

СОДЕРЖАНИЕ

Пятницкий Е. С. Расширение частотного критерия абсолютной устойчивости регулируемых систем с одним нелинейным нестационарным элементом . . .	319
Алексеев А. С., Лабуркина О. К. О формальном расширении возможностей метода интегральных преобразований при исследовании линейных распределенных систем с постоянными параметрами	323
Мальцев А. П. О сходимости метода Рунге при построении ограниченного, почти-периодического и периодического решения краевой задачи параболического типа	332
Мальцев А. П. О построении ограниченного, почти-периодического и периодического решения задачи параболического типа методом прямых	340
Плотников В. И., Сикорская Е. Р. Оптимизация управляемого объекта, описываемого нелинейной системой гиперболических уравнений	346
Коган Д. И. D -множества, Δ -множества и неразрешимые задачи дискретного управления	358
Григоренко В. П., Неймарк Ю. И., Рапопорт А. Н., Ронин Е. И. Коллектив независимых стохастических автоматов как поисковая оптимизационная система	365
Шильман С. В., Шестакова Т. М. Об абсолютной устойчивости нелинейных автоматических систем с двойной модуляцией	376
Ганиев Х. О существовании алгебраических дифференциальных уравнений с заузленными периодическими решениями	389
Горюнов В. И. О несимметричных колебаниях в некоторых симметричных неавтономных системах	393
Хентов А. А. О перманентных вращениях экваториального спутника в геомагнитном поле	405
Седова К. К. К оценке качества работы систем автоматической оптимизации в установившихся режимах	419
Егупов Н. Д., Иванов В. А. Анализ дискретных систем автоматического регулирования с переменными параметрами методом ортогональных разложений. I	427
Егупов Н. Д., Иванов В. А. Статистический анализ дискретных систем регулирования с переменными параметрами методом ортогональных разложений. II	438
Коган В. Р., Крахнов А. Д. Асимптотика собственных значений и функций оператора Лапласа на компактном римановом многообразии	448
Гришанин Б. А. Условие эквивалентности двух важных алгоритмов адаптации и его связь с эффективными оценками параметров распределения вероятностей	454
Гришанин Б. А. Условия эффективности алгоритмов адаптации, основанных на эмпирическом байесовском подходе к статистике	462
Мусарский Р. А. Синтез параметров подвески экипажа	474
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Алексеев А. С. Операционное исчисление для однопараметрических функций неособых матриц	480

УДК 62 — 501.32

РАСШИРЕНИЕ ЧАСТОТНОГО КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Е. С. Пятницкий

Показано, что для невырожденных систем с нестационарной нелинейностью частотное условие $k^{-1} + \operatorname{Re} W(i\omega) \geq 0$ ($k < \infty$) обеспечивает экспоненциальную абсолютную устойчивость.

Рассмотрим систему регулирования, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma, t), \\ \sigma &= (c, x), \\ \varphi(0, t) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор координат системы; A — постоянная квадратная гурвицева матрица; b и c — постоянные n -мерные векторы.

Относительно нелинейности $\varphi(\sigma, t)$ предполагается, что она удовлетворяет условиям существования и единственности решений системы (1) и при всех $t \geq t_0$ и любых σ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \varphi(\sigma, t) \sigma \leq k\sigma^2. \quad (2)$$

Совокупность таких функций $\varphi(\sigma, t)$ будем обозначать через N .

В настоящее время исследованиями ряда авторов [1-4] установлено, что система (1) будет абсолютно устойчива в классе N , если при всех $\omega \geq 0$ выполнено неравенство

$$1/k + \operatorname{Re} W(i\omega) > 0, \quad (3)$$

где $W(i\omega) = c'(A - i\omega E)^{-1} b$ представляет собой частотную характеристику системы (1) от входа $y(t) = \varphi(\sigma(t), t)$ к выходу $-\sigma(t)$. Абсолютная устойчивость системы (1) понимается в обычном смысле [5], т. е. система (1) называется абсолютно устойчивой в классе N , если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом при любой нелинейности $\varphi(\sigma, t) \in N$.

Частотное неравенство (3) в несколько иной форме называют также круговым критерием.

Известно [3], что неравенство (3) является необходимым и достаточным условием существования для системы (1) функции Ляпунова

$$V(x) = x' L x \quad (L' = L), \quad (4)$$

полная производная которой удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} < - \left[k - \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \right] \left(Lb + \frac{c}{2}, x \right)^2 - \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \left(Lb - \frac{c}{2}, x \right)^2, \quad (5)$$

т. е. \dot{V} является отрицательно определенной.

Если вместо строгого неравенства (3) рассмотреть ослабленное неравенство

$$1/k + \operatorname{Re} W(i\omega) \geq 0 \quad (\omega \geq 0), \quad (6)$$

то это неравенство для случая управляемой и наблюдаемой системы (1) будет обеспечивать существование функций Ляпунова вида (4) с производной

$$\dot{V} \leq - \left[k - \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \right] \left(Lb + \frac{c}{2}, x \right)^2 - \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \left(Lb - \frac{c}{2}, x \right)^2, \quad (7)$$

Поэтому в нестационарном случае из неравенства (7) не следует абсолютная устойчивость системы (1), так как для нестационарных систем обобщение теоремы Ляпунова [6] об асимптотической устойчивости на случай $V \leq 0$ не имеет места.

Цель настоящей заметки — показать, что частотное условие (6) обеспечивает абсолютную устойчивость системы (1) и, более того, экспоненциальную абсолютную устойчивость системы (1) в классе N .

Теорема. Пусть система (1) управляема и наблюдаема. Пусть также при всех $\omega \geq 0$ выполнено частотное неравенство (6). Если матрицы A и $A + kbc'$, где число $k < \infty$ определено из (6), являются гурвицевыми, то система (1) абсолютно устойчива в классе N . Более того, система (1) будет при этом экспоненциально устойчивой в классе N , т. е. для решений этой системы будет выполняться неравенство

$$|x(x_0, t_0, t)| \leq \beta |x_0| e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t \geq t_0), \quad (8)$$

где числа α и β не зависят от выбора $\varphi \in N$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, покажем, используя утверждение теоремы, что критерий (6) так же, как и критерий (3), является только достаточным критерием абсолютной устойчивости. Для системы второго порядка это обстоятельство отмечено в работе [7].

По лемме работы [8] система (1) абсолютно устойчива в классе N в том и только в том случае, если система

$$\dot{x} = Ax + bu(t)(c, x) \quad (9)$$

абсолютно устойчива в классе U функций $u(t)$, суммируемых на любом конечном интервале и при всяком t удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq u(t) \leq k. \quad (10)$$

В условиях теоремы для решений системы (9) будет иметь место неравенство (8), где числа α и β не зависят от выбора $u(t) \in U$.

Тогда, по теореме И. Г. Малкина [9], существует такое число $\delta_0 > 0$, что для решений системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t)(c, x) + b\rho(t)(c, x),$$

где $0 \leq \rho(t) \leq \delta_0$, будет выполняться неравенство

$$|x(x_0, t_0, t)| \leq \beta_1 |x_0| e^{-\alpha_1(t-t_0)} \quad (t \geq t_0),$$

где числа α_1 и β_1 не зависят от выбора $u(t) \in U$, $\rho(t) \in R\{0 \leq \rho(t) \leq \delta_0\}$.

Следовательно, система (9) будет абсолютно устойчива в классе U_{δ_0} , который определяется неравенством $0 \leq u(t) \leq k + \delta_0$, а система (1) в соответствии с леммой работы [8] будет абсолютно устойчивой в классе N_{δ_0} , определяемом неравенством

$$0 \leq \varphi(\sigma, t) \leq (k + \delta_0) \sigma^2.$$

Доказательство теоремы. В условиях теоремы в силу результатов В. А. Якубовича [3] неравенство (6) обеспечивает существование симметрической матрицы $L' = L > 0$, удовлетворяющей уравнению

$$A'L + LA = -krr' \quad \left(r = \Delta b + \frac{c}{2} \right), \quad (11)$$

причем $\det Q = \det \| r, A'r, \dots, A^{(n-1)}r \| \neq 0$.

Рассмотрим поведение функции $V(x) = x'Lx$ на решениях системы

$$\dot{x} = Ax + b(c, x) \frac{k}{2} [1 - \text{sign}(c, x)(b, z)], \quad (12)$$

$$\dot{z} = -\mu z - A'z - c(b, z) \frac{k}{2} [1 - \text{sign}(c, x)(b, z)],$$

где число $\mu > 0$ выбрано из условия $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n z_i^2 \leq -\gamma^2 \sum_{i=1}^n z_i^2$.

Так как решение $x(x_0, z_0, t)$ системы (12) — абсолютно непрерывная вектор-функция, то почти всюду

$$\dot{V}(=) = [k - u(x, z)](r, x)^2 - u(x, z)(r - c, x)^2, \quad (13)$$

где $u(x, z) = \frac{k}{2} [1 - \text{sign}(c, x)(b, z)]$. В работе [8] установлено, что решение $x(x_0, z_0, t)$ системы (12) является непрерывной функцией начальных данных x_0, z_0 в области $|x_0| |z_0| > \delta$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало. Поэтому существует

$$\max_{|z_0| = V(x_0) = 1} V[x(x_0, z_0, T)] = V[x(\bar{x}_0, \bar{z}_0, T)] = \gamma_T.$$

Из равенства (13) следует, что $\gamma_T \leq 1$.

Покажем, что существует момент времени \bar{T} такой, что

$$\gamma_{\bar{T}} = V[x(\bar{x}_0, \bar{z}_0, \bar{T})] < 1. \quad (14)$$

Предполагая противное, получим, что почти всюду

$$[k - u(x, z)](r, x)^2 (=) 0; \quad u(x, z)(r - c, x)^2 (=) 0.$$

Так как на решениях системы (12) функция $F(t) = (c, x(t))(b, z(t))$ имеет конечное число нулей на любом конечном интервале, то либо существует интервал $[t_1, t_2]$ ($0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, на котором $F > 0$, либо на интервале $[0, T]$ функция $F \leq 0$. В первом случае $u(x, z) = 0$ и, следовательно, $(r, x(t)) \equiv 0$, причем $\dot{x} = Ax$. Поэтому получим цепочку тождеств: $(r, x) = 0, (A'r, x) = 0, \dots, (A^{(n-1)}r, x) = 0$, что приводит к условию $x(t) \equiv 0$, так как $\det \| r, A'r, \dots, A^{(n-1)}r \| \neq 0$.

Во втором случае $u(x, z) = k, \dot{x} = (A + kbc')x$. Из гурвицевости матрицы $A + kbc'$ следует, что найдется такой момент времени T^* , что $[x(x_0, z_0, T^*)] < 1/2$, что противоречит предположению.

Используя автономность системы (12) и инвариантность ее относительно замены $x \rightarrow \tau_1 x, z \rightarrow \tau_2 z$ ($\tau_1 \tau_2 > 0$), из неравенства (14) получим рекуррентное соотношение [10]

$$V[x(x_0, z_0, (m+1)\bar{T})] \leq e^{-\alpha} V[x(x_0, z_0, m\bar{T})], \quad e^{-\alpha} = \gamma_{\bar{T}} < 1,$$

из которого вытекает экспоненциальная асимптотическая устойчивость системы (12), а в силу результатов работ [8, 10], следовательно, и экспоненциальная абсолютная устойчивость системы (1).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Якубович, ДАН СССР, 149, № 2, 288 (1963).
2. Е. Н. Розенвассер, Автоматика и телемеханика, 24, № 3, 304, 1963
3. В. А. Якубович, ДАН СССР, 143, № 6, 1304 (1962).
4. R. W. Brockett, J. L. Willems, IEEE Trans. Autom. Control. v. AC-10, n. 4, 1965,
5. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963.
6. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
7. Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 1, 5 (1971).
8. Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 1, 5 (1970).
9. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, изд. Наука, М., 1966
10. Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 3, 5 (1970).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
6 мая 1971 г.

EXTENSION OF FREQUENCY CRITERION FOR ABSOLUTE STABILITY OF CONTROLLED SYSTEMS WITH ONE NONLINEAR NONSTATIONARY ELEMENT

Pyatnitsky E. S.

The frequency condition $k^{-1} + \operatorname{Re} W(i\omega) \geq 0$ ($k < \infty$) is shown to provide an exponential stability for nondegenerate systems with nonstationary nonlinearity.

УДК 62 — 501

О ФОРМАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. С. Алексеев, О. К. Лабуркина

Построены в изображениях по t функции Грина ряда краевых задач с помощью введенных матричных функций, позволивших выделить скалярную зависимость в них от взвешенных разностей координатного аргумента. Удалось в общем виде провести процедуру метода интегральных преобразований в решении интегрального уравнения для функции, порождающей периодическое движение.

Использование интеграла, входящего в интегральное уравнение, в качестве дополнительного преобразования Лапласа при решении этих уравнений, к которым, в частности, сводится задача о нахождении начального условия распределенной динамической системы, порождающего периодическое движение, было предложено Фоком в 1924 году [1], Винером и Хопфом в 1931 году [2], затем широко применялось другими авторами [3]. Однако до сих пор этот метод ограничен рассмотрением частного случая уравнений с ядром (или функцией Грина), зависящим от разности или суммы аргументов.

Построенные ниже в изображениях по t функции Грина для общего случая одномерной распределенной динамической системы с постоянными параметрами и различными линейными граничными условиями зависят, вообще говоря, от взвешенных собственными значениями матриц $B(p)$ преобразованных уравнений разностей аргументов, что препятствует прямому применению методов [1-3] для решения соответствующих интегральных уравнений.

Рассматривая для простоты в дальнейшем лишь неособые матрицы $B(p)$, имеющие различные собственные значения $\lambda_i(p)$ при любых значениях комплексного переменного p , отметим однако, что представление функций этих матриц через их основные компоненты [5] $Z_i(p)$, являющиеся матрицами того же порядка и идемпотентными элементами [4], позволяет существенно расширить область применения указанного метода [6].

Заметим еще, что случай появления при некоторых значениях p кратных корней уравнения $|E\lambda - B(p)| = 0$ (существенный при отыскании периодических процессов) может быть получен из рассматриваемого путем предельного перехода.

1. Рассмотрим в простейшем случае одномерную, распределенную на сегменте $0 \leq x \leq a$ систему, динамика которой описывается величинами

$$u(t, x) = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (1.1)$$

$$v(t, x) = (v_1, v_2, \dots, v_m) \equiv \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}} \right)$$

с помощью системы уравнений

$$u_t = \sum_{j=0}^m A_j \frac{\partial^j u}{\partial x^j} + F(t, x),$$

$$F(t, x) \in L_2([0, T] \times [0, a]) \quad (1.2)$$

при начальных условиях

$$u(0, x) = u^0(x) \in L_2[0, a] \quad (1.3)$$

и некоторых граничных условиях различного типа:

$$\text{а) } v_0(t, 0) = v_0^0(t), \quad v_1^0(t, a) = v_0^a(t) \in L_2[0, T], \quad (1.4)$$

$$\text{б) } v_0(t, 0) + D_1 v_1(t, 0) = C_0^{-1} d_0(t) \equiv v_{01}^0(t) \in L_2[0, T], \quad (1.5)$$

$$C_1 v_0(t, a) + v_1(t, a) = D_a^{-1} d_a(t) \equiv v_{01}^a(t) \in L_2[0, T],$$

$$\text{в) } v_0(t, 0) = v_0^0(t) \in L_2[0, T], \quad v_1(t, 0) = v_1(t, a), \quad (1.6)$$

$$\text{г) } v_0(t, 0) = v_0^0(t) \in L_2[0, T], \quad v_1(t, 0) = v_1^1(t, a), \quad (1.7)$$

где

$$v_0 = (v_1, v_2, \dots, v_k), \quad v_1 = (v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_m),$$

$$v_0^1 = (v_1, v_2, \dots, v_{m-k}), \quad 2k \geq m, \quad A_j (n \times n),$$

$$C_0 (nk \times nk), \quad D_a ((m-k)n \times (m-k)n),$$

$$D_1 (kn \times (m-k)n), \quad C_1 ((m-k)n \times kn)$$

— матрицы постоянных коэффициентов, $\det A_m \neq 0$,

$$\det C_0 \neq 0, \quad \det D_a \neq 0, \quad F(t, x), \quad v_0^0(t), \quad v_{01}^0(t), \quad v_{01}^a(t) —$$

столбцы периодических по t (с периодом T) функций соответственно размерностей $(n \times 1)$, $(kn \times 1)$, $(kn \times 1)$, $((m-k)n \times 1)$.

2. Для получения интегрального уравнения, отражающего периодические движения системы (1.1 — 1.7), проведем некоторые дополнительные построения.

