить пригодность принятой закономерности и численные коэффициенты.

Положим сначала, что значение $\overline{\dot{\Phi}_\Omega^2} = \omega = \text{const}$; это можно принять для естественных флуктуаций частоты генераторов весьма разных типов. Отметим, что при таком законе значение ширины («естественной») спектральной линии колебания равно $\pi\omega$ (в обычных частотных

* Здесь интеграл понимается в смысле суммирования (см., например, [1], стр. 46).

тах $-\frac{\omega}{2} \varepsilon \mu$). Для этого случая имеем, согласно (11), хорошо известный результат:

$$\overline{(\Delta_T \Phi)^2} = \pi \omega T. \quad (13)$$

Опыт показывает, как уже отмечалось выше, что частота колебаний любых генераторов подвержена не только естественным флуктуациям, но и техническим, фликкерного типа. Для описания последних типична закономерность

$$\overline{\Phi_s^2} = \frac{A}{\Omega^\gamma}, \quad (14)$$

где A и γ — константы, характеризующие источник колебаний и подлежащие определению из опыта. Подставив (14) в (11), проводя расчет и учитывая результат естественных флуктуаций (13), получим при $0 < \gamma < 1$

$$\overline{(\Delta_T \Phi)^2} = \frac{\pi A}{\Gamma(2 + \gamma) \sin \frac{\pi(1 + \gamma)}{2}} T^{1+\gamma} + \pi \omega T, \quad (15)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Построив по опытным данным зависимость $\overline{(\Delta_T \Phi)^2}$ или пропорциональной ей величины $\overline{(\Delta_n T_1)^2}$ от T (удобно это сделать в логарифмическом масштабе), можно оценить значения A , γ и ω . Определить ω можно, вообще говоря, из результатов измерений при малых значениях T , если это допустимо, разумеется, с точки зрения обсуждаемых выше погрешностей. Однако в большинстве случаев эффект естественных флуктуаций, характеризуемый значением ω , будет практически «тонуть» в общем результате; для определения ω более адекватен спектральный анализ флуктуаций частоты.

Определение $\overline{(\Delta_n T_1)^2}$ (или $\overline{(\Delta T)^2}$) требует проведения серии измерений (обозначим их число m) при каждом значении T . Длительность серии измерений примерно равна $\tau \approx mT = mn \frac{2\pi}{\omega_0}$ (пренебрегаем

паузами между отдельными измерениями; очевидно, при малых значениях T их учет существен). Минимальное значение m , необходимое для четкого выявления дисперсии процесса, порядка $50 \div 100^*$.

Полученные результаты справедливы лишь при $0 \leq \gamma < 1$. Значительно сложнее обстоит дело, если $\gamma \geq 1$, так как при этом флуктуации частоты нельзя считать стационарным случайным процессом. Соотношение (11) при $\gamma \geq 1$ не применимо. обстоятельное рассмотрение этого случая проведено в [1]; здесь ограничимся некоторыми выводами (применительно к работе ЭЧ).

При нестационарности процесса дисперсия T растет с увеличением времени измерения τ^{**} .

* Вся процедура получения данных быстра и проста, если показания ЭЧ поступают на анализатор, проводящий разброс данных по каналам, соответствующим определенным границам значений показаний ЭЧ, а результаты этого разброса отмечаются на экране осциллографа.

** Результат нестационарности легко наблюдать по картине на экране осциллографа, упоминавшегося в предыдущем примечании: при стационарности процесса увеличение числа m приводит лишь к более четкому формированию гауссовой картины с определенной шириной, а при нестационарности — к возрастанию ширины разброса данных.

То же имеет место и для ширины спектральной линии колебания (экспериментальное подтверждение этого получено в [2]). Для случая $1 < \gamma < 3$ теория дает следующее приближенное выражение для $(\Delta_T \Phi)^2$ как функции T и $\tau \gg T$ (естественными флуктуациями пренебрегаем):

$$(\Delta_T \Phi)^2 = \frac{\pi A}{\Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma - 1)} T^2 \tau^{\gamma-1}. \quad (16)$$

Этот результат получен для среднего по ансамблю систем, имевших в начале измерений одинаковое значение частоты колебаний ω_0 . На практике обычно исследуется одна система, и возникает вопрос о применимости формулы (16) к этому случаю. Усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по результатам большого количества опытов (каждый из которых состоит из серии m измерений и имеет длительность τ), проведенных в «одинаковых условиях», при подгонке («привязке») в начале каждого опыта частоты к значению ω_0 .

Однако проведение такой программы сложно, длительно и далеко не всегда выполнимо. Нам представляется разумным для многих встречающихся на практике случаев следующее. Наблюдается разброс показаний ЭЧ (соответствующих T или T/n) за время τ . Пусть δ — эффективная ширина этого разброса. Можно принять, что δ^2 (с соответствующим коэффициентом) равно примерно искомой величине $(\Delta_T \Phi)^2$ *. При этом, однако, надо правую часть (16) усреднить по времени от начала опыта, что дает результат в γ раз меньший. Для определения значений A и γ необходимо, конечно, сделать ряд опытов с различными значениями τ .

Ситуацию можно пояснить рассмотрением наглядной модели [1]. Положим, что частота колебания весьма медленно, хаотически изменяется в небольших пределах; запишем ее в виде $\omega_0 + \alpha(t)$. За время одного измерения T значение $\alpha(t)$ можно считать постоянным. Опыт длительностью τ «отобразит» приближенно ход функции $\alpha(t)$ на протяжении этого времени. Дисперсия показаний ЭЧ при этом будет равна примерно $\overline{\alpha^2(t)^\tau}$ при $\alpha(0) = 0$ (усреднение за время τ). Если случайная функция $\alpha(t)$ стационарна, оговорка о времени усреднения не требуется: результат не зависит ни от значения $\alpha(0)$, ни от значения τ при условии, разумеется, $\tau \gg T$. Если же $\alpha(t)$ описывает нестационарный процесс, хаотически «расплывающийся» от своего начального значения подобно пути, совершаемому броуновской частицей (при $\gamma = 2$ аналогия будет и количественной), то результат измерений будет зависеть от длительности опыта τ , а среднее значение частоты в каждом опыте, вообще говоря, различно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
2. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, В. В. Семенов, И. К. Спиридонова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1169 (1969).

* Насколько такое значение будет регулярным, повторяемым, может решить лишь набор таких опытов; очевидно, что это в основном будет зависеть от возможности обеспечить проведение опытов в «одинаковых условиях». Заметим лишь, что в каждом опыте «привязка» частоты происходит к ее значению в начале данного опыта. Разумеется, в случае стационарности флуктуаций частоты достаточно, как уже отмечалось выше, проведение лишь одного опыта.

3 Катлер, Сирль, ТИИЭР, 54, № 2, 41 (1966)

4. К. Н. Бакиновский, В. А. Плотников, Б. В. Рыбаков, А. Ф. Чернявский, ЖПС, 13, 571 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
31 августа 1971 г.

INVESTIGATION OF SLOW FREQUENCY FLUCTUATIONS

I. L. Bershtein, V. A. Markelov

The paper considers the possibilities of experimental investigation of the frequency fluctuations using a digital electron a-f meter. A comparison is made between the measurement results and the fluctuation spectrum. The measurement errors are analysed.

УДК 621.372.2

УЕДИНЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ

Л. А. Островский, В. В. Папко, Е. Н. Пелиновский

Приведены результаты исследования уединенных электромагнитных волн в нелинейной линии передачи с полупроводниковыми диодами. Экспериментально изучены процессы формирования, распространения и взаимодействия уединенных волн.

Уединенные волны (солитоны)—один из наиболее характерных и важных для приложений типов волновых процессов в нелинейных диспергирующих средах. Их до определенной степени особая роль обусловлена тем, что это единственный случай нелинейной волны стационарного профиля, энергия которой локализована в основном на конечном интервале. Существенно и то, что волны, близкие к уединенным, возникают в результате распада нестационарных возмущений довольно широкого класса [1, 5].

Солитоны изучаются уже очень давно в связи с волнами на воде (см., например, [2]). В последнее десятилетие круг изучаемых нелинейных диспергирующих сред значительно расширился, и аналогичные проблемы были исследованы для волн в плазме и в некоторых других средах [3, 4]. В связи с этим был проведен и более детальный математический анализ ряда процессов, связанных с образованием и взаимодействием солитонов [1, 4-7], а также с влиянием поглощения и неоднородности среды на их распространение [8-10]. Основная часть результатов в указанных работах получена с помощью либо численных, либо приближенных методов на основе уравнения Кортевега—де-Вриза, которое справедливо для волн, распространяющихся в одну сторону, и не описывает, в частности, отражений. Что касается экспериментальных данных, то их довольно мало, и количественное сравнение с теорией удается провести лишь в отдельных случаях [9, 11].

Настоящая работа посвящена исследованию электромагнитных уединенных волн. Использование линий передачи с нелинейными элементами позволяет наблюдать почти все процессы, изучаемые теоретически в связи с солитонами, и исследовать их количественно, что трудно сделать для сжимаемых сред*. Однако интерес к электромагнитным солитонам оправдан не только ввиду аналогий с процессами в других средах, но также из-за их физических особенностей (отсутствие макроскопических движений среды) и, наконец, из-за возможных радиотехнических применений. Возможность существования решений в виде стационарных электромагнитных волн уединенного типа уже отмечалась ранее [16, 17]. Сравнительно недавно сообщалось об экспериментах, в которых наблюдалось образование импульсов, близких по форме

* Сходная ситуация имела место ранее для ударных электромагнитных волн [12], допускающих весьма подробное экспериментальное изучение. Заметим, что профиль стационарной ударной волны в системе с реактивной дисперсией может быть близок к последовательности солитонов.

к солитонам, из синусоидальных возмущений, без какого-либо количественного изучения этого процесса [13, 18]. Заметим также, что численный анализ процесса распада импульса на мелкомасштабные волны, близкие к уединенным, по-видимому, впервые был проведен именно для электромагнитных волн [19].

Ниже приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования электромагнитных уединенных волн в нелинейной линии передачи с полупроводниковыми диодами. Изучены процессы формирования, распространения и взаимодействия таких волн.

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СОЛИТОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНИИ

1. Существование уединенных волн связано, кроме нелинейности, также с наличием определенного типа дисперсии, а именно, среда должна быть недиспергирующей вблизи нулевой частоты для данного типа нормальных волн. Для электромагнитных волн такому условию удовлетворяют многие диэлектрики, ферриты, полупроводники с $p-n$ переходом, а также ряд волновых систем с пространственной дисперсией (периодические структуры, искусственные линии задержки и т. д.). Имея в виду экспериментальную проверку теории, конкретизируем модель волновой системы, считая, что она может быть описана эквивалентной схемой, показанной на рис. 1. Нелинейность здесь обусловлена емкостью полупроводникового $p-n$ перехода, а дисперсия — дискретностью параметров линий (пространственная дисперсия) и наличием емкости C_1 (временная дисперсия). Такая система описывается, вообще говоря, дифференциально-разностным уравнением; если, однако, характерный масштаб изменения величин много больше размера одного звена, то нетрудно получить уравнение в частных производных, связывающее заряд Q и напряжение u на нелинейной емкости:

$$\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} + LC_1 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial n^2} - L \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{L}{R_1} \frac{\partial u}{\partial t} - R_2 \frac{\partial^3 Q}{\partial t \partial n^2}. \quad (1)$$

Здесь n — номер звена, рассматриваемый как непрерывная координата.

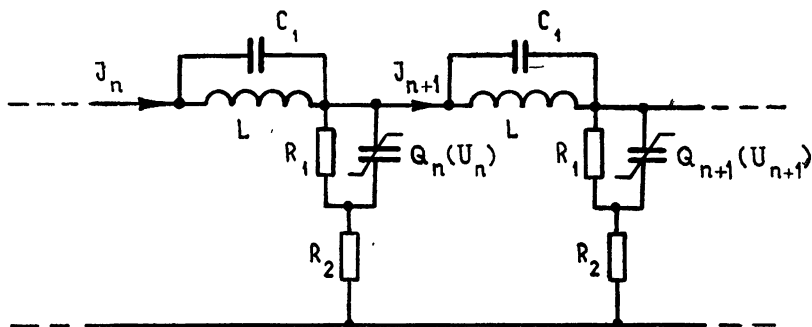


Рис. 1. Эквивалентная схема линии.

Для небольших напряжений зависимость $Q(u)$ можно аппроксимировать полиномом

$$Q = C_0 u - \alpha u^2 + \alpha_1 u^3 + \dots \quad (2)$$

Емкость C_0 и коэффициенты α и α_1 , вообще говоря, меняются вдоль линии. При условии малости эффектов нелинейности, дисперсии, диссипации и плавности неоднородности порядок уравнения (1) можно понизить, рассматривая волны, распространяющиеся только в одном направлении;

$$\rho^{-1} \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{3}{2} \alpha_1 u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \delta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \delta_2 u = 0, \quad (3)$$

где

$$\tau = \int \frac{dn}{v} - t, \quad v^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C_0}}, \quad \beta = \frac{C_0 + 12C_1}{24v^2},$$

$$\delta_1 = R_2 C_0^2 / 2, \quad \delta_2 = \frac{1}{2R_1} + \frac{v}{4} \frac{\partial C_0}{\partial n}.$$

Отметим, что отдельные члены, отвечающие за нелинейность, дисперсию и диссипацию, входят в (3) аддитивно, что позволяет рассматривать отдельно относительное влияние каждого из факторов на волновые процессы.

Различные частные случаи уравнения (3) рассматривались рядом авторов [4–10]. Используя соответствующие результаты, обсудим основные особенности уединенных электромагнитных волн, существенные для описываемых ниже экспериментов.

2. В отсутствие диссипации и неоднородности уравнение (3) имеет семейство стационарных (зависящих от переменной $\xi = n - v_{\text{ст}} t$) решений [4]. Для большинства описываемых ниже экспериментов достаточно учесть квадратичную нелинейность, полагая $\alpha_1 = 0$. При этом (3) совпадает с хорошо известным уравнением Кортевега—де-Вриза, и уединенное решение имеет вид

$$u = U \operatorname{sch}^2 \Omega(n - v_{\text{ст}} t), \quad (4)$$

где $\Omega^2 = \frac{2\alpha U}{C_0} \left/ \left(1 + 12 \frac{C_1}{C_0} \right) \right.$, U — амплитуда волны. Скорость $v_{\text{ст}}$ и длительность $T_{\text{ст}}^*$ солитона определяются его амплитудой:

$$v_{\text{ст}} = v(1 + \alpha U / 3C_0), \quad T_{\text{ст}} = 1,76 \sqrt{\frac{C_0 + 12C_1}{2\alpha v^2 U}}. \quad (5)$$

Нетрудно получить также стационарное решение (3) с учетом кубической нелинейности [20], которое используется ниже при расчете параметров солитона большой амплитуды (см. рис. 6).

3. Решение (4), простирающееся, строго говоря, от $t = -\infty$ до $t = \infty$, связано, очевидно, с идеализацией. Существенно, однако, что параметры реальных ограниченных импульсов могут быть близки к параметрам уединенной волны. Более того, такие «квазисолитоны» обладают определенной устойчивостью в том смысле, что при достаточно плавном изменении параметров они описываются формулами (4), (5). Это обстоятельство дает возможность получить решение, характеризующее изменение амплитуды импульса под влиянием малых потерь и достаточно плавной неоднородности. Критерий малости соответствующих членов в (3) имеет вид

$$\frac{R_1}{\rho} \gg 3 \left(\frac{C_0}{\alpha U} \right)^{3/2}, \quad \frac{R_2}{\rho} \ll 0,05 \left(\frac{2\alpha U}{C_0} \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} \ll 0,01 \rho \left(\frac{2\alpha U}{C_0} \right)^{3/2}, \quad (6)$$

где $\rho = \sqrt{L/C_0}$ — волновое сопротивление линии.

* Разумеется, полная протяженность солитона бесконечна; мы определяем длительность на уровне $U/2$.

В результате, применив к уравнению (3) метод малого параметра [14], можно найти зависимость амплитуды солитонов от координаты [8-10]. Так, для однородной линии передачи имеем

$$U(n) = U_0 \exp\left(-\frac{2\rho n}{3R_1}\right) \left/ \left[1 + \frac{8\alpha R_1 R_2}{5L\left(1 + \frac{12C_1}{C_0}\right)} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\rho n}{3R_1}\right) \right] \right] \right. \quad (7)$$

В случае «частотно-независимых» потерь ($R_1 \neq \infty$, $R_2 = 0$) отсюда следует, что амплитуда уединенной волны уменьшается экспоненциально, причем быстрее, чем у такого же импульса в линейной линии без дисперсии (для последнего $U_n \sim \exp\left(-\frac{\rho n}{2R_1}\right)$). Если же $R_1 = \infty$, $R_2 \neq 0$ (случай высокочастотных потерь), то

$$U(n) = U_0 \left(1 + \frac{16}{15} R_2 \alpha v U n\right)^{-1}, \quad (8)$$

т. е. затухание вообще не экспоненциальное.

Для неоднородной линии без потерь из условия сохранения энергии волны можно получить

$$[U(n)C_0(n)]^3 \alpha^{-1}(n) \left(1 + 12 \frac{C_1}{C_0}\right) = \text{const}. \quad (9)$$

Здесь амплитуда солитона также изменяется сильнее, чем в линейном случае (так, при $C_1 \ll C_0$ и $\alpha = \text{const}$ имеем $U \sim C^{-1}$, в то время как для линейной линии $U \sim C^{-1/4}$).

4. Как известно, ограниченное во времени (видеоимпульсное) начальное возмущение распадается на конечное число уединенных импульсов. Это число N и параметры солитонов для уравнения Кортевега—де-Вриза могут быть найдены из соответствующих законов сохранения [4]. В частности, если форма начального возмущения имеет вид (4) (но без связи (5) между U и T), то N определяется параметром подобия

$$\sigma = \frac{T}{T_{\text{ст}}} = \frac{T}{1,76} \sqrt{\frac{U}{12\beta}} \quad (10)$$

(очевидно, для солитона $\sigma = 1$). При $\sigma > 1$, грубо говоря, N равно целой части σ . При $\sigma < 1$ наряду с формированием солитона возникают квазигармонические колебания, отстающие от импульса [15].

Более общим, в известном смысле, является процесс взаимодействия солитонов, удаленных в начальный момент, затем сходящихся и расходящихся вновь. Из законов сохранения следует, что параметры солитонов до и после взаимодействия одинаковы. Однако сам процесс взаимодействия может происходить качественно различным образом. Так, для двух солитонов, один из которых (с амплитудой U_1) догоняет другой* (с амплитудой $U_2 \ll U_1$), было установлено [6], что при $U_1/U_2 < 2,62$ имеет место «обменное» взаимодействие—в некоторый момент времени t импульсы становятся равными (полного слияния не происходит), после чего передний импульс растет, удаляясь от второго. Если же $U_1/U_2 > 2,62$, то солитоны при некотором $t = t_1$ совпадают, образуя один нестационарный импульс, который затем распадается на два расходящихся солитона с амплитудами U_1 и U_2 . Параметры импульса при

* Заметим, что при встречном взаимодействии фактически имеет место суперпозиция солитонов [7].

$t = t_1$ (амплитуду U и длительность T) можно определить из законов сохранения, если предположить, что его форма близка к (4) (но без связи (5)). В этом случае имеем

$$U = U_2 \frac{1 + (U_1/U_2)^{3/2}}{1 + (U_1/U_2)^{1/2}}, \quad T = T_2 \frac{(1 + \sqrt{U_1/U_2})^2}{1 + (U_1/U_2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Из (11) легко видеть, что $U_1 < U < U_2$ и $T_2 < T < T_1$; это же было получено в численных расчетах [5].

Заметим, что механизм обмена энергией между импульсами при взаимодействии допускает простую «параметрическую» интерпретацию: поле каждого солитона, меняя емкость, совершает работу над полем другого солитона, положительную на фронте ($\frac{\partial C}{\partial t} < 0$) и отрицательную на спаде ($\frac{\partial C}{\partial t} > 0$) «работающего» солитона. Легко убедиться, что при попутном движении спад первого импульса перекрывается с фронтом второго, и солитоны совершают друг над другом работу разных знаков, в результате чего происходит перекачка энергии в импульс, движущийся впереди.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СОЛИТОНОВ

Для экспериментального изучения электромагнитных уединенных волн использовалась искусственная линия из звеньев, соответствующих рис. 1. Нелинейным элементом звена являлась емкость C параметрического диода Д 814 А. Зависимость ее величины от запирающего напряжения смещения $E_{см}$ приведена на рис. 2. При небольших напряжениях (до 1—1,5 в) $C(E_{см})$ можно аппроксимировать прямой линией, тогда $\alpha = 110$ пф/в. Начальная емкость $C_0 = C(0)$ используемых диодов составляла от 800 до 660 пф, и в линии они были расположены в порядке монотонного убывания C_0 . Что касается элементов C_1 , R_1 и R_2 , то они включались специально лишь в некоторых экспериментах (см. ниже); в остальных случаях их влияние можно было не учитывать.

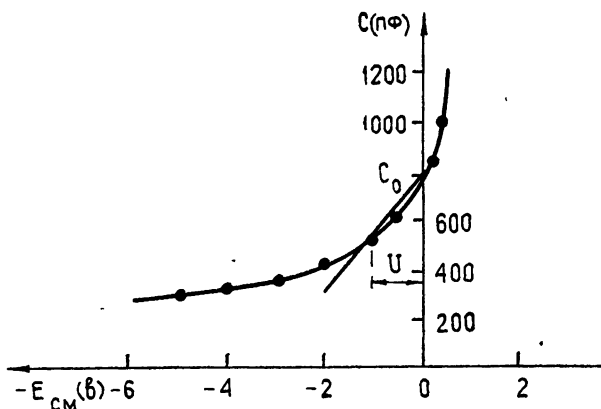


Рис. 2. Зависимость емкости C диода Д 814 А от напряжения смещения $E_{см}$.

1. *Формирование и параметры стационарной волны.* На вход линии передачи поступали импульсы различной амплитуды $U_{вх}$ и длительности $T_{вх}$. Во всех исследованных случаях распространение этих импульсов приводило к образованию уединенных волн, параметры

которых были близки к (5). Процесс образования солитонов из различных начальных импульсов иллюстрируется на рис. 3 и 4. Заметим, что качественный ход процесса, независимо от формы начального импульса, может быть охарактеризован параметром подобия σ , соответствующим (10). Так, при $\sigma = 0,63$ (рис. 3 а) импульс расширяется, а при $\sigma = 1,4$ (рис. 3 б)—сужается. В случае $\sigma = 3,4$ (импульс прямоугольной формы) возникает три, а при $\sigma = 4,3$ —четыре солитона, из которых передний всегда больше по амплитуде*.

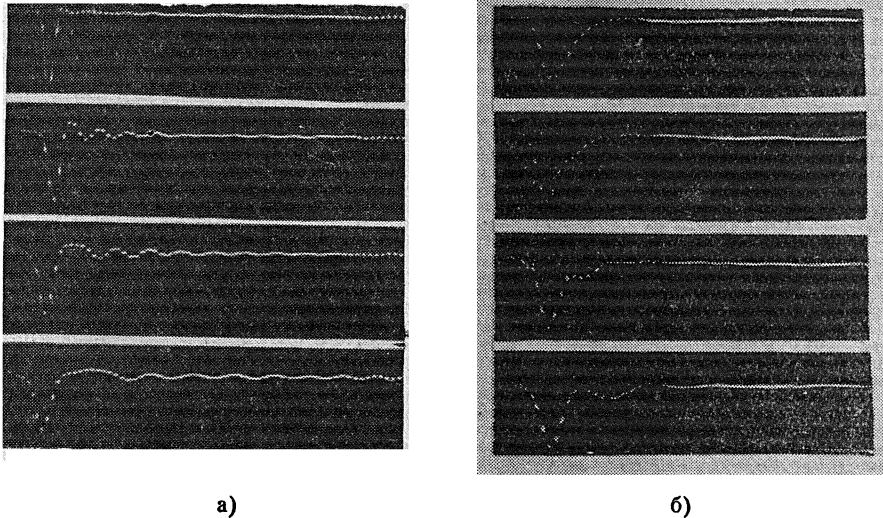


Рис. 3. Осциллограммы импульсов напряжения на емкости некоторых звеньев линии: а) при $\sigma \approx 0,64$; б) при $\sigma \approx 1,4$. Интервал между метками равен $0,05 \mu\text{сек}$.