После перехода к изображениям [7] по t в этой системе запишем ее в виде системы уравнений первого порядка по координате

$$\bar{v}_x(p, x) = B(p) \bar{v}(px) + \bar{g}(p, x), \quad (2.1)$$

где матрица

$$B(p) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} \Theta & E & \Theta & \dots & \Theta \\ \hline \Theta & \Theta & E & \dots & \Theta \\ \hline \Theta & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \Theta & \Theta & \Theta & & E \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{m-1} \end{array} \right\| \quad (2.2)$$

при $a_0 = A_m^{-1}(A_0 - pE)$, $a_j = A_m^{-1} A_j$ имеет матричный вид (с клетками $(n \times n)$ вместо скаляров) матрицы, дающей характеристический полином с коэффициентами из ее нижней строки, а

$$\bar{g}(p, x) = (\Theta, -A_m^{-1}(u^0(x) + \bar{F}(p, x))) \quad (2.3)$$

— столбец $(mn \times 1)$, у которого отличны от нуля только n последних элементов.

Решение уравнения (2.1) выражается в форме

$$\bar{v} = e^{Bx}\bar{v}^0 + \int_0^x e^{B(x-y)}\bar{g}(p, y)dy, \quad (2.4)$$

в которой, вообще говоря, неизвестный вектор \bar{v}^0 должен быть определен по одной из групп граничных условий (1.4—1.6).

Для того, чтобы провести исключение этого вектора в удобном для дальнейшего виде, будем представлять (при ранее отмеченных ограничениях на спектр $\lambda_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, mn$ матрицы $B(p)$) функции этой матрицы через ее компоненты

$$B(p) = \sum_{i=1}^{mn} Z_i(p)\lambda_i(p), \quad (2.5)$$

$$f(Bx) = \sum_{i=1}^{mn} Z_i(p)f(\lambda_i x)$$

и рассматривать различные коагуляции этих представлений, некоторые свойства которых получены в [8].

В частности, если индексами k, j обозначена клетка матрицы B в проведенной коагуляции, то введем в рассмотрение следующие матричные функции

$$f_{k,j}(Bx) \equiv \sum_{i=1}^{mn} Z_{ikj}f(\lambda_i x), \quad e_{kj}^{Bx} \equiv \sum_{i=1}^{mn} Z_{ikj}e^{\lambda_i x} \quad (2.6)$$

и заметим, что

$$e_{kj}^{Bo} = \delta_{kj} E. \quad (2.7)$$

Разобьем прежде всего матрицу $e^{B(p)x}$ на четыре клетки для случая краевых условий (1.4) и (1.7) так, чтобы матрицы e_{11}^{Bx} и e_{12}^{Bx} имели, соответственно, размерности $((m-k)n \times kn)$ и $((m-k)n \times (m-k)n)$. Тогда для исключения неизвестной части \bar{v}_1^0 вектора \bar{v}^0 в решении (2.4) получим из (1.4) и (1.7), учитывая (2.3), следующие уравнения

$$\bar{v}_0^1 = e_{11}^{Bx}\bar{v}_0^0 + e_{12}^{Bx}\bar{v}_1^0 + \int_0^x e_{12}^{B(x-y)}\bar{g}_2(p, y)dy, \quad (2.8)$$

$$\bar{v}_0^{1a} = e_{11}^{Ba}\bar{v}_0^0 + e_{12}^{Ba}\bar{v}_1^0 + \int_0^a e_{12}^{B(a-y)}\bar{g}_2(p, y)dy,$$

где $\bar{g}_2(p, y)$ $((m-k)n \times 1)$ —нижняя часть столбца $\bar{g}(p, x)$.

Считая, что $\det e_{12}^{Ba} \neq 0$ при любых p , и исключая неизвестные \bar{v}_1^0 , получим для краевых условий (1.4) и (1.7)

$$\begin{aligned} \bar{v}_0^1 &= (e_{11}^{Bx} + e_{12}^{Bx}(E_\delta - e_{12}^{Ba})^{-1}e_{11}^{Ba})\bar{v}_0^0 + (E - E_\delta) \times \\ &\times e_{12}^{Bx}(e_{12}^{Ba})^{-1}\bar{v}_0^a + \int_0^a \gamma(p, x, y)\bar{g}_2(p, y)dy, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где изображение функции Грина

$$\gamma(p, x, y) = e_{12}^{Bx}(E_0 - e_{12}^{Ba})^{-1} e_{12}^{B(a-y)} + \begin{cases} e_{12}^{B(x-y)} & (x \geq y) \\ \Theta & (x \leq y) \end{cases}, \quad (2.10)$$

а матрица E_0 равна нулевой в случае (1.4) и единичной в случае (1.7).

Разобьем теперь матрицу e^{Bx} на четыре клетки для случая крайних условий (1.5) и (1.6) так, чтобы матрицы e_{11}^{Bx} имела размерность $(kn \times kn)$. Тогда, подставляя, соответственно, расчлененное $(\bar{v} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1))$ уравнение (2.4) в краевое условие (1.5), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \bar{v}_0^0 + D_1 \bar{v}_1^0 = \bar{v}_0^0(p), \quad C_1 e_{11}^{Ba} \bar{v}_0^0 + C_1 e_{12}^{Ba} \bar{v}_1^0 + \\ + C_1 \int_0^a e_{12}^{B(a-y)} \bar{g}_2(p, y) dy + e_{21}^{Ba} \bar{v}_0^0 + e_{22}^{Ba} \bar{v}_1^0 + \int_0^a e_{22}^{B(a-y)} \times \\ \times \bar{g}_2(p, y) dy = \bar{v}_0^a(p), \end{aligned} \quad (2.11)$$

которая в условиях совместимости позволяет определить \bar{v}_0^0 и \bar{v}_1^0 и получить изображение решения в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_0^0 = (e_{11}^{Bx}(E - D_1 M^{-1} C_1 e_{11}^{Ba}) + e_{12}^{Bx} M^{-1} C_1 e_{11}^{Ba}) \bar{v}_0^0 + \\ + (e_{11}^{Bx} D_1 M^{-1} - e_{12}^{Bx} M^{-1}) \bar{v}_0^a + \int_0^a \gamma(p, x, y) \bar{g}_2(p, y) dy, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$M = C_1 e_{11}^{Ba} D_1 - C_1 e_{12}^{Ba} + e_{21}^{Ba} D_1 - e_{22}^{Ba}, \quad (2.13)$$

а изображение функции Грина

$$\begin{aligned} \gamma(p, x, y) = (e_{12}^{Bx} - e_{11}^{Bx} D_1) M^{-1} (C_1 e_{12}^{B(a-y)} - e_{22}^{B(a-y)}) + \\ + \begin{cases} e_{12}^{B(x-y)} & (x \geq y) \\ \Theta & (x \leq y) \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подставляя теперь \bar{v}_1 ($\bar{v} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1)$) из (2.4) во второе краевое условие (1.6), найдем \bar{v}_1^0 в виде

$$\bar{v}_1^0 = (E - e_{22}^{Ba})^{-1} e_{21}^{Ba} \bar{v}_0^0 + \int_0^a (E - e_{22}^{Ba})^{-1} e_{12}^{B(a-y)} \bar{g}_2(p, y) dy, \quad (2.15)$$

и, подставляя его в \bar{v}_0 из (2.4), получим изображение решения

$$\bar{v}_0^0 = (e_{11}^{Bx} + e_{12}^{Bx} (E - e_{22}^{Ba})^{-1} e_{21}^{Ba}) \bar{v}_0^0 + \int_0^a \gamma(p, x, y) \bar{g}_2(p, y) dy, \quad (2.16)$$

где

$$\gamma(p, x, y) = e_{12}^{Bx} (E - e_{22}^{Ba})^{-1} e_{22}^{B(a-y)} + \begin{cases} e_{12}^{B(x-y)} & (x \geq y) \\ \Theta & (x \leq y) \end{cases}. \quad (2.17)$$

Заметим еще, что при крайних условиях

$$v(t, 0) = \sqrt{E} v(t, a), \quad (2.18)$$

представляющих собой замыкание системы в кольцо, нетрудно получить изображение решения в виде $\bar{v} = \int_0^a \gamma(p, x, y) \bar{g}(p, y) dy$,

где

$$\gamma(p, x, y) = e^{Bx}(E - \sqrt{E} e^{Ba})^{-1} \sqrt{E} e^{B(a-y)} + \begin{cases} e^{B(x-y)} & (x \geq y) \\ \Theta & (x \leq y) \end{cases}. \quad (2.19)$$

Функция $\gamma(p, x, y)$ во всех приведенных линейных случаях краевых задач, рассмотрение которых можно было продолжить, как и в скалярном случае, непрерывна по x и y и в силу (2.7) имеет разрыв первого рода первой производной при $x = y$.

Если первые n строк выражений (2.9, 2.12, 2.16, 2.19) имеют оригинал по t , то он представляет собой решение поставленных задач при заданных внешних и начальных функциях в виде

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^t h_1(t - \tau, x) v_0^0(\tau) d\tau + \int_0^t h_2(t - \tau, x) v_0^0(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^a K_1(t - \tau, x, y) F(\tau, y) dy d\tau + \int_0^t \int_0^x K_2(t - \tau, x, y) \times \\ & \times F(\tau, y) dy d\tau + \int_0^a K_1(t, x, y) u_0(y) dy + \int_0^x K_2(t, x, y) u^0(y) dy, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где h_1 и h_2 — оригиналы верхних n строк первых двух слагаемых указанных выражений функций влияния граничных условий при $x = 0$ и $x = a$, K_1 и K_2 — оригиналы правой верхней n -квдратной клетки; первого и второго слагаемых в изображениях функций Грина (2.10, 2.14, 2.17, 2.19), умноженной справа на $-A_m^{-1}$.

3. В том случае, если начальное распределение $u^0(x)$ не задано, а внешние функции времени в правой части (1.2) и в граничных условиях являются периодическими с периодом T , то выражение (2.20) превращается в интегральное уравнение ($t = T$) относительно искомым функций $u^0(x)$, порождающих периодические движения системы.

Для решения этой задачи с помощью интегральных преобразований заметим, что введенные матричные функции (2.6) позволяют в выражениях (2.9—2.19) вынести скалярные экспоненты, зависящие от x и y за произведения сумм матриц, зависящих только от p . Действительно, проведя указанную процедуру, предполагая в дальнейшем суммирование в произведениях величин с дважды встречающимися одинаковыми индексами i и $l = 1, 2, \dots, mn$ и обозначая через z_i правую верхнюю n -квдратную клетку компоненты Z_i , умноженную справа на $-A_m^{-1}$, получим выражение для изображения верхних n строк функций Грина в виде

$$\begin{aligned} \gamma_n(p, x, y) \equiv E_n \gamma(p, x, y) \bar{E}_n = & y_{ii}(p) \times \\ \times \exp[\lambda_i(p)x - \lambda_i(p)y] + & \begin{cases} z_i(p) \exp[\lambda_i(p)(x - y)] & (x \geq y) \\ \Theta & (x \leq y) \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а функции влияния граничных условий в виде

$$\beta_n^0 \alpha(p, x) \equiv E_n \beta^0 \alpha(p, x) = y_i^0 \alpha(p) \exp[\lambda_i(p)x], \quad (3.2)$$

где E_n — матрица из n строк и нужного количества столбцов, содержащая E в первых столбцах и нули в остальных, \bar{E}_n — матрица из n столбцов и нужного количества строк, содержащая нули и E внизу. Матрицы $y_{ii}(p)$ и $y_i^0 \alpha(p)$ легко могут быть получены с помощью (2.6, 2.7) из выражений (2.9—2.19). Так, например, в случае (2.9, 2.10)

$$y_{ii} = E_n Z_{i12} (E_\delta - e_{12}^{Ba})^{-1} (e_{11}^{Ba} Z_{i12} + e_{12}^{Ba} Z_{i22}) \bar{E}_n, \quad (3.3)$$

$$y_i^0 = E_n (Z_{i11} - Z_{i12} (E_\delta - e_{12}^{Ba})^{-1} e_{11}^{Ba}), \quad y_i^a = E_n (E - E_\delta) Z_{i12} (e_{12}^{Ba})^{-1}. \quad (3.4)$$

Введем еще обозначение

$$\Phi_i(p) \equiv y_i^0(p) \bar{v}_0^0 + y_i^a(p) \bar{v}_0^a + y_{ii}(p) \int_0^a \exp[-\lambda_i(p)y] \bar{F}(p, y) dy. \quad (3.5)$$

Тогда изображение по t интегрального соотношения (2.2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, x) &= \Phi_i(p) \exp[\lambda_i(p)x] + z_i(p) \times \\ &\times \int_0^x \exp[\lambda_i(p)(x-y)] \bar{F}(p, y) dy + y_{ii}(p) \times \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\times \int_0^a \exp[\lambda_i(p)x - \lambda_i(p)y] u^0(y) dy + z_i(p) \int_0^x \exp[\lambda_i(p)(x-y)] u^0(y) dy,$$

которое представляет собой (при неизвестной $u^0(x)$) интегральное уравнение, содержащее интеграл с переменным пределом, связывающее $\bar{u}(p, x)$ с $u^0(x)$. В дальнейшем следует учесть, что $\bar{u}(p, x)$ — изображение периодической функции ($u(t, x) = u(t + T, x)$), а $u^0(x)$ — ее начальное значение (1.3).

Предполагая $u(t, x)$ разложенной в комплексный ряд Фурье, получим

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x) e^{ik\omega t}, \quad \bar{u}(p, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{u}_k(s)}{p - kj\omega}, \quad (3.7)$$

где

$$u_k(x) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-kj\omega t} u(t, x) dt = \text{res}_{p=kj\omega} [\bar{u}(p, x)], \quad \omega = 2\pi/T, \quad (3.8)$$

и заметим, что

$$u^0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(x), \quad \tilde{u}^0(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_k(s). \quad (3.9)$$

С другой стороны, для компонент разложения (3.7) из уравнения (3.6) получим выражения при $\lambda_i(kj\omega) = \lambda_i^k$

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \text{res}_{p=kj\omega} (\Phi_i) \exp(\lambda_i^k x) + \int_0^x \exp[\lambda_i^k(x-y)] \bar{F}_i^k(y) dy + \\ &+ \text{res}_{p=kj\omega} (y_{ii}) \int_0^a \exp(\lambda_i^k x - \lambda_i^k y) u^0(y) dy + \text{res}_{p=kj\omega} (z_i) \times \\ &\times \int_0^x \exp[\lambda_i^k(x-y)] u^0(y) dy, \quad \bar{F}_i^k(y) \equiv \text{res}_{p=kj\omega} (z_i \bar{F}(p, y)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

которые в изображениях по x дадут бесконечную алгебраическую систему, связывающую $\tilde{u}_k(s)$, $\tilde{u}^0(s)$ и $\tilde{u}^0(\lambda_i(kj\omega))$,

$$\tilde{u}_k(s) = \frac{\Psi_i^k(s) + \operatorname{res}_{p=kj\omega} (y_{ii}) \tilde{u}^0(\lambda_i^k) [1 - \exp(-\lambda_i^k a)] + \operatorname{res}_{p=kj\omega} (z_i) \tilde{u}^0(s)}{s - \lambda_i^k} \quad (3.11)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$\Psi_i^k(s) \equiv \operatorname{res}_{p=kj\omega} (\Phi_i(p)) + \tilde{F}_i^k(s). \quad (3.12)$$

Предполагая, что при $p = kj\omega$ и $s = \lambda_i(kj\omega)$ функция $\tilde{u}_k(s)$ в (3.11) либо не имеет полюса, либо имеет полюс порядка ν , легко усмотреть, что в пределе при $s \rightarrow \lambda_i(kj\omega)$ выражения (3.11) дают систему уравнений, представляющую собой равенства нулю числителей в правой части, которая в случае ее совместимости позволяет определить величины $\tilde{u}^0(\lambda_i(kj\omega))$.