В ряде случаев формирование солитонов сопровождалось появлением осцилляций. Этот процесс определяется длительностью наиболее крутых участков входного импульса; осцилляции наблюдались в тех случаях, когда фронты импульса были короче фронта солитона соответствующей амплитуды, в том числе при $\sigma > 1$. Осцилляции имеют вид цуга с частотой, близкой к граничной частоте линии $f_{гр} = (\pi \sqrt{LC_0})^{-1} = 4,6 \cdot 10^6 \text{ гц}$, который отстает от солитона и, благодаря дисперсии, растягивается с появлением частотной модуляции.

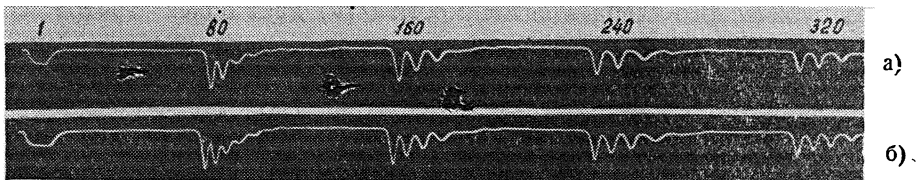


Рис. 4. Распад прямоугольных импульсов напряжения с начальными параметрами а) $\sigma = 3,4$, б) $\sigma = 4,3$.

* Распад на солитоны длинного импульса происходит на больших расстояниях (сотни звеньев), поэтому в экспериментах использовался резонатор (подробнее об этом см. в п. 4). Приведенные осциллограммы показывают изменение напряжения на границе резонатора, и здесь из-за сложения с отраженной волной амплитуды импульсов, кроме первого (входного), удваиваются.

Более детально процесс формирования солитонов можно проследить на рис. 5, где для двух значений σ (0,64 и 1,4) показано изменение амплитуды и длительности импульсов. Эти величины становятся практически постоянными, начиная с 10-го—15-го звена*. Заметное увеличение амплитуды импульса в случае $\sigma \approx 1,4$ в начале процесса происходит в результате взаимодействия с вторым из формируемых солитонов. Движение энергии в группе солитонов от последующих к первому можно проследить также по осциллограммам на рис. 4.

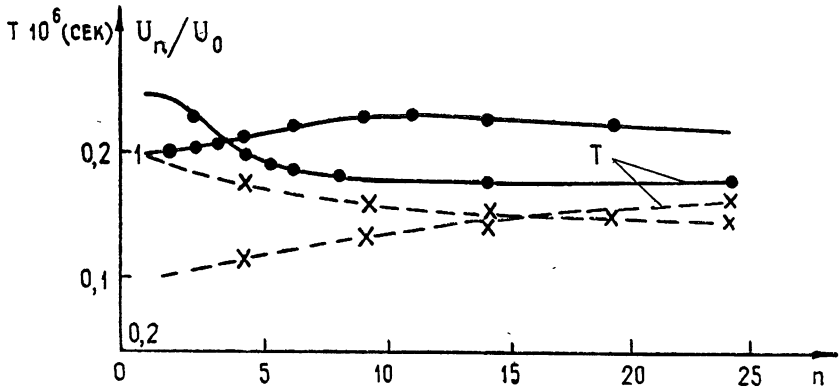


Рис. 5. Изменение амплитуды импульса и его длительности вдоль линии. Сплошные линии— $U_0 = 1,25$ в, $\sigma = 1,4$; пунктирные линии— $U_0 = 2,25$ в, $\sigma = 0,64$, данные при $U_0 = 1,25$ в относятся к переднему импульсу.

Основная часть энергии исследованных импульсов сосредоточена в элементах четырех-пяти звеньев (задержка на одном звене $\tau_0 \approx 7 \cdot 10^{-8}$ сек, а длительность солитона $T \approx 0,2 \cdot 10^{-6}$ сек). При таких размерах волны третий член разложения в ряд по n оператора $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$, входящего в точное уравнение линии, на два порядка меньше второго, что подтверждает правомерность описания процессов в дискретной линии уравнением в частных производных (1). О соответствии параметров стационарного импульса теоретическим можно судить по рис. 6, где приведены графики зависимости длительности и скорости движения солитона от его амплитуды.

Для лучшей аппроксимации кривой $Q(u)$ коэффициент α определялся отдельно для различных амплитуд. Видно, что эксперимент хорошо согласуется с теорией до $U \sim 1$ в, т. е. в этой области для описания процессов можно пользоваться уравнением Кортевега—де-Вриза. При больших амплитудах квадратичная аппроксимация недостаточна. Учет кубического члена в зависимости $Q(u)$ дает более точное совпадение теории и эксперимента.

Увеличение дисперсии в линии путем дополнительного включения в каждое звено емкости $C_1 = 51$ пф, как и следовало ожидать, приводит лишь к увеличению длительности стационарной волны, а скорость распространения остается прежней в соответствии с (5).

2. *Затухание солитонов в линии с потерями.* Как уже отмечалось, собственные потери в описанной линии передачи незначительны, поэтому для исследования затухания уединенной волны в ее звеньях специально включались сопротивления R_1 (частотно-независимые потери) или R_2 (высокочастотные потери). Условие квазистационарности уединенных волн (6) здесь сводится к неравенствам $R_1 \gg 4 \text{ ком}$, $R_2 \ll 2,5 \text{ ом}$. На рис. 7 а приведены осциллограммы, иллюстрирующие

* Очевидно, расстояние, на котором формируется стационарная волна, зависит от длительности начального импульса.

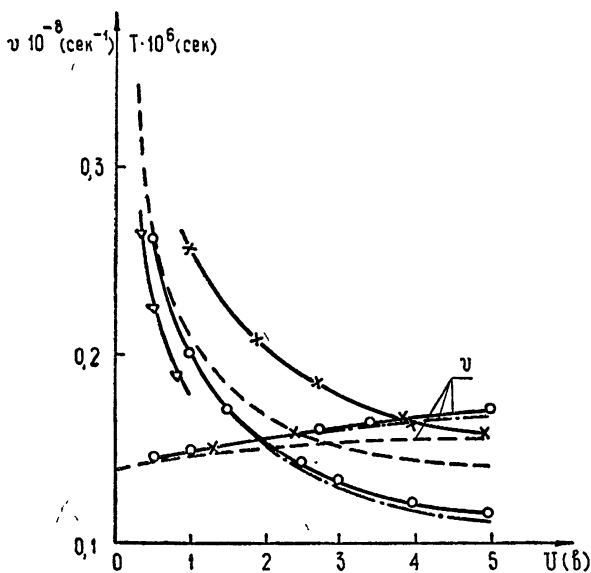


Рис. 6. Зависимость скорости $v_{ст}$ и длительности $T_{ст}$ импульса от его амплитуды U в линии с различными параметрами R_1 и C_1 : $\times \times \times$ — $R_1 \rightarrow \infty$, $C_1 = 51$ пф; $\circ \circ \circ$ — $R_1 \rightarrow \infty$, $C_1 = 0$; $\nabla \nabla \nabla$ — $R_1 = 1,34$ ком, $C_1 = 0$; — — — — теоретические кривые, рассчитанные по (5); - - - - - то же с учетом кубической нелинейности.

затухание волны под влиянием частотно-независимых потерь, а на рис. 8 — графики изменения амплитуды импульса вдоль линии. Здесь же показано затухание слабой (не более 0,1 в) синусоидальной волны с частотой $f \approx 750$ кГц, для которой можно пренебречь нелинейностью и дисперсией. Из приведенных на рис. 7 — 9 данных видно хорошее соответствие экспериментальных результатов и теории в рамках применимости формулы (7) (при $R_1 = 5,55$ ком). Локально длительность импульса близка к длительности стационарной волны, а декремент затухания его амплитуды примерно в 1,33 раза больше, чем для синусоидальной волны. В случае $R_1 = 1,34$ ком длительность импульса заметно меньше, чем в соответствии с (5) (см. рис. 6): при столь быстрых изменениях амплитуды стационарный профиль не успевает устанавливаться. В результате за импульсом возникают осцилляции, амплитуда которых, как видно из рис. 7 а, очень мала, однако их образование приводит к дополнительным потерям энергии. Превышение декремента затухания амплитуды импульса над линейным в этом случае составляло около 1,4.

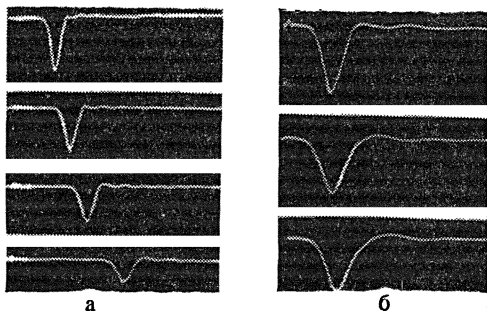


Рис. 7. Осциллограммы импульсов напряжения вдоль линии с частотно-независимыми (а) и высокочастотными (б) потерями.

Влияние высокочастотных потерь можно видеть из рис. 7 б, где показаны осциллограммы импульса, и рис. 9, где приведены теоретические и экспериментальные графики изменения его амплитуды U вдоль линии с $R_2 = 0,8 \text{ ом}$ и $R_2 = 2,8 \text{ ом}$. Ввиду малого затухания волны графики на рис. 9 почти не отличаются от прямых, однако зависимость наклона этих прямых от величины начальной амплитуды импульса свидетельствует о неэкспоненциальном характере затухания. С учетом «неконтролируемых» потерь (соответствующих измерениям при $R_2 = 0$) экспериментальные данные хорошо согласуются с теорией при $R_2 = 0,8 \text{ ом}$. В случае же $R_2 = 2,8 \text{ ом}$, как и следовало ожидать, совпадение несколько хуже, и в импульсе появляется аperiодический «хвост», нарушающий его симметрию.

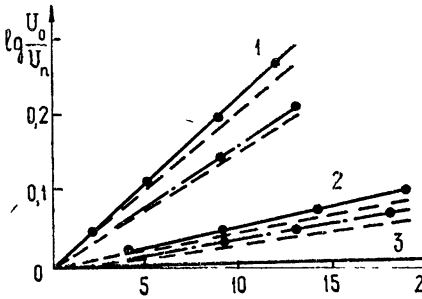


Рис. 8.

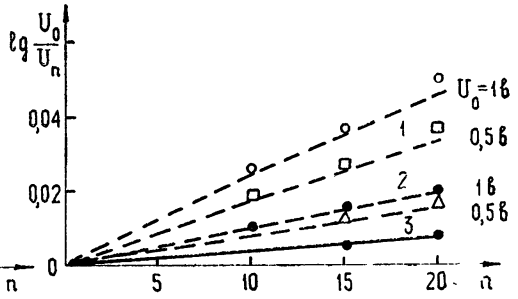


Рис. 9.

Рис. 8. Рассчитанные (пунктир) и экспериментальные графики изменения амплитуды импульсов (сплошные линии) и синусоидальной волны (штрих-пунктирные линии) в линии с частотно-независимыми потерями;

1— $R_1 = 1,34 \text{ ком}$, 2— $R_1 = 5,55 \text{ ком}$; 3— $R_1 = \infty$.

Рис. 9. Изменения амплитуды импульса в линии с высокочастотными потерями, результаты расчета нанесены пунктиром (справа указаны значения амплитуд на входе линии);

1— $R_2 = 2,8 \text{ ом}$; 2— $R_2 = 0,8 \text{ ом}$; 3— $R_2 = 0$.

3. Распространение солитонов в неоднородной линии. Для изучения влияния неоднородности в звенья линии дополнительно вносились постоянная емкость nC_g ($C_g = 5 \text{ пф}$). Условие квазистационарности (6) в этом случае сводится к неравенству $C_g \ll 7 \text{ пф} \approx 0,01 \text{ С}$. В экспериментах емкость соседних звеньев с учетом неидентичности диодов, отмеченной в начале этого раздела, отличалась на величину $C'_g \approx 8,5 \text{ пф}$.

В зависимости от направления движения наблюдалось как уменьшение, так и увеличение амплитуды импульса, однако соответствующие эффекты были невелики, и количественное сравнение экспериментальных результатов с теорией затруднено. В частности, для исключения влияния потерь измерялось относительное изменение амплитуды импульса при прохождении соответствующего участка линии в противоположных направлениях. Результаты измерений приведены на рис. 10. Некоторое расхождение теоретических и экспериментальных данных можно объяснить недостаточной плавностью изменения $C(n)$, в результате чего длительность импульса не успевала «следить» за изменением параметров линии. Нестационарность волны проявлялась в изменениях ее формы, подобных тем, которые наблюдались в линиях с потерями, а также в образовании за импульсом аperiодического или осциллирующего хвоста.

4. *Взаимодействие солитонов.* Процесс попутного взаимодействия происходит на больших (сотни звеньев) расстояниях, поэтому в экспериментах использовалось многократное прохождение импульса, по линии. Блок-схема установки приведена на рис. 11. От синхронизованных между собой генераторов 1 и 2 в линию 3 поступали два импульса, близкие к стационарным, причем их амплитуды и временной сдвиг между ними можно было изменять в широких пределах. Линия задержки разомкнута на концах и слабо связана с источниками 1 и 2; отражение от концов линии эквивалентно встречному взаимодействию двух солитонов и ввиду его кратковременности не влияет на процесс.

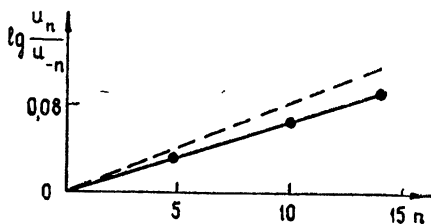


Рис. 10.

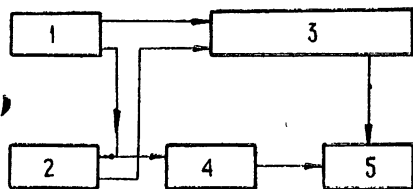


Рис. 11.

Рис. 10. Теоретический (пунктирный) и экспериментальный графики изменения амплитуды импульсов в неоднородной линии.

Рис. 11. Блок-схема экспериментальной установки: 1, 2 — генераторы импульсов 2В-1, 3 — нелинейная линия, 4 — ждущий мультивибратор, 5 — осциллограф ДЭСО-1.

Процесс попутного взаимодействия иллюстрируется на рис. 12, где показаны как «обгон» (рис. 12 а), так и «обменное» взаимодействие (рис. 12 б). Граничное отношение амплитуд солитонов, разделяющее эти два случая составляет около 2,8, некоторое отличие этого результата от теоретического (2,62) связано, по-видимому, с затуханием волн. Результат более детального изучения случая «обменного» взаимодействия виден на рис. 13, где показан временной сдвиг между импульсами Δt в момент, когда их амплитуды равны; с увеличением U_1/U_2 максимумы сближаются вплоть до их слияния при $U_1/U_2 \approx 2,8$. Образующийся в результате слияния импульс по форме близок к (4), но без связи (5), и для определения его параметров U и T можно воспользоваться выражениями (11). Так, при слиянии солитонов с амплитудами $U_2 = 0,24$ в и $U_1 = 1,18$ в получался импульс с амплитудой $U = 0,94$ в и длительностью $T = 0,34$ мксек (согласно формулам (11) получаем $U = 0,92$ в, $T = 0,34$ мксек).

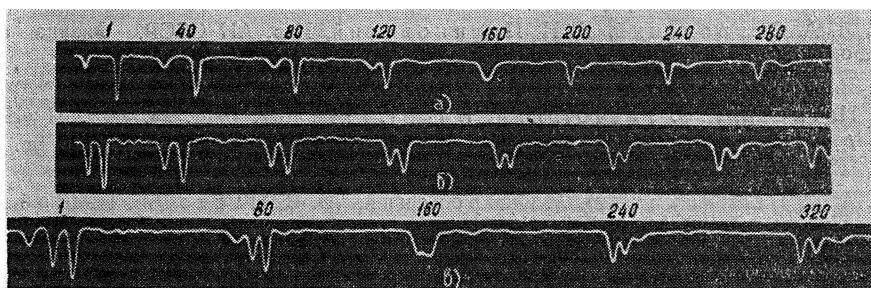


Рис. 12. Осциллограммы напряжения на конце резонатора. Цифры обозначают число звеньев, пройденное импульсами от начала процесса.

Нами наблюдался также процесс взаимодействия большого числа солитонов, сходящихся в одну точку. Результирующий импульс может иметь весьма сложную форму, но при некоторых начальных соотношениях амплитуд и временных интервалах между солитонами возможно образование импульса с почти плоской вершиной (рис. 12 в). Сравнение осциллограмм на рис. 4 и 12 в показывает, что распад достаточно длинного импульса на солитоны можно рассматривать как процесс взаимодействия.

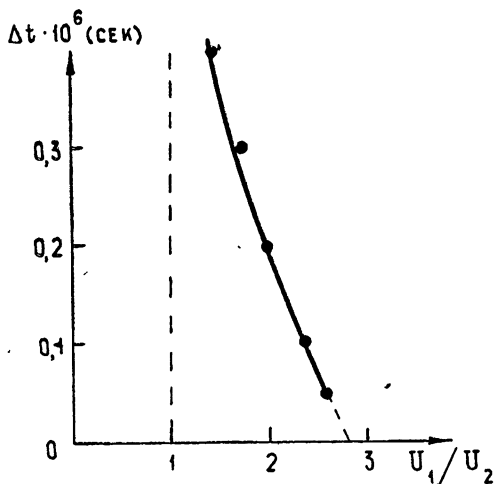


Рис. 13. Зависимость минимального сдвига между импульсами от начального соотношения между амплитудами.

Описанные здесь эксперименты не исчерпывают, конечно, всех представляющих интерес свойств электромагнитных уединенных волн, но они достаточно убедительно свидетельствуют о возможности значительно более полного исследования уединенных волн, чем это достигнуто в экспериментах для сжимаемых сред или даже с помощью машинных вычислений.

Авторы благодарны В. А. Аксенову и Ю. Г. Хабибуллиной за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett., **15**, № 6, 240 (1965).
2. D. J. Korteweg, G. de Vries, Phil. Mag. (5), **39**, 422 (1895).
3. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 2, 163 (1970).
4. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. НГУ, Новосибирск, 1968.
5. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ, **51**, № 5, 1557 (1966).
6. D. J. Lax, Comm. Pure Appl. Math., **21**, 467 (1968) (перевод в сб Математика **13**: 5, 128 (1969)).
7. D. J. Wehner, J. C. Luke, J. Math. Phys., **43**, № 4, 309 (1964).
8. E. Ott, R. N. Sudan, Phys. Fluids, **12**, № 11, 2388 (1969); **13**, № 6, 1432 (1970).
9. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физика атм. и океана, **6**, № 9, 934 (1970).
10. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, **2**, 68 (1971).
11. H. Ikeda, R. J. Taylor, D. R. Baker, Phys. Rev. Lett., **25**, № 1, 11 (1970).
12. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1376 (1967).
13. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, Е. Н. Шабанов, Письма в ЖЭТФ, **9**, № 5, 74 (1969).
14. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ДАН СССР, **195**, № 4, 804 (1970).
15. Ю. А. Березин, ЖТФ, **38**, № 1, 24 (1968).
16. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, № 4, 680 (1961).
17. Ю. Ф. Филиппов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 2, 292 (1965).
18. R. Hirota, K. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan, **28**, № 5, 1366 (1970).

- 19 Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 985 (1963).
- 20 К. А. Горшков, А. А. Островский, В. В. Папко, Е. Н. Пелиновский, Теория электромагнитных волн (УРСИ симпозиум), изд. Наука, М., 1971.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 апреля 1971 г

SOLITARY ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONLINEAR LINES

L. A. Ostrovskii, V. V. Papko, E. N. Pelinovskii

The results of investigating of solitary electromagnetic waves in a nonlinear transmission line with semiconductor diodes are presented. The processes of formation propagation and interaction of solitary waves have been studied in experiments.

УДК 538.574.4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПУЧКИ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ. II

Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

Исследуются свойства квазиоптических электромагнитных пучков, распространяющихся в анизотропных средах в особом направлении — направлении конической рефракции — и формируемых плоскими волнами, сосредоточенными вблизи поверхности конуса внешней конической рефракции. Проанализирована структура поля таких пучков и показано, что они распливаются медленнее, чем это имеет место в обычных направлениях, в частности, в свободном пространстве.

1. В первой части работы [1] были проанализированы свойства квазиоптических электромагнитных пучков, распространяющихся в анизотропных средах в особых направлениях, которые характеризуются нарушением обычного диффузионного приближения. Настоящая, вторая часть работы посвящена исследованию свойств пучков, распространяющихся в особых направлениях другого рода (см. [1]), а именно, направлениях, характеризующихся наличием внешней конической рефракции. Соответствующие (так называемые кольцевые) пучки могут быть сформированы плоскими волнами (определенного типа) с волновыми векторами, сосредоточенными вблизи поверхности конуса внешней конической рефракции. Этот конус в гиротропной плазме образуется волновыми векторами, попадающими в экстремальные точки поверхности волновых векторов, не лежащие на оси ординат — точки C на рис. 1а (кривые I, IV) работы [1]; его ось параллельна постоянному магнитному полю. Волновые векторы $k^{(C)}$ и векторы групповой скорости $V^{(C)}$ изображены в [1] на рис. 3, где воспроизведена отдельно кривая I рис. 1а, а также отвечающая ей кривая, представляющая сечение соответствующей поверхности лучевых векторов. Области значений параметров плазмы $v = \omega_0^2/\omega^2$ и $u = \omega_H^2/\omega^2$ (ω_0 — ленгмюровская частота, ω_H — гирочастота электронов), при которых имеет место внешняя коническая рефракция, показаны в [1] на рис. 2. Именно такой случай, когда поверхности волновых и лучевых векторов симметричны относительно направления внешней конической рефракции, и будет рассматриваться в работе. Некоторые предварительные результаты, относящиеся к рассматриваемому здесь случаю, содержатся в [2].

2. Для описания свойств соответствующих кольцевых пучков мы воспользуемся декартовой x, y, z и цилиндрической ρ, φ, z системами координат с осью z , ориентированной в направлении групповой скорости $V^{(C)}$ (см. рис. 1). Согласно общей формуле (1) из [1] поле пучка можно записать в виде

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e E(k_x, k_y) \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z z) dk_x dk_y. \quad (1)$$

Переходя в (1) к цилиндрическим координатам согласно $x = \rho \cos \varphi$,

$y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, $k_z = k_z$ и предполагая, что спектральная плотность симметрична по угловой координате φ , $E(k_x, k_y) = E(k_\rho)$, получим

$$E(\rho, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty E(k_\rho) k_\rho \exp(-ik_z z) e(k_\rho \varphi) \exp[-ik_\rho \rho \cos(\varphi - \varphi)] d\varphi dk_\rho \quad (2)$$

с учетом того, что $k_x = k_\rho \cos \varphi$, $k_y = k_\rho \sin \varphi$, $k_z = k_z$.

Пусть в системе координат x', y', z' , ось z' которой направлена вдоль волнового вектора \mathbf{k} одной из плоских волн, формирующих пучок (см. рис. 1), поляризаационный множитель \mathbf{e}'_0 представляется в виде

$$\mathbf{e}'_0 = x'_0 + e_2 y'_0 + e_3 z'_0 \quad (3)$$

(x'_0, y'_0, z'_0 — единичные орты). Коэффициенты e_2, e_3 , которые в случае плазменной среды могут быть взяты, например, из [3], определяются углом ϑ между осями z' и z и параметрами среды. Переходя в (3) к системе координат x, y, z , имеем

$$\begin{aligned} e_0(\vartheta, \varphi) = & \frac{1}{2} (x_0 - iy_0) (\tilde{e}_2 - i) e^{i\varphi} + \\ & + \frac{1}{2} (x_0 + iy_0) (\tilde{e}_2 + i) e^{-i\varphi} + \tilde{e}_3 z_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{e}_2 = e_2 \cos \vartheta + e_3 \sin \vartheta$, $\tilde{e}_3 = -e_2 \sin \vartheta + e_3 \cos \vartheta$.

Мы будем рассматривать кольцевые пучки с достаточно узким угловым спектром (квазиоптические кольцевые пучки), сосредоточенным вблизи некоторого $\vartheta = \vartheta_0$ (которому отвечает $k_\rho = k_\rho^{(0)}$, $\Delta\vartheta \ll \vartheta_0$). Учитывая, что поляризаационный множитель $\mathbf{e}_0(\vartheta, \varphi)$ является, как правило, достаточно плавной функцией ϑ , при подстановке его в интеграл можно считать ϑ фиксированным и равным ϑ_0 . Характер поляризации пучка в целом при этом, как нетрудно понять, будет существенно зависеть от распределения начальных фаз $\Phi_0(\varphi)$ плоских волн с волновыми векторами, лежащими на поверхности конуса $\vartheta = \vartheta_0$, или, грубо говоря, от того, как были «выстроены» векторы электрического поля в каждой из этих волн на «начальной» апертуре. Функция $\exp[i\Phi_0(\varphi)]$ может, очевидно, быть разложена в ряд Фурье по угловым гармоникам, поэтому мы возьмем в качестве распределения начальных фаз зависимость вида $\exp(in\varphi)$. С учетом фазового множителя входящий в (2) поляризаационный вектор записывается следующим образом:

$$\mathbf{e}(k_\rho, \varphi) = \mathbf{e}_0(\vartheta, \varphi) e^{in\varphi}. \quad (5)$$

Подставляя (5), (4) в (2) и выполняя интегрирование по φ , приходим к выражению

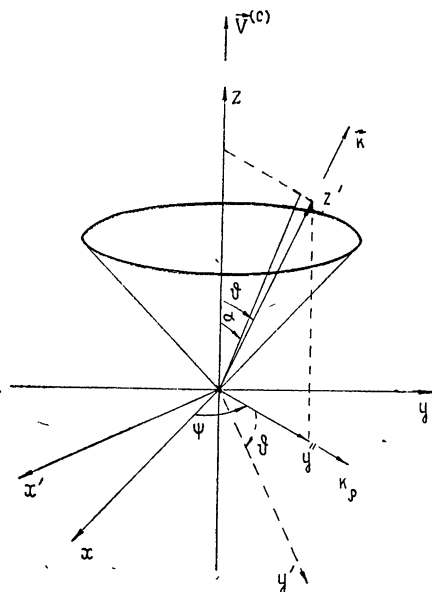


Рис. 1. Используемые системы координат.

$$\begin{aligned}
 E(\rho, \varphi, z) = & \pi \exp \left[in \left(\varphi + \frac{3}{2} \pi \right) \right] \left\{ \exp \left[i \left(\varphi + \frac{3}{2} \pi \right) \right] \times \right. \\
 & \times (\tilde{e}_2 - i)(x_0 - iy_0) J_{\nu+1}(\rho, z) + \\
 & + \exp \left[-i \left(\varphi + \frac{3}{2} \pi \right) \right] (\tilde{e}_2 + i)(x_0 + iy_0) J_{\nu-1}(\rho, z) \left. \right\} + \\
 & + 2\pi \exp [in(\varphi + \pi/2)] \tilde{e}_3 z_0 J_\nu(\rho, z).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$J_\nu(\rho, z) = \int_0^\infty E(k_\rho) k_\rho \tilde{J}_\nu(k_\rho \rho) \exp(-ik_z z) dk_\rho, \tag{7}$$

$\tilde{e}_2 = \tilde{e}_2(\vartheta_0)$, $\tilde{e}_3 = \tilde{e}_3(\vartheta_0)$, $\tilde{J}_\nu(k_\rho \rho)$ — функция Бесселя.

В силу узости углового спектра пучка в области, существенной для интегрирования в (7), $(k_\rho - k_\rho^{(0)}) \ll k_\rho^{(0)}$, можно воспользоваться разложением стоящей в показателе экспоненты функции $k_z(k_\rho)$ в ряд вблизи $k_\rho^{(0)}$:

$$k_z(k_\rho) = k_z^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} p_m(k_\rho - k_\rho^{(0)})^m, \tag{8}$$

где $p_m = \left. \frac{\partial^m k_z}{\partial k_\rho^m} \right|_{k_\rho = k_\rho^{(0)}}$. Ограничиваясь квадратичным членом разложения (что допустимо при выполнении условия $\frac{1}{4!} \left| \frac{\partial^4 k_z}{\partial k_\rho^4} \right| (k_\rho - k_\rho^{(0)})^4 z \ll \pi$), мы получаем некий аналог диффузионного приближения применительно к кольцевому пучку. Можно показать, что подобные пучки распространяются вдоль поверхности конуса, угол раствора которого β определяется первой производной $p_1(k_\rho^{(0)})$: $\text{tg } \beta = |p_1(k_\rho^{(0)})|$. Специфика же конической рефракции состоит как раз в отсутствии этой производной $-p_1(k_\rho^{(0)}) = 0$, — что и приводит к энергетическому вырождению: $\beta = 0$ (см. [1]).

Полагая $k_\rho^{(0)} = k_\rho^{(C)}$, учитывая, что $p_1(k_\rho^{(C)}) = 0$, и оставляя только член со второй производной $p_2(k_\rho^{(C)})$, после подстановки (8) в (7), имеем

$$\begin{aligned}
 J_\nu(\rho, z) = & \exp(-ik_z^{(0)} z) \int_0^\infty E(k_\rho - k_\rho^{(C)}) k_\rho \tilde{J}_\nu(k_\rho \rho) \times \\
 & \times \exp \left[-i \frac{1}{2} p_2(k_\rho - k_\rho^{(C)})^2 z \right] dk_\rho.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Мы будем в дальнейшем интересоваться амплитудой поля пучка и опускать множитель $\exp(-ik_z^{(0)} z)$.

В простейшем случае $n = 0$ — начальные фазы всех плоских волн одинаковы — формула (6) заметно упрощается и принимает вид

$$E(\rho, \varphi, z) = 2\pi \{-i(\tilde{e}_2 \rho_0 - \varphi_0) J_1(\rho, z) + \tilde{e}_3 z_0 J_0(\rho, z)\}, \tag{10}$$

где ρ_0, φ_0 — единичные орты. Именно этот случай и обсуждался в [2]*.

3. Рассмотрим в качестве конкретного примера квазиоптический пучок с кольцевым гауссовым спектром вида:

$$E(k_\rho - k_\rho^{(C)}) = \widetilde{E}_0 \exp[-a^2(k_\rho - k_\rho^{(C)})^2]. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), переходя к новой переменной интегрирования $x = k_\rho - k_\rho^{(C)}$ и вводя обозначение $\widetilde{z} = a^2 + i \frac{1}{2} p_2 z$, будем иметь

$$J_\nu(\rho, z) = \widetilde{E}_0 \int_{-k_\rho^{(C)}}^{\infty} \exp(-\widetilde{z} x^2) (k_\rho^{(C)} + x) \widetilde{J}_\nu((k_\rho^{(C)} + x)\rho) dx. \quad (12)$$

Ограничимся далее областью значений параметров, в которой $k_\rho^{(C)}$ заметно превышает ширину углового спектра $-k_\rho^{(C)} > 1/a$, так что в (12) нижний предел интегрирования можно заменить на $-\infty$. При этом после несложных, но громоздких преобразований приходим к выражению

$$J_\nu(\rho, z) = \widetilde{E}_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\widetilde{z}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) \left\{ \sum_{s=0}^{\nu} \widetilde{J}_{\nu-s}(k_\rho^{(C)}\rho) I^s\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \left[\widetilde{J}_{\nu+s}(k_\rho^{(C)}\rho) I^s\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) + \widetilde{J}_s(k_\rho^{(C)}\rho) I^{s+\nu}\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) \right] \right\}, \quad (13)$$

где

$$I^s\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) = \frac{\rho^2}{8\widetilde{z}} \left[I_{(1/2)(s-1)}\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) - I_{(1/2)(s+1)}\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right) \right] + k_\rho^{(C)} I_{(1/2)s}\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right),$$

$I_\nu\left(\frac{\rho^2}{8\widetilde{z}}\right)$ — модифицированная функция Бесселя. В частном случае $\nu = 0$ приведенное выражение, как нетрудно показать, совпадает с формулой (24), содержащейся в [2]**.

Согласно (13)

$$J_0(0, z) = \widetilde{E}_0 k_\rho^{(C)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{a^4 + \frac{1}{4}(p_2 z)^2}} \exp\left(-i \frac{1}{2} \arctg \frac{p_2 z}{2a^2}\right), \quad (14)$$

$$J_n(0, z) = 0 \quad (n \neq 0).$$

Отсюда поле на оси кольцевых пучков, отличающихся распределением

* Следует только заметить, что в формуле (20) работы [2] допущена неточность: вместо правильного множителя $(e_2 \rho_0 - \varphi_0)$ (см. (10)) стоит ошибочный множитель $(\rho_0 + e_2 \varphi_0)$ (в соответствующем множителе в [2] содержатся опечатки: вместо e стоит l и вместо $l_2 \rightarrow e_x$; кроме того, в наших обозначениях $\varphi \equiv \theta$). Эта неточность, однако, не сказывается на последующих результатах.

** В формуле (24) в [2] также имеются опечатки: в индексах функций Бесселя в двух местах вместо z стоит ρ , а в индексе $k_\rho^{(C)}$ в одном месте вместо $\rho \rightarrow s$.

начальных фаз (различные n), в соответствии с (6) записывается следующим образом:

$n = 0$ (синфазный пучок) —

$$E(z) = 2\pi \tilde{e}_3 J_0(0, z) z_0; \quad (15)$$

$n = \pm 1$ —

$$E(z) = \pi \exp\left(\mp i \frac{3}{2} \pi\right) (\tilde{e}_2 \pm i) J_0(0, z) (x_0 \pm iy_0); \quad (16)$$

$|n| > 1$ —

$$E(z) = 0. \quad (17)$$

Как видно из (14)—(16), начиная с некоторых z ($z \gg 2a^2/p_2$), амплитуда поля на оси соответствующих пучков с ростом z спадает $\sim 1/\sqrt{z}$ в отличие от закона спадания $\sim 1/z$ для обычного трехмерного пучка, что является свидетельством более медленного характера расплывания таких пучков. Это последнее утверждение распространяется, очевидно, и на пучки с $|n| > 1$. Получение конкретных значений поля на оси пучка (с $n = 0$ или $n = \pm 1$) требует знания второй производной

$p_2(k_p^{(C)}) = \frac{\partial^2 k_z}{\partial k_p^2} \Big|_{k_p = k_p^{(C)}}$. Однако вычисление этой производной представ-

ляет довольно трудоемкую задачу. Проще обратиться к результатам численного счета. Так же, как и в первой части работы [1], конкретные расчеты (на ЭВМ) здесь проводились непосредственно для амплитуды поля кольцевого пучка, точнее для величины $J_0(\rho, z)$, через которую эта амплитуда выражается. Расчеты выполнялись на основании общей формулы (7), включающей не только вторую, но и все высшие производные. Результаты позволяют, в частности, проследить за изменением поля вдоль оси пучка, а следовательно, и оценить значение $p_2(k_p^{(C)})$.

На рис. 2 а, б, 3 а, б представлены зависимости $|J_0(\rho, z)|^2/J_0^2(0, 0)$

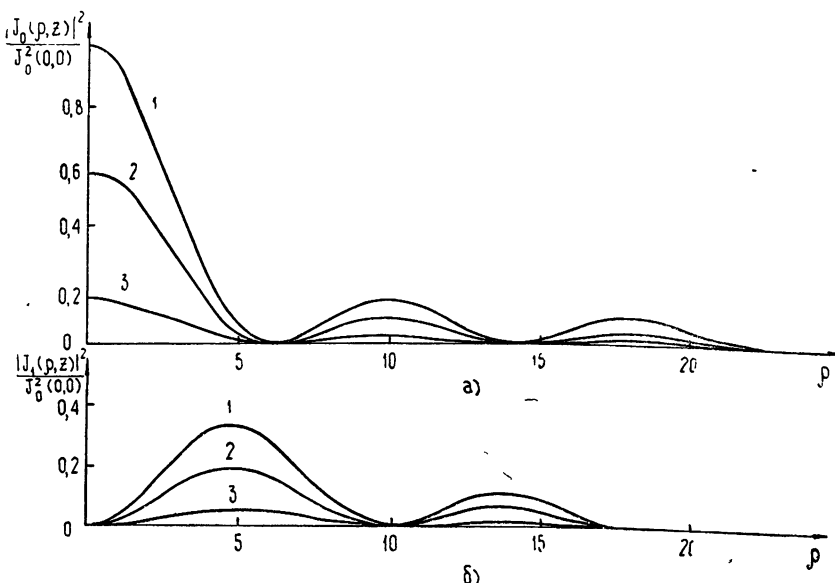


Рис. 2. Функции, описывающие распределение поля в кольцевом пучке ($v = 1,02$; $u = 0,6$; $k_p^{(C)} = 0,39$; $a = 10$).

1 — $z = 0$, 2 — $z = 10^4$, 3 — $z = 5 \cdot 10^4$.

(а) и $|J_1(\rho, z)|^2/J_0^2(0, 0)$ (б) от ρ при различных z , отвечающие двум значениям параметра $k_p^{(C)}$ (соответственно замкнутой и разомкнутой поверхностям волновых векторов — кривые I и IV рис. 1а в [1]) и одному значению параметра a^* . Здесь (так же как и далее) все величины размерности длины — $\rho, z, a, (k_p^{(C)})^{-1}$ — нормированы на $k_0^{-1} = c/\omega^{**}$. Первая серия кривых (рис. 2а, 3а) дает, в частности, распределение квадрата модуля амплитуды продольной составляющей электрического поля в поперечном сечении синфазного пучка ($n=0$), тогда как вторая серия (рис. 2б, 3б) — распределение поперечной составляющей этого поля (см. 10)).

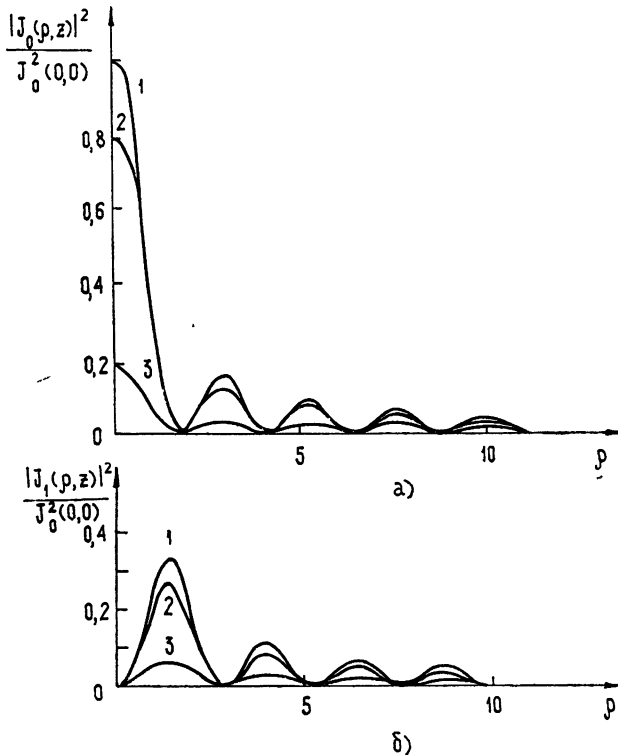


Рис. 3. Функции, описывающие распределение поля в кольцевом пучке ($v=3; u=3; k_p^{(C)}=1,343; a=10$).
1 — $z=0$, 2 — $z=10^5$, 3 — $z=10^6$.

Важной отличительной особенностью пучков с кольцевым гауссовым спектром (в области конической рефракции) является, вообще говоря, довольно сложный осцилляционный характер распределения амплитуды даже на начальной апертуре $z=0$. Число осцилляций в области существенных значений поля здесь зависит от параметров a и $k_p^{(C)}$; характер зависимости иллюстрируется рисунками 2, 3. Эта особенность делает весьма затруднительным выяснение степени относительной

* В нашем распоряжении имеются также результаты счета, выполненного при тех же значениях параметров плазмы для пучка с $a=100$. Такое увеличение a не приводит практически (в области существенных значений поля) к изменению характера зависимости от поперечной координаты ρ ; меняется лишь степень спада поля с ростом z , что отражено далее на рис. 5.

** Заметим, что на аналогичных графиках [1] (рис. 4—8) принята такая же нормировка.

медленности расплывания кольцевого пучка, подобное тому, которое проводилось в [1]. Поэтому мы ограничимся воспроизведением лишь довольно показательной зависимости амплитуды поля на оси от расстояния z , $|J_0(0, z)|^2/J_0^2(0, 0)$ (см. рис. 4). Кривые 2, 3 относятся соответ-

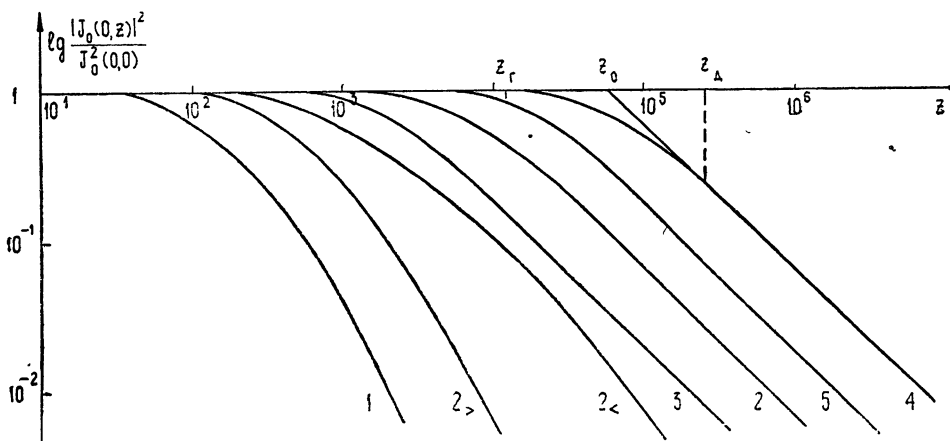


Рис. 4. Амплитуда поля на оси пучка: 1 — пучок в вакууме ($a = 10$); 2 — $v = 1,02$; $u = 0,6$; $k_p^{(C)} = 0,39$; $p_2(k_p^{(C)}) = 3,15 \cdot 10^{-3}$; $a = 10$; 3 — $v = 3$; $u = 3$; $k_p^{(C)} = 1,343$; $p_2(k_p^{(C)}) = 1,11 \cdot 10^{-2}$; $a = 10$; 4 — $v = 1,02$; $u = 0,6$; $k_p^{(C)} = 0,39$; $p_2(k_p^{(C)}) = 3,15 \cdot 10^{-3}$; $a = 100$; 5 — $v = 3$; $u = 3$; $k_p^{(C)} = 1,343$; $p_2(k_p^{(C)}) = 1,11 \cdot 10^{-2}$; $a = 100$; 2< — $v = 1,02$; $u = 0,6$; $k_p^{(0)} = 0,35$; $a = 10$; 2> — $v = 1,02$; $u = 0,6$; $k_p^{(0)} = 0,45$; $a = 10$.

ственно к случаям, изображенным на рис. 2, 3, а кривые 4, 5 отличаются от 2, 3 лишь значением параметра a ($a = 100$); кривая 1 отвечает гауссову пучку в вакууме ($a = 10$). Две другие кривые, 2< и 2>, соответствуют тем же значениям параметров, что и кривая 2, но величина $k_p^{(0)}$ выбрана не совпадающей с $k_p^{(C)}$: в первом случае $k_p^{(0)} < k_p^{(C)}$, во втором — $k_p^{(0)} > k_p^{(C)}$. Для этих случаев также рассчитывалось распределение амплитуды поля в поперечном сечении пучка (начальные распределения, отвечающие кривым 2, 2>, 2<, очевидно, одинаковы). Расчеты наглядно продемонстрировали, что пучок распространяется вдоль поверхности конуса с углом раствора $\beta = \arctg |p_1(k_p^{(0)})|$.

Кривые 2—5 выходят асимптотически на прямые с углом наклона γ к оси абсцисс, равным $\pi/4$, что как раз соответствует закону спада-ния квадрата амплитуды $\sim 1/z$; эти прямые пересекают ось абсцисс в точке $z = z_0 = 2a^2 / |p_2(k_p^{(C)})|$. Кривая 1 выходит на прямую с $\tg \gamma = 2$, что соответствует закону спада-ния $\sim 1/z^2$. В то же время кривые 2<, 2> еще не имеют какой-либо определенной асимптотики.

Приведенные данные позволяют найти значение второй производной $p_1(k_p^{(C)})$, которая, в свою очередь, определяет протяженность зоны геометрической оптики z_r и переходной диффузионной зоны z_d (значения z_r и z_d условно показаны на рис. 5 для случая, описываемого кривой 5). Следует подчеркнуть, что протяженность зоны геометрической оптики (где пучок практически не расплывается) в рассматриваемом случае может на несколько порядков (1,5—2, согласно рис. 5) превышать соответствующее «вакуумное значение» z_r .

При известных значениях параметров $k_p^{(C)}$, a и $p_2(k_p^{(C)})$, опираясь на результаты численного счета, а также используя асимптотические

представления функций Бесселя, можно оценить вклад бесконечной суммы в (13). В определенных пределах этот вклад сводится лишь к небольшой поправке, что делает формулу (13) при не слишком больших n пригодной не только для выяснения общего характера поведения пучка, но и для получения достаточно общих количественных результатов. Именно так обстоит дело в рассмотренных нами частных случаях значений параметров, что находит особенно четкое отражение в отсутствии практически (см. рис. 2, 3) «замывания» нулей функцией Бесселя.

Проиллюстрированное здесь на отдельных примерах свойство более медленного расплывания пучка при наличии конической рефракции является общим и сохраняется во всех соответствующих случаях независимо от характера начального распределения и формы поверхности волновых векторов.

4. Полученные в [1] и в данной работе результаты могут найти применение и получить дальнейшее развитие при решении различных электродинамических задач. Укажем на некоторые из них.

1) Улучшение электродинамических характеристик, в первую очередь, уменьшение дифракционных потерь квазиоптических систем (прежде всего, открытых резонаторов) за счет заполнения их гиротропной средой с соответствующими значениями параметров.

2) Более эффективная (энергетически) передача сигнала через гиротропную плазменную среду.

3) Увеличение «кажущегося» поперечного сечения рассеяния объектов (см. [4]), находящихся в гиротропной плазме. Следует только иметь в виду, что выигрыш в рассеянном поле достигается лишь при некоторых фиксированных (по угловым координатам) положениях объекта, однако если объект движется, то он может последовательно проходить соответствующие участки и давать всплеск в принимаемом сигнале.

4) Восстановление параметров плазмы (диагностики плазмы) по характеру поля в особых направлениях и т. д.

Ситуация существенно усложняется тем, что, как правило, и в естественных и в лабораторных условиях приходится иметь дело с неоднородной плазмой. Кроме того, в отдельных случаях может оказаться принципиально важным учет дополнительных (усложняющих) факторов (соударений, теплового движения, движения ионов и т. п.).