В связи с этим проведем определение $\tilde{u}^0(\lambda_i(p))$ сразу из выражения, представляющего собой изображение по x равенства (3.6)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p, s) &= \frac{\Phi_i(p)}{s - \lambda_i(p)} + \frac{z_i(p) \tilde{F}(p, s)}{s - \lambda_i(p)} + \\ &+ \frac{[1 - \exp(-\lambda_i a)] y_{ii}(p) \tilde{u}^0(\lambda_i(p))}{s - \lambda_i(p)} + \frac{z_i(p) \tilde{u}^0(s)}{s - \lambda_i(p)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

При указанных условиях из (3.13) получается система уравнений для $i = 1, 2, \dots, mn$

$$\begin{aligned} z_i(p) \tilde{u}^0(\lambda_i) + [1 - \exp(\lambda_i a)] y_{ii} \tilde{u}^0(\lambda_i) &= \\ &= -\Phi_i(p) - z_i(p) \tilde{F}(p, \lambda_i) \equiv \Phi_i(p, \lambda_i), \end{aligned} \quad (3.14)$$

которая, если ее детерминант (размерности mn^2)

$$\Delta(p) = \prod_{i=1}^{mn} [1 - \exp(-\lambda_j a)]^n \det \left[y_{ii} + \frac{z_i(p)}{1 - \exp(\lambda_i a)} \delta_{ii} \right] \neq 0, \quad (3.15)$$

позволяет определить значения (при $\nu = 1, 2, \dots, n$)

$$\tilde{u}_\nu^0(\lambda_i) = \frac{\Delta_i^\nu(p)}{\Delta(p)}, \quad \tilde{u}^0(\lambda_i) = \left(\frac{\Delta_i^\nu(p)}{\Delta(p)} \right) \equiv w_i(p). \quad (3.16)$$

Подставляя найденные значения $\tilde{u}^0(\lambda_i(p))$ при $p = kj\omega$, ($j = \sqrt{-1}$) в выражения (3.11) и суммируя их по $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получим, учитывая (3.9), уравнение ($\lambda_i^k \equiv \lambda_i(kj\omega)$)

$$\begin{aligned} \tilde{u}^0(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s - \lambda_i^k)^{-1} (\Psi_i^k(s) + \operatorname{res}_{p=kj\omega} (y_{ii}(p)) w_i(kj\omega) \times \\ &\times (1 - \exp(-\lambda_i^k a)) + \operatorname{res}_{p=kj\omega} (z_i(p)) \tilde{u}^0(s)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

которое позволяет получить изображение по x искомого начального распределения $u^0(x)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}^0(s) = & \left(E - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s - \lambda_i^k)^{-1} \operatorname{res}_{p=kj\omega} (z_i(p)) \right)^{-1} \times \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s - \lambda_i^k)^{-1} (\Psi_i^k(s) \operatorname{res}_{p=kj\omega} (y_{ii}(p)) \omega_i(kj\omega) (1 - \exp(-\lambda_i^k a))) \end{aligned} \quad (3.18)$$

При $a = \infty$ из (3.18) нетрудно получить решение задачи на полубесконечном интервале, определив соответствующим образом краевые условия при $x = \infty$. Кроме того, указанный подход может быть распространен на те простейшие случаи нелинейных краевых условий, которые в изображениях функций Грина и функций влияния краевых условий не нарушают линейной формы зависимостей от x и y в показателях скалярных экспонент.

Заметим в заключение, что уравнение $u(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K(x - y) u(y) dy$, рассматриваемое методом Винера—Хопфа [2,3], в случае, когда $K(x) = K_1(x) 1(x) + K_2(x) 1(-x)$, $K_1(x)$ преобразуемо односторонне, а $K_2(x)$ —двусторонне по Лапласу, $\tilde{K}_2(s)$ удовлетворяет условиям теоремы разложения по полюсам [7], представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x) = & f(x) + \int_0^x K_1(x - y) u(y) dy + \\ & + \int_0^{\infty} K_2(x - y) u(y) dy - \int_0^x K_2(x - y) u(y) dy \end{aligned}$$

и приводит при применении рассмотренной процедуры к преобразованному по x алгебраическому соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) = & \tilde{f}(s) + \tilde{K}_1(s) \tilde{u}(s) - \\ & - \sum_k \frac{\operatorname{res}_{s=s_k} K_2(s)}{s - s_k} \tilde{u}(s) + \sum_k \frac{\operatorname{res}_{s=s_k} \tilde{K}_2(s)}{s - s_k} \tilde{u}(s_k), \end{aligned}$$

оставляющему произвольными значения $\tilde{u}(s_k)$, которые должны быть определены из дополнительных физических условий. Аналогичная неопределенность будет и в решении (3.17), если детерминант (3.15) равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Математический сборник, 31, вып. 2, 519 (1924); V. Fock, Math. Zeitschr., 21, 161 (1924).
2. N. Wiener, E. Hopf, S. B. Preuss. Akad. Wiss. 696 (1931).
3. Б. Нобл Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962
4. К. Дж. Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, М., 1956
5. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.
6. Б. В. Булгаков, Колебания, ГИТТЛ, М., 1954.

7. В. А. Диткин и А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, GIFML, M., 1961.
8. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 8, 1156, (1970); ДАН СССР, 193, 4, 770 (1970).

Горьковский исследовательский
физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 мая 1970 г

ON FORMAL EXTENSION OF INTEGRAL TRANSFORMATIONS METHOD
POTENTIALITIES IN INVESTIGATION OF LINEAR DISTRIBUTED
SYSTEMS WITH CONSTANT PARAMETERS

Alekseyev A. S., Laburkina O. K.

Green functions for a number of boundary value problems are constructed in images for t using introduced matrix functions that allowed to single out their scalar dependence on weighted differences of the coordinate argument. It has been possible to carry out in a general form the procedure of the integral transformations method in a solution of integral equation for a periodic motion generating function.

УДК 517.944

**О СХОДИМОСТИ МЕТОДА РОТЕ ПРИ ПОСТРОЕНИИ
ОГРАНИЧЕННОГО, ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОГО
И ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

А. П. Мальцев

Дается обоснование метода Роте в применении к отысканию ограниченного, почти-периодического и периодического по переменной t решения квазилинейной краевой задачи параболического типа без начальных условий.

Вопросу существования и единственности ограниченных, почти-периодических и периодических по t решений краевых задач параболического типа посвящены работы [1-8] и др.

В настоящей работе изучается возможность применения метода Роте к вычислению ограниченного, почти-периодического и периодического по t решения задачи

$$u_{xx} + F(x, t, u, u_x) - u_t = 0, \tag{1}$$

$$u_t(j, t) = \Psi^j(t, u(j, t), u_x(j, t)) \quad (j = 0, 1). \tag{2}$$

Пусть E_n — n -мерное евклидово пространство,

$$J = (-\infty, \infty), \quad \Pi = \{(x, t) : 0 < x < 1; t \in J\}, \quad \Gamma = \{(x, t) : x = 0, 1; t \in J\},$$

$$\bar{\Pi} = \Pi \cup \Gamma, \quad \Pi_\tau = \{(x, t) : 0 < x < 1; \tau < t < \infty\},$$

$$\Gamma_\tau = \{(x, t) : x = 0, 1; \tau \leq t < \infty\},$$

$$\Omega_\tau = \{(x, t) : 0 < x < 1; t = \tau\}, \quad \bar{\Pi}_\tau = \Pi_\tau \cup \Gamma_\tau \cup \Omega_\tau,$$

$$\Pi_{t_1, t_2} = \{(x, t) : 0 < x < 1; t_1 < t \leq t_2\},$$

$$\Gamma_{t_1, t_2} = \{(x, t) : x = 0, 1; t_1 \leq t \leq t_2\},$$

$\bar{\Pi}_{t_1, t_2} = \Pi_{t_1, t_2} \cup \Gamma_{t_1, t_2} \cup \Omega_{t_1, t_2}$; $C_{k,l}(\bar{\Pi}_{t_1, t_2})$ — совокупность непрерывных в $\bar{\Pi}_{t_1, t_2}$ функций, имеющих непрерывные в $\bar{\Pi}_{t_1, t_2}$ производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial t^l};$$

$I = \{1, 1, \dots, 1\}$ — $(n+1)$ -мерный вектор, все компоненты которого равны I ; $C_k[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty, k \geq 0$) — банахово пространство вектор-функций $u(z) = \{u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z)\}$ $u_i(z) \in C_k[a, b], i = 0, n \equiv 0, 1, \dots, n$ с нормой

$$\|u\|_{C_k[a, b]} = \sum_{j=0}^k \max_{i=0, n} \max_{a < z < b} |u_i^{(j)}(z)|.$$

Будем говорить, что 1) вектор $u \geq 0$ [$u \leq 0$, $u = 0$], если для всех $i = \overline{0, n}$ $u_i \geq 0$ [$u_i \leq 0$, $u_i = 0$]; 2) вектор-функция $u(z) \geq 0$ [$u(z) \leq 0$, $u(z) = 0$] на сегменте $[a, b]$, если для любого $z \in [a, b]$ вектор $u(z) \geq 0$ [$u(z) \leq 0$, $u(z) = 0$]; 3) вектор-функция $u(z)$ принимает в точке $z = z_0$ при $i = l$ свое наибольшее [наименьшее] значение на $[a, b]$, если

$$u_i(z_0) = \max_{i=\overline{0, n}} \max_{a < z < b} u_i(z) \equiv \max_{[a, b]} u(z),$$

$$[u_i(z_0) = \min_{i=\overline{0, n}} \min_{a < z < b} u_i(z) \equiv \min_{[a, b]} u(z)].$$

Ниже всюду предполагается, что:

а) $F(x, t, u, p)$, $\Psi^j(t, u, p)$ ($j = 0, 1$) — непрерывные достаточно гладкие в области $G = \{(x, t, u, p) \in \Pi \times E_2\}$ функции, ограниченные вместе с частотными производными по своим аргументам до достаточно высокого порядка в области

$$D = \{(x, t, u, p) : (x, t) \in \bar{\Pi}; |u| \leq 3M_0; |p| \leq 3M_1\},$$

где M_0, M_1 — некоторые постоянные;

б) при любых $(x, t, u) \in \bar{\Pi} \times \{|u| \leq 3M_0\}$ и достаточно больших $|p|$

$$|F|, |F_x|, |F_u|, |\Psi^j| \leq p^2 \varepsilon(|p|); |F_p| \leq |p| \varepsilon(|p|),$$

где $\varepsilon(|p|)$ — положительная функция, монотонно стремящаяся к нулю при $|p| \rightarrow \infty$;

в) при любых $(x, t, u, p) \in G$

$$F_u, \Psi_u^j \leq -\sigma < 0, \Psi_p^0 \geq \alpha^0 > 0, \Psi_p^1 \leq -\alpha^1 < 0, \Psi^j(t, 0, 0) \equiv 0^*,$$

где $j = 0, 1$ и $0 < \sigma, \alpha^0, \alpha^1 < \infty$ — некоторые постоянные.

Определение 1. Функцию $u(x, t) \in C_{4, 2}(\bar{\Pi})$, удовлетворяющую уравнению (1) в Π и условию (2) на Γ назовем ограниченным решением задачи (1), (2) в $\bar{\Pi}$, если существуют такие постоянные M_i ($i = \overline{0, 4}$), M^k ($k = 1, 2$), что

$$\sup_{\bar{\Pi}} \left| \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right| \leq M_i, \quad \sup_{\bar{\Pi}} \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right| \leq M^k.$$

Пусть $t^* \in J$ — произвольное число и $\varphi(x)$ — произвольная функция. Пусть $\varphi(x)$ при $0 \leq x \leq 1$ непрерывна, обладает непрерывными производными до достаточно высокого порядка и удовлетворяет условиям согласования

$$\varphi''(j) + F(j, t^*, \varphi(j), \varphi'(j)) = \Psi^j(t^*, \varphi(j), \varphi'(j)) \quad (j = 0, 1), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Psi^j}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Psi^j}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} \right) \left(F + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial \Psi^j}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \right) \times$$

$$\frac{d}{dx} \left(F + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(F + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Bigg|_{\substack{x=j \\ t=t^*}} = 0.$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial x^k} - \varphi^{(k)}(j) \right|_{x=j, t=t^*}$$

$$j = 0, 1; k = \overline{0, 4}.$$

* Условие $\Psi^j(t, 0, 0) = 0$ ($j = 0, 1$), как известно, не ограничивает общности.

Теорема 1. Если $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (3), (4), то для любого $t^* \in J$ задача (1), (2) в $\bar{\Pi}_{t^*}$ имеет единственное решение $u(x, t, \varphi)$, удовлетворяющее при $t = t^*$ начальному условию

$$u(x, t^*) = \varphi(x), \quad (5)$$

$$u(x, t, \varphi) \in C_{4,2}(\bar{\Pi}_{t^*}) \text{ и } \|u(x, t, \varphi)\|_{C_{4,2}(\bar{\Pi}_{t^*})} \leq M_{4,2}^{\|\varphi\|},$$

где постоянная $M_{4,2}^{\|\varphi\|}$ не зависит от t^* .

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\Delta t > 0$ и рассмотрим задачу:

$$u_i'' + F_i(x, u_i, u_i') = \frac{u_i - u_{i-1}(j)}{\Delta t}, \quad (6)$$

$$\Psi_i^j(u_i(j), u_i'(j)) = \frac{u_i(j) - u_{i-1}(j)}{\Delta t} \quad (j = 0, 1),$$

где $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$,

$$t_i = t^* + i\Delta t, \quad u_i(x) = u(x, t_i),$$

$$F_i(x, u, p) = F(x, t_i, u, p), \quad \Psi_i^j(u, p) = \Psi^j(t_i, u, p).$$

Зафиксируем еще произвольное число $t^{**} > t^*$ и положим в (6) $u_0(x) = \varphi(x)$. В работе [9] доказано, что для любого $i = 1, 2, \dots$, $\left[\frac{t^{**} - t^*}{\Delta t} \right]$ система (6) при $u_0 = \varphi$ имеет единственное решение $u_i(x, \varphi) \in C_{k+2}[0, 1]$, если функции F_i k раз ($k \geq 2$) непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. Согласно [10] и [11] для доказательства существования решения достаточно установить следующие оценки:

$$\|u_i^{(k)}\|_{C_0[0,1]} \leq M_k \quad (k = \overline{0, 6});$$

$$\left\| \frac{u_i^{(l)} - u_{i-1}^{(l)}}{\Delta t} \right\|_{C_0[0,1]} \leq M_l^1 \quad (l = \overline{0, 4}); \quad (7)$$

$$\left\| \frac{u_{i+1}^{(m)} - 2u_i^{(m)} + u_{i-1}^{(m)}}{\Delta t^2} \right\|_{C_0[0,1]} \leq M_m^2 \quad (m = \overline{0, 2});$$

$$\left\| \frac{u_{i+2}^{(s)} - 3u_{i+1}^{(s)} + 3u_i^{(s)} - u_{i-1}^{(s)}}{\Delta t^3} \right\|_{C_0[0,1]} \leq M_s^3 \quad (s = 0),$$

где постоянные M_k, M_l^1, M_m^2, M_s^3 не зависят от t^*, t^{**}, i и Δt .

В [9] даны равномерные (по i и Δt) оценки (7) при $k = \overline{0, 4}; l = \overline{0, 2}; m = 0$. В силу условий а) — в), полученные в [9] с помощью лемм 3 и 4 оценки не зависят и от t^*, t^{**} .