Авторы признательны Т. Н. Федосеевой за помощь в выполнении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Я. Бродский, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 9, 1339 (1969).
2. Yu. Ya. Brodskii, I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller, Alta Frequenza, 1969, Maggio, vol. 38, No. Speciale; Selected papers from the URSI Symposium on Electromagnetic waves, Stresa, Italy, June 24—29, 1968, p. 1.
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
4. V. B. Gildenburg, I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller, Proc. Symp. on Electromagnetic Wave Theory, Pergamon Press, Oxford—New York, p. 1025.

ELECTROMAGNETIC BEAMS IN ANISOTROPIC MEDIA. II

Yu. Ya. Brodskii, I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller

The authors investigate quasi-optical electromagnetic beams, propagating in anisotropic media in the specific direction—in the direction of conical refraction—and formed by plane waves concentrated near the cone surface of the outer conical refraction. The field structure of these beams is analysed and it is shown that they diverge more slowly than those propagating in the ordinary directions, in particular, in a free space.

УДК 538 574.4

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ СТОКСА ПРИ ОБРАТНОМ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В. Н. Введенский, Е. Н. Черняев, И. С. Крылов, С. И. Романов

Получены выражения для матриц взаимодействия, описывающих преобразование параметров Стокса при обратном рассеянии плоской квазимонохроматической электромагнитной волны произвольным статистическим объектом, изотропным объектом. С помощью найденных матриц рассмотрено определение взаимной корреляции ортогональных компонент рассеянного поля в произвольно выбранном поляризационном базисе при произвольной эллиптической поляризации падающей волны. Для изотропного объекта получены модуль и аргумент обобщенного коэффициента корреляции линейных ортогональных компонент рассеянного поля.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что поляризация электромагнитных волн полностью описывается вектор-параметром Стокса $S(I, Q, U, V)$. Для наиболее общего случая частично поляризованной волны компоненты вектора S в линейном базисе имеют вид

$$\begin{aligned} I &= \overline{E_x E_x^*} + \overline{E_y E_y^*}, \\ Q &= \overline{E_x E_x^*} - \overline{E_y E_y^*}, \\ U &= \overline{E_x E_y^*} + \overline{E_x^* E_y}, \\ V &= -j(\overline{E_x E_y^*} - \overline{E_x^* E_y}), \end{aligned} \tag{1}$$

где E_x, E_y — компоненты комплексного вектора поля (черта означает усреднение по времени).

Для квазимонохроматической волны эти компоненты могут быть записаны в статистических обозначениях [1]:

$$\begin{aligned} I &= 2(D_x + D_y), \\ Q &= 2(D_x - D_y), \\ U &= 4\sqrt{D_x D_y} \rho(0), \\ V &= -4\sqrt{D_x D_y} \rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где D_x, D_y — дисперсии ортогональных линейно поляризованных компонент, $\rho(0)$ и $\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$ — значения нормированной корреляционной функции $\rho(\tau)$ этих компонент при $\tau = 0$ и $\tau = \frac{\pi}{2\omega}$ соответственно.

$$\rho(\tau) = \frac{E_{x0}(t)E_{y0}(t) \cos [\omega\tau + \Phi_{xy}(t)]}{\sqrt{[E_{x0}(t)]^2 [E_{y0}(t)]^2}},$$

$E_{x0}(t)$, $E_{y0}(t)$ — вещественные амплитуды ортогональных компонент, $\Phi_{xy}(t) = \Phi_y(t) - \Phi_x(t)$ — разность фаз ортогональных компонент.

Вследствие линейности и однородности уравнений Максвелла взаимодействие излучения с отражающим объектом может быть описано линейным однородным преобразованием вектор-параметра [2]:

$$\mathbf{S}_2 = M\mathbf{S}_1, \quad (3)$$

где \mathbf{S}_i — вектор-параметр падающей ($i = 1$) и отраженной ($i = 2$) волны, M — матрица взаимодействия

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Целью настоящей работы является установление связи элементов матрицы взаимодействия с параметрами рассеянного поля, которые могут быть относительно просто измерены практически. Рассмотрение выполнено при следующих ограничениях: 1) объект облучается плоской электромагнитной волной, 2) рассматривается преобразование поляризации только при отражении, 3) исследуются только те случаи отражения, которые описываются линейными однородными уравнениями. В качестве примера, иллюстрирующего возможности применения полученных результатов, приводится вычисление обобщенного коэффициента корреляции линейных ортогональных компонент рассеянного поля при произвольной эллиптической поляризации излучения.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим отражающий объект в поле плоской эллиптически поляризованной электромагнитной волны с комплексным вектором электрического поля

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где φ — аргумент фазора, $\operatorname{tg} \delta = |E_{1y}/E_{1x}|$ — модуль фазора.

Вектор \mathbf{E}_2 рассеянного в обратном направлении поля определяется известным выражением

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{pmatrix} = N\mathbf{E}_1, \quad (6)$$

где $N = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{pmatrix}$ — статистическая матрица обратного рассеяния, симметрия которой следует из теоремы взаимности для случая, когда можно считать, что передающая и приемная антенны расположены в одной точке пространства [1]. Заметим, что матрица N определена с точностью до постоянного коэффициента, зависящего от расстояния между наблюдателем и рассеивающим объектом. Выберем этот коэффициент таким, чтобы квадраты модулей элементов матрицы N совпадали с эффективной площадью рассеяния (ЭПР) объекта при соответствующих поляризациях.

Для нахождения элементов матрицы M вычислим параметры Стокса рассеянного поля при четырех поляризациях излучения: горизонтальной, вертикальной, наклонной с углом ориентации 45° и круговой.

а) Горизонтальная поляризация:

$$E_{1r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad I_{1r} = Q_{1r} = 1; \quad U_{1r} = V_{1r} = 0. \quad (7)$$

Из (6) находим

$$E_{2r} = \begin{pmatrix} a_{xx} \\ a_{xy} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1), с учетом (2) получим параметры Стокса рассеянной волны

$$\begin{aligned} I_{2r} &= \sigma_r + \sigma_c, \\ Q_{2r} &= \sigma_r - \sigma_c, \\ U_{2r} &= 2 \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0), \\ V_{2r} &= -2 \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r\left(\frac{\pi}{2\omega}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma_r = \overline{a_{xx} a_{xx}^*}$ — средняя ЭПР объекта при горизонтальной поляризации излучения и приема, $\sigma_c = \overline{a_{xy} a_{xy}^*}$ — средняя крессовая ЭПР при горизонтальной (или вертикальной) поляризации излучения, $\rho_r(0) = \frac{\text{Re } a_{xx} a_{xy}^*}{\sqrt{\sigma_r \sigma_c}}$, $\rho_r\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{-\text{Im } a_{xx} a_{xy}^*}{\sqrt{\sigma_r \sigma_c}}$ — значения нормированной корреляционной функции горизонтальной и вертикальной компонент рассеянного поля при горизонтальной поляризации излучения.

б) Вертикальная поляризация:

$$E_{1b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad I_{1b} = -Q_{1b} = 1, \quad U_{1b} = V_{1b} = 0. \quad (10)$$

Аналогично предыдущему находим

$$E_{2b} = \begin{pmatrix} a_{xy} \\ a_{yy} \end{pmatrix}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} I_{2b} &= \sigma_b + \sigma_c, \\ Q_{2b} &= -(\sigma_b - \sigma_c), \\ U_{2b} &= 2 \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0), \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_{2b} = -2 \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b\left(\frac{\pi}{2\omega}\right),$$

где $\sigma_b = \overline{a_{yy} a_{yy}^*}$ — средняя ЭПР объекта при вертикальной поляризации излучения и приема, $\rho_b(0) = \frac{\text{Re } a_{xy} a_{xy}^*}{\sqrt{\sigma_b \sigma_c}}$, $\rho_b\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{-\text{Im } a_{xy} a_{xy}^*}{\sqrt{\sigma_b \sigma_c}}$ — значения нормированной корреляционной функции горизонтальной и вертикальной компонент рассеянного поля при вертикальной поляризации излучения.

в) Наклонная поляризация с углом ориентации 45° :

$$E_{1н} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad I_{1н} = U_{1н} = 1, \quad Q_{1н} = V_{1н} = 0. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (6), получаем

$$E_{2н} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} a_{xx} + a_{xy} \\ a_{xy} + a_{yy} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для параметров Стокса рассеянного поля имеем

$$I_{2н} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_b) + \sigma_c + \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0),$$

$$Q_{2н} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_b) + \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0), \quad (15)$$

$$U_{2н} = \sqrt{[\sigma_r + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0)][\sigma_b + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0)]} \rho_n(0),$$

$$V_{2н} = -\sqrt{[\sigma_r + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0)][\sigma_b + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0)]} \rho_n \left(\frac{\pi}{2\omega} \right),$$

где

$$\rho_n(0) = \frac{2\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_b) - \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0) - \sigma_c}{\sqrt{[\sigma_r + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0)][\sigma_b + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0)]}}; \quad (16)$$

$$\rho_n \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) = \frac{\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - \text{Im} \overline{a_{xx} a_{yy}^*}}{\sqrt{[\sigma_r + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0)][\sigma_b + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0)]}} \quad (17)$$

— значения нормированной корреляционной функции горизонтальной и вертикальной компонент рассеянного поля при наклонной поляризации излучения с углом ориентации 45° ;

$$\sigma_n = \frac{1}{4} [\sigma_r + \sigma_b + 4\sigma_c + 4\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) + 4\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0) + 2\text{Re} \overline{a_{xx} a_{yy}^*}] \quad (18)$$

— средняя ЭПР объекта в рассматриваемом случае при взаимном приеме.

г) Круговая поляризация:

$$E_{1к} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}, \quad I_{1к} = -V_{1к} = 1, \quad Q_{1к} = U_{1к} = 0. \quad (19)$$

В этом случае вектор рассеянного поля равен

$$E_{2к} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} a_{xx} + ja_{xy} \\ a_{xy} + ja_{yy} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Аналогично предыдущим случаям для параметров Стокса рассеянного поля при круговой поляризации излучения получаем

$$I_{2k} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_b) + \sigma_c - \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right),$$

$$Q_{2k} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_b) - \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right),$$
(21)

$$U_{2k} = \sqrt{\left[\sigma_r + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right] \left[\sigma_b + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right]} \rho_k(0),$$

$$V_{2k} = - \sqrt{\left[\sigma_r + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right] \left[\sigma_b + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right]} \rho_k \left(\frac{\pi}{2\omega} \right),$$

где

$$\rho_k(0) = \frac{\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0) + \text{Im} \overline{a_{xx}} a_{yy}^*}{\sqrt{\left[\sigma_r + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right] \left[\sigma_b + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right]}}; \quad (22)$$

$$\rho_k \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) = \frac{-2\sigma_k + \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_b) + \sigma_c - \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)}{\sqrt{\left[\sigma_r + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right] \left[\sigma_b + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right]}} \quad (23)$$

— значения нормированной корреляционной функции горизонтальной и вертикальной компонент рассеянного поля,

$$\sigma_k = \frac{1}{4} \left[\sigma_r + \sigma_b + 4\sigma_c - 4\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - 4\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - 2\text{Re} \overline{a_{xx}} a_{yy}^* \right] \quad (24)$$

— средняя ЭПР объекта при взаимном приеме.

Последовательно подставляя полученные выражения компонент вектор-параметра Стокса рассеянных и облучающих волн в уравнение (3), получим систему шестнадцати уравнений для шестнадцати неизвестных элементов матрицы взаимодействия (4), решая которую, находим

$$m_{11} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_b) + \sigma_c,$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_b),$$

$$m_{13} = m_{31} = \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0),$$

$$m_{14} = -m_{41} = \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right),$$

$$m_{22} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_b) - \sigma_c,$$

$$m_{23} = m_{32} = \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0),$$

$$\begin{aligned}
 m_{24} &= -m_{42} = \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right), \\
 m_{33} &= \sqrt{[\sigma_r + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0)] [\sigma_b + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0)]} \times \\
 &\quad \times \rho_b(0) - \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0), \\
 m_{34} &= -\sqrt{[\sigma_r + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)] [\sigma_b + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)]} \rho_k(0) + \\
 &\quad + \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0), \\
 m_{43} &= -\sqrt{[\sigma_r + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r(0)] [\sigma_b + \sigma_c + 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b(0)]} \rho_n \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) + \\
 &\quad + \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) + \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right), \\
 m_{44} &= \sqrt{[\sigma_r + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)] [\sigma_b + \sigma_c - 2\sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)]} \times \\
 &\quad \times \rho_k \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - \sqrt{\sigma_r \sigma_c} \rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) - \sqrt{\sigma_b \sigma_c} \rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Рассматривая (25) с учетом (17) и (22), можно получить

$$m_{ij} = m_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3), \quad m_{i4} = -m_{4i} \quad (i=1, 2, 3). \tag{26}$$

Это свойство матрицы взаимодействия связано с симметрией матрицы рассеяния N при обратном рассеянии.

Поскольку вектор-параметр Стокса полностью определяет поляризацию волны, матрица взаимодействия (25) полностью характеризует отражающие поляризационные свойства рассеивающего объекта. С учетом (16), (23) и (26) для полного описания этих свойств в общем случае достаточно знания любых девяти параметров рассеянного поля из одиннадцати: σ_r , σ_b , σ_c , $\rho_r(0)$, $\rho_r \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)$, $\rho_b(0)$, $\rho_b \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)$, $\rho_n(0)$, $\rho_n \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)$, $\rho_k(0)$, $\rho_k \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)$.

Важным свойством матрицы взаимодействия является ее аддитивность для независимых потоков рассеянного излучения. Следует заметить, что объект, который может быть представлен суммой стабильной и флуктуирующей частей, характеризуется матрицей взаимодействия лишь как совокупность: она позволяет разделить поляризованную и неполяризованную части рассеянного излучения, но не дает возможности установить отражающие поляризационные характеристики стабильной и флуктуирующей частей объекта в отдельности. Эти обстоятельства связаны с самой структурой параметров Стокса [3].

Вычисленная здесь матрица взаимодействия (25) определена в линейном базисе. Используя оператор преобразования параметров Стокса при преобразовании поляризационного базиса [2], можно получить матрицу взаимодействия в произвольном базисе. Ниже с помощью матрицы взаимодействия анализируются некоторые поляризационные свойства изотропных объектов.

2. МАТРИЦА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗОТРОПНОГО ОБЪЕКТА

Под изотропным объектом будем понимать объект, отражающие поляризационные свойства которого инвариантны относительно его поворота в плоскости фронта падающей волны.

Определяя условия инвариантности девяти параметров рассеянного поля из указанных одиннадцати относительно поворота объекта, можно установить для изотропного объекта следующие соотношения:

$$\sigma_r = \sigma_v = \sigma_n \equiv \sigma_0; \quad (27)$$

$$\rho_r(0) = \rho_r\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \rho_v(0) = \rho_v\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \rho_n\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \rho_k(0) = 0. \quad (28)$$

Подставляя (27) и (28) в (16), (18), (23), (24), получим также

$$\sigma_k = 2\sigma_c; \quad (29)$$

$$\rho_n(0) = \frac{1-d}{1+d}; \quad (30)$$

$$\rho_k\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1-3d}{1+d}, \quad (31)$$

где $d = \sigma_c/\sigma_0$ — коэффициент деполаризации.

С учетом приведенных соотношений матрица взаимодействия изотропного объекта будет иметь вид

$$M = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1+d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-3d \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Из вида матрицы (32) следует, что для определения отражающих поляризационных свойств изотропного объекта достаточно знать два независимых параметра рассеянного поля.

3. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

В качестве примера применения матрицы взаимодействия рассмотрим вычисление с ее помощью обобщенного коэффициента взаимной корреляции линейных ортогональных компонент рассеянного поля при произвольной эллиптической поляризации излучения.

В [1] модуль и аргумент обобщенного коэффициента корреляции определены следующим образом:

$$R_{xy} = \sqrt{\rho^2(0) + \rho^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}; \quad (33)$$

$$\gamma_{xy} = \arctg \frac{\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)}{\rho(0)}. \quad (34)$$

Путем подстановки (5) в (1) получим параметры Стокса облучающей эллиптически поляризованной волны:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 1, \\
 Q_1 &= \cos \delta, \\
 U_1 &= \sin 2\delta \cos \varphi, \\
 V_1 &= -\sin 2\delta \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Параметры Стокса рассеянного поля найдем из уравнения (3) с помощью матрицы (25). Приравнявая полученные таким путем параметры Стокса к соответствующим правым частям выражения (2), получаем систему четырех уравнений с неизвестными D_x , D_y , $\rho(0)$, $\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$.

Подставляя найденные из этой системы $\rho(0)$ и $\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$ в (33) и (34), получаем решение поставленной задачи в общем виде.

Аналогичным путем можно проанализировать взаимную корреляцию ортогональных компонент рассеянного поля в произвольном базисе. Для этого достаточно к параметрам Стокса рассеянного поля, полученным с помощью матрицы (25) в линейном базисе, применить оператор перехода в произвольный поляризационный базис, а затем приравнять их к соответствующим правым частям выражения (2) и решить полученную систему. При этом в выражении (2) дисперсии и значения нормированной корреляционной функции линейных ортогональных компонент необходимо заменить на дисперсии и значения нормированной корреляционной функции ортогональных компонент в выбранном базисе.

Рассмотрим частный случай изотропного объекта. Вместо матрицы (25) воспользуемся для этого случая ее более простым выражением (32). После выполнения указанных вычислений получаем решение системы уравнений

$$D_x = \frac{1}{2} \cos^2 \delta \sigma_0 (1 + d \operatorname{tg}^2 \delta), \tag{36}$$

$$D_y = \frac{1}{2} \sin^2 \delta \sigma_0 (1 + d \operatorname{ctg}^2 \delta);$$

$$\rho(0) = \frac{(1-d)\cos \varphi}{\sqrt{(1+d \operatorname{tg}^2 \delta)(1+d \operatorname{ctg}^2 \delta)}}, \tag{37}$$

$$\rho\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{(1-3d)\sin \varphi}{\sqrt{(1+d \operatorname{tg}^2 \delta)(1+d \operatorname{ctg}^2 \delta)}}.$$

После подстановки (37) в (33) и (34) окончательно получаем

$$R_{xy} = \sqrt{\frac{(1-d)^2 - 4d \sin^2 \varphi (1-2d)}{(1+d \operatorname{tg}^2 \delta)(1+d \operatorname{ctg}^2 \delta)}}; \tag{38}$$

$$\gamma_{xy} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1-3d}{1-d} \operatorname{tg} \varphi \right). \tag{39}$$

На основании (38) и (39) для изотропных объектов можно сделать следующие выводы.

1. Модуль обобщенного коэффициента корреляции линейных ортогональных компонент рассеянного поля зависит от коэффициента депolarизации d и параметров облучающего поля (модуля и аргумента

фазора). Аргумент обобщенного коэффициента корреляции зависит только от двух величин — коэффициента депolarизации и аргумента фазора.

2. Максимальная корреляция линейных ортогональных компонент рассеянного поля достигается

а) для $0 < d < \frac{1}{2}$ при линейной поляризации с углом ориентации 45° ,

$$R_{xy} = \frac{1-d}{1+d};$$

б) для $d = \frac{1}{2}$ при произвольной поляризации с модулем фазора, равным единице,

$$R_{xy} = \frac{1}{3};$$

в) для $\frac{1}{2} < d < 1$ при круговой поляризации

$$R_{xy} = \frac{3d-1}{d+1}.$$

3. Линейные ортогональные компоненты рассеянного поля некоррелированы:

а) для $0 \leq d \leq 1$ при горизонтальной и вертикальной поляризациях; излучения;

б) для $d = \frac{1}{3}$ при эллиптической поляризации излучения с аргументом фазора $\varphi = \pm \pi/2$;

в) для $d = 1$ при линейной поляризации излучения с произвольным углом ориентации.

4. Для объектов, характеризующихся коэффициентом депolarизации $d \neq \frac{1}{3}$, корреляция линейных ортогональных компонент рассеянного поля отлична от нуля при всех поляризациях излучения, кроме горизонтальной и вертикальной.

В заключение отметим, что для протяженных изотропных рассеивающих объектов, модель которых может быть представлена в виде совокупности большого числа статистически независимых элементарных отражателей, выражения (36) и (37) полностью определяют совместное четырехмерное распределение амплитуд и фаз линейных ортогональных компонент.

Авторы благодарны Е. М. Кучкову за неизменное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Канарейкин, Н. Ф. Павлов, В. А. Потехин, Поляризация радиолокационных сигналов, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. Г. В. Розенберг, УФН, 56, № 1, 77 (1955).
3. Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин, И. Ф. Шишкин, Морская поляриметрия, изд. Судостроение, Л., 1968

**STOKES PARAMETER TRANSFORMATION AT THE BACKSCATTERING
OF ELECTROMAGNETIC WAVES**

V. N. Vvedenskii, E. N. Chernyaev, I. S. Krylov, S. I. Romanov

Expressions are derived for the interaction matrices describing the Stokes parameter transformation at the backscattering of a plane quasi-monochromatic electromagnetic wave by an arbitrary statistic object, isotropic object. Using these matrices the authors consider the mutual correlation of orthogonal components of the scattered field in the arbitrarily chosen polarization frame at the arbitrary elliptic polarization of an incident plane. The modulus and the argument of the generalized correlation coefficient of linear orthogonal components of the scattered field are obtained for the isotropic object.

УДК 539 216 2

О НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКИ

Э. М. Эпштейн

Рассмотрена высокоомная полупроводниковая пленка, помещенная в перпендикулярное к ней высокочастотное электрическое поле. Если удвоенная амплитуда колебаний электрона в поле превышает толщину пленки, в спектре тока проводимости появляются высшие гармоники с амплитудами того же порядка, что и у основной гармоники. Амплитуда основной гармоники с ростом поля монотонно убывает, амплитуды высших гармоник изменяются немонотонно.

В данной статье мы хотим обратить внимание на один возможный механизм нелинейности, не связанный ни с разогревом носителей тока, ни с изменением их числа. Пусть полупроводниковая пленка толщиной L помещена в перпендикулярное к ней высокочастотное электрическое поле $E(t) = E_0 \sin \Omega t$, $E_0 = U_0/L$, U_0 — амплитуда приложенного высокочастотного напряжения; предполагается $\Omega \tau_p \ll 1$, где τ_p — время релаксации импульса электронов. Электроды считаем блокирующими, т. е. ток проводимости через них равен нулю (в частности, пленка может быть отделена от обкладок высокочастотного конденсатора воздухом или вакуумом). Толщина пленки предполагается большей по сравнению с длиной свободного пробега и, тем более, с тепловой де-Бройлевской длиной волны электрона, так что не имеют места ни классический [1], ни квантовый [2] размерный эффект. Тем не менее и в этих условиях может возникнуть размерный эффект, когда толщина пленки станет сравнимой с амплитудой $a = \mu E_0/\Omega$ колебаний электрона под действием ВЧ электрического поля в неограниченном полупроводнике (μ — подвижность электронов).

Для простоты предположим сначала, что можно пренебречь релаксацией объемного заряда, диффузией, тепловой генерацией и рекомбинацией носителей. Тогда спустя один период $t_1 = 2\pi/\Omega$ после включения поля все электроны окажутся заключенными в слое толщиной $L - 2a$, колеблющемся от одной стенки пленки к другой с частотой Ω и амплитудой a . При $\xi \equiv 2a/L = 1$ толщина этого слоя становится пренебрежимо малой (она определяется релаксацией объемного заряда, диффузией и тепловой генерацией носителей). При дальнейшем увеличении E_0 (т. е. при $\xi > 1$) траектория электрона перестает «умещаться» в пленке и часть периода ВЧ поля электроны проводят будучи «прижатыми» к стенке пленки и не совершая работы. В результате плотность мощности, поглощаемой в пленке, становится меньше обычной величины $\frac{1}{2} \sigma E_0^2$ (σ — удельная электропроводность), т. е. уменьшается угол потерь δ .

Это явление, которое можно назвать амплитудным размерным эффектом (АРЭ), впервые было описано Гартоном [3] применительно к движению ионов в пленке полярного жидкого диэлектрика, помещенной в переменное электрическое поле. Там же были получены формулы

для зависимости $\operatorname{tg} \delta$ от амплитуды приложенного переменного напряжения, которые пригодны и в рассматриваемом здесь случае полупроводниковой пленки.

В отличие от [3], нас будет здесь интересовать спектральный состав тока проводимости в условиях АРЭ. Поскольку при $\xi > 1$ часть времени электроны «прижаты» к стенке пленки, обычное выражение для дрейфовой скорости электрона $v(t) = \mu E(t)$ не может быть выполнено, и вместо него мы будем иметь

$$v(t) = \mu E_0 \Phi(t) \sin \Omega t; \quad (1)$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \infty & (\xi < 1) \\ \left. \begin{array}{l} 1, & \frac{\pi n}{\Omega} < t < \frac{\pi n}{\Omega} + t_0 \\ 0, & \frac{\pi n}{\Omega} + t_0 < t < \frac{\pi(n+1)}{\Omega} \end{array} \right\} & (\xi > 1), \end{cases} \quad (2)$$

$$t_0 = \frac{1}{\Omega} \arccos \left(1 - \frac{2}{\xi} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Множитель $\Phi(t)$ учитывает тот факт, что при $\xi > 1$ электроны в течение части периода не поглощают энергии.

Нарушение линейной зависимости между полем и дрейфовой скоростью при $\xi > 1$ приводит к появлению в спектре дрейфовой скорости (или тока проводимости) всех нечетных гармоник:

$$v(t) = \mu E_0 \sum_{k=0}^{\infty} [a_{2k+1} \cos (2k+1) \Omega t + b_{2k+1} \sin (2k+1) \Omega t]; \quad (3)$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin^2 k \Omega t_0}{k} + \frac{\sin^2 (k+1) \Omega t_0}{k+1} \right]; \quad (4)$$

$$b_{2k+1} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin 2k \Omega t_0}{k} - \frac{\sin 2(k+1) \Omega t_0}{k+1} \right]. \quad (5)$$

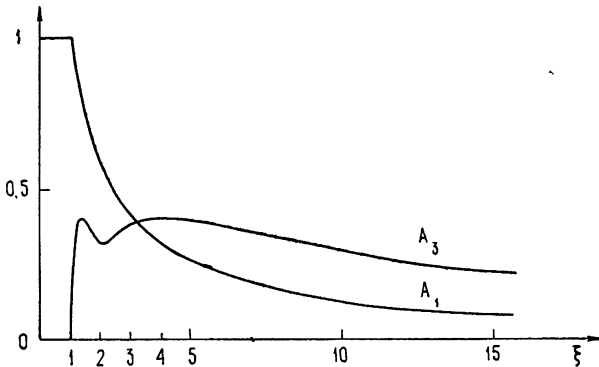


Рис. 1. Зависимость амплитуд первой и третьей гармоник тока проводимости (отнесенных к амплитуде первой гармоники в отсутствие АРЭ) от амплитуды электрического поля.

На рис. 1 показана зависимость амплитуды $A_{2k+1} = \sqrt{a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2}$ от ξ для первой и третьей гармоник ($k = 0$ и 1). Амплитуда

колебаний основной частоты A_1 при $\xi > 1$ монотонно убывает. Все остальные амплитуды зависят от ξ немонотонно и имеют тот же порядок величины, что и A_1 . При $\xi \gg 1$ для не слишком больших k (так что $k \Omega t_0 \ll 1$)

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi} (2k+1) \xi^{-1}, \quad b_{2k+1} = \frac{16}{3\pi} (2k+1) \xi^{-3/2}. \quad (6)$$

Формулы (3)—(6) получены в предположении, что при $\xi > 1$ электроны заключены в слое, толщина которого l мала по сравнению с L и который движется в ВЧ электрическом поле как целое. Выясним, при каких условиях эта идеализированная картина не будет заметно отличаться от реальной. Для этого необходимо, чтобы релаксация объемного заряда и диффузия не препятствовали образованию тонкого ($l \ll L$) слоя электронов к моменту, когда $E(t)$ проходит через нуль, и чтобы уширение этого слоя за время пролета через пленку $t_f \sim L/\mu E_0$ также было мало по сравнению с L . Чтобы можно было пренебречь уширением слоя объемного заряда за время пролета, должно выполняться условие $\omega_c t_f \ll 1$ ($\omega_c = 4\pi\sigma/\epsilon$ — частота диэлектрической релаксации, ϵ — диэлектрическая проницаемость) или, что то же самое, $\omega_c \ll \Omega \xi$. Из уравнения Пуассона следует, что при $\xi > 1$ отношение поля объемного заряда в слое электронов, «прижатых» к стенке пленки, к внешнему полю порядка $\omega_c/\Omega \xi$. Таким образом, при $\Omega \gg \omega_c$ можно не учитывать эффектов, связанных с релаксацией объемного заряда.

Рассмотрим влияние диффузии. Для того, чтобы толщина слоя электронов была мала по сравнению с L как во время «остановки» этого слоя, так и в течение времени пролета, должны выполняться условия $l \sim kT/eE_0 \ll L$ и $\sqrt{Dt_f} \ll L$. Оба эти условия можно записать в виде $eU_0/kT \gg 1$. Наконец, тепловой генерацией и рекомбинацией носителей можно пренебречь при $\Omega \tau_0 \gg 1$, где τ_0 — время жизни электрона.

Сделаем численные оценки. Для пленки CdS с удельным сопротивлением $\sim 10^6$ ом·см $\omega_c \sim 10^6$ сек⁻¹. При $\Omega \sim 10^7$ сек⁻¹, $L \sim 10$ мкм для наблюдения генерации гармоник, обусловленной АРЭ, должно быть $E_0 \gtrsim 100$ в/см (при этом выполняются условия $\Omega \gg \omega_c$, $eU_0/kT \gg 1$, $\Omega \tau_0 \gg 1$ и $\xi > 1$).

Оценки разогрева электронов в высокочастотном электрическом поле, сделанные на основе элементарной теории [4], показывают, что АРЭ может стать существенным при таких амплитудах поля, когда разогревом электронов еще можно пренебречь. Следует отметить, что АРЭ препятствует разогреву электронов ввиду уменьшения поглощаемой ими мощности.

Может оказаться, что частоту Ω (и соответственно амплитуду E_0) придется повысить из-за наличия большого числа ловушек. Выброс электронов с ловушек в зону проводимости будет мешать возникновению АРЭ, так как при этом в объеме пленки всегда будут электроны с отличной от нуля дрейфовой скоростью. Для устранения влияния ловушек частота Ω должна превосходить либо характерные частоты захвата и выброса электронов, либо величину $\omega'_c \equiv 4\pi e \mu (n_0 + n_t)/\epsilon$, где n_0 и n_t — соответственно концентрации свободных и захваченных электронов.

Автор благодарит Б. Г. Гончаренко и Б. Н. Попова за обсуждение экспериментальных возможностей, а также В. Б. Сандомирского за ценную информацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Anderson, Adv. Phys., **79**, 311 (1970).
2. Б. А. Тавгер, В. Я. Демидовский, УФН, **96**, 61 (1968)
3. C. G. Garton, J. IEE, **88**, part 3, 23 (1941)
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию
13 апреля 1971 г.

NONLINEAR HIGH-FREQUENCY CONDUCTIVITY OF A
SEMICONDUCTOR FILM

E. M. Epshtein

A high-resistive semiconductor film in the presence of a perpendicular high-frequency electric field is considered. When the double amplitude of electron oscillations in the field is greater than the film thickness, the higher harmonics appear in the spectrum of the conduction current. Their amplitudes are of the same order as the amplitude of the fundamental frequency. The latter decreases monotonically with the growth of the field while the higher harmonic amplitudes behave non-monotonically

УДК 621.375

О НАСЫЩЕНИИ УСИЛЕНИЯ В УСИЛИТЕЛЕ ЦИКЛОТРОННО-СИНХРОННЫХ ВОЛН

В. А. Ванке, Ю. М. Тимофеев

Рассмотрены вопросы формирования электростатического поля зоны усиления усилителя циклотронно-синхронных волн. Проведен анализ процессов усиления для случая переменной продольной скорости. Отмечена целесообразность использования нелинейного режима работы усилителя для увеличения КПД. Приведены результаты предварительных экспериментов.

Использование поперечных волн электрического потока оказалось весьма продуктивным для создания сверхшумящих электронно-лучевых усилителей. Достигнуты значительные успехи в разработке усилителей циклотронных волн, успешно конкурирующих по шумовым характеристикам с такими приборами, как сверхмалозумящие ЛБВ, мазеры, твердотельные параметрические усилители [1, 2].

В последнее время интерес к приборам на поперечных волнах усилился в связи с возможностью реализовать высокие значения коэффициента полезного действия устройств, в которых осуществляется взаимодействие с одной из синхронных волн электронного потока. Приборы этого класса характеризуются высокой моноэнергетичностью отработанного электронного пучка, позволяя, тем самым, использовать глубокую депрессию потенциала коллектора. Данный тип взаимодействия может оказаться перспективным в усилителях средних и больших мощностей, а также в преобразователях СВЧ энергии в энергию постоянного тока [3-5].

Один из возможных вариантов усилителя основан на взаимодействии быстрой циклотронной и медленной синхронной волн в электростатическом поле аксиально-симметричной периодической структуры (рис. 1). Усиливаемый сигнал на ча-

стоте $\omega \approx \omega_c$ ($\omega_c = \frac{|e|}{m} H_z$ — циклотронная частота) воз-

буждает во входном устройстве связи быструю циклотронную волну электронного потока, которая затем усиливается и выводится из потока в выходном устройстве связи. Процесс электростатического усиления неизбежно связан с уменьшением продольной энергии электронов (усиление волны сигнала сопровождается

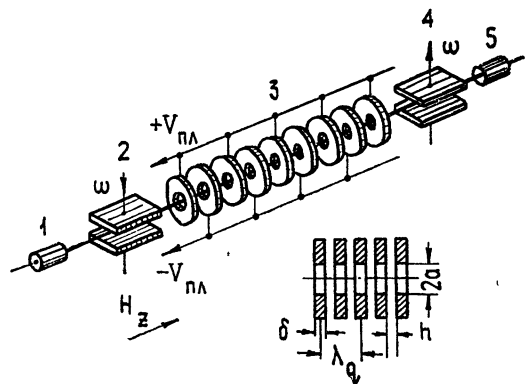


Рис. 1 Схема электростатического усилителя циклотронно-синхронных волн: 1—электронная пушка, 2—входное устройство связи, 3—периодическая система из дисков, 4—выходное устройство связи, 5—коллектор.

усилением медленной синхронной волны), что приводит к появлению рассинхронизма между внешним полем и потоком, т. е. к уменьшению усиления. Количественная сторона этого явления, имеющая решающее значение при разработке приборов и оптимизации их параметров, ранее не рассматривалась [6, 7].

Анализ поперечных колебаний в потоке обычно базируется на нитевидной модели пучка, что в полной мере является оправданным лишь для случая однородных или линейных поперечных электрических полей. В связи с этим важное значение приобретает задача расчета поля и оптимизации размеров электростатической структуры, а также оценки предельных значений электронных КПД.

1. СТРУКТУРА ПОЛЯ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Вычисление распределения потенциала периодической системы электродов (рис. 1) при отсутствии пространственного заряда сводится к решению уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta V(r, \varphi, z) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности дисков

$$V_{\Sigma} = (-1)^{s+1} V_n, \quad (2)$$

где V_n — потенциал диска, s — номер диска. Вследствие вращательной симметрии потенциала V зависит только от r и z :

$$V = V(r, z), \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} \equiv 0. \quad (3)$$

В этом случае (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Используя метод разделения переменных, в качестве решения (4) получим

$$V(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{I_0(m \beta_q r)}{I_0(m \beta_q a)} \cos m \beta_q z, \quad (5)$$

где $\beta_q = 2\pi/\lambda_q$, λ_q — шаг структуры, a — радиус отверстия в диске, $m = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Для вычисления коэффициентов A_n в (5) целесообразно представить распределение потенциала при $r = a$ между дисками, подобно [8], в виде

$$V(a, z) = \begin{cases} + V_n & (0 \leq z \leq \delta/2) \\ V_n \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\lambda_q/4 - z}{h/2} & (\delta/2 \leq z \leq \frac{\lambda_q - \delta}{2}) \\ - V_n & (\frac{\lambda_q - \delta}{2} \leq z \leq \lambda_q/2) \end{cases}, \quad (6)$$

где δ — толщина диска, h — расстояние между дисками.

Используя (6), из (5) находим

$$A_n = \frac{4 V_{\Pi}}{\pi} \beta_q \left\{ \int_0^{\delta/2} \cos m \beta_q z dz + \frac{2}{\pi} \int_{\delta/2}^{\lambda_q/4} \arcsin \frac{\lambda_q/4 - z}{h/2} \cos m \beta_q z dz \right\} = \quad (7)$$

$$= \frac{4 V_{\Pi} (-1)^n}{\pi (2n + 1)} J_0 (m \beta_q h/2),$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Представляя $I_0(m \beta_q r)$ в виде ряда, из (5) и (7) получаем окончательно

$$V(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{n, k} \left(\frac{r}{a} \right)^{2k} \cos (2n + 1) \beta_q z, \quad (8)$$

где

$$A_{n, k} = \frac{4 V_{\Pi} (-1)^n [(2n + 1) \beta_q a]^{2k} J_0 [(2n + 1) \beta_q h/2]}{\pi (2n + 1) k! \Gamma(k + 1) 2^{2k} I_0 [(2n + 1) \beta_q a]} \quad (9)$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Взаимодействие поперечных волн электронного потока в периодической системе дисков обычно осуществляется в линейном поперечном электрическом поле при резонансе на первой гармонике циклотронной частоты $\beta_q = \beta_c$ ($\beta_c = \frac{\omega_c}{v_{0z}}$, см. (16)), т. е. «рабочей» в разложении (8) является компонента V_{01} .

Если выбрать h и λ_q таким образом, чтобы

$$\frac{h}{\lambda_q} = 0,24, \quad (10)$$

то $J_0(3 \beta_q h/2) = 0$, т. е. последующие компоненты $V_{1, k} = 0$. Компоненты более высокого порядка $V_{n > 2, k}$ уже существенно убывают по величине.

Пренебречь нелинейной резонансной составляющей поперечного поля можно лишь в том случае, если

$$K(R) = \frac{V_{0, 2}(R)}{V_{0, 1}(R)} = \frac{1}{16} \beta_q^2 R^2 \ll 1 \quad (11)$$

в некоторой рабочей области R (R обычно соответствует максимальному отклонению отдельных электронов от оси системы). Зависимость $K(R)$ от величины R для ряда значений β_q приведена на рис. 2.

Условия (10), (11) определенным образом связывают параметры системы, что позволяет провести инженерный расчет ее оптимальных размеров.

Если величина $K(R)$ выбрана достаточно малой, то для анализа процессов усиления можно ограничиться в (8) первыми двумя резонансными членами

$$V(r, z) \approx V_p \left(1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 r^2 \right) \cos \beta_q z, \quad (12)$$

где

$$V_p = V_{\Pi} \frac{4 J_0(\beta_q h/2)}{\pi I_0(\beta_q a)}. \quad (13)$$

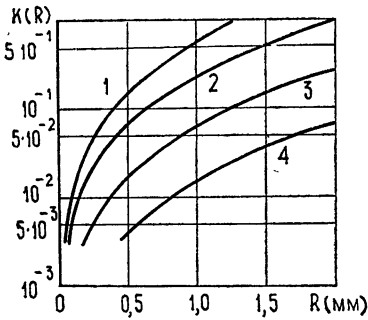


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость $K(R)$ от R ; 1— $\beta_q = 3,0 \text{ мм}^{-1}$, 2— $\beta_q = 2,0 \text{ мм}^{-1}$,
3— $\beta_q = 1,0 \text{ мм}^{-1}$, 4— $\beta_q = 0,5 \text{ мм}^{-1}$.

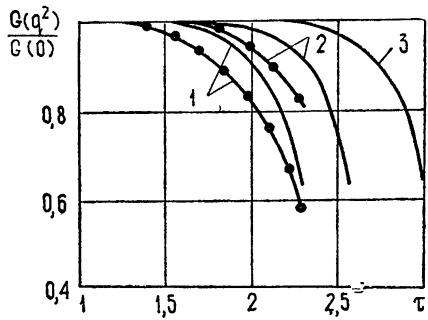


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость нормированного коэффициента усиления от параметра
усиления $\tau = \epsilon_0 \theta$.
Сплошные кривые—расчетные, кривые с точками—экспериментальные,
1— $q^2 = 1,6 \cdot 10^{-1}$, 2— $q^2 = 9 \cdot 10^{-2}$, 3— $q^2 = 4 \cdot 10^{-2}$.

2. УСИЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

Запишем уравнения движения центра масс сечения луча, движущегося в продольном магнитном поле H_z и электростатическом поле структуры, потенциал которой описывается выражением (12):

$$\frac{d^2 \zeta}{d\theta^2} - j \frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{4} e' V_p \beta_q^2 \frac{1}{\omega e^2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \zeta - \left[\frac{1}{\omega_e} \frac{d\omega_e}{d\theta} + j \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega_e} \right) \right] \frac{d\zeta}{d\theta}; \quad (14)$$

$$\frac{d\omega_e}{d\theta} = \frac{1}{2} j e' V_p \beta_q^2 \frac{1}{\omega_e} \left(1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 |\zeta|^2 \right) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}), \quad (15)$$

где $\zeta = x + jy$ — комплексная поперечная координата, $\omega_e(t) = \beta_q v_z(t)$ — мгновенное значение частоты внешнего электрического поля в системе координат, движущейся вдоль оси z со скоростью электронов v_z , $\theta(t) = \beta_q z = \int_0^t \omega_e(t) dt$ — интегральный пролетный угол.

В реальных условиях обычно выполняется соотношение $\frac{1}{4} \beta_q^2 |\zeta|^2 \ll \ll 1$, что позволяет в (14) и (15) приближенно считать

$$\omega_e^2 \approx \omega_{0e}^2 (1 + 8\epsilon \cos \theta). \quad (16)$$

Здесь $\epsilon = \frac{1}{4} e' V_p \beta_q^2 \frac{1}{\omega_{0e}^2}$, $\omega_{0e} = \beta_q v_{0z}$, v_{0z} — среднее за период циклотронной частоты значение продольной скорости электронов v_z .

Ограничимся, кроме того, наиболее интересным случаем адиабатических резонансных полей, когда

$$|\epsilon| \ll 1, \quad \left| 1 - \frac{\omega_c}{\omega_e} \right| \ll 1 \quad (17)$$

и соответственно (14) и (15) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \zeta}{d\theta^2} - j \frac{d\zeta}{d\theta} = \varepsilon \left\{ (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \zeta - j \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{\omega_c}{\omega_{0e}} \right) + 4 \varepsilon e^{j\theta} \right] \frac{d\zeta}{d\theta} \right\} - \varepsilon^2 \left\{ 4 (e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2 \zeta + 8 (e^{2j\theta} - e^{-2j\theta}) \frac{d\zeta}{d\theta} \right\} + \varepsilon^3 \dots; \quad (18)$$

$$\frac{d\omega_{0e}}{d\theta} = \varepsilon \left\{ 2j \omega_{0e} \left(1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 |\zeta|^2 \right) (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \right\} - \varepsilon^2 \left\{ 4j \omega_{0e} \left(1 + \frac{1}{4} \beta_q^2 |\zeta|^2 \right) (e^{2j\theta} - e^{-2j\theta}) \right\} + \varepsilon^3 \dots \quad (19)$$

Условие (17) дает возможность искать решение системы (18) в виде

$$\zeta(\theta) = \alpha(\theta) + \beta(\theta) e^{j\theta}, \quad (20)$$

считая величины α , β (соответственно синхронный и циклотронный радиусы) медленно меняющимися за период циклотронного движения. Приближенное аналитическое решение можно получить, применив, подобно [9], усреднение по быстроосциллирующей фазе θ , ограничиваясь тем самым первым приближением по ε . В пределах той же точности можно считать, что

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0, \quad \Delta = \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega_{0e}} \right) \approx \Delta_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \varepsilon \frac{\delta v_{0z}}{v_{0z0}}, \quad (21)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4} e' V_p \beta_q^2 \frac{1}{\omega_{0e0}^2}$, $\omega_{0e0} = \beta_q v_{0z0}$, $\Delta_0 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega_{0e0}} \right)$, $\delta v_{0z} = v_{0z} - v_{0z0}$; v_{0z0} — начальное значение средней продольной скорости v_{0z} на входе в зону усиления. Тогда (18), (19) приобретают вид

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = j \varepsilon_0 \beta,$$

$$\frac{d\beta}{d\theta} = -j \varepsilon_0 \alpha - j \varepsilon_0 \left(2\Delta_0 + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\delta v_{0z}}{v_{0z0}} \right) \beta; \quad (22)$$

$$v_{0z}^2 - v_{0z0}^2 = j \varepsilon_0 \omega_{0e0}^2 \int_0^{\theta} (\alpha\beta^* - \sigma^* \beta) d\theta. \quad (23)$$

Для случая, когда торможение незначительно, $\delta v_{0z} \approx 0$ ($\Delta \approx \Delta_0$),

$$\alpha = j \beta_0 \frac{\text{sh } \tau_1}{\sqrt{1 - \Delta_0^2}} \exp(-j \Delta_0 \tau), \quad \beta = \beta_0 \left\{ \text{ch } \tau_1 - j \Delta_0 \frac{\text{sh } \tau_1}{\sqrt{1 - \Delta_0^2}} \right\} \exp(-j \Delta_0 \tau), \quad (24)$$

$\tau_1 = \tau \sqrt{1 - \Delta_0^2}$, $\tau = \varepsilon_0 \theta$ — параметр усиления, β_0 — начальное значение циклотронного радиуса центра масс поперечного сечения луча, $\sigma_0 \approx 0$.

Используя (24) для решения (23) будем иметь

$$v_{0z}^2 - v_{0z0}^2 = -|\beta_0|^2 \omega_{0e0}^2 \frac{\text{sh}^2 \tau_1}{1 - \Delta_0^2} \quad (25)$$

или при $v_{0z} \approx v_{0z0}$

$$\frac{\delta v_{0z}}{v_{0z0}} = -\frac{1}{2} |\beta_0|^2 \beta_q^2 \frac{\text{sh}^2 \tau_1}{1 - \Delta_0^2} \quad (26)$$

Тогда (22) с учетом (26) дает

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = j\beta, \quad (27)$$

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -j\alpha - j \left(2\Delta_0 - q^2 \frac{\text{sh}^2 \tau_1}{1 - \Delta_0^2} \right) \beta,$$

где

$$q^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} |\beta_0|^2 \beta_q^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{P_s \text{вх}}{P_0} \quad (28)$$

— параметр динамического рассинхронизма (P_s — мощность сигнала в потоке, $P_0 = I_0 V_0$, I_0 — ток пучка, V_0 — постоянная составляющая напряжения на периодической системе).