Оценим $\|u_i^y(x)\|_{C_0[0,1]}$. Для этого рассмотрим последовательность функций $\{z_i(x)\}$

$$\begin{aligned} z_0(x) &= \varphi^{IV}(x) + \frac{d^2}{dx^2} F_0(x, \varphi(x), \varphi'(x)) + \\ &+ F_{10}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - [(1-x)\Psi_{10}^0(\varphi(x), \varphi'(x)) + \\ &+ x\Psi_{10}^1(\varphi(x), \varphi'(x))] + \{F_{u_0}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - [(1-x)\Psi_{u_0}^0(\varphi(x), \varphi'(x)) + x\Psi_{u_0}^1(\varphi(x), \varphi'(x))] \times \\
 & \times [\varphi''(x) + F_0(x, \varphi(x), \varphi'(x))] + \{F_{p_0}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) - \\
 & - [(1-x)\Psi_{p_0}^0(\varphi(x), \varphi'(x)) + x\Psi_{p_0}^1(\varphi(x), \varphi'(x))] \} \times \\
 & \times \frac{d}{dx} [\varphi''(x) + F_0(x, \varphi(x), \varphi'(x))],
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 z_i(x) &= u_i^{IV}(x) + \frac{d^2}{dx^2} F_i(x, u_i(x), u_i'(x)) + \\
 & + \frac{F_i(x, u_i(x), u_i'(x)) - F_{i-1}(x, u_{i-1}(x), u_{i-1}'(x))}{\Delta t} - \\
 & - \left[(1-x) \frac{\Psi_i^0(u_i(x), u_i'(x)) - \Psi_{i-1}^0(u_{i-1}(x), u_{i-1}'(x))}{\Delta t} + \right. \\
 & \left. + x \frac{\Psi_i^1(u_i(x), u_i'(x)) - \Psi_{i-1}^1(u_{i-1}(x), u_{i-1}'(x))}{\Delta t} \right].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Согласно условиям (3), (4) и полученным при $k = \overline{0,4}$; $l = \overline{0,2}$; $m = 0$ оценкам (7) имеем

$$\begin{aligned}
 z_i'' + [F_{ip} + (1-x)(\Psi_{ip}^0 - \tilde{\Psi}_{ip}^0) + x(\Psi_{ip}^1 - \tilde{\Psi}_{ip}^1)] z_i' - \\
 \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = f_i \quad (i = 0, 2, \dots), \\
 z_i(0) = z_i(1) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где при $z_0(x)$, задаваемой (8), будут выполняться условия леммы 4 [9]. Откуда следует, что $\|z_i'(0)\|, \|z_i'(1)\|, i \geq 0$, равномерно ограничены по t^*, t^{**}, i и Δt . Таким образом, из (8), (9) получим, что равномерно по t^*, t^{**}, i и Δt ограничены $\|u_i^V(0)\|, \|u_i^V(1)\|$. Тогда для системы, которой удовлетворяют функции $r_i(x) = u_i^{IV}(x)$, выполняются условия леммы 3 [9]. Поэтому

$$\|u_i^V(x)\|_{C_0[0,1]} \leq M_5. \tag{11}$$

Из (11) легко следуют оценки

$$\left\| \frac{u_i'' - u_{i-1}''}{\Delta t} \right\|_{C_0[0,1]} \leq M, \quad \left\| \frac{u'_{i+1} - 2u'_i + u'_{i-1}}{\Delta t^2} \right\|_{C_0[0,1]} \leq M_1^2.$$

Оценим $\left\| \frac{u_i^{IV} - u_{i-1}^{IV}}{\Delta t} \right\|_{C_0[0,1]}$. Для этого достаточно показать, что последовательность $\{z_i(x)\} \equiv \left\{ \frac{u_{i+1}''(x) - u_i''(x)}{\Delta t} \right\}$ удовлетворяет условиям леммы 3 [9]. Так как $\{z_i\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$z_i'' + \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta t} \right) - \frac{z_i - z_{i-1}}{\Delta t} = 0,$$

$$z_i'(l) = \left[\frac{\Psi_{i+1}^1 - 2\Psi_i^1 + \Psi_{i-1}^1}{\Delta t^2} - \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{\Delta t^2} - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{F_{i+1} - F_i}{\Delta t} \right) \right] \Big|_{x=l}$$

$$(i = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1),$$

то в силу полученных оценок для проверки выполнения условий леммы 3 [9] осталось показать, что $\left\| \frac{u_1^{IV}(x) - u_0^{IV}(x)}{\Delta t} \right\|_{C_0[0,1]}$ равномерно ограничена относительно t^* и Δt . Функция

$$z'_0 = \frac{u_1 - u_0}{\Delta t^3} - \frac{F_1 - F_0}{\Delta t^2} - \frac{F_0 + \varphi''}{\Delta t^2} - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{F_1 - F_0}{\Delta t} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{F_0 + \varphi''}{\Delta t} \right).$$

$\left\| \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{F_1 - F_0}{\Delta t} \right) \right\|_{C_0[0,1]}$ равномерно ограничена относительно t^* и Δt .

Покажем, что

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{C_0[0,1]} &\equiv \|(u_1 - u_0) - \Delta t(F_1 - F_0) - \Delta t(F_0 + \varphi'') - \\ &- \Delta t^2 \frac{d^2}{dx^2} (F_0 + \varphi'')\|_{C_0[0,1]} = O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (12)$$

где $O(\Delta t^3)$ не зависит от t^* . Функция $\xi(x)$ есть решение задачи

$$\xi'' - \frac{1}{\Delta t} \xi = -\Delta t^2 \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{F_1 - F_0}{\Delta t} + \frac{d^2}{dx^2} (F_0 + \varphi'') \right], \quad (13)$$

$$\xi(j) = \Delta t^2 \left[\frac{\Psi_1^j - \Psi_0^j}{\Delta t} - \frac{F_1 - F_0}{\Delta t} - \frac{d^2}{dx^2} (F_0 + \varphi'') \right] \Big|_{x=j}$$

$$(j = 0, 1).$$

В силу (3), (4)

$$\xi(j) = \Delta t^3 \gamma_j \quad (j = 0, 1), \quad (14)$$

где постоянные γ_j не зависят от t^* . Применяя к задаче (13), (14) принцип максимума, получим оценку (12).

Из полученной оценки $\left\| \frac{u_i^{IV} - u_{i-1}^{IV}}{\Delta t} \right\|_{C_0[0,1]}$ легко следуют оценки $\|u_i^{VI}\|_{C_0[0,1]}$,

$$\left\| \frac{u''_{i+1} - 2u''_i + u''_{i-1}}{\Delta t^2} \right\|_{C_0[0,1]}, \quad \left\| \frac{u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_i - u_{i-1}}{\Delta t^3} \right\|_{C_0[0,1]}.$$

Теорема 2*. Для любого $\Delta t > 0$ задача (6) имеет единственное ограниченное решение.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$t_n = n \Delta t \quad (n = 0, -1, -2, \dots) \quad (15)$$

и обозначим через $u^n = \{u_0^n, u_1^n, \dots, u_i^n, \dots\}$ решение задачи (6) с начальным условием

$$u_0^n(x) = \varphi^n(x), \quad (16)$$

где $\|\varphi^n\|_{C_0[0,1]} \leq M_0 = \frac{1}{\sigma} \sup_{\Pi} |F(x, t, 0, 0)|$. Зафиксируем произвольные целые числа l и m , $l < m$, и обозначим через

* При доказательстве приводимых ниже теорем используется метод, применяемый ранее в работах [3] и [4].

$$u_{lm}^n = \{u_{l-n}^n, u_{l-n+1}^n, \dots, u_{l-n+m}^n\}. \quad (17)$$

Покажем, что при $n \rightarrow -\infty$ $\|u_{lm}^n - u_{lm}^*\|_{C_0[0,1]} \rightarrow 0$ равномерно относительно l, m и Δt , где

$$u_{lm}^*(x) = \{u_l^*(x), u_{l+1}^*(x), \dots, u_{l+m}^*(x)\} \quad (18)$$

— некоторая непрерывная на $[0, 1]$ вектор-функция.

Пусть $(-p), (-q)$ — целые отрицательные числа, $q > p$. Тогда

$$u^{pq} \equiv \{u_0^{pq} = u_{q-p+1}^{-q} - u_1^{-p}, u_1^{pq} = u_{q-p+2}^{-q} - u_2^{-p}, \dots\}$$

есть решение задачи

$$(u_k^{pq})'' + b_k (u_k^{pq})' + \left(c_k - \frac{1}{\Delta t}\right) u_k^{pq} = -\frac{1}{\Delta t} u_{k-1}^{pq}, \quad (19)$$

$$\alpha_k^l (u_k^{pq}(j))' + \left(\beta_k^l - \frac{1}{\Delta t}\right) u_k^{pq}(j) = -\frac{1}{\Delta t} u_{k-1}^{pq}(j),$$

$$u_0^{pq}(x) = u_{q-p+1}^{-q}(x) - u_1^{-p}(x), \quad (20)$$

где $\alpha_k^0 > 0, \alpha_k^1 < 0; c_k, \beta_k^j < -\sigma < 0 \quad (j = 0, 1)$.

Применяя к задаче (19), (20) принцип максимума, получим $\|u_k^{pq}\|_{C_0[0,1]} \leq 2M_0(1 + \sigma\Delta t)^{-k}$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при $p \geq s + 1 - l$, где s удовлетворяет неравенству $2M_0(1 + \sigma\Delta t)^{-s} < \varepsilon$, $\|u_{lm}^{pq}\|_{C_0[0,1]} < \varepsilon$. Так как l и m произвольны, то (18) есть вырез из бесконечно-мерной вектор-функции.

$$u^* = \{\dots, u_l^*, u_{l+1}^*, \dots, u_{l+m}^*, \dots\}. \quad (21)$$

Покажем, что (21) есть ограниченное решение задачи (6).

Пусть $t^* = l\Delta t$ — произвольный элемент (15) и $v = \{v_0, v_1, \dots\}$ — решение задачи (6) с начальным условием $v_0(x) = u_l^*(x)$. Тогда каждый элемент w^n последовательности $\{w^n\} \equiv \{v - u_l^n\} \quad (n < l, n \rightarrow -\infty)$, есть решение задачи (19) с начальным условием $w_0^n(x) = u_l^*(x) - u_{l-n}^n(x)$. Применяя к данной задаче принцип максимума, получим

$$\|v_i - u_{l-n+i}^n\|_{C_0[0,1]} \leq \|u_l^* - u_{l-n}^n\|_{C_0[0,1]}.$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|v_i - u_{l-n+i}^n\|_{C_0[0,1]} = 0$. Так как t^* — произвольно, то (21) есть ограниченное решение задачи (6).

Единственность ограниченного решения легко следует из принципа максимума.

Следствие 1. Для любых целых l и $m, l < m$, и любого $\varepsilon > 0$ при $n < l - \frac{\ln(2M_0\varepsilon^{-1})}{\ln(1 + \sigma\Delta t)}$

$$\|u_{lm}^n - u_{lm}^*\|_{C_0[0,1]} < \varepsilon.$$

Следствие 2. Для ограниченного решения $u^*(x)$ задачи (6) имеют место оценки (7) при $k = 0,5; l = 0,4; m = 0,2; s = 0$.

Теорема 3. Задача (1), (2) в $\bar{\Pi}$ имеет единственное ограниченное решение $u^*(x, t)$.

Доказательство существования решения, в силу следствия 2, проводится так же, как и в теореме 1.

Пусть $t_0 < 0$ — произвольное число и пусть задача (1), (2) имеет два ограниченных решения u^* и u^{**} . Тогда, полагая $u^* - u^{**} \equiv u = ve^{-\lambda t}$, $0 < \lambda < \sigma$, получим, что v в $\bar{\Pi}_{t_0}$ является решением задачи

$$\begin{aligned} v_{xx} + bv_x + (c + \lambda)v - v_t &= 0, \\ \alpha^j v_x(j, t) + (\beta^j + \lambda)v(j, t) - v_t(j, t) &= 0 \quad (j = 0, 1), \\ v(x, t_0) &= u(x, t_0)e^{\lambda t_0}. \end{aligned}$$

В силу принципа максимума $|v(x, t)| \leq 2M_0 e^{\lambda t_0}$. Следовательно, $|u(x, t)| \leq 2M_0 e^{\lambda(-t+t_0)}$. Так как $t_0 < 0$ — любое, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{\Pi}$.

Следствие 3. Пусть функции F, Ψ^j ($j = 0, 1$) — периодические по t с периодом T , $0 < T < \infty$. Тогда ограниченное решение u^* задачи (1), (2) будет периодическим по t с периодом T .

Следствие 4. Пусть функции F, Ψ^j ($j = 0, 1$) равномерно относительно $(x, u, p) \in D$,

$$D = \{(x, u, p): 0 \leq x \leq 1; |u| \leq M_0; |p| \leq M_1\}$$

почти-периодические по t . Тогда ограниченное решение u^* задачи (1), (2) будет равномерно относительно $x \in [0, 1]$ почти-периодическим по t .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число и $\tau - \varepsilon\sigma$ — почти-период функций F, Ψ^j . Функция $u(x, t) = u^*(x, t + \tau) - u^*(x, t)$ есть ограниченное решение задачи

$$\begin{aligned} u_{xx} + bu_x + cu - u_t &= -[F(x, t + \tau, u^*(x, t), \\ &u_x^*(x, t)) - F(x, t, u^*(x, t), u_x^*(x, t))], \\ \alpha^j u_x(j, t) + \beta^j u(j, t) - u_t(j, t) &= \\ &= -[\Psi^j(t + \tau, u^*(j, t), u_x^*(j, t)) - \Psi^j(t, u^*(j, t), u_x^*(j, t))] \\ &(j = 0, 1). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $t_0 < 0$ — произвольное число. В $\bar{\Pi}_{t_0}$ положим $u = v + w$, где v есть решение задачи (22), удовлетворяющее начальному условию

$$v(x, t_0) = 0, \quad (23)$$

а w — решение задачи

$$\begin{aligned} w_{xx} + bw_x + cw - w_t &= 0, \\ \alpha^j w_x(j, t) + \beta^j w(j, t) - w_t(j, t) &= 0 \quad (j = 0, 1), \\ w(x, t_0) &= u(x, t_0). \end{aligned} \quad (24)$$

В силу принципа максимума, для решения задачи (22), (23) имеем $|v(x, t)| < \varepsilon$, а для решения задачи (24), в силу произвольности t_0 ,

$$|w(x, t)| \equiv 0.$$

Таким образом, $|u^*(x, t + \tau) - u^*(x, t)| < \varepsilon$.

Автор признателен Ю. И. Неймарку за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Prodi, Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 23, № 1, 25, (1954)
2. Н. П. Куликов, Изв. высш. уч. зав., Математика, № 6, 140 (1960).
3. И. И. Шмулев, ДАН СССР, 142, № 1, 46 (1962).
4. И. И. Шмулев, Матем. сб. 66, (108): 3, 398 (1965).

5. И. И. Шмудев, Сиб. матем. ж., 7, № 3, 685 (1966).
6. И. И. Шмудев, Дифференциальные уравнения, 5, № 12, 2225 (1969).
7. Vagni Carla, Boll. Unione mat. Ital., 1, № 4, 5, 559 (1968).
8. С. Н. Кружков, Дифференциальные уравнения, 6, № 14, 731 (1970)
9. Чжоу-Юй-линь, Матем. сб., 47 (89) : 4, 431 (1959).
10. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, УМН, 17, вып. 5 (105), 3 (1962).
11. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 октября 1970 г.

ON ROTHE METHOD CONVERGENCE WHEN CONSTRUCTING
BOUNDED, ALMOST PERIODIC AND PERIODIC SOLUTION
FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM OF PARABOLIC TYPE

Maltzev A. P.

The Rothe method is substantiated in application to finding a bounded, almost periodic and periodic along variable t solution for a quasilinear boundary value problem of parabolic type without initial conditions.

УДК 517.944

О ПОСТРОЕНИИ ОГРАНИЧЕННОГО, ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

А. П. Мальцев

Устанавливается сходимость метода прямых в применении к вычислению ограниченных, почти-периодических и периодических по переменной t решений квазилинейных краевых задач параболического типа.

Рассмотрим задачу

$$u_{xx} + F(x, t, u, u_x) - u_t = 0, \tag{1}$$

$$u_i(j, t) = \Psi^j(t, u(j, t), u_x(j, t)) \quad (j = 0, 1), \tag{2}$$

$$0 < x < 1, \quad t \in J = (-\infty, \infty).$$

Воспользуемся обозначениями и терминологией заметки [1]. Кроме того, будем предполагать, что выполняются условия а)–в) заметки [1]. Для приближенного отыскания ограниченного решения u^* задачи (1), (2), следуя работе [2], заменим ее системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$R_{\Delta x} u = \begin{cases} \Psi^0(t, u_0, D_{\Delta x} u_0) - \frac{du_0}{dt} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ D_{\Delta x}^2 u_i + F_i(t, u_i, D_{\Delta x} u_i) - \frac{du_i}{dt} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \Psi^1(t, u_n, D_{\Delta x} u_n) - \frac{du_n}{dt} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

где n — произвольное натуральное число, $\Delta x = n^{-1}$,

$$u_i(t) = u(x_i, t), \quad x_i = i \Delta x, \quad F_i(t, u, p) = F(x_i, t, u, p),$$

$$D_{\Delta x} u_0 = \frac{u_1 - u_0}{\Delta x}, \quad D_{\Delta x} u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$D_{\Delta x} u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x}, \quad D_{\Delta x}^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}.$$

В [1] доказывається, что задача (1), (2) имеет единственное ограниченное решение $u^* \in C_{4,2}(\overline{\Pi})$. Подставляя его в (3), получим

$$R_{\Delta x}^i u^*(x_i, t) = O(\Delta x^k),$$

где $k = 1$ при $i = 0, n$ и $k = 2$ при $i = \overline{1, n-1}$.