Для наиболее интересного случая $\tau_1 > 2$, когда можно приближенно считать $\text{ch} \tau_1 \approx \text{sh} \tau_1 \approx \frac{1}{2} e^{\tau_1}$, решение системы (27) целесообразно искать в виде

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(n\tau_1 - j\Delta_0\tau), \quad \beta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(n\tau_1 - j\Delta_0\tau). \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27) в качестве приближенного решения (27), находим

$$\beta \approx \beta_0 \left(1 - j \frac{\Delta_0}{\sqrt{1 - \Delta_0^2}} \right) \frac{e^{\tau_1}}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=3}^{\infty} j^{(n-1)/2} \left(\frac{qe^{\tau_1}}{2(1 - \Delta_0^2)} \right)^{n-1} B_n \right\}, \quad (30)$$

где

$$B_n = \frac{n\sqrt{1 - \Delta_0^2} - j\Delta_0}{n^2 - 1} B_{n-2}, \quad B_1 = 1 \quad (n = 3, 5, 7, \dots).$$

Если начальная расстройка отсутствует ($\Delta_0 = 0$), выражение (30) принимает более простой вид:

$$\beta = \beta_0 \frac{e^{\tau}}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=3}^{\infty} j^{(n-1)/2} \left(\frac{qe^{\tau}}{2} \right)^{n-1} B_n \right\}. \quad (31)$$

Здесь

$$B_n = \frac{n}{n^2 - 1} B_{n-2}, \quad B_1 = 1 \quad (n = 3, 5, 7, \dots).$$

При этом значение квадрата модуля циклотронного радиуса $|\beta|^2$ определяет мощность сигнала в потоке:

$$P_s = \frac{I_0}{2e'} \omega_c^2 |\beta|^2. \quad (32)$$

На рис. 3 показана зависимость нормированного коэффициента усиления по мощности $G(q^2)/G(0)$ ($G = |\beta|^2/|\beta_0|^2$) от величины параметра усиления τ для различных величин параметра динамического рассинхронизма q^2 . Результирующее усиление заметно падает для величин q^2 , удовлетворяющих условию

$$q^2 \gtrsim \frac{1}{\text{sh}^2 \tau}. \quad (33)$$

Подставляя (32) в (28) и учитывая (31) и (33), определим допустимое значение $P_{s \text{ вых}}$, для которого ограничение усиления еще отсутствует:

$$P_{s \text{ вых}} \approx P_{s \text{ вх}} + 2\varepsilon_0 P_0. \quad (34)$$

Таким образом, лишь незначительная часть 5—10% ($\varepsilon_0 \ll 1$) энергии продольного движения электронов поступает в мощность сигнала

Если выполняется (33), процесс усиления становится нелинейным $G = G(P_{s \text{ вх}})$. Максимум усиления достигается при определенном значении начальной положительной расстройки Δ_0 , величина которой зависит от q^2 и τ (рис. 4 а, б), т. е. при больших сигналах электроны испытывают сильное торможение, которое можно частично компенсировать, несколько увеличивая их скорость на входе в зону усиления.

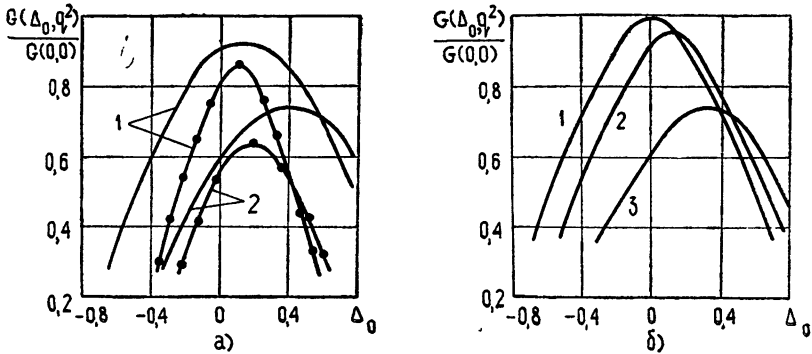


Рис. 4. а) Зависимость нормированного коэффициента усиления от расстройки Δ_0 при $\tau = 2, 3$.

Сплошные кривые—расчетные, кривые с точками—экспериментальные;

1— $q^2 = 9 \cdot 10^{-2}$, 2— $q^2 = 1,6 \cdot 10^{-1}$.

б) Расчетная зависимость нормированного коэффициента усиления от расстройки Δ_0 при $\tau = 3$;

1— $q^2 = 0$, 2— $q^2 = 2 \cdot 10^{-2}$, 3— $q^2 = 4 \cdot 10^{-2}$.

Выполнение условия синхронизма ($\omega_{0e} = \omega_c = \text{const}$) на всей длине зоны может быть достигнуто применением периодической системы с переменным шагом. В этом случае остаются справедливыми выражения (24) и (25), так как $\Delta = 0$, что позволяет рассчитать закон изменения шага $\lambda_q(\theta)$ в такой системе*:

$$\frac{\lambda_q^2(\theta)}{\lambda_q^2(0)} = 1 - \frac{P_{s \text{ вх}}}{P_0} \text{sh}^2 \tau. \quad (35)$$

Естественно, в реальных условиях торможение потока не может быть беспредельным; в частности, даже для пучка нулевого сечения требование к линейности поперечного электрического поля (11) эквивалентно ограничению

$$\frac{1}{4} \frac{P_{s \text{ вых}}}{P_0} \ll 1. \quad (36)$$

Как в линейном, так и в нелинейном режимах усиления электронный поток, замедляясь, отдает мощность

$$P_e = \frac{I_0}{2e'} (v_{0z}^2 - v_{0z0}^2) \approx P_{s \text{ вых}} - P_{s \text{ вх}}, \quad (37)$$

* При расчете закона изменения шага λ_q следует также учитывать изменение параметра ε_0 вдоль z (см. (13)).

т. е. электронный коэффициент полезного действия $\eta_e = P_e/P_0$ зависит от режима работы и может быть найден из (34), (36), (37):

$$\eta_{e \text{ лнн}} \approx 2\varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 \ll 1); \quad (38)$$

$$\eta_{e \text{ нелнн}} \approx 1 - \frac{\lambda_q^2(\theta_e)}{\lambda_q^2(0)} \quad (39)$$

(θ_e — полный пролетный угол зоны усиления).

Вследствие моноэнергетичности обработанного электронного пучка в обоих случаях в целях повышения КПД можно осуществлять депрессию потенциала коллектора:

$$\Delta V_{\text{депр}} \approx V_0 - \frac{v_{0z0}^2 - v_{0z}^2}{2e'} \quad (40)$$

Таким образом, в линейном режиме глубина депрессии потенциала коллектора должна быть весьма высокой (~90% и более), в нелинейном режиме ее величина определяется степенью торможения потока и может быть незначительной при $\eta_e \rightarrow 1$.

При равных значениях коэффициента депрессии энергетически более выгоден нелинейный режим, позволяющий в существенно большей степени трансформировать энергию продольного движения потока в высокочастотную мощность сигнала.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МАКЕТ УСИЛИТЕЛЯ

Для предварительного исследования усилительных характеристик был использован макет усилителя циклотронно-синхронных волн со следующими параметрами: $f \approx 3 \text{ Гц}$, $I_0 = 40 \text{ ма}$, $V_0 = 2000 \text{ в}$, $r_0 = 1,2 \text{ мм}$, $a = 4 \text{ мм}$, $N_{\text{диск}} = 32$ и постоянным шагом $\lambda_q = 9 \text{ мм}$. Зависимость величины электронного коэффициента усиления расчетного и измеренного от параметра τ при $q^2 \approx 0$ показана на рис. 5 а. Ограничение усиления при $\tau > 2,5$ связано с расширением пучка, которое вызвано усилением внутреннего поперечного движения отдельных электронов вблизи границы пучка под действием нелинейного поперечного поля электростатической структуры.

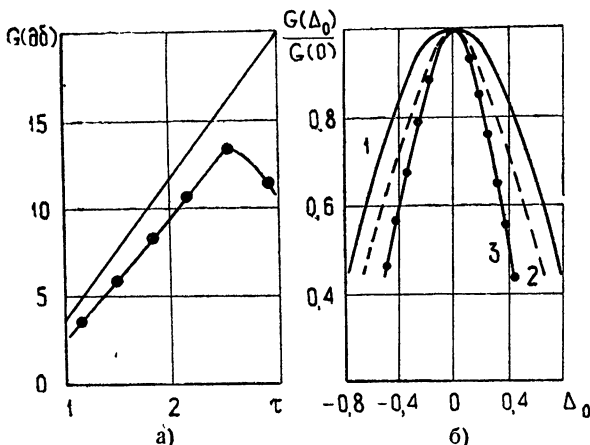


Рис. 5. а) Зависимость электронного коэффициента усиления по мощности от параметра усиления τ . Сплошная кривая — расчетная, кривая с точками — экспериментальная. б) Зависимость нормированного коэффициента усиления от расстройки Δ_0 при $q^2 \approx 0$, $\tau = 2, 3$; 1 — расчетная при $|\Delta_\infty| = 0$, 2 — расчетная при $|\Delta_\infty| = 0,15$, 3 — экспериментальная.

Зависимость нормированного коэффициента усиления от величины Δ_0 для различных значений τ и q^2 показана на рис. 4 а, б. Некоторое несоответствие расчетных и измеренных зависимостей на рис. 3, по-видимому, обусловлено неточностью в определении реальной величины $P_{s \text{ вх}}$ в потоке (вследствие возможной неидентичности входного и выходного устройств связи с потоком). Различие в ширине резонансных кривых 4 а, б, 5 б, вероятно, связано с неточностью механического изготовления периодической системы ($\sim \pm 0,1$ мм) и неравномерностью магнитного поля вдоль оси z ($\sim \pm 0,5\%$), которые приводят к суммарной постоянной расстройке $|\Delta_{00}| \gtrsim 0,1$ ($\tau = 2,3$). Зависимость нормированного коэффициента усиления от Δ_0 для $|\Delta_{00}| = 0,15$ показана на рис. 5 б пунктиром.

Анализ процессов усиления в электростатическом усилителе допускает возможность получения высоких значений КПД при депрессии потенциала коллектора, величина которой может быть незначительной при использовании нелинейного режима, т. е. зоны усиления с переменным шагом. В последнем случае необходимо учитывать возможность нарушения магнитной фокусировки электронного пучка при его значительном торможении, а также существование, хотя и небольших, но конечных пульсаций потенциала на оси системы ($V(0, z) \neq 0$ в (12)), что ограничивает минимальное значение продольной скорости ($\{v_{0z}\}_{\text{min}} > 2e'V_p$).

Развитый анализ справедлив в полной мере лишь для пучка нулевого сечения. В пучке конечного сечения эффект воздействия поперечного электрического поля различен для различных электронов одного и того же сечения пучка, что вызывает появление дополнительного разброса продольных скоростей и ограничивает КПД. Рост плотности пространственного заряда в пучке конечного сечения выводит из синхронизма с внешним полем внутренние орбиты отдельных электронов потока, ликвидируя разброс и заставляя пучок раскручиваться как единое целое. Конечные размеры пучка в этом случае становятся не столь существенными. Эти условия, однако, предъявляют жесткие требования к электронной пушке, к параметрам электронного пучка [10].

Важное значение имеет оптимизация структуры электростатического поля в зоне усиления. Наличие нелинейных компонент в разложении потенциала (8) приводит к преждевременному расширению потока, ограничивая, тем самым, величину усиления, и вызывает модуляцию продольной скорости по его сечению, что также уменьшает предельный КПД.

Еще слабо изучены вопросы депрессии потенциала коллектора для усилителей поперечных волн, хотя ряд обнадеживающих экспериментальных результатов в этом направлении уже получен [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Лопухин, А. С. Рошаль, Электронно-лучевые параметрические усилители, изд. Сов. радио, М., 1968.
2. В. А. Ванке, В. М. Лопухин, В. Л. Саввин, УФН, 99, № 12, 545 (1969)
3. J. C. Carroll, Tubes pour hyperfrequencies, Proc. of 5-th Int. Congress on microwave tubes (Paris 1964), N. Y.—London Academ. press, 1965, p. 70.
4. D. C. Watson, R. W. Grow, C. C. Johnson, J. of Microwave Power, 5, № 2 (1970).
5. P. I. Briggs, S. F. Paik, A. H. Cottfried, Tubes pour hyperfrequencies, Proc. of 8-th Int. Congress on microwave tubes (Holland 1960), p. 15-9.
6. А. С. Бондарев, Е. М. Овсепян, Труды 1-й Юбилейной республиканской межвузовской конференции по проблемам повышения эффективности электровакуумных приборов, вып. 2, Киев, 1970, стр. 89.

7. J. C. Bass, Proc. IRE, **49**, № 9, 1424 (1961).
8. T. Hayashi, N. Sakudo, Rev. Sci. Inst., **39**, № 7, 958 (1968).
9. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962, т. 1, гл. 1.
10. В. А. Ванке, Ю. М. Тимофеев, Раднотехника и электроника (в печати).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
29 июня 1971 г.

SATURATION OF AMPLIFICATION IN A CYCLOTRON-SYNCHRONOUS WAVE AMPLIFIER

V. A. Vanke, Yu. M. Timofeev

The formation of an electrostatic field of the amplification band of the cyclotron-synchronous wave amplifier is considered. The analysis of amplification is made for the case of a variable longitudinal velocity. It is noted that the nonlinear regime of the amplifier operation is worthwhile to be used for increasing the efficiency. The results of preliminary experiments are given.

УДК 621.385.6

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНЕТРОНА

П. В. Романов, А. С. Рошаль, П. Ш. Янкелевич

Приведены результаты цифрового моделирования автоколебаний в цилиндрическом магнетроне. Анализируются первые моменты распределения стационарных случайных процессов в системе

В настоящей работе приводятся результаты моделирования совокупности стационарных режимов цилиндрического магнетрона при изменении различных параметров прибора. Предполагается, что моделируемые случайные процессы эргодические и автоколебательные.

Численные расчеты выполнены на ЭВМ типа М-220 на примере магнетрона диапазона 10 Гц, по методу, описанному в [1]. При 2—3 тысячах единичных зарядов («электронов») на период системы $2\pi/\rho$

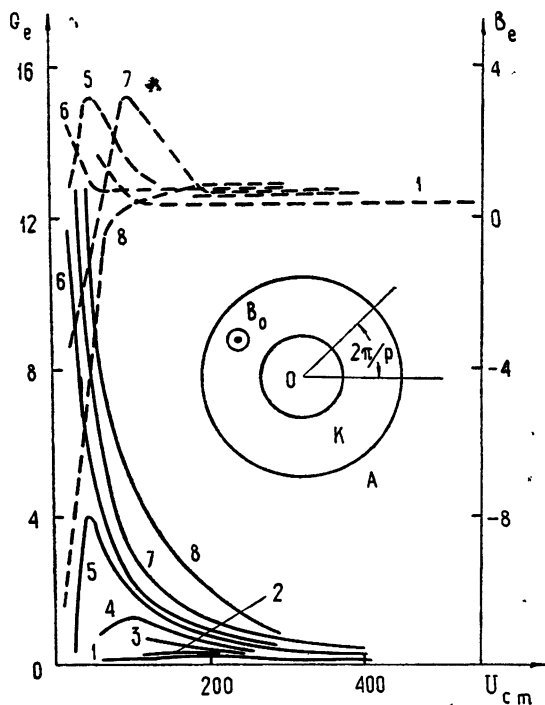


Рис. 1. Зависимость активной G_e (сплошные кривые) и реактивной B_e (пунктир) электронных проводимостей от амплитуды ВЧ потенциала U_{cm} при различных анодных напряжениях в изображенном цилиндрическом магнетроне (K —катод, A —анод).

(рис. 1; p — количество пар резонаторов анодного блока) длительность одного шага моделирования на основе уравнений, данных в [2], составляет в среднем 75 сек. Из этого времени 15 сек занимает решение уравнения Пуассона для 4500 узлов с использованием быстрого преобразования Фурье. Для расчета одного шага уравнений движения по формулам [2] требуется 18 сек на каждую тысячу электронов.

Время моделирования одного стационарного режима $\tau = \tau_n + T$, где τ_n — длительность переходного процесса при установлении стационарного состояния, T — время моделирования стационарного случайного процесса, необходимое для вычисления моментов распределения. В зависимости от параметров режима $\tau_n = (2 \div 10) T_c$, $T = (2 \div 10) T_c$, $\tau = (4 \div 20) T_c$, где T_c — циклотронный период. Расчет одного стационарного режима с шагом $T_c/8$ занимает 0,7—3,3 часа. При этом τ_n и T возрастают с убыванием амплитуды ВЧ анодного потенциала $U_{ст}$, поскольку замедляется движение электронов к аноду.

Эмиссия моделировалась, как описано в [3]. На одном шаге моделирования эмиттировалось в среднем 0,05 тепловых электронов (это соответствует току термоэмиссии ~ 35 ма). Зависимость коэффициента вторичной эмиссии δ от энергии первичных электронов E описывалась формулой из [4] при $\delta_m = 2$, $E_m = 600$ эв, $k\rho = 10,72$. Тангенциальные составляющие начальных скоростей эмиттированных электронов не учитывались, для нормальных составляющих предполагалось рэлеевское (полумаксвелловское) распределение с наиболее вероятной энергией 0,11 эв для тепловых электронов и 3,35 эв для вторичных.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОВОДИМОСТЕЙ, ТОКОВ И МОЩНОСТЕЙ

На рис. 1—4 в относительных единицах представлены временные средние стационарных случайных процессов за период времени T . Номера кривых расположены в порядке возрастания постоянного анодного потенциала U_a .

Обозначим $U_{ст}$ амплитуду ВЧ потенциала на аноде; B_e и G_e — активную и реактивную составляющие электронной проводимости; P_g и R_g — активную и реактивную генерируемые мощности; I_{ar} , I_{rr} — активный и реактивный ВЧ токи. Эти величины связаны соотношениями

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{2} I_{ar} U_{ст}, & I_{ar} &= G_e U_{ст}, \\ R_g &= \frac{1}{2} I_{rr} U_{ст}, & I_{rr} &= B_e U_{ст}. \end{aligned} \quad (1)$$

Как видно из рис. 1, благодаря наличию экстремума одной и той же проводимости G_e могут соответствовать два различных значения $U_{ст}$. При этом большее значение $U_{ст}$ определяет устойчивую точку, меньшее — неустойчивую. С увеличением постоянного анодного потенциала U_a положение максимума G_e сдвигается в сторону меньших $U_{ст}$. Поскольку моделирование процессов при малых $U_{ст}$ требует значительного машинного времени, положение максимума рассчитано лишь для кривых 1, 2, 4 и 5.

Из уравнения баланса ВЧ мощности можно найти, что в стационарном режиме

$$G_e Q_n \approx \text{const}, \quad (2)$$

где Q_n — нагруженная добротность. Отсюда следует, что положение экстремумов G_e и Q_n совпадает; причем устойчивой ветви кривой

$G_e(U_{ст})$, на которой $\frac{\partial G_e}{\partial U_{ст}} < 0$, соответствует устойчивая ветвь кривой $Q_n(U_{ст})$, на которой $\frac{\partial Q_n}{\partial U_{ст}} > 0$. Из приведенных данных видно, что с увеличением анодного напряжения U_a интервал значений $U_{ст}$ нестабильной работы сужается.

Наличие неустойчивых ветвей электронной проводимости G_e и нагруженной добротности Q_n , обнаруженных путем «машинного эксперимента», хорошо согласуется с теоретическими результатами Вайнштейна, полученными при анализе стабильности колебаний в генераторах магнетронного типа [5].

Реактивная проводимость B_e с увеличением анодного напряжения U_a переходит от положительных значений к отрицательным (рис. 1). Это связано с изменением фазового сдвига между наведенным током и волной ВЧ потенциала, который характеризуется углом $\theta_m \equiv \arctg(B_e/G_e)$ и зависит от расположения облака объемного заряда относительно волны ВЧ потенциала. Исследованные особенности электронных проводимостей согласуются с экспериментальными результатами.

Обозначим U_t значение потенциала $U_{ст}$, при котором катод прибора переходит в режим термоэмиссии. Перед этим, как и в работе [6], наблюдается более быстрый рост анодного тока (рис. 2). С переходом в режим термоэмиссии анодный ток I_a резко падает, так как в исследуемом приборе тепловая эмиссия мала для его поддержания; момент перехода показан на кривых черточкой. При малых U_a значение $U_t \approx U_a$ (кривая 1), и в пучности волны ВЧ потенциала в некоторые моменты времени на аноде имеется нулевое или даже отрицательное напряжение. С ростом U_a величина U_t уменьшается (кривые 1, 7, 8), что также согласуется с результатами моделирования, полученными в работе [6].

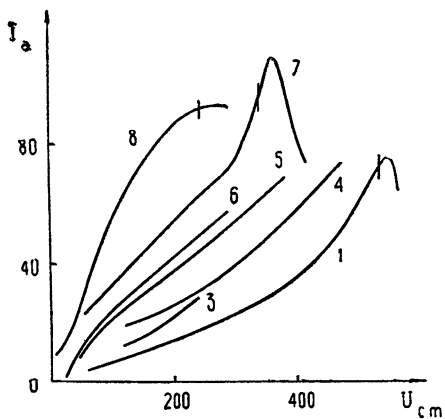


Рис. 2.

Рис. 2. Анодный ток I_a . Черточками показан потенциал U_t перехода к режиму термоэмиссии.

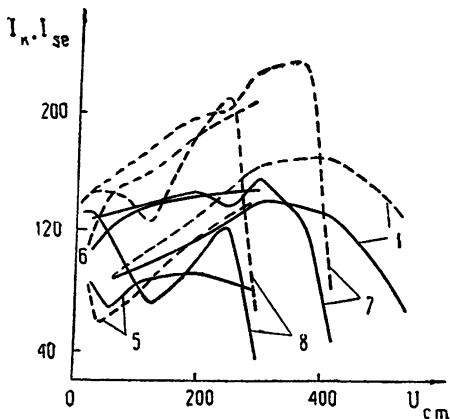


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость тока возвращающихся электронов I_k (сплошные кривые) и тока вторичных электронов I_{se} (пунктир) от амплитуды ВЧ потенциала $U_{ст}$.

Переход к режиму термоэмиссии является следствием того, что при $U_{ст} \rightarrow U_t$ электронное облако несколько удаляется от катода; ток I_k электронов, возвращающихся на катод, и соответствующий ему вторично-эмиссионный ток I_{se} быстро падают, механизм вторич-

но-эмиссионного восполнения электронов нарушается, и развивается лавинообразный распад облака объемного заряда. Из расчетов следует, что ток I_k (рис. 3) с ростом $U_{ст}$ растет медленнее, чем анодный ток. Это можно объяснить тем, что ток I_k , в основном, обусловлен частью облака, расположенной в прикатодной области, где ВЧ поле мало и экранировано полем пространственного заряда. Поскольку в стационарном режиме $I_{se} \approx I_a + I_k$, средний коэффициент вторичной эмиссии $\bar{\delta} \equiv I_{se}/I_k = 1 + (I_a/I_k)$ также нарастает.

Как и в плоском случае, катодные тепловые потери в несколько раз меньше анодных. При уменьшении амплитуды ВЧ поля катодные потери стремятся к конечной величине. Это хорошо известный эффект подкала катода в неразрезном магнетроне. Реактивная генерируемая мощность R_g по величине того же порядка, что и активная P_g . При больших анодных потенциалах U_a и малых $U_{ст}$ реактивная мощность отрицательна, в остальных случаях положительна.

Эффективность взаимодействия потока и поля определяется электронным КПД $\eta_e = P_g/(I_a U_a)$. Электронный КПД (рис. 4), рассматриваемый как функция двух переменных $\eta_e(U_a, U_{ст})$, имеет максимум по каждой переменной при фиксированной другой переменной. Снижение КПД при больших $U_{ст}$ связано с тем, что электроны постепенно выходят из области максимального тормозящего ВЧ поля и эф-

фективность взаимодействия падает. В то же время генерируемая мощность P_g продолжает расти вплоть до $U_{ст} \approx U_t$ благодаря росту анодного тока.

При конструировании магнетронов известным параметром обычно является не ВЧ потенциал $U_{ст}$, а нагруженная добротность Q_H . В этом случае по графикам рис. 1, учитывая (2), можно рассчитать ВЧ потенциал $U_{ст}$, который установится в системе при заданных Q_H и U_a , а затем все остальные характеристики по рис. 1—4 и формулам (1).