Ниже используется также следующая форма записи системы (3):

$$\begin{aligned} & \alpha^0(t, u_0, D_{\Delta x} u_0) D_{\Delta x} u_0 + \beta^0(t, u_0) u_0 - \frac{du_0}{dt} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{2 + \Delta x b_i(t, u_i, D_{\Delta x} u_i)}{2\Delta x^2} u_{i+1} + \left[c_i(t, u_i) - \frac{2}{\Delta x^2} \right] u_i + \\ & + \frac{2 - \Delta x b_i(t, u_i, D_{\Delta x} u_i)}{2\Delta x^2} u_{i-1} - \frac{du_i}{dt} = -F_i(t, 0, 0), \\ & \dots \dots \dots \\ & \alpha^1(t, u_n, D_{\Delta x} u_n) D_{\Delta x} u_n + \beta^1(t, u_n) u_n - \frac{du_n}{dt} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\alpha^0 = \int_0^1 \Psi_p^0(t, u_0, \theta D_{\Delta x} u_0) d\theta \geq 0,$$

$$\alpha^1 = \int_0^1 \Psi_p^1(t, u_n, \theta D_{\Delta x} u_n) d\theta \leq 0,$$

$$\beta^0 = \int_0^1 \Psi_u^0(t, \theta u_0, 0) d\theta < -\sigma < 0, \quad \beta^1 = \int_0^1 \Psi_u^1(t, \theta u_n, 0) d\theta < -\sigma < 0,$$

$$b_i = \int_0^1 F_{ip}(t, u_i, \theta D_{\Delta x} u_i) d\theta, \quad c_i = \int_0^1 F_{iu}(t, \theta u_i, 0) d\theta < -\sigma < 0.$$

Пусть $t_1, t_2 \in J$ — произвольные числа. Для $u \in C_1[t_1, t_2]$ положим

$$L_{\Delta x} u \equiv \{L_{\Delta x}^0 u_0, L_{\Delta x}^1 u_1, \dots, L_{\Delta x}^n u_n\},$$

$$L_{\Delta x}^0 u_0 = \alpha^0(t) \frac{u_1 - u_0}{\Delta x} + \beta^0(t) u_0 - \frac{du_0}{dt},$$

$$\begin{aligned} L_{\Delta x}^i u_i &= \frac{2 + \Delta x b_i(t)}{2\Delta x^2} u_{i+1} + \left[c_i(t) - \frac{2}{\Delta x^2} \right] u_i + \\ & + \frac{2 - \Delta x b_i(t)}{2\Delta x^2} u_{i-1} - \frac{du_i}{dt}, \end{aligned}$$

$$L_{\Delta x}^n u_n = \alpha^1(t) \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta x} + \beta^1(t) u_n - \frac{du_n}{dt},$$

$b_i, c_i < -\sigma < 0, \beta^j < -\sigma < 0, \alpha^0 \geq 0, \alpha^1 \leq 0$ — произвольные непрерывные на $[t_1, t_2]$ функции и

$$0 < \Delta x < 2 \left[\max_{1 \leq i < n-1} \max_{t_1 < t < t_2} |b_i(t)| \right]^{-1}.$$

$$AS_{\Delta x} \subset C_1[t_1, t_2].$$

Полагая $h_p = \left(\left[\frac{N_p}{2} \right] + 1 \right)^{-1}$, где $N_p = \max_{1 \leq i < n-1} \sup_D |b_i|$,

$$D = \{(x, t, u, p) : (x, t) \in \bar{\Pi}; |u| \leq M_0; |p| \leq P\}$$

и P таково, что при $|p| \geq P$ выполняются неравенства $|b_i| < |p| \varepsilon(|p|)$, $\varepsilon(p) < \frac{2}{M_0}$, получим, что при $0 < \Delta x \leq h_p$ для (8) выполняются условия леммы 2. Откуда следует, что

$$\|u\|_{C_0[t_1, t_2]} \leq M_p = \max \{p, \sigma^{-1} \max_{\bar{\Pi}} |F(x, t, 0, 0)|\}. \quad (9)$$

Из (8) будем иметь

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{C_0[t_1, t_2]} \leq M_1(\Delta x), \quad \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{C_0[t_1, t_2]} \leq M_2(\Delta x). \quad (10)$$

Таким образом, полагая в $S_{\Delta x}$ $M_0 = M_p$ и $M(\Delta x) = M_0 + M_1(\Delta x)$, получим, что для оператора A выполняются условия принципа неподвижной точки Шаудера.

Единственность решения задачи (3), (7) на $[t_1, t_2]$ очевидна.

Так как t_2 произвольно, то задача (3), (7) имеет единственное решение $u_{\Delta x}(t, \varphi)$ на $[t_1, \infty)$ и

$$\|u_{\Delta x}(t, \varphi)\|_{C_0[t_1, \infty)} \leq M_0. \quad (11)$$

Теорема 2. Существует такое $h > 0$, что при любом $0 < \Delta x \leq h$ система (3) на J имеет единственное ограниченное решение $u_{\Delta x}^*(t)$.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\{t_n\}$, $0 > t_1 > t_2 > \dots$, $t_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $u_{\Delta x}^n(t, \varphi^n)$ — решение системы (3) на $J_n = [t_n, \infty)$, удовлетворяющее начальному условию $u_{\Delta x}^n(t_n, \varphi^n) = \varphi^n$, где $\|\varphi^n\| \leq M_0$. Докажем, что для любой ограниченной части интервала J последовательность $\{u_{\Delta x}^n(t, \varphi^n)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $u_{\Delta x}^*(t)$. Пусть $p < q$ — произвольные натуральные числа. Вектор-функция $u_{\Delta x}^{pq} = u_{\Delta x}^q - u_{\Delta x}^p$ есть решение задачи

$$L_{\Delta x} u_{\Delta x}^{pq} = 0,$$

$$u_{\Delta x}^{pq}(t_{p-1}) = u_{\Delta x}^q(t_{p-1}) - u_{\Delta x}^p(t_{p-1})$$

на J_{p-1} . Производя замену $u_{\Delta x}^{pq} = w e^{-\lambda t}$, $0 < \lambda < \sigma$, получим, что w удовлетворяет на J_{p-1} системе уравнений

$$\alpha^0 \frac{w_1 - w_0}{\Delta x} + [\beta^0 + \lambda] w_0 - \frac{dw_0}{dt} = 0,$$

.....

$$\frac{2 + \Delta x b_i}{2\Delta x^2} w_{i+1} + \left[c_i + \lambda - \frac{2}{\Delta x^2} \right] w_i + \frac{2 - \Delta x b_i}{2\Delta x^2} w_{i-1} - \frac{dw_i}{dt} = 0, \quad (12)$$

.....

$$\alpha^1 \frac{w_n - w_{n-1}}{\Delta x} + [\beta^1 + \lambda] w_n - \frac{dw_n}{dt} = 0$$

и начальному условию

$$\omega(t_{p-1}) = \exp(\lambda t_{p-1}) [u_{\Delta x}^q(t_{p-1}) - u_{\Delta x}^p(t_{p-1})]. \quad (13)$$

Применяя к задаче (12), (13) лемму 2, получим

$$\|\omega\|_{C_0[t_{p-1}, \infty)} \leq 2M_0 \exp(\lambda t_{p-1}).$$

Таким образом, $|\overline{u_{\Delta x}^{pq}}(t)| \leq 2M_0 \exp[\lambda(t_{p-1} - t)]I$.

Покажем, что $u_{\Delta x}^*(t)$ есть ограниченное решение системы (3) на J . Пусть $t^* \in J$ — произвольное число и $v_{\Delta x}$ — решение системы (3) на J^* , удовлетворяющее начальному условию $v_{\Delta x}(t^*) = u_{v_x}^*(t^*)$. Тогда каждый элемент ω^n последовательности $\{\omega^n\} \equiv \{v_{\Delta x} - u_{v_x}^n\}$, $n=1, 2, \dots$, при тех n , для которых $t_n < t^*$, есть решение задачи

$$L_{\Delta x} \omega^n = 0, \quad \omega^n(t^*) = u_{\Delta x}^*(t^*) - u_{\Delta x}^n(t^*, \varphi^n).$$

В силу леммы 2, $\|\omega^n\|_{C_0[t^*, \infty)} \leq \|\omega^n(t^*)\|$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_{\Delta x} - u_{v_x}^n\|_{C_0[t^*, \infty)} = 0$. Так как t^* произвольно, то $u_{\Delta x}^*(t)$ есть ограниченное решение системы (3) на J . Из доказанного, кроме того, следует, что $\|u_{\Delta x}^*\|_{C_0(J)} \leq M_0$.

Единственность решения $u_{\Delta x}^*$ легко доказать с помощью леммы 2.

Следствие 2^o. Пусть функции F, Ψ^j ($j=0, 1$) — периодические по t с периодом T , $0 < T < \infty$. Тогда ограниченное решение $u_{\Delta x}^*(t)$ системы (3) будет периодическим с периодом T .

Следствие 3. Пусть $M_0 = \sup_{\bar{\Pi}} |u^*|$, $M_1 = \sup_{\bar{\Pi}} |u_x^*|$, u^* — ограниченное решение задачи (1), (2) в $\bar{\Pi}$,

$$D = \{(x, u, p) : 0 \leq x \leq 1; |u| \leq M_0; |p| \leq M_1\}$$

и пусть F, Ψ^j ($j=0, 1$) равномерно относительно $(x, u, p) \in D$ почти-периодически по t . Тогда ограниченное решение $u_{\Delta x}^*(t)$ системы (3) будет равномерно относительно Δx почти-периодическим.

Следствие 4. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t^* \in J$ — любые. Тогда при

$$t_n < t^* + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon}{2M_0}, \quad 0 < \lambda < \sigma,$$

$$\|u_{\Delta x}^*(t) - u_{\Delta x}^n(t, \varphi^n)\| < \varepsilon \quad \text{для всех } t \geq t^*.$$

Теорема 3. Пусть $t^* \in J$ — любое и $u_{\Delta x}(t^*, \varphi) \geq u_{\Delta x}^*(t^*)$. Тогда $u_{\Delta x}(t, \varphi) \geq u_{\Delta x}^*(t)$ при любом $t \geq t^*$.

Доказательство теоремы вытекает из следствия 1. Доопределим вектор-функцию $u_{\Delta x}^*(t)$ при $i\Delta x \leq x \leq (i+1)\Delta x$ линейно и обозначим полученную функцию $u_{\Delta x}^*(x, t)$.

Теорема 4. При любом $t \in J$

$$\|u_{\Delta x}^*(x, t) - u^*(x, t)\|_{C_0[0, 1]} = O(\Delta x), \quad (14)$$

где $O(\Delta x)$ не зависит от t .

Доказательство. Разность $\delta(t) = u^*(x_i, t)I - u_{\Delta x}^*(t)$ есть ограниченное решение системы

$$L_{\Delta x} \delta = f, \quad (15)$$

* Доказательство следствий 2 и 3 проводится аналогично приводимому ниже доказательству теоремы 4.

где $f = \{O(\Delta x), O(\Delta x^2), \dots, O(\Delta x^2), O(\Delta x)\}$. Пусть $t_0 < 0$ — произвольное число. При $t_0 \leq t < \infty$ положим $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где δ_1 есть решение системы (15), удовлетворяющее начальному условию $\delta_1(t_0) = 0$, а δ_2 — решение системы $L_{\Delta x} \delta_2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $\delta_2(t_0) = \delta(t_0)$. В силу леммы 2 и произвольности t_0 ,

$$\|\delta_1\|_{C_0(J)} \leq \sigma^{-1} O(\Delta x), \quad \|\delta_2\|_{C_0(J)} = 0.$$

Отсюда следует (14).

Автор признателен Ю. И. Неймарку за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 3, 340 (1972).
2. Б. М. Будаков, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1, № 6, 1105 (1961).
3. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 11, 1657 (1969).
4. А. П. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 11, 1666 (1969).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 октября 1970 г.

ON CONSTRUCTION OF BOUNDED, ALMOST PERIODIC AND PERIODIC SOLUTION FOR PARABOLIC TYPE PROBLEM BY STRAIGHT LINES METHOD

Maltzev A. P.

The convergence of straight lines method is stated in application to a computation of bounded, almost periodic and periodic along variable t solutions for quasilinear boundary value problems of parabolic type.

УДК 62 — 505

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА, ОПИСЫВАЕМОГО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Плотников, Е. Р. Сикорская

Выведены необходимые условия оптимальности управления объектом, который описывается слабо нелинейной системой уравнений гиперболического типа, с ограничениями типа неравенств на фазовые координаты системы в заданный конечный момент времени.

Настоящая статья посвящена оптимизации одного управляемого объекта с распределенными параметрами, описываемого системой слабо нелинейных n -мерных уравнений 2-го порядка гиперболического типа, причем управление объектом сосредоточено как внутри области определенных параметров, так и по ее границе. В статье рассмотрен случай варьируемых начальных условий системы, так что оптимальный режим функционирования объекта обусловлен также выбором оптимального начального режима.

Задача решается при ограничениях типа неравенств на фазовые координаты объекта, причем эти ограничения действуют в конечный момент времени, предполагаемый фиксированным.

Критерием качества служит комбинация трех нелинейных интегральных функционалов, определенных на функциях, заданных соответственно внутри, на боковой поверхности и основании цилиндра $Q = \Omega \times [0, T_0]$, что соответствует выбору структуры управления.

Методика, примененная в данной статье, является новой. Хотя здесь, как и в других общих схемах доказательства критериев оптимальности, начиная с вывода принципа максимума Понтрягина [1] и др. [2-4], условие оптимальности получается как условие непересечения некоторых множеств, но способ построения этих множеств и пространство, в котором рассматривается задача,—другие. Основной особенностью этой новой методики является ее независимость от характера постановки решаемой оптимальной задачи. Только рамки статьи не позволили рассмотреть другие, более сложные аналогичные задачи. Это рассмотрение будет сделано в следующих статьях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть некоторый управляемый процесс описывается векторным, слабо-нелинейным уравнением гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} \left(a_{ik}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x^i} \right) + f(x, t, u(x, t), u'_{x^i}(x, t), v(x, t)) \quad (1)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x, z_1(x)), \\ \dot{u}(x, 0) &= \varphi_2(x, z_2(x)) \end{aligned} \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x^i} \cos(x_k, n) \Big|_S = g(x, t, u, w(x, t)), \quad (3)$$

где $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \Omega$, $t \in [0, T_0]$; коэффициенты (1) определены в конечной цилиндрической области $Q = \Omega \times [0, T_0]$; $u(x, t) = \{u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)\}$; x_k — орты, $k = 1, \dots, n$, S — боковая поверхность цилиндра Q , n — внешняя нормаль kS . Считается, что квадратичная

форма $\sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x, t) \xi_i \xi_k$ равномерно положительно определена и функции $a_{ik}(x, t)$ измеримы и ограничены в цилиндре Q .

Измеримые функции $v(x, t) \in V$, $w(x, t) \in W$, $z_1(x) \in Z$, $z_2(x) \in Z$ играют роль управляющих функций, значения которых принадлежат соответственно фиксированным множествам V , W , Z некоторых конечномерных пространств.

Пусть заданы, далее, ограничения на фазовые координаты системы в конечный (закрепленный) момент времени T_0 (ограничения типа неравенств)

$$l_m = \int_{\Omega} G_m[u(x, T_0), \dot{u}(x, T_0)] d\Omega \leq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, m_1) \quad (4)$$

и функционал качества

$$\begin{aligned} I &= \gamma_1 \int_{\Omega} F_1[x, u(x, T_0), u'_{xi}(x, T_0), z_1(x)] d\Omega + \gamma_2 \times \\ &\times \int_Q F_2[x, t, u, u'_{xi}, v(x, t)] dQ + \gamma_3 \int_S F_3[x, t, u, w(x, t)] dS = \quad (5) \\ &= \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \gamma_3 I_3 \quad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0). \end{aligned}$$

Предполагаем, что существуют непрерывные дифференциалы Фреше по аргументам u, u'_{xi}, \dot{u} у функций F_1, F_2, F_3, G_m ($m = 1, 2, \dots, m_1$), f и g и что функции f, g, F_1, F_2, F_3 непрерывны по совокупности аргументов $u \times u'_{xi} \times v \times w \times z_1$ и измеримы по остальным аргументам, а функции φ_1 и φ_2 непрерывны по z_1 и z_2 и измеримы по x .

Будем рассматривать обобщенные решения задачи (1) — (3), так как и управляющие функции v, w, z_1, z_2 , и коэффициенты a_{ik} — измеримые функции.

Обобщенным решением поставленной задачи называем функцию $u(x, t) \in W_2^1(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \Phi(x, \tau) d\Omega - \int_{\Omega} \varphi_2(x, z_2(x)) \Phi(x, 0) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} u(x, \tau) \frac{\partial \Phi(x, \tau)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_1(x, z_1) \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial t} d\Omega + \\ &+ \int_{Q(\tau)} u(x, t) \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} dQ + \int_{Q(\tau)} \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(x, t) \times \\ &\times \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} dQ = \int_{Q(\tau)} f \Phi dQ + \int_{S(\tau)} g \Phi dS \quad (6) \end{aligned}$$

при любой функции $\Phi(x, t) \in W_2^2(Q)$ и почти всех $\tau \in [0, T_0]$, $Q(\tau) = \Omega \times [0, \tau]$, $S(\tau)$ — боковая поверхность цилиндра $Q(\tau)$ [5-8].

Сформулируем задачу: среди всех допустимых управлений, удовлетворяющих ограничениям (4), найти такие, которые бы минимизировали функционал (5).

2. КОНСТРУКЦИЯ ИМПУЛЬСНОГО ВАРЬИРОВАНИЯ

Пусть $\{v_0(x, t), w_0(x, t), z_{1,0}(x, t), z_{2,0}(x, t), u_0(x, t)\}$ — решение поставленной задачи, $u_0(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1) — (3), соответствующее оптимальным управлениям. Для доказательства необходимых критериев оптимальности управляющих функций $v_0, w_0, z_{1,0}, z_{2,0}$ введем в рассмотрение многоточечные импульсные вариации этих функций. Зафиксируем внутри цилиндра Q M попарно различных точек Лебега функции $v(x_j, \tau_j)$ ($j = 1, 2, \dots, M$), выберем $\beta_j^k \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, M$; $k = 1, 2, \dots, k_j$) — произвольные неотрицательные числа, $\varepsilon_1 > 0$ — малый параметр и положим

$$v_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} v_j^k \in V, & \text{если } (x, t) \in \Pi_{j,k}^\varepsilon, \\ v_0(x, t), & \text{если } (x, t) \notin \Pi_{j,k}^\varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Pi_{j,k}^\varepsilon = \left\{ (x, t) : \tau_j - \varepsilon_1 \sum_{s=1}^k \beta_j^s \leq t \leq \tau_j - \varepsilon_1 \sum_{s=1}^{k-1} \beta_j^s; x_j^q - k\varepsilon_1 \leq x^q \leq x_j^q - (k-1)\varepsilon_1 \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, k_j; q = 1, 2, \dots, n),$$

где v_j^k — некоторая постоянная из V . Рассматривая достаточно малые значения параметра ε_1 , можно добиться корректности указанной конструкции в том смысле, что параллелепипеды $\Pi_{j,k}^\varepsilon$, соответствующие различным j , не перекрываются. Для варьированного управления выполняется условие

$$v_\varepsilon(x, t) \xrightarrow{L_2(Q)} v_0(x, t) \text{ при } \varepsilon_1 \rightarrow 0.$$

Затем выбираются M_1 точек (x_l, τ_l) ($l = 1, 2, \dots, M_1$) на поверхности S и с помощью малого параметра ε_2 чисел $\tilde{\beta}_l^k \geq 0$ и постоянных $w_l^k \in W$ ($l = 1, 2, \dots, M_1$; $k = 1, 2, \dots, \tilde{k}_l$) строятся (аналогично (7)) варьированные управления $w_\varepsilon(x, t)$. В M_2 правильных гочках $x_p \in \Omega$ варьируются управления $z_1(x), z_2(x)$

$$z_{i,\varepsilon}(x) = \begin{cases} z_{i,p}^k \in Z, & \text{если } x \in \Omega_{p,k}^i, \\ z_{i,0}(x), & \text{если } x \in \bar{\Omega}_{p,k}^i, \end{cases} \quad (i = 1, 2),$$

где $\Omega_{p,k}^i = \left\{ x : x_p^s - k \sqrt{\frac{n}{v_{p,i}^k} \varepsilon_3} \leq x^s \leq x_p^s - (k-1) \sqrt{\frac{n}{v_{p,i}^k} \varepsilon_3} \right\}$, $p = 1, 2, \dots, M_2$; $s = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, k'_p$; $v_{p,i}^k \geq 0$ — произвольные числа, ε_3 — малый параметр.

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1) — (3), соответствующее варьированным управлениям $v_\varepsilon, w_\varepsilon, z_{1,\varepsilon}, z_{2,\varepsilon}$. Существование таких решений обычно гарантируется при достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

теоремой Каратеодори [7] (многомерной), ибо в данном случае выполнены основные ее предположения

$$v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon_1 \rightarrow 0]{L_2(Q)} v_0; \quad w_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon_2 \rightarrow 0]{L_2(S)} w_0; \quad z_{i,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon_3 \rightarrow 0]{L_2(\Omega)} z_{i,0} \quad (i = 1, 2).$$

Вычислим разность

$$\Delta I = I[v_\varepsilon, w_\varepsilon, z_{1,\varepsilon}, z_{2,\varepsilon}] - I[v_0, w_0, z_{1,0}, z_{2,0}] = \gamma_1 \Delta I_1 + \gamma_2 \Delta I_2 + \gamma_3 \Delta I_3.$$

$$\begin{aligned} \Delta I_1 = & \int_{\Omega} F_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) d\Omega - \int_{\Omega} F_1(0, 0, 0) d\Omega = \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla_u F_1}[x, u_0(x, T_0) + \\ & + \theta \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}, u'_{\varepsilon xi}, z_{1,\varepsilon}] \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_i \overrightarrow{\nabla_{u'_{xi}} F_1}[x, u_0, u'_{0xi} + \\ & + \theta_1 \overrightarrow{\Delta u'_{\varepsilon xi}}, z_{1,\varepsilon}] \overrightarrow{\Delta u'_{\varepsilon xi}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta_{z_i} F_1 d\Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\overrightarrow{\Delta u_\varepsilon} = u_\varepsilon(x, T_0) - u_0(x, T_0); \quad \overrightarrow{\Delta u'_{\varepsilon xi}} = u'_{\varepsilon xi}(x, T_0) - u'_{0xi}(x, T_0);$$

$$\delta_{z_i} F_1 = F_1[x, u_0(x, T_0), u'_{0xi}, z_{1,\varepsilon}(x)] - F_1[x, u_0(x, T_0), u'_{0xi}, z_{1,0}(x)].$$

В дальнейшем по нашей схеме доказательства необходимых критериев нам потребуются первые вариации всех функционалов, фигурирующих в задаче. Первую вариацию функционала I определяем как

$$\lim_{\varepsilon_k} \frac{\Delta I(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad \text{где } \varepsilon_k = \varepsilon_{1k}^{n+1} = \varepsilon_{2k}^n = \varepsilon_{3k}^n$$

— специальным образом выбранная подпоследовательность. Вариации остальных функционалов определяются аналогично. Для вычисления первой вариации преобразуем приращение ΔI к такому виду, благодаря которому предельный переход легко осуществим. С этой целью при помощи уравнения (6) получим линеаризованное уравнение для приращения $\overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}}{\partial t} \Phi(x, T_0) d\Omega - \int_{\Omega} \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon} \frac{\partial \Phi(x, T_0)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \overrightarrow{\Delta \varphi_1} \times \\ & \times \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \overrightarrow{\Delta \varphi_2} \Phi(x, 0) d\Omega + \int_Q \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}(x, t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} dQ + \\ & + \int_Q \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}(x, t)}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} dQ = \int_S \left(\frac{\partial g(\dots u_0 + \theta \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}(x, t), w_\varepsilon)}{\partial u} \right) \times \\ & \times \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}(x, t) \Phi dS + \int_S \overrightarrow{\delta_w g} \Phi dS + \int_Q \overrightarrow{\delta_v f} \Phi dQ + \\ & + \int_Q \left(\frac{\partial f(u_0 + \theta \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}(x, t), u'_{\varepsilon xi}, v_\varepsilon)}{\partial u} \right) \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}(x, t) \Phi dQ + \\ & + \int_Q \sum_i \left(\frac{\partial f(u_0, u'_{0xi} + \theta \overrightarrow{\Delta u'_{\varepsilon xi}}(x, t), v_\varepsilon)}{\partial u'_{xi}} \right) \overrightarrow{\Delta u'_{\varepsilon xi}}(x, t) \Phi dQ, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\vec{\Delta}\varphi_i = \varphi_i(x, z_{1\varepsilon}) - \varphi_i(x, z_{10}), \quad i = 1, 2;$$

$$\vec{\Delta}\vec{u}_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - u_0(x, t); \quad \vec{\Delta}\vec{u}'_{\varepsilon xi}(x, t) = u'_{\varepsilon xi}(x, t) - u'_{0xi}(x, t);$$

$$\overrightarrow{\delta}_v f = f(x, t, u_0, u'_{0xi}, v_\varepsilon) - f(x, t, u_0, u'_{0xi}, v_0);$$

$$\overrightarrow{\delta}_w g = g(x, t, u_0, w_\varepsilon) - g(x, t, u_0, w_0).$$

Рассмотрим, далее, сопряженное по отношению к уравнению (9) уравнение

$$\begin{aligned} & \int_Q \psi(x, t) \frac{\partial^2 \Phi_{1\varepsilon}}{\partial t^2} dQ + \int_Q \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi_{1\varepsilon}}{\partial x^k} dQ = \\ & = \int_Q \left(\frac{\partial f(\dots u_0 + \theta \Delta u_\varepsilon(x, t))}{\partial u} \right)^* \Phi_{1\varepsilon} \psi dQ + \\ & + \int_Q \sum_i \left(\frac{\partial \overrightarrow{f}(u'_{0xi} + \theta \vec{\Delta} u'_{\varepsilon xi})}{\partial u'_{xi}} \right)^* \Phi_{1\varepsilon} \psi'_{xi} dQ + \\ & + \int_S \left(\frac{\partial g(u_0 + \theta \Delta u_\varepsilon(x, t))}{\partial u} \right)^* \Phi_{1\varepsilon} \psi dS + \int_S \sum_i \overrightarrow{\nabla}_{u'_{xi}} F_1[x, u_0, u'_{0xi} + \theta_1 \vec{\Delta} u'_{\varepsilon xi}] \times \\ & \quad \times \psi'_{xi}(x, T_0) d\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

в котором функция $\Phi_{1\varepsilon}(x, t)$, принадлежащая $W_2^2(Q)$, удовлетворяет интегральному тождеству (10) при любой функции $\psi \in W_2^1(Q)$ и условиям на конце

$$\Phi_{1\varepsilon}(x, T_0) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_n,$$

$$\frac{\partial \Phi_{1\varepsilon}(x, T_0)}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla}_u F_1[u_0(x, T_0) + \theta \vec{\Delta} u_\varepsilon, u'_{\varepsilon xi}, z_{1\varepsilon}].$$

Обобщенные решения линейного уравнения (10) (и ему аналогичных) обладают устойчивостью по параметру ε в том смысле, что $\|\Phi_{1\varepsilon} - \Phi_{1,0}\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0$ [5-6, 8]. Это замечание является очень важным для $\varepsilon \rightarrow 0$

доказательства существования первых вариаций $\delta I, \delta l_m$ ($m = 1, \dots, m_1$) функционалов I, l_m .

Положим в (9) $\Phi = \Phi_{1\varepsilon}$, а в (10) $\psi(x, t) = \Delta u_\varepsilon(x, t)$ и, вычитая (10) из (9), получим

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \int_Q \overrightarrow{\delta}_v f \Phi_{1\varepsilon} dQ + \int_S \overrightarrow{\delta}_w g \Phi_{1\varepsilon} dS + \int_S \vec{\Delta} \Phi_2 \Phi_{1\varepsilon}(x, 0) d\Omega - \\ & - \int_S \vec{\Delta} \Phi_1 \frac{\partial \vec{\Phi}_{1\varepsilon}(x, 0)}{\partial t} d\Omega + \int_S \delta_z F_1 d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично вычисляются $\Delta I_2 = I_2[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] - I_2[0], \Delta I_3, \Delta l_m$.

$$\begin{aligned} \Delta I_2 = & \int_Q \overrightarrow{\delta_v} f \Phi_{2\varepsilon} dQ + \int_S \overrightarrow{\delta_w} g \Phi_{2\varepsilon} dS + \int_\Omega \overrightarrow{\Delta\varphi_2} \Phi_{2\varepsilon}(x, 0) d\Omega - \\ & - \int_\Omega \overrightarrow{\Delta\varphi_1} \frac{\partial \Phi_{2\varepsilon}(x, 0)}{\partial t} d\Omega + \int_Q \delta_v F_2 dQ, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\delta_v F_2 = F_2 [u_0, u'_{0xi}, v_\varepsilon(x, t)] - F_2 [u_0, u'_{0xi}, v_0(x, t)].$$

Уравнение для $\Phi_{2\varepsilon}(x, t)$ отличается от уравнения (10) свободным членом, который в этом случае равен

$$\begin{aligned} \int_Q \overrightarrow{\nabla_u} F_2 [u_0 + \theta \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}, u'_{\varepsilon xi}, v_\varepsilon] \psi dQ + \int_Q \sum_l \nabla u'_{xi} F_2 [u_0, u'_{0xi} + \theta \Delta u'_{\varepsilon xi}, v_\varepsilon] \times \\ \times \psi'_{xi} dQ, \end{aligned}$$

и краевыми условиями: $\Phi_{2\varepsilon}(x, T_0) = \frac{\partial \Phi_{2\varepsilon}(x, T_0)}{\partial t} = \overbrace{(0, 0, \dots, 0)}^n$.

$$\begin{aligned} \Delta I_3 = & \int_Q \delta_v f \Phi_{3\varepsilon} dQ + \int_S \overrightarrow{\delta_w} g \Phi_{3\varepsilon} dS + \int_\Omega \overrightarrow{\Delta\varphi_2} \Phi_{3\varepsilon}(x, 0) d\Omega - \\ & - \int_\Omega \overrightarrow{\Delta\varphi_1} \frac{\partial \Phi_{3\varepsilon}(x, 0)}{\partial t} d\Omega + \int_S \delta_w F_3 ds; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\delta_w F_3 = F_3(x, t, u_0, w_\varepsilon) - F_3(x, t, u_0, w_0).$$

В сопряженном уравнении для $\Phi_{3\varepsilon}$ свободный член равен

$$\begin{aligned} \int_S \overrightarrow{\nabla_u} F_3 [x, t, u_0 + \theta \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}, w_\varepsilon] \psi dS; \Phi_{3\varepsilon}(x, T_0) = \\ = \frac{\partial \Phi_{3\varepsilon}(x, T_0)}{\partial t} = \overbrace{(0, 0, \dots, 0)}^n, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta I_m = & \int_Q \overrightarrow{\delta_v} f \Phi'_{m\varepsilon} dQ + \int_S \overrightarrow{\delta_w} g \Phi'_{m\varepsilon} dS + \int_\Omega \overrightarrow{\Delta\varphi_2} \Phi'_{m\varepsilon}(x, 0) d\Omega - \\ & - \int_\Omega \overrightarrow{\Delta\varphi_1} \frac{\partial \Phi'_{m\varepsilon}(x, 0)}{\partial t} d\Omega, \quad m = 1, 2, \dots, m_1. \end{aligned}$$

Сопряженные уравнения для $\Phi'_{m\varepsilon}$ — однородные, свободные члены их равны 0,

$$\begin{aligned} \Phi'_{m\varepsilon}(x, T_0) = \overrightarrow{\nabla_u} G_m [u_0, \dot{u}_0 + \theta \overrightarrow{\Delta \dot{u}}], \\ \frac{\partial \Phi'_{m\varepsilon}(x, T_0)}{\partial t} = - \overrightarrow{\nabla_u} G_m [u_0 + \theta \overrightarrow{\Delta u_\varepsilon}, \dot{u}_\varepsilon]. \end{aligned}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ВАРИАЦИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

$\Delta I = \sum_{s=1}^3 \gamma_s \Delta I_s$. Покажем, что существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon_k \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{\varepsilon_k} \Delta I = \delta I, \quad (15)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_k \\ k \rightarrow \infty}} \frac{1}{\varepsilon_k} \Delta I_m = \delta I_m$$