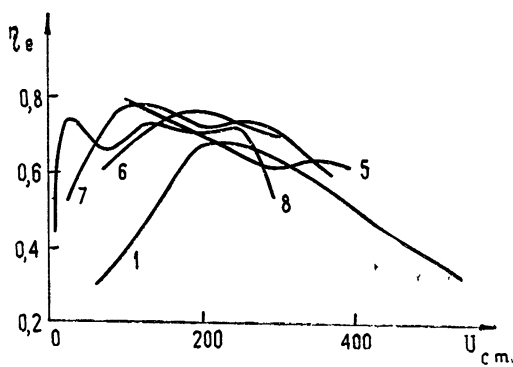


Рис. 4. Зависимость электронного КПД η_e от амплитуды ВЧ потенциала $U_{ст}$

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛАКА

В опубликованных работах, посвященных исследованию магнетронов в режиме развитой генерации, приводятся обычно лишь «интегральные» характеристики приборов—токи, мощности, КПД и др. В то же время почти отсутствуют исследования состояния электронного облака и электрического поля, т. е. не рассматриваются величины, распределенные в области взаимодействия. Одним из важных достоинств метода моделирования является то, что он дает возможность анализировать временные средние случайных полей, т. е. случайных процессов, распределенных в рассматриваемой области.

На рис. 5 изображены типичные кривые распределения средней тангенциальной $v_t(y)$ и средней нормальной $v_n(y)$ скоростей электронного потока в зависимости от безразмерной нормальной координаты y , отсчитываемой в направлении от катода к аноду (кривые 1 и 2 соответственно). Штрих-пунктиром (3) показана величина фазовой скорости волны ВЧ поля. Характерной особенностью является наличие максимума скорости дрейфа $v_t(y)$ расположенного вблизи середины меж-

электродного расстояния. Вследствие этого в приборе существует не один, как иногда предполагается [7,8], а два синхронных радиуса, т. е. два значения координаты y , при которых имеется точный синхронизм потока и ВЧ поля. Падение скорости $v_t(y)$ вблизи анода можно объяснить тем, что быстрые электроны скорее уходят на анод и поток обогащается медленными электронами.

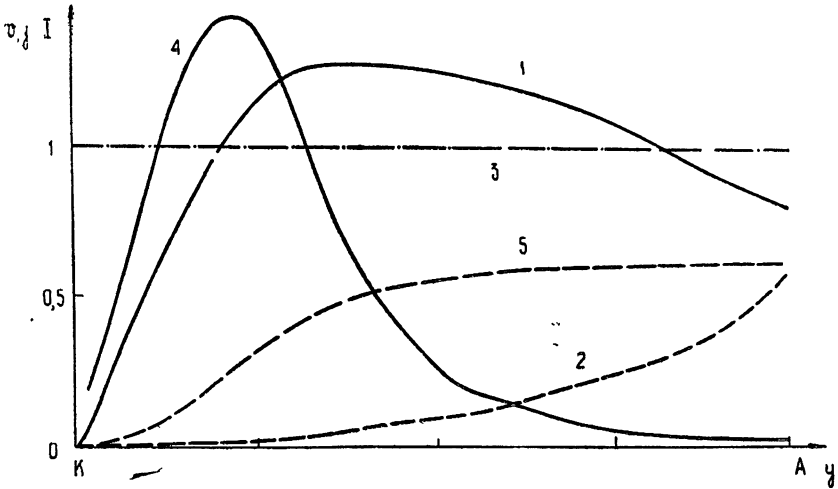


Рис. 5. Электронные скорости и конвекционные циркулирующие токи (в относительных единицах).
 К — катод, А — анод.

Как видно из рисунка, вблизи анода тангенциальная и нормальная скорости электронов потока могут иметь одинаковый порядок величины. Область малых $v_n(y)$ соответствует «втулке» облака, область более быстрого роста $v_n(y)$ — «спице».

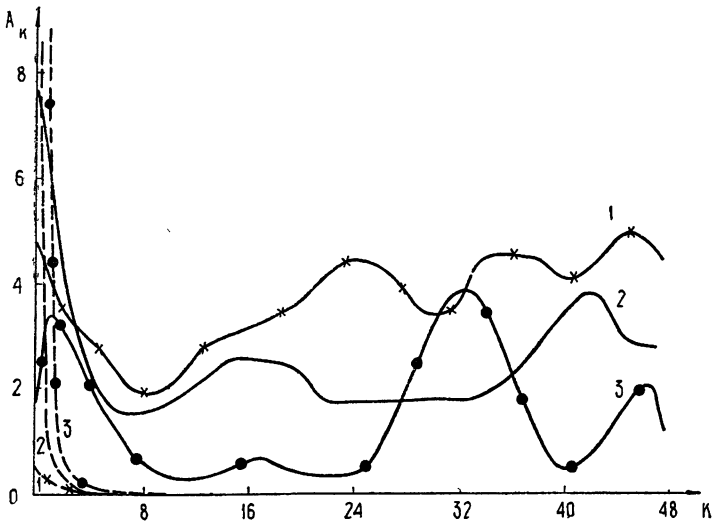


Рис. 6. Амплитуды гармоник плотности заряда (сплошные кривые) и потенциала (пунктир).

Плотность тока j_p , циркулирующего в области взаимодействия (кривая 4), мала у катода (вследствие малости скорости дрейфа) и у

анода (вследствие малой плотности заряда), достигая максимума вблизи границы «втулки» облака. Кривая 5 изображает ток I_t , циркулирующий в слое, простирающемся от катода до соответствующей координаты y . До 70% циркулирующего тока протекает во втулке облака.

На рис. 6 в относительных единицах изображены амплитуды пространственных гармоник A_k плотности заряда (сплошные кривые) и потенциала (пунктир) вблизи катода (кривые 1), на границе втулки (2) и вблизи середины спицы. Объемный заряд имеет широкий спектр пространственных гармоник. Очевидно, плотность объемного заряда является почти некоррелированной случайной функцией. В то же время в спектре потенциала наибольшую величину имеют низшие гармоники, и, следовательно, значения потенциала сильно коррелированы в достаточно большом объеме области взаимодействия. Это объясняется тем, что распределение потенциала является интегральной характеристикой плотности заряда (в соответствии с уравнением Пуассона) и дальнедействующие кулоновские поля сглаживают флуктуации потенциала.

Цифровое моделирование стационарных режимов магнетронных генераторов позволило исследовать их характеристики в условиях «машинного эксперимента». При этом удалось изучить ряд физических явлений, возникающих при взаимодействии электронного потока с электромагнитной волной. С помощью рассчитанных характеристик определяются токи, электронные проводимости, мощности, КПД для каждого из стационарных режимов, которые устанавливаются в генераторе при различных параметрах. Приводятся некоторые характеристики электронного облака в режиме генерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Рошаль, П. В. Романов, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 13, 1092 (1970).
2. П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. Н. Галимуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1554 (1970).
3. П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. Н. Галимуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1096 (1970).
4. Л. М. Роголя, Радиотехника и электроника, 12, 1680 (1967).
5. Л. А. Вайнштейн, сб. Электроника больших мощностей, сб 3, изд Наука, М., 1964, стр. 36.
6. Г. Г. Моносов, Электронная техника, СВЧ, № 5, 3 (1969).
7. С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения приборов магнетронного типа, изд Сов. радио, М., 1967.
8. Дж. Ф. Хелл, Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, т. 1, ИЛ, М, 1961, стр. 425

Поступила в редакцию
22 июля 1971 г.

STATISTICAL SIMULATION OF STATIONARY REGIMES OF A CYLINDRICAL MAGNETRON

P. V. Romanov, A. S. Roshal', P. Sh. Yankelevich

The results are reported of computer simulation of self-oscillations in a cylindrical magnetron. The first moments of the stationary random processes distribution in the system are analysed.

УДК 621.3.032.21

К ВОПРОСУ О РОЛИ ФОТОЭМИССИИ В МЕХАНИЗМЕ РАЗРЯДА С ПОЛЫМ КАТОДОМ

В. М. Ткаченко, В. Б. Тютюнник

В работе исследованы напряжение горения и некоторые характеристики свечения разряда в гелии с цилиндрическим полым катодом в магнитном поле. На основании сопоставления влияния магнитного поля на электрические и оптические характеристики разряда обсуждается роль фотоэмиссии с катода в механизме разряда

Одной из особенностей механизма разряда с полым катодом, наряду с эффективным использованием электронов в катодной области, многие [1-3] считают значительный вклад в γ -процессы фотоэмиссии под действием коротковолнового излучения катодных областей разряда. Так, например, авторы [3] пришли к выводу, что фотоэлектронный ток составляет 75—80% общего тока с поверхности полого катода. Но этот результат получен расчетным путем, а экспериментальная проверка его сложна и никем не проводилась.

В работе [4] сколь-нибудь существенная роль фотоэффекта в механизме поддержания разряда с полым катодом полностью отвергается. Авторы сравнили величину катодного падения потенциала сплошного и сетчатого полых катодов одинакового размера с кольцевыми анодами, окружающими катоды. Однако, по нашему мнению, их эксперимент нельзя рассматривать как окончательно доказавший незначительную роль фотоэффекта, так как энергия и углы падения ионов на поверхность сетчатого катода иные, чем сплошного. Кроме того, в работе сравнивается катодное падение при одинаковых токах разряда, в то время как площадь сетчатого катода в 20 раз меньше площади сплошного. В таком случае, даже если считать, что фотоэффект совершенно не дает вклада в γ -процессы на катоде, то при одинаковом токе разряда катодное падение в сетчатом катоде должно быть больше, так как плотность тока на его поверхности больше.

Исследование характеристик разряда с цилиндрическим полым катодом в поперечном магнитном поле, которое не нарушает симметрии разряда, позволяет проанализировать роль излучения в процессах эмиссии электронов из катода. Измерения проведены нами с коваровым цилиндрическим полым катодом, описанным в работе [5], при разряде в спектрально чистом гелии. Магнитное поле направлено вдоль оси разрядной трубки, т. е. в катодных областях разряда оно перпендикулярно электрическому.

На рис 1 приведена зависимость напряжения горения разряда U от давления гелия p при фиксированном токе разряда I (кривая 1). Эта кривая отображает характерную для полого катода зависимость $I = f(p)$, которая при определенном давлении газа, зависящем от поперечных размеров катода и рода газа, имеет максимум [6].

При наложении магнитного поля напряжение горения разряда уменьшается при всех давлениях газа (кривые 2—6, рис. 1), причем малые магнитные поля не меняют вида зависимости U от p . Интересно,

что наибольшее влияние магнитное поле оказывает при давлении гелия порядка 1,5 тор, т. е. в области, где начинают исчезать специфические свойства разряда с полым катодом и происходит переход к режиму обычного тлеющего разряда.

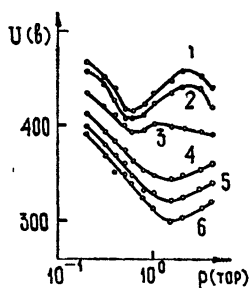


Рис. 1.

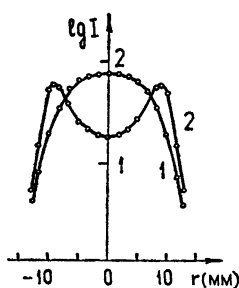


Рис. 2.

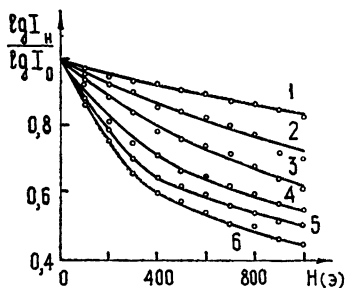


Рис. 3.

Рис. 1. Зависимость напряжения горения разряда от давления гелия и напряженности магнитного поля. Ток разряда $I = 500$ ма, 1— $H = 0$, 2—100; 3—150; 4—200; 5—400; 6—600 э.

Рис. 2. Распределение интегральной интенсивности свечения по радиусу катодной полости, $p = 0,6$ тор, 1— $H = 0$; 2—600 э.

Рис. 3. Зависимость относительного изменения суммарной интенсивности линий гелия от напряженности магнитного поля; $p = 0,6$ тор; 1— $\lambda 5867 \text{ \AA}$, 2— 5015 \AA , 3— 6678 \AA , 4— 4387 \AA , 5— 4713 \AA , 6— 4921 \AA .

Если согласиться с выводом авторов работ [1-3] о преобладающей роли фотоэмиссии в γ -процессах на катоде, то уменьшение напряжения горения разряда в магнитном поле и характер этой зависимости от давления газа следовало бы объяснять ростом интенсивности излучения разряда. С целью проверки этого предположения нами были измерены некоторые интегральные и спектральные характеристики излучения из разряда с полым катодом в магнитном поле. В отличие от обычного тлеющего разряда интенсивность излучения отрицательного свечения в полом катоде плавно нарастает с удалением от его поверхности и достигает максимума в центре катодной полости (кривая 1, рис. 2). На рис. 2 приведено распределение по радиусу катодной полости интенсивности интегрального свечения, полученное фотографированием с помощью короткофокусного объектива свечения с торца катода на изопанхроматическую фотопленку. Анодное свечение при этом давлении отсутствует. С наложением магнитного поля (кривая 2) свечение приближается к катоде и интенсивность его в центре уменьшается.

Характер распределения интегрального свечения совпадает с распределением интенсивности отдельных спектральных линий, однако, как уже отмечалось нами в [5], а позже было подтверждено в [7], интенсивность различных линий меняется неодинаково. Чтобы оценить вклад излучения в процессы на катоде, была измерена суммарная интенсивность излучения отдельных спектральных линий из полого катода в магнитном поле. Для этого торец катода закрывался матовой пластинкой, так что в щель спектрографа попадало суммарное излучение от всех областей разряда. Зависимость относительной интенсивности некоторых линий гелия от напряженности магнитного поля, полученная таким способом, приведена на рис. 3. Суммарная интенсивность всех линий гелия уменьшается, но в разной степени, что свидетельствует об изменении в магнитном поле средней энергии или вида функции распределения электронов по скоростям.

Зондовые измерения распределения параметров плазмы по радиусу полости катода показали, что и концентрация и температура электро-

нов в приосевой области катодной полости в магнитном поле уменьшаются, почти не изменяясь на краю свечения. Корректность применения понятия электронной температуры для разряда с полым катодом при использованных в работе давлениях гелия следует из [8], а кроме того, проверялась нами, так как вид функции распределения может зависеть от материала катода [9].

Для анализа роли фотоэмиссии в γ -процессах на катоде следует рассматривать излучение, энергия квантов которого больше работы выхода материала катода, в частности, ультрафиолетовую область спектра, не исследованную в данной работе. Однако уменьшение концентрации, температуры электронов и интенсивности всех линий гелия в видимой области спектра позволяет предполагать, что интенсивность ультрафиолетового излучения гелия в магнитном поле также уменьшается.

Уменьшение в магнитном поле интенсивности излучения отрицательного свечения в сопоставлении с падением напряжения горения разряда, на наш взгляд, является косвенным, но довольно важным доказательством незначительной роли фотоэмиссии в γ -процессах на катоде в условиях описанного эксперимента. В пользу этого утверждения говорит также тот факт, что помещение на оси катодной полости стержня с потенциалом, равным потенциалу пространства, уничтожает эффект полого катода, хотя свечение и в этом случае остается сконцентрированным в полости катода.

Что же касается причин наблюдаемого влияния магнитного поля, то их, по-видимому, следует искать в ограничении диффузионных потерь заряженных частиц в разряде и повышении плотности пространственного заряда положительных ионов в области катодного падения потенциала.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. F. Little, A. Engel, Proc. Roy. Soc., **224**, 209 (1954).
2. K. Geiger, Z. Phys., **106**, 17 (1937)
3. V. K. Rohatgi J. Appl. Phys., **32**, 221 (1961)
- 4 В. С. Бородин, В. П. Гофмейстер, Ю. М. Каган, Г. Новоллик, ЖТФ, **38**, 1814 (1968).
- 5 В. М. Ткаченко, В. В. Тютюнник, Оптика и спектроскопия, **26**, 896 (1969).
6. Б. И. Москалев, Разряд с полым катодом, изд. Энергия, М., 1969.
- 7 Н. А. Рудневский, Д. Е. Максимов, Т. М. Шабанова, ЖПС, **13**, 199 (1970).
- 8 В. С. Бородин, Ю. М. Каган, ЖТФ, **36**, 181 (1966).
- 9 Т. М. Горбунова, А. Н. Солдатов, О. П. Семенова, III Всесоюзная конференция по физике низкотемпературной плазмы Краткое содержание докладов, изд. МГУ, М., 1971, стр. 212

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
29 марта 1971 г.

ON THE PHOTOEMISSION EFFECT IN THE DISCHARGE WITH A HOLLOW CATHODE

V. M. Tkachenko, V. V. Tyutyunnik

The paper investigates the voltage of firing and some characteristics of the discharge glowing in helium with a cylindrical hollow cathode in the magnetic field. The role of photoemission from the cathode in the discharge process is discussed on the basis of comparing the influence of the magnetic field on the electric and optical discharge characteristics.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538 573

О СВЕРХСВЕТОВОМ СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ В ВАКУУМЕ

В. Я. Эйдман

После открытия пульсаров появились теоретические работы, в которых в той или иной форме предполагается, что источник излучения как целое движется со скоростью, близкой к скорости света [1-3]. В связи с этим возникает вопрос о возможности движения твердотельной области с размером порядка 10^6 см со скоростью, близкой к скорости света (см., например, [4]).

В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на другую возможность получить излучение, эквивалентное даже сверхсветовому излучению в вакууме, не связанную с отмеченными выше трудностями*

Предположим, что из центра O спускается узкий пучок частиц (в частности, это могут быть и γ -кванты). Далее будем считать, что источник частиц, вращающийся с угловой частотой Ω , чертит по сферическому (с центром O и радиусом a) слою среды. В момент взаимодействия пучка со средой может возникнуть дипольный момент, который после прохождения пучка исчезает. В результате может возникнуть электромагнитное излучение, обязанное перемещающемуся по окружности дипольному моменту со скоростью $v = a\Omega$. Если $v > c$, то излучение будет обладать всеми свойствами сверхсветового излучения, хотя реальная скорость всех участвующих в указанном процессе частиц, разумеется, не превышает скорости света. При этом максимум излучения будет на длине волны λ порядка линейного размера области взаимодействия пучка со средой, т. е. $\lambda \approx a\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — угловая ширина пучка**

Для определенности ниже будем считать, что взаимодействие пучка частиц со средой приводит к появлению электрического дипольного момента \mathbf{p} , ориентированного вдоль определенного направления. Тогда плотность стороннего тока, вызывающего излучение с длиной волны $\lambda \gg l = a\Delta\varphi$ ($a \gg l$), может быть записана в виде

$$\mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \mathbf{p} \delta [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_0 = a \{ \cos \Omega t, \sin \Omega t, 0 \}$, $\mathbf{p} = p \{ 0, 0, 1 \}$.

В связи с (1) заметим следующее. Как известно, при движении участка среды, обладающей электрическим дипольным моментом, ориентированным перпендикулярно скорости, необходимо учитывать и магнитный момент типа $\mathbf{m} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{p}]$. Если же

среда в целом неподвижна, а происходит лишь раздвижение зарядов, управляемое вращающимся пучком, то указанный магнитный момент не возникает, и сторонний ток следует задавать в виде (1). Чтобы найти излучаемую током (1) энергию, следует провести стандартные вычисления, аналогичные случаю синхротронного излучения [7]. В результате найдем интенсивность излучения на s -й гармонике, $\omega = s\Omega$:

$$\Delta I_s = \frac{p^2 s^4 \Omega^4}{2\pi c^3} J_s^2(\beta s \sin \theta) \sin^2 \theta, \quad (2)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$, $v = a\Omega$, $s\Omega < \frac{2\pi c}{l}$, J_s — функция Бесселя.

* Заметим, что независимо от нас Гинзбургом и Болотовским (см [5, 6]) было рассмотрено черенковское излучение в вакууме от заряженной нити, пересекающей границу между средой и вакуумом.

** Если скорость пучка порядка c , то форма пучка близка к спирали $\rho = c(t - \varphi/\Omega)$, где ρ, φ — полярные координаты, t — время.

Учитывая, что основной вклад здесь вносят высокие гармоники $s \gg 1$, получаем излучение, аналогичное черенковскому ($\beta \sin \theta > 1$):

$$I \approx \frac{2p^2}{\pi c^3} \int_{\arcsin(1/\beta)}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\sqrt{\beta^2 \sin^2 \theta - 1}} \int_{c/t > \omega > \Omega} \omega^3 d\omega = \frac{p^2(\beta^2 + 1)}{2v^3} \int_{\Omega < \omega < c/t} \omega^3 d\omega. \quad (3)$$

Легко видеть, что при $\beta \rightarrow \infty$ выражение (3) переходит в формулу сверхсветового излучения электрического диполя:

$$I_{\beta \rightarrow \infty} = \frac{p^2}{2v c^2} \int_{c/t > \omega > \Omega} \omega^3 d\omega. \quad (4)$$

В соответствии со сказанным ранее здесь не надо учитывать магнитный момент, и формула (4), разумеется, отличается от соответствующего выражения в [8].

Применение полученных результатов для астрофизических условий и, в частности, к пульсарам будет рассмотрено в другой работе

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Gold, Nature, 218, 731 (1968).
2. F. G. Smith, Nature, 223, 934 (1969).
3. С. А. Каплан, В. Я. Эйдман, Письма в ЖЭТФ, 10, 320 (1969).
4. С. А. Каплан, В. Я. Эйдман, Астрофизика, 7, 310 (1971).
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ (в печати).
6. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН (в печати).
7. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, № 11, 27 (1951)
8. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 35, 1508 (1958)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 октября 1971 г.

УДК 533.951.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМАХ

М. М. Толмачев, М. Б. Цейтлин

Известно, что в волноводе, заполненном однородной холодной плазмой, при наличии продольного магнитного поля могут распространяться медленные электромагнитные волны; причем в зависимости от соотношения между концентрацией плазмы и величиной магнитного поля эти волны могут иметь как объемный характер (максимум поля на оси системы), так и поверхностный (максимум поля на граничной поверхности). Весьма интересным является рассмотрение возможности преобразования объемных волн в поверхностные (и наоборот) при изменении концентрации плазмы вдоль направления распространения волны. Как в безграничной холодной плазме, так и в ограниченных плазменных системах при $\omega = \omega_p$ электромагнитная волна практически полностью отражается. Однако при специальных граничных условиях возможно непрерывное преобразование объемной волны в поверхностную без обращения фазовой скорости в бесконечность при $\omega = \omega_p$. Такие граничные условия реализуются спирально-проводящей цилиндрической поверхностью. При отсутствии плазмы в системе с такой границей распространяется медленная поверхностная волна.

В [1] выведено дисперсионное уравнение для медленных волн в спирально-проводящем цилиндре, полностью заполненном однородной плазмой, из анализа которого следует отсутствие особенности для фазовой скорости волны при $\omega = \omega_p$ и непрерывный переход объемной волны в поверхностную при монотонном увеличении частоты.