для почти всех $(x_j, \tau_j) \in Q$, $(x_l, \tau_l) \in S$, $x_p \in \Omega$. Здесь $\varepsilon_k = \varepsilon_{1k}^{n+1} = \varepsilon_{2k}^n = \varepsilon_{3k}^n$, а δI определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{s=1}^3 \gamma_s \left\{ \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{k_j} \beta_j^k [f(x_j, \tau_j, u_0(x_j, \tau_j), u'_{0x_l}(x_j, \tau_j), v_j^k) - \right. \\ & \left. - f(\dots, v_0(x_j, \tau_j))] \Phi_{s0}(x_j, \tau_j) + \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{\tilde{k}_l} \tilde{\beta}_l^k \times \right. \\ & \times [g(x_l, \tau_l, u_0(x_l, \tau_l), w_l^k) - g(x_l, \dots, w_0(x_l, \tau_l))] \Phi_{s0}(x_l, \tau_l) + \\ & + \sum_{p=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{k_p} v_{p2}^k [\varphi_2(x_p, z_{2p}^k) - \varphi_2(x_p, z_{2,0}(x_p))] \Phi_{s0}(x, 0) - \\ & - \sum_{p=1}^{M_3} \sum_{k=1}^{k_p} v_{p1}^k [\varphi_1(x_p, z_{1p}^k) - \varphi_1(x_p, z_{1,0}(x_p))] \left. \frac{\partial \Phi_{s0}(x, 0)}{\partial t} \right\} + \\ & + \gamma_1 \sum_{p=1}^{M_3} \sum_{k=1}^{k_p} v_{d1}^k [F_1(x_p, T_{0, \dots}, z_{1p}^k) - F_1(x_p, \dots, z_{1,0}(x_p))] + \\ & + \gamma_2 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{k_j} \beta_j^k [F_2(x_j, \tau_j, u_0(x_j, \tau_j), v_j^k) - F_2(\dots, v_0(x_j, \tau_j))] + \\ & + \gamma_3 \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{\tilde{k}_l} \tilde{\beta}_l^k [F_3(x_l, \tau_l, \dots, w_l^k) - F_3(x_l, \dots, w_0(x_l, \tau_l))]. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что δI — первая вариация функционала I в смысле (15), установим, например, что

$$\begin{aligned} \|N_{jk}\|_{L_1(Q_j)} &= \left\| \frac{1}{\varepsilon} \Delta I_{jk} - \delta I_{jk} \right\|_{L_1(Q_j)} = \\ &= \left\| \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^{\varepsilon}} \overrightarrow{\delta_v f} \Phi_{10} d\Pi - \beta_j^k \delta_v f(x_j, \tau_j, u_0, u'_{0x_l}) \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j) \right\|_{L_1(Q_j)} \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow 0)} 0, \end{aligned} \quad (16)$$

N_{jk} — одно из слагаемых, входящих в разность $\frac{1}{\varepsilon} \Delta I - \delta I$; Q_j — некоторая окрестность любой правильной точки $(x_j, \tau_j) \in Q$. Имеем

$$\|N_{jk}\|_{L_1(Q_j)} \leq \left\| \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^{\varepsilon}} \overrightarrow{\delta_v f}(x, t) [\Phi_{10}(x, t) - \Phi_{10}(x_j, \tau_j)] \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times d\Pi \Big|_{L_1(Q_j)} + \left\| \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^\varepsilon} [\vec{\delta}_v f(x, t) - \delta_v f(x_j, \tau_j)] \times \right. \\ & \times \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j) d\Pi \Big|_{L_1(Q_j)} + \left\| \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^\varepsilon} \vec{\delta}_v f(x, t) [\Phi_{1\varepsilon}(x, t) - \right. \\ & \left. - \Phi_{1,0}(x, t)] d\Pi \Big|_{L_1(Q_j)} = \delta I_1^k + \delta I_2^k + \delta I_3^k, \\ \delta I_1^k &= \int_{Q_j} \left| \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^\varepsilon} \vec{\delta}_v f(x, t) [\Phi_{1,0}(x, t) - \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j)] d\Pi \right| dQ \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^\varepsilon} d\Pi \int_{Q_j} |\vec{\delta}_v f [\Phi_{1,0}(x, t) - \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j)]| dQ. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $x = x_j + \zeta$; $t = \tau_j + \tau$; $\tilde{\Pi}_{jk}^\varepsilon$ — сдвинутый параллелепипед. Тогда

$$\begin{aligned} \delta I_1^k &\leq \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\tilde{\Pi}_{jk}^\varepsilon} d\tilde{\Pi} \int_{Q_j} |\vec{\delta}_v f(x_j + \zeta, \tau_j + \tau) [\Phi_{1,0}(x_j + \zeta, \tau_j + \tau) - \\ &- \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j)]| dQ \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\tilde{\Pi}_{jk}^\varepsilon} \left\{ \int_{Q_j} |\vec{\delta}_v f|^2 dQ \right\}^{1/2} \left\{ \int_{Q_j} [\Phi_{1,0}(x_j + \zeta, \tau_j + \tau) - \right. \\ &\left. - \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j)]^2 dQ \right\}^{1/2} d\tilde{\Pi}. \end{aligned}$$

Но $f \in L_2(Q)$, поэтому $\left\{ \int_{Q_j} |\vec{\delta}_v f|^2 dQ \right\}^{1/2} \leq C$.

При $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ $|\zeta| \rightarrow 0$, $|\tau| \rightarrow 0$, и, по свойству интегральной непрерывности суммируемой функции, каково бы ни было $\delta > 0$, найдется такое $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$, что при $\varepsilon_1 < \tilde{\varepsilon}_1$ $\left\{ \int_{Q_j} [\Phi_{1,0}(x_j + \zeta, \tau_j + \tau) - \Phi_{1,0}(x_j, \tau_j)]^2 dQ \right\}^{1/2} < \delta$.

При таких ε_1 $\delta I_1^k \leq \frac{C \cdot \delta \text{mes } \Pi_{jk}^\varepsilon}{\varepsilon_1^{n+1}} = C \beta_j^k \delta$, т. е. $\delta I_1^k \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

Так же оценивается δI_2^k , а

$$\begin{aligned} \delta I_3^k &\leq \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^\varepsilon} d\Pi \int_{Q_j} |\vec{\delta}_v f(x, t) [\Phi_{1\varepsilon}(x, t) - \Phi_{1,0}(x, t)]| dQ \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon_1^{n+1}} \int_{\Pi_{jk}^\varepsilon} \left\{ \int_{Q_j} |\vec{\delta}_v f|^2 dQ \right\}^{1/2} \left\{ \int_{Q_j} [\Phi_{1\varepsilon}(x, t) - \Phi_{1,0}(x, t)]^2 dQ \right\}^{1/2} d\Pi. \end{aligned}$$

Выражение $\left\{ \int_{Q_j} [\Phi_{1\varepsilon} - \Phi_{1,0}]^2 dQ \right\}^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 0$ в силу устойчивости $\Phi_{1\varepsilon}$

в норме $L_2(Q)$, поэтому при $\varepsilon_1 \leq \tilde{\varepsilon}_1$ оно может быть сделано меньше $\delta > 0$

и $\delta I_3^k \leq C \beta_j^k \delta$, т. е. $\delta I_3^k \rightarrow 0$ при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Таким образом, $\|N_{jk}\|_{L_1(Q_j)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким же способом может быть доказано стремление к нулю других входящих в разность $\frac{1}{\varepsilon} \Delta I - \delta I$ интегралов, в нормах

пространств $L_1(S_l), \Delta_1(\Omega_p)$, где S_l — некоторые окрестности точек Лебега $(x_l, \tau_l) \in S$, Ω_p — окрестности точек $x_p \in \Omega$.

Цилиндр Q может быть покрыт окрестностями Q_j , S — областями S_l и Ω — областями Ω_p . Поэтому можно утверждать, что для почти всех $(x_j, \tau_j) \in Q, (x_l, \tau_l) \in S, x_p \in \Omega$, существует последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ такая, что $\varepsilon_k^{-1} \Delta I \rightarrow \delta I, k \rightarrow \infty$.

Аналогично доказывается существование первых вариаций δl_m функционалов $l_m (m = 1, 2, \dots, m_1)$, в смысле (15), причем

$$\begin{aligned} \delta l_m = & \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{k_j} \beta_j^k [f(x_j, \tau_j, \dots, v_j^k) - f(x_j, \dots, v_0(x_j, \tau_j))] \Phi'_{m0}(x_j, \tau_j) + \\ & + \sum_{l=1}^{M_1} \sum_{k=1}^{\tilde{k}_l} \tilde{\beta}_l^k [g(x_l, \tau_l, \dots, w_l^k) - g(x_l, \dots, w_0(x_l, \tau_l))] \Phi'_{m0}(x_l, \tau_l) + \\ & + \sum_{p=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{k'_p} v_{p2}^k [\varphi_2(x_p, z_{2p}^k) - \varphi_2(x_p, z_{20}(x_p))] \Phi'_{m0}(x_p, 0) - \\ & - \sum_{p=1}^{M_2} \sum_{k=1}^{k'_p} v_{p1}^k [\varphi_1(x_p, z_{1p}^k) - \varphi_1(x_p, z_{10}(x_p))] \frac{\partial \Phi'_{m0}(x_p, 0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

5. ПОСТРОЕНИЕ КОНУСА K И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕГО ОТДЕЛИМОСТИ

Рассматриваем величину $a = \{\delta I, \delta l_1, \delta l_2, \dots, \delta l_m\}$ как вектор в евклидовом пространстве R^{1+m_1} значений функционалов и их первых вариаций, выходящий из точки $\left\{ \min_{\bar{v}, \bar{w}, \bar{z}_1, \bar{z}_2} I, 0, 0, \dots, 0 \right\}$. Положим для удобства $\min I = 0$. Если это не так, то сдвигом по оси I перейдем к такому пространству, в котором вектор a выходит из начала координат. Каждому набору параметров

$$\mu = \{ \beta_j^k, \tilde{\beta}_l^k, v_{p1}^k, v_{p2}^k, v_j^k, w_l^k, z_{1p}^k, z_{2p}^k, (x_j, \tau_j) \in Q, (x_l, \tau_l) \in S, x_p \in \Omega \}$$

соответствует свой вектор a_μ . Совокупность векторов a_μ , которая получается при всевозможных допустимых μ , т. е. при всевозможных варьированиях оптимальных управляющих функций образует выпуклый конус K в R^{1+m_1} . Это легко показать, используя линейность первых вариаций функционалов по параметрам $\beta_j^k, \tilde{\beta}_l^k, v_{p1}^k, v_{p2}^k$.

Докажем теперь утверждение, из которого будет следовать отделимость конуса K от угла $\bar{L}: \{I \leq 0, l_m \leq 0, m = 1, \dots, m_1\}$ в R^{1+m_1} . А именно, конус K и открытый угол $L: \{I < 0, l_m < 0, m = 1, \dots, m_1\}$ не пересекаются.

Предположим противное. Тогда существуют вектор $a' \in K$ и число $\alpha > 0$, такие, что $\delta I' \leq -\alpha, \delta l_m \leq -\alpha; m = 1, \dots, m_1$. Этому вектору a' соответствуют некоторые $\Delta I', \Delta l_m, m = 1, \dots, m_1$, причем

$$\begin{aligned} \Delta I' = & I[v_\varepsilon, w_\varepsilon, z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}] - I[v_0, w_0, z_{10}, z_{20}] = \\ = & \varepsilon_k \delta I' + 0(\varepsilon_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta l'_m &= l_m [v_\varepsilon, \omega_\varepsilon, z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}] - l_m [v_0, \omega_0, z_{10}, z_{20}] = \\ &= \varepsilon_k \delta l'_m + O(\varepsilon_k) \quad (m = 1, 2, \dots, m_1). \end{aligned}$$

$\Delta I' \leq -\varepsilon_k \alpha + O(\varepsilon_k) = \varepsilon_k \left(-\alpha + \frac{O(\varepsilon_k)}{\varepsilon_k} \right) < -\frac{\varepsilon_k \alpha}{2}$ при достаточно малых

ε_k , и $\Delta l'_m < -\frac{\varepsilon_k \alpha}{2}$, $m = 1, \dots, m_1$. Отсюда следует, что $l'_m [v_\varepsilon, \omega_\varepsilon, z_{1\varepsilon},$

$z_{2\varepsilon}] < 0$, т. е. управления $v_\varepsilon, \omega_\varepsilon, z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}$, для которых получен вектор a' , удовлетворяют заданным ограничениям, являются допустимыми и, кроме того, $I[v_\varepsilon, \omega_\varepsilon, z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}] < I[v_0, \omega_0, z_{10}, z_{20}]$, значит, $v_0, \omega_0, z_{10}, z_{20}$ — неоптимальные управления. Противоречие показывает, что K и L не пересекаются, следовательно, так как L — тоже выпуклый конус, они отделимы. Существует нетривиальный линейный разделяющий функционал, т. е. существуют числа $\sigma_i, i = 0, 1, 2, \dots, m_1; \sigma_i \geq 0; \sum_{i=0}^{m_1} \sigma_i > 0$,

такие, что

$$\sigma_0 \delta I + \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m \delta l_m \geq 0, \tag{17}$$

где $\delta I, \delta l_m, m = 1, \dots, m_1$ — любые допустимые вариации функционалов.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТНОШЕНИЙ ПРИНЦИПА МИНИМУМА

Пусть варьируется только управляющая функция $v(x, t)$ при оптимальных ω_0, z_{10}, z_{20} , причем $M = 1, (x_j, \tau_j) = (x, \tau), k_j = 1, \beta_1^i = 1, v_1^i = v$. Для этого случая неравенство (17) имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_0 \{ \gamma_1 [f(x, \tau, u_0, u'_{0xi}, v) - f(\dots, v_0(x, \tau))] \Phi_{10}(x, \tau) + \\ &\quad + \gamma_2 [f(x, \tau, \dots, v) - f(x, \dots, v_0(x, \tau))] \Phi_{20}(x, \tau) + \\ &+ \gamma_2 [F_2(\dots, v) - F_2(\dots, v_0(x, \tau))] + \gamma_3 [f(\dots, v) - f(\dots, v_0(x, \tau))] \times \\ &\times \Phi_{30}(x, \tau) + \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m [f(\dots, v) - f(\dots, v_0(x, \tau))] \Phi'_{m0}(x, \tau) \geq 0, \end{aligned} \tag{18}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} &[f(x, \dots, v) - f(x, \dots, v_0(x, \tau))] \left\{ \sigma_0 \gamma_1 \Phi_{10}(x, \tau) + \sigma_0 \gamma_2 \Phi_{20}(x, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0 \gamma_3 \Phi_{30}(x, \tau) + \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m \Phi_{1m}(x, \tau) \right\} + \\ &+ \sigma_0 \gamma_2 [F_2(x, \dots, v) - F_2(x, \dots, v_0(x, \tau))] \geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

почти при всех $(x, \tau) \in Q$.

Если $\Phi(x, t) \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\int_Q \psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} dQ + \int_Q \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} dQ = \int_Q \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \right)^* \Phi \psi dQ + \\ &+ \int_Q \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial u'_{xi}} \right)^* \Phi \psi'_{xi} dQ + \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^* \Phi \psi dS + \sigma_0 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\gamma_1 \int_{\Omega} \sum_i \overrightarrow{\nabla_{u'_{xi}}} F_1 \psi'_{xi}(x, T_0) d\Omega + \gamma_2 \int_Q \overrightarrow{\nabla_u} F_2 \psi dQ + \right. \\ & \left. + \gamma_2 \int_Q \sum_i \overrightarrow{\nabla_{u'_{xi}}} F_2 \psi'_{xi} dQ + \gamma_3 \int_S \nabla_u F_3 \psi dS \right] \end{aligned}$$

при любой функции $\psi \in W_2^1(Q)$ и условиям на конце

$$\begin{aligned} \Phi(x, T_0) &= \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m \overrightarrow{\nabla_u} \overrightarrow{G}_m(u_0), \quad \frac{\partial \Phi(x, T_0)}{\partial t} = \\ &= -\sigma_0 \gamma_1 \overrightarrow{\nabla_u} \overrightarrow{F}_1[u_0] - \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m \overrightarrow{\nabla_u} \overrightarrow{G}_m(u_0), \end{aligned}$$

то из (19) получаем

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V} \{ f(x, \tau, u_0)(x, \tau), u'_{0xi}(x, \tau) v \} \Phi(x, \tau) + \sigma_0 \gamma_2 F_2(x, \tau, u_0, u'_{0xi}, v) \} = \\ = f(x, \tau, u_0(x, \tau), u'_{0xi}(x, \tau), v_0(x, \tau)) \Phi(x, \tau) + \sigma_0 \gamma_2 F_2(x, \tau, \\ u_0(x, \tau), u'_{0xi}, v_0(x, \tau)) \end{aligned} \quad (20)$$

для почти всех $(x, \tau) \in Q$.