В настоящей работе в приближении геометрической оптики исследуется преобразование медленной объемной волны в поверхностную (и наоборот) в плазменном цилиндре со спирально-проводящей поверхностью при монотонном изменении концентрации плазмы вдоль направления распространения. В предположении пренебрежимо малых тепловых скоростей плазмы фазовая скорость плазменной волны при $\omega \rightarrow \omega_p$ неог-

раниченно возрастает в отличие от фазовой скорости электромагнитной волны, которая остается конечной. Поэтому связь между этими волнами отсутствует и приближение геометрической оптики справедливо

В рамках этого приближения дисперсионное уравнение имеет такой же вид, как и в случае однородной плазмы, но с учетом зависимости $\omega_p \equiv \omega_p(z)$. Для объемной волны оно может быть записано следующим образом:

$$\sqrt{-\varepsilon_z \varepsilon_r} \frac{J_1(k_{\perp} a)}{J_0(k_{\perp} a)} = \frac{k_{\parallel} a}{X^2 I_1(k_{\parallel} a) K_1(k_{\parallel} a)} - \frac{K_1(k_{\parallel} a)}{K_0(k_{\parallel} a)}, \quad (1)$$

где $k_{\parallel} = k_{\parallel}(z)$ — продольное волновое число,

$$\varepsilon_z = 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2}, \quad \varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega^2 - \omega_H^2},$$

$$X = \frac{\omega}{c} a \operatorname{ctg} \psi, \quad k_{\perp} = \sqrt{-\varepsilon_z \varepsilon_r} k_{\parallel},$$

J_0, J_1, I_1, K_0, K_1 — функции Бесселя; ψ — угол намотки спирали; a — радиус цилиндра. В дальнейшем рассмотрим случай достаточно большого магнитного поля, так что при расчетах можно полагать $\varepsilon_r = 1$. Тогда во всем диапазоне частот распространяется медленная прямая волна.

При $\omega_p(z) < \omega$ в системе распространяется поверхностная волна, дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$\sqrt{\varepsilon_z \varepsilon_r} \frac{I_1(k'_{\perp} a)}{I_0'(k'_{\perp} a)} = \frac{k_{\parallel} a}{X^2 I_1(k_{\parallel} a) K_1(k_{\parallel} a)} - \frac{K_1(k_{\parallel} a)}{K_0(k_{\parallel} a)}, \quad (2)$$

где $k'_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_z / \varepsilon_r} k_{\parallel} = j k_{\perp}$.

Как следует из (1) и (2), при $\omega = \omega_p$ волновое число k_{\parallel} остается конечным и определяется из уравнения

$$\frac{k_{\parallel} a K_0(k_{\parallel} a)}{I_1(k_{\parallel} a) K_1^2(k_{\parallel} a)} = X^2. \quad (3)$$

В этом случае амплитуда ВЧ поля постоянна вдоль радиуса. Для $k_{\parallel} a > 2$ можно воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Бесселя при больших значениях аргумента. Тогда из (3) нетрудно получить

$$v_{\Phi} = \frac{\omega a}{0,7 X} \quad \text{или} \quad \frac{c}{v_{\Phi}} = 0,7 \operatorname{ctg} \psi.$$

В уравнении (3) множитель $\operatorname{ctg} \psi$ описывает влияние границы с анизотропной проводимостью. Полагая $\psi = 90^\circ$ или $\psi = 0^\circ$, получаем предельные случаи волновода с металлическими или диэлектрическими стенками соответственно. В обоих случаях отсутствует распространение медленной электромагнитной волны.

На рис. 1 представлена зависимость $k_{\parallel} a$ от параметра $X_p = X \omega_p / \omega$, пропорционального плазменной частоте, для различных значений частоты, полученная из решения уравнений (1)—(3). Пунктиром показана линия $X = X_p$, разделяющая области распространения объемной и поверхностной волн.

Рассматриваемая система, в частности, может быть использована в качестве эффективного устройства для ввода и вывода энергии в системе плазма—пучок. Известно, что в такой системе электронный пучок наиболее эффективно взаимодействует с объемной волной [2]. Однако применение обычных методов съема энергии малоэффективно, так как объемная волна слабо «сцепляется» с внешними волноведущими структурами.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай линейного изменения с расстоянием плазменной частоты, $X_p = X_{p0}(1 - rz/L)$, где L — длина участка неоднородности.

На рис. 2 представлена зависимость $k_{\parallel} a$ от безразмерного расстояния z/L для значений $p = 0,3$, $X_{p0} = 4$, $X = 3,5$. Там же приведена зависимость от z/L амплитуды продольного ВЧ поля на границе (при $r = a$). Пунктиром показана граница объемной и поверхностной волн. Из рис. 2 видно, что уменьшение концентрации плазмы в продольном направлении приводит к увеличению амплитуды продольной составляющей

поля электромагнитной волны на границе волновода; уменьшение сопротивления связи при этом незначительно.

Критерий применения приближения геометрической оптики для рассмотренного случая [3] требует выполнения неравенства $L > 3a$

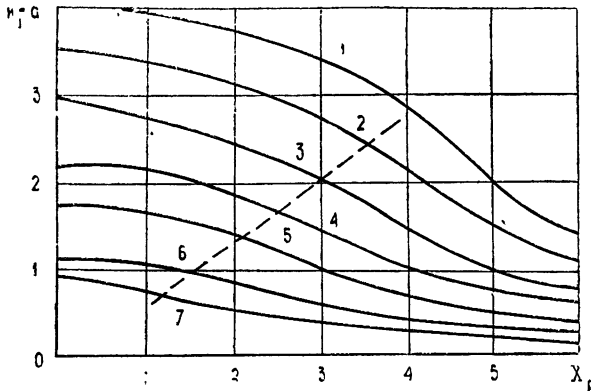


Рис. 1.

Рис. 1. Зависимость параметра $k_{||} a$ от концентрации плазмы для различных значений X . Пунктиром показана граница объемной и поверхностной волн.

1 — $X=4$; 2 — 3,5; 3 — 3; 4 — 2,5; 5 — 2; 6 — 1,5; 7 — 1,2.

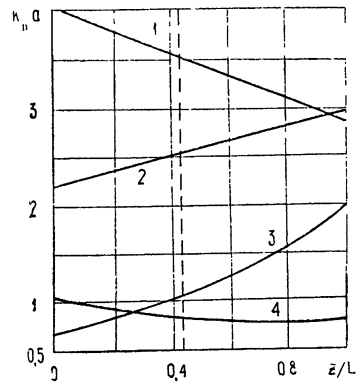


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость параметра $k_{||} a$, амплитуды продольного ВЧ поля на границе системы и сопротивления связи от расстояния при линейном изменении плазменной частоты.

1 — X_p ; 2 — $k_{||} a$; 3 — $E_z^{(a)}/E_z^{(0)}$; 4 — $K_c(z)/K_c^{(0)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Рогашкова, М. Б. Цейтлиц, Электронная техника, сер 1, Электроника СВЧ, вып. 4 (1967)
2. Г. А. Бернашевский, Е. В. Богданов, В. Я. Кислов, З. С. Чернов, Плазменные и электронные усилители и генераторы СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1965
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
17 июня 1971 г.

УДК 621.372.8

РЕЗИСТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ
В ВОЛНОВОДЕ

И. Л. Корнев, Л. А. Юдин

В работе [1] было показано, что при частотах возмущения, превышающих критическую частоту волновода, имеет место радиационная неустойчивость когерентных колебаний кольца. В докритической области частот поперечные колебания устойчивы, а азимутальные могут быть неустойчивы лишь при низких частотах — неустойчивость отрицательной массы. Наличие конечной проводимости стенок волновода приведет к появлению неустойчивости и в докритической области. Эффекты конечной проводимости при реальных значениях параметров лишь весьма слабо возмущают электромагнитные поля (относительная величина возмущения порядка отношения глубины

скин-слоя к длине волны), поэтому поправки, связанные с конечной проводимостью, следует учитывать лишь там, где отсутствует радиационная неустойчивость или неустойчивость отрицательной массы.

Рассмотрим волновод круглого сечения радиуса b . Пусть в собственной системе отсчета (система отсчета, связанная с кольцом) возмущение плотности заряда $\sim \exp [i(n\theta - \omega t)]$. Поправки к полям E_1 и B_1 из-за конечной проводимости находятся из решения однородных уравнений Максвелла с граничным условием Леонтовича на стенке волновода

$$[n \times E_1] = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega'}{8\pi\sigma}} [n \times [n \times B_0]], \quad (1)$$

где n — вектор внешней нормали к поверхности проводника, ω' — частота в лабораторной системе отсчета, σ — проводимость, B_0 — вычисленное в [1] поле кольца в идеально проводящем волноводе, пересчитанное в лабораторную систему. Граничное условие (1) применимо, если выполнены неравенства

$$\delta \ll \lambda', \quad \delta \ll b - r_0, \quad (2)$$

где λ' — длина волны, r_0 — радиус кольца, $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega'}$. Анализ показывает, что основной вклад в поле дает та часть спектра, для которой условия (2) хорошо выполняются. Кроме того, наше рассмотрение справедливо, если частота возмущения достаточно далека от резонансных значений, так что

$$\frac{\delta}{b} \ll \frac{\omega' - \omega_{\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}}}, \quad (3)$$

где $\omega_{\text{рез}}$ — резонансная частота волновода.

При учете конечной проводимости импеданс кольца, определяющий устойчивость азимутальных колебаний, в докритической области частот представляется в виде $Z_n = iZ_n^{(0)} + \Delta Z_n$, где $iZ_n^{(0)}$ — реактивный импеданс в идеально проводящем волноводе, найденный в [1, 2], а ΔZ_n — действительная поправка из-за конечной проводимости. Для кольца вблизи стенки, когда $k(b - r_0) \ll 1$,

$$\begin{aligned} \Delta Z_n &\approx \sqrt{\frac{2\pi n}{c\sigma r_0}} \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^{-1} & (\beta \ll 1), \\ \Delta Z_n &\approx \frac{2\pi n}{\sqrt{c\sigma r_0}} \gamma^{3/2} \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^{-1/2} & (1 - \beta \ll 1), \end{aligned} \quad (4)$$

где n — номер гармоники, $k = \omega/c = n\omega_0/c$, $\beta = v/c$ — скорость движения кольца, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Выражения (4) можно было бы получить, рассматривая прямой пучок на расстоянии $b - r_0$ от полупространства, заполненного проводником. Критическая частота волновода достигается при $b/r_0 = \mu_1/n\beta_0$, где μ_1 — первый положительный корень уравнения $J'_n(x) = 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя, $\beta_0 = \omega_0 r_0/c$ — скорость обращения частиц в собственной системе отсчета.

Если b/r_0 близко к $\mu_1/n\beta_0$, но условие (3) выполняется, можно получить

$$\Delta Z_n \approx \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{\pi\omega_0}{\gamma\sigma}} n\beta_0^2 \frac{\mu_1^2 + \beta^2\gamma^2}{\mu_1^{7/2}} \frac{J_n'^2(n\beta_0)}{[J_n''(\mu_1)]^2} \left(\frac{\mu_1}{n\beta_0} - \frac{b}{r_0}\right)^{-3/2}. \quad (5)$$

Численные расчеты показывают, что простая сумма выражений (4) и (5) с хорошей точностью (погрешность не превышает 10%) описывает ΔZ_n во всей докритической области, где выполнено условие (3).

Используя дисперсионное уравнение из работы [1], получим выражение для инкремента азимутальных колебаний

$$\text{Im } p_\theta = \left[\frac{\nu n}{\beta_0 \gamma_0} \left(\frac{1}{Q_r^2} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \frac{c}{2\pi} |Z_n^{(0)}| \right]^{1/2} \frac{\Delta Z_n}{2 |Z_n^{(0)}|}, \quad (6)$$

где $\nu = \frac{N}{2\pi r_0} \frac{e^2}{mc^2}$, N — полное число частиц в кольце, e и m — заряд и масса частицы, $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, $Q_r \omega_0$ — частота радиальных бетатронных колебаний, $p = (\omega - n\omega_0)/\omega_0$. Выражение (6) определяет инкремент через число оборотов и не зависит от системы

отсчета. При больших γ инкремент растет, как $\gamma^{3/2}$. На рис. 1 показана зависимость $\text{Im } \rho_0$ от b/r_0 для гармоник $n = 1, 2, 3$.

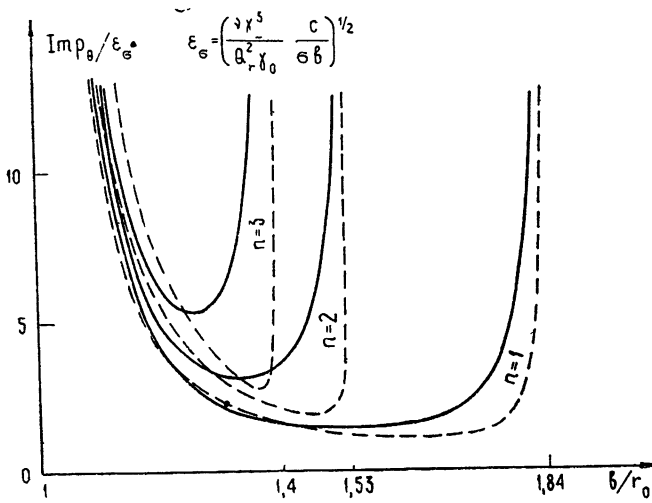


Рис. 1 Инкремент азимутальной резистивной неустойчивости при $\gamma_0^2 \gg 1$ в докритической области. Сплошные кривые — нерелятивистский случай ($\beta \ll 1$), пунктирные — ультрарелятивистский ($1 - \beta^2 \ll 1$).

Аналогичный расчет для поперечных колебаний дает следующие результаты. Неустойчивыми являются медленные волны, частоты которых $\omega = (n - Q) \omega_0$. Инкременты радиальных колебаний при $k(b - r_0) \ll 1$:

$$\text{Im } p_r = \frac{v}{2Q_r \beta_0 \gamma_0} \sqrt{\frac{\omega_0}{8\pi\sigma(n - Q_r)} \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^{-3}} \quad (\beta \ll 1), \tag{7}$$

$$\text{Im } p_r = \frac{3}{32} \frac{v}{Q_r \beta_0^2 \gamma_0} \sqrt{\frac{c}{\sigma r_0} \frac{\gamma^{3/2}}{\beta^{1/2}} \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^{-5/2}} \quad (1 - \beta^2 \ll 1).$$

На подходе к резонансу $\frac{b}{r_0} = \frac{\mu_1}{(n - Q_r) \beta_0}$ с учетом условия (3) получим

$$\text{Im } p_r = \frac{v(kr_0)^2}{4Q_r \beta_0^2 \gamma_0} \sqrt{\frac{\pi c}{\sigma r_0 \gamma} \frac{\mu_1^2 + n^2 \beta^2 \gamma^2}{\mu_1^{7/2}} \left[\frac{(n - \beta_0^2 \gamma_0^2 Q_r) Q_r J_n(kr_0) - J'_n(kr_0)}{\gamma_0^2 Q_r J''_n(\mu_1)} \right]^2} \times \left(\frac{\mu_1}{kr_0} - \frac{b}{r_0}\right)^{-3/2}, \tag{8}$$

причем $kr_0 = (n - Q_r) \beta_0$. Сумма (7) и (8) аналогично случаю азимутальных колебаний хорошо описывает $\text{Im } p_r$ во всей докритической области.

Для аксиальных колебаний критическая частота не является резонансной, и потому для приближенного выражения для $\text{Im } p_z$ представляется в виде

$$\text{Im } p_z = \frac{v}{4Q_z \gamma_0} \sqrt{\frac{c}{2\pi\sigma r_0} \frac{1}{\sqrt{kr_0}} \left[1 + \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^2 \left(2k^2 r_0^2 - 2Q_z^2 - n^2 - \frac{3}{4}\right) \right] \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^{-3}} \quad (\beta \ll 1), \tag{9}$$

$$\text{Im } p_z = \frac{3}{32} \frac{v}{Q_z \gamma_0} \sqrt{\frac{c}{\sigma r_0} \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right) \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{\beta}} \left[1 - \frac{2}{3} \beta \beta_0 \left(\frac{b}{r_0} - 1\right) \left(\frac{4\gamma^2 Q_z}{\beta_0^2 + \beta^2 \gamma^2} - \frac{n - Q_z}{\beta^2}\right) \right] \left(\frac{b}{r_0} - 1\right)^{-5/2}} \quad (1 - \beta^2 \ll 1),$$

где $kr_0 = (n - Q_z) \beta_0$. Как легко видеть из выражений (7)–(9), инкременты поперечных колебаний растут пропорционально $\gamma^{3/2}$. Для области $k(b - r_0) \ll 1$ результаты при $\beta \ll 1$ совпадают с соответствующими выражениями работ [3, 4]. При $\gamma \geq 100$ поправки, связанные с конечной проводимостью, уже нельзя считать малыми по сравнению с полями в идеальном волноводе, и использованное здесь приближение становится неприменимым.

В случае, если частота возмущения близка к резонансной частоте волновода, так что выполнено условие, противоположное (3), основные результаты сводятся к следующему. Влиянием конечной проводимости на далекие резонансы можно пренебречь. Вычисленные в [1] инкременты колебаний для первых резонансов верны, если $|\chi| \ll \text{Im } p^{(0)}$. Если же $|\chi| \gg \text{Im } p^{(0)}$, то

$$\text{Im } p_\theta = \text{Im } p_\theta^{(0)} \left(\frac{\text{Im } p_\theta^{(0)}}{|\chi_\theta|} \right)^{1/4}, \quad \text{Im } p_{r,z} = \text{Im } p_{r,z}^{(0)} \left(\frac{\text{Im } p_{r,z}^{(0)}}{|\chi_{r,z}|} \right)^{1/2},$$

где значком (0) обозначено значение инкремента в идеально проводящем волноводе (см [1]), а

$$\chi_\theta = \chi_r = \frac{\delta}{2\lambda} \frac{r_0}{b} \frac{\mu_l^2}{\mu_l^2 - n^2}, \quad \chi_z = \frac{\delta}{2\lambda} \frac{r_0}{b},$$

где μ_l — l -й корень уравнения $J'_n(\mu) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Коренев, Л. А. Юдин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 272 (1972).
2. А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1080 (1970).
3. И. Л. Коренев, Л. А. Юдин, Труды VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, т. II, изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1970 г., стр. 597.
4. В. И. Балбеков, Диссертация, ИФВЭ, Серпухов, 1969.

Поступила в редакцию
30 августа 1971 г.

УДК 534.8

ОБ УСИЛЕНИИ УЛЬТРАЗВУКА В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В. Л. Малевич, Э. М. Эпштейн

В последние годы появился ряд работ, посвященных влиянию высокочастотного электрического поля на распространение ультразвука в полупроводнике [1–4]. В частности, в работе [4] было обращено внимание на то, что изменение коэффициента усиления ультразвука в постоянном электрическом поле под влиянием электромагнитной волны может быть использовано для усиления модулирующих ее низкочастотных колебаний. При этом учитывалось лишь непосредственное действие поля электромагнитной волны на электроны и не принималось в расчет его влияние на кинетические коэффициенты.

Ниже мы покажем, что разогрев электронов в некоторых случаях дает основной вклад в изменение коэффициента поглощения (усиления) ультразвука под действием электромагнитной волны. Мы ограничимся случаем, когда можно пользоваться приближением электронной температуры, кроме того примем $ql \ll 1$ и $Q\tau_e \ll 1$ (q — волновое число звука, Ω — частота электромагнитной волны, l и τ_e — соответственно длина свободного пробега электрона и время релаксации его энергии). Электромагнитная волна предполагается слабой, так что вызванное ею изменение электронной температуры является малой добавкой. Относительно постоянного электрического поля

такого допущения не делается, однако считается, что оно не настолько велико, чтобы рабочая точка попала на падающий участок вольт-амперной характеристики (если таковой имеется). Предполагается, что интенсивность усиленной звуковой волны не слишком велика, так что можно пользоваться линейной теорией усиления и не учитывать разогрева электронов звуковой волной [5], кроме того, считается, что $\omega\tau_e \ll 1$ (ω — частота звука), так что можно не учитывать возможность сдвига порога усиления из-за наличия волны электронной температуры, сопровождающей звуковую волну [6].

При сделанных предположениях для учета влияния электронного разогрева в исходной системе уравнений, используемой в [2-4], достаточно учесть зависимость подвижности и коэффициента диффузии от электронной температуры. Последняя определяется уравнением [7]

$$\frac{3}{2} \frac{T_e - T}{\tau_e(T_e)} = e\mu(T_e)(E_0 + E_1 \cos \Omega t)^2, \quad (1)$$

где T — температура решетки, μ — подвижность электронов, E_0 — величина постоянного поля, E_1 — амплитуда поля электромагнитной волны. Предполагается, что оба поля направлены вдоль главной оптической оси и что продольная звуковая волна распространяется в том же направлении, так что задача сводится к одномерной. Зависимость T_e от времени приводит к тому, что помимо учтенной в [4] переменной составляющей, связанной с непосредственным воздействием поля волны на электроны, у тока появляется дополнительная переменная составляющая, обусловленная модуляцией подвижности и коэффициента диффузии электронов.

Вычисление коэффициента поглощения звука, проведенное стандартным образом [2, 4], дает следующий результат:

$$\alpha = \frac{\chi\omega_c}{s} \left\{ \frac{(1 - v/s)[1 - (1/2)(F^2 - G^2)] + FG(\omega_c/\omega)(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)}{(1 - v/s)^2 + (\omega_c/\omega)^2(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)^2} + \frac{(1/4)(F^2 - G^2)(1 - v/s - \Omega/\omega) - (1/2)FG(\omega_c/\omega)(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)}{(1 - v/s - \Omega/\omega)^2 + (\omega_c/\omega)^2(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)^2} + \frac{(1/4)(F^2 - G^2)(1 - v/s + \Omega/\omega) - (1/2)FG(\omega_c/\omega)(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)}{(1 - v/s + \Omega/\omega)^2 + (\omega_c/\omega)^2(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)^2} \right\}, \quad (2)$$

$$F = \frac{q\mu_0 E_1}{\Omega}; \quad (3)$$

$$G = \frac{4}{3} p \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(5/2 + p)} \frac{\omega_c}{\Omega} \frac{e\tau_{e0} v E_1}{T_{e0}} \left(1 + \frac{p+1}{p} \frac{\omega^2}{\omega_c\omega_D} \right), \quad (4)$$

где χ — константа электромеханической связи, s — скорость звука, T_{e0} — электронная температура при наличии одного лишь постоянного электрического поля, ω_c — обратная величина времени диэлектрической релаксации, $\omega_D = s^2/D_0$, $D_0 = D(T_{e0})$ — коэффициент диффузии электронов, $\tau_{e0} = \tau_e(T_{e0})$, $\mu_0 = \mu(T_{e0})$, $v = \mu_0 E_0$ — дрейфовая скорость электронов в постоянном электрическом поле; предполагается зависимость подвижности от электронной температуры вида $\mu(T_e) = \mu(T)(T_e/T)^p$.

В отсутствие разогрева ($\tau_e \rightarrow 0$) $G = 0$ и формула (2) переходит в результат работы [4]

Из (3) и (4) следует, что при $qv\tau_{e0} \frac{\omega_c\omega_D}{\omega^2} \geq 1$, $\omega \ll \sqrt{\omega_c\omega_D}$ разогрев дает основной вклад в изменение коэффициента усиления звука под действием электромагнитной волны ($G > F$).

Еще более интересным с этой точки зрения является случай $v = s$, когда поглощение (усиление) звука целиком обусловлено разогревом электронов. В этом случае из (2) следует

$$\alpha = \frac{\chi q F G}{(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)[1 + (\omega_c/\Omega)^2(1 + \omega^2/\omega_c\omega_D)^2]}. \quad (5)$$

Знак α определяется знаком величины G и, следовательно, зависит от механизма рассеяния электронов и частоты звука. Усиление ($\alpha < 0$) будет иметь место в случае рассеяния на акустических фононах ($p = -1/2$) при $\omega < \sqrt{\omega_c\omega_D}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Чабан, ФТТ, **9**, 3334 (1967).
2. Э. М. Эпштейн, ФТТ, **10**, 2945 (1968).
3. В. М. Левин, Л. А. Чернозатонский, ФТТ, **11**, 3308 (1969); ЖЭТФ, **59**, 143 (1970).
4. R. H. Pantell, J. Soonoо, J. Appl. Phys., **41**, 441 (1970).
5. В. Б. Сандомирский, Ш. М. Коган, ФТТ, **5**, 1894 (1970).
6. А. С. Бугаёв, Ю. В. Гуляев, Г. Н. Шкердин, ФТТ, **12**, 2654 (1970).
7. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию
17 июня 1971 г.