Так же получаются соотношения принципа минимума для управляющих функций w_0, z_{10}, z_{20} . При аналогичном одноточечном варьировании управления w_0 и остальных оптимальных имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_0 \left\{ \sum_{s=1}^3 \gamma_s [g(x, \tau, u_0(x, \tau), w) - g(x, \tau, u_0(x, \tau), w_0(x, \tau))] \Phi_{s0}(x, \tau) + \right. \\ \left. + \gamma_3 [F_3(x, \tau, u_0, w) - F_3(x, \tau, u_0, w_0(x, \tau))] \right\} + \\ + \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m [g(x, \tau, u_0, w) - g(x, \tau, u_0, w_0(x, \tau))] \Phi'_{m0}(x, \tau) \geq 0. \end{aligned} \quad (18a)$$

Откуда следует, что (при той же, что в (20) функции $\Phi(x, t)$)

$$\begin{aligned} \inf_{w \in W} \{ g(x, \tau, u_0(x, \tau), w) \Phi(x, \tau) + \sigma_0 \gamma_3 F_3(x, \tau, u_0(x, \tau), w) \} = \\ = g(x, \tau, u_0(x, \tau), w_0(x, \tau)) \Phi(x, \tau) + \sigma_0 \gamma_3 F_3(x, \tau, u_0(x, \tau), w_0(x, \tau)) \end{aligned} \quad (21)$$

для почти всех $(x, \tau) \in S$.

Если варьируется только $z_{10}(x)$ и $M_2 = 1$, $k'_{p1} = 1$; $v'_{p1} = 1$, $z'_{1e} = z$, то

$$\begin{aligned} -\sigma_0 \left\{ \sum_{s=1}^3 \gamma_s [\varphi_1(x, z) - \varphi_1(x, z_{10}(x))] \frac{\partial \Phi_{s0}(x, 0)}{\partial t} + \right. \\ \left. + \gamma_1 [F_1(x, T_0, u_0(x, T_0), u'_{0xi}(x, T_0), z) - F_1(x, \dots, z_{10}(x))] - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m [\varphi_1(x, z) - \varphi_1(x, z_{10}(x))] \frac{\partial \overrightarrow{\Phi}'_{m0}(x, 0)}{\partial t} \right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (18b)$$

значит,

$$\inf_{z \in Z} \left[\sigma_0 \gamma_1 F_1(x, u_0(x, T_0), u'_{0xi}, z) - \varphi_1(x, z) \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial t} \right] = \quad (22)$$

$$= \sigma_0 \gamma_1 F_1(x, u_0(x, T_0), u'_{0xi}(x, T_0), z_{10}(x)) - \varphi_1(x, z_{10}(x)) \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial t}$$

для почти всех $x \in \Omega$.

При аналогичном варьировании $z_{20}(x)$ получаем

$$\sigma_0 \sum_{s=1}^3 \gamma_s [\varphi_2(x, z) - \varphi_2(x, z_{20}(x))] \Phi_{s,0}(x, 0) + \sum_{m=1}^{m_1} \sigma_m [\varphi_2(x, z) - \varphi_2(x, z_{20}(x))] \times \\ \times \Phi'_{m0}(x, 0) \geq 0. \quad (18в)$$

Следовательно,

$$\inf_{z \in Z} \varphi_2(x, z) \Phi(x, 0) = \varphi_2(x, z_{20}(x)) \Phi(x, 0) \quad (23)$$

при почти всех $x \in \Omega$.

Функция $\Phi(x, t)$, очевидно, одна и та же для всех соотношений (20) — (23). Эти соотношения являются необходимыми условиями оптимальности соответственно для каждой из управляющих функций u_0, w_0, z_{10}, z_{20} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
2. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Задачи на экстремум при наличии ограничений, Журн. выч. мат. и мат. физ., 5, № 3, 395 (1965).
3. А. А. Милютин, Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления, УМН, 25, вып. 5, 110 (1970).
4. Б. Н. Пшеничный, Двойственный метод в экстремальных задачах. 1, Кибернетика, № 3, 89 (1965).
5. О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, М., 1953.
6. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1967.
7. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
8. В. И. Плотников, Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций, Изв. АН СССР, сер. матем. 32, № 4, 743 (1968).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 октября 1970 г.

OPTIMIZATION OF CONTROLLED PLANT DESCRIBABLE BY NONLINEAR SET OF HYPERBOLIC EQUATIONS

Plotnikov V. I., Sikorskaya E. R.

The article presents a derivation of necessary conditions for an optimal control of a plant describable by a weakly nonlinear set of hyperbolic equations with inequalities-type limitations for phase coordinates of the system at a given finite instant.

УДК 517.11

D-МНОЖЕСТВА, Δ-МНОЖЕСТВА И НЕРАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Д. И. Коган

Вводятся некоторые обобщения понятия множества точек, задаваемого формулой арифметики Пресбургера. Показано, что обобщения приводят к неразрешимым проблемам. Полученные неразрешимости интерпретируются на моделях задач дискретного управления и в одном достаточно общем классе многошаговых игр.

В статье [1] дана замечательная геометрическая интерпретация для множеств точек, определяемых посредством формул арифметики Пресбургера (ниже такие множества будут именоваться Π-множествами). В данной работе вводится некоторая совокупность естественных, с точки зрения полученной интерпретации, обобщений понятия Π-множества. Исследуются их алгоритмические свойства. Полученные результаты свидетельствуют об отсутствии алгоритмов решения некоторых проблем дискретного управления и игровых задач.

1. Пусть I — множество всех целых, N — всех натуральных чисел; D -системой (далее просто системой) будем называть совокупность

$$\Omega = \langle n, K, A, V \rangle,$$

где $n \in N \setminus \{0\}$ (размерность системы); $K = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ — упорядоченная совокупность векторов из I^n (векторы управлений); $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — алфавит (множество управляющих воздействий); V — подмножество N^n , такое, что $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$ тогда и только тогда, когда $(sg x_1, sg x_2, \dots, sg x_n) \in V$. Здесь $sg x$ — функция, определенная на N и принимающая значения: нуль (при $x = 0$) и единица (во всех остальных случаях). Дадим ряд определений, касающихся систем.

Позиции системы Ω — элементы множества V , стратегии системы Ω — слова алфавита A , траектории — конечные последовательности позиций, такие, что если позиция S_d в траектории непосредственно следует за S_{d-1} , то вектор $\overrightarrow{S_{d-1} S_d}$ принадлежит K . Траекторию $S = S_0, S_1, S_2, \dots, S_p = T$ назовем S -реализацией стратегии $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p}$, если $\overrightarrow{S_{d-1} S_d} = l_{i_d}$ ($d = 1, 2, \dots, p$). Позицию T назовем результатом S -реализации стратегии α . Будем также говорить, что стратегия α переводит систему Ω из позиции S в позицию T . Множество всех позиций, в которые можно перевести систему Ω из позиции S , обозначим $F(\Omega, S)$. Полагаем, что $S \in F(\Omega, S)$. Позицию T именуем финальной для системы Ω и для траектории, в которую она входит, если $F(\Omega, T) = \{T\}$. D -систему Ω назовем Δ -системой, если $V = N^n$. Множество точек $X, X \subseteq N^n$, назовем D -множеством (Δ -множеством), если существуют n -мерная система (Δ -система) Ω^X и позиция этой системы S^X , такие, что $X = F(\Omega^X, S^X)$.

2. Δ -систему назовем позитивной, если множество векторов управлений этой системы K есть подмножество N^n .

Лемма 1. Множество X , $X \subseteq N^n$ линейно тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $F(\Omega, S)$, причем Ω — позитивная система.

Сформулированная лемма — непосредственное следствие определенных линейного [1] и Δ -множеств. Она дает, таким образом, другое определение линейного множества.

В [1] вводится понятие полулинейного множества (как объединения конечного числа линейных) и доказывается теорема о совпадении классов полулинейных и Π -множеств. Множество X точек из N^n назовем Δ^* -множеством, если оно является объединением конечного числа Δ -множеств. Очевидна следующая

Теорема 1. Всякое линейное множество точек является Δ -множеством. Всякое полулинейное множество точек является Δ^* -множеством.

В дополнение к теореме приведем пример Π -множества, не являющегося Δ -множеством. Таково $M = \{1, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$.

Теорема 2. Существуют Δ -множества, не являющиеся полулинейными.

Примером служит множество $F(\Omega^0, S^0)$, где Ω^0 — десятимерная Δ -система, у которой $K = \{l_1, l_2, \dots, l_{12}\}$, где

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & l_2 &= (1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), \\ l_3 &= (-1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0), & l_4 &= (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0), \\ l_5 &= (0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, 0, 1), & l_6 &= (0, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, 1), \\ l_7 &= (0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0), & l_8 &= (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, -1, 0), \\ l_9 &= (0, 0, 0, 0, -1, 1, 1, -1, 0, 1), & l_{10} &= (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1), \\ l_{11} &= (0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0), & l_{12} &= (0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, 0). \end{aligned}$$

$$S^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Действительно, каждая траектория, начальной позицией которой является S^0 , состоит из некоторого числа легко различимых частей. В первой из них к текущей позиции, чередуясь, прибавляются векторы l_1 и l_2 . Количество этих поочередных прибавлений ничем не ограничено. Конец первой части наступает при прибавлении вектора l_3 или l_4 (никакого иного из множества $K \setminus \{l_1, l_2\}$ прибавить нельзя). Последняя позиция первой части имеет вид $(0, 0, 1, 0, 0, 0, x, 0, x, -1, 0)$. На протяжении всех остальных частей траектории к текущей позиции нельзя добавить ни вектор l_1 , ни вектор l_2 . Во второй части траектории осуществляется поочередное прибавление векторов l_5 и l_6 . Конец второй части наступает не более, чем через x прибавлений и отмечается применением вектора l_7 или l_8 (никакого иного из множества $K \setminus \{l_5, l_6\}$ прибавить нельзя). В третьей части, чередуясь, добавляются векторы l_9 и l_{10} . Конец третьей части наступает не более чем через x прибавлений и отмечается применением вектора l_{11} или l_{12} (никакого иного из множества $K \setminus \{l_9, l_{10}\}$ прибавить нельзя). Описания последующих частей с четными номерами совпадают с описанием второй части, а с нечетными номерами — с описанием третьей части. Всего траектория содержит не более $(x + 1)$ -й части (x определяется в начале траектории). В результате реализации каждой из них (кроме первой) десятая координата текущей позиции может увеличиться на число, не большее x . Поэтому в любом подмножестве всех точек из $F(\Omega^0, S^0)$,

таких, что $x_7 + x_8$ равно произвольной константе c (на протяжении второй, третьей, ..., $(x + 1)$ -й частей траектории сумма x_7 и x_8 не изменяется), наибольшее значение координаты x_{10} равно c^2 . Предположим, что множество $F(\Omega^0, S^0)$ описывается некоторой формулой арифметики Пресбургера. Но тогда в арифметике Пресбургера оказывается определяемым предикат « $y = x^2$ », что неверно [2]. Таким образом, $F(\Omega^0, S^0)$ — неполулинейное Δ -множество.

Из построенного примера следует (см. [2]), что, в отличие от арифметики Пресбургера, логическое исчисление первого порядка, использующее предикаты, истинные на Δ -множествах, неразрешимо.

Теорема 3. Существуют нерекурсивные D -множества.

Доказательство теоремы излагается в Приложении 1. Идея его состоит в установлении вычислимости (в определенном смысле) полиномов посредством D -систем. Далее используется результат Матияевича [3].

С л е д с т в и е. Может быть построена D -система Ω^0 , такая, что для нее неразрешима проблема существования стратегии, переводящей систему из позиции X в позицию Y . Более того, можно указать позицию A , для которой неразрешима проблема осуществимости перевода системы Ω^0 из позиции A в позицию Y .

Множество M из N^n назовем A -множеством, если оно образует целочисленную решетку в некотором выпуклом многогранном множестве [4].

Множество M из N^n назовем B -множеством, если оно является совокупностью всех целочисленных точек, лежащих на границе некоторого выпуклого многогранного множества. Множество M назовем C -множеством, если оно является декартовым произведением конечного числа

A - и B -множеств. Множество M назовем \tilde{C} -множеством, если оно является декартовым произведением конечного числа множеств, являющихся A -множествами или их дополнениями до N^n . Всякое \tilde{C} -множество — целочисленная решетка, вообще говоря, в невыпуклом многогранном множестве.

Множество V для произвольной D -системы Ω назовем каноническим, если:

а) его можно задать посредством перечня неупорядоченных пар (обозначим его R), таких что, если $(i, j) \in R$, то никакая точка, одновременно имеющая ненулевыми i -ю и j -ю координаты, не принадлежит множеству $V(i, j = 1, 2, \dots, n$, где n — размерность системы Ω);

б) никакое число не входит более чем в одну пару перечня R .

Если множество V системы Ω каноническое и R — задающий его перечень, то мы будем называть R перечнем запрещенных для этой системы качеств.

Лемма 2. Если множество позиций D -системы является каноническим, то оно является также C - и \tilde{C} -множеством.

Доказательство очевидно.

Z -системой (\tilde{Z} -системой) назовем совокупность $W = \langle n, K, A, V, \rangle$, где $n \in N \setminus \{0\}$ (размерность системы); $K = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ — упорядоченная совокупность векторов из I^n (векторы управлений); $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — алфавит; V — C -множество (\tilde{C} -множество), являющееся подмножеством N^n . Понятия позиции, траектории, стратегии и др. определяются так же, как для D -систем.

Теорема 4. Могут быть построены Z -система (\tilde{Z} -система) Ω^0 и ее позиция A такие, что неразрешима проблема существования стратегии, переводящей систему из позиции A в позицию X .

Для доказательства достаточно отметить, что множество V системы $\tilde{\mathcal{Q}}_{PQ}$, конструируемой при доказательстве теоремы 3 (см. Приложение 1), является каноническим.

Открытым остается вопрос, верна ли эта теорема, если ограничиться только такими \tilde{Z} -системами, в которых V —целочисленная решетка выпуклого многогранного множества. Более того, ситуация не проясняется даже в случае $V = N^n$, т. е. открытым остается также вопрос о рекурсивности Δ -множеств. В ряде конкретных примеров эту рекурсивность можно показать. Например, для Δ -множеств из N^3 и для Δ -множеств, задаваемых посредством обратимых систем (система обратима, если приписанное ей множество векторов управлений вместе с каждым своим вектором содержит и вектор, ему противоположный). Однако во всех таких случаях Δ -множества оказываются рекурсивными благодаря своей полулинейности. В то же время мы знаем (теорема 2), что класс Δ -множеств является более широким, чем класс полулинейных. Вопрос о рекурсивности Δ -множеств эквивалентен одной известной открытой проблеме в теории формальных языков ([5], стр. 72).

3. Ниже рассматривается один класс позиционных игр (Δ -игры). Он близок рассматриваемым в [6], гл. 3, дискретным играм на уничтожение и является вариантом класса игр Ним [7]. Показывается наличие Δ -игр таких, что множества позиций, выигрышных для игрока, нерекурсивны.

Позиции Δ -игры—элементы множества N^n (n —размерность игры). Каждому игроку приписывается конечное множество операционных векторов: $\{V_1, V_2, \dots, V_s\}$ —для первого игрока, $\{W_1, W_2, \dots, W_t\}$ —для второго. Все операционные векторы принадлежат N^n . Игра начинается с позиции S , игроки ходят поочередно. Ход игрока определяется выбором операционного вектора из соответствующего этому игроку множества. Результатом хода является прибавление к позиции выбранного вектора и получение таким образом новой позиции. Оба игрока знают позицию перед каждым своим ходом. Игра считается законченной выигрышем первого (второго) игрока, если очередной ход должен сделать противник, но результат прибавления к создавшейся позиции любого вектора из приписанного ему множества не является позицией (т. е. не принадлежит N^n). Пусть V_1^n —множество позиций, выигрышных для первого игрока в игре U , если игра начинается с его хода (позиция выигрышная, если игрок, действуя достаточно разумно, добивается победы независимо от стратегии, избранной противником).

Теорема 5. Существуют Δ -игры с нерекурсивным множеством V_1^U .

Пример такой Δ -игры приведен в Приложении 2. В процессе его построения существенно используется D -система \mathcal{Q}_{PQ} (см. Приложение 1). Траектории этой системы, начинающиеся с позиции $S_\alpha = (\alpha, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$, вычисляют абсолютную величину полинома $P(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) - Q(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Действия первого игрока состоят в моделировании процесса вычисления (аргументы x_1, x_2, \dots, x_n , определяемые начальной частью траектории, задаются, таким образом, первым игроком). Если полином оказывается равным нулю, выигрывает первый игрок. В противном случае—ничья. Ошибка первого игрока в процессе моделирования (выход из множества V системы \mathcal{Q}_{PQ}) влечет немедленный выигрыш второго игрока. Нерекурсивность множества всех α , таких, что уравнение $P - Q = 0$ имеет решение в натуральных числах, означает неразрешимость проблемы определения по позиции—является ли она выигрышной для первого игрока.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 3. Ниже будем без дополнительных оговорок рассматривать лишь D -системы с каноническим множеством позиций V . Пусть задана D -система Ω . Каждой натуральной константе α поставим в соответствие позицию $S^\alpha = (\alpha, 1, 0, 0, \dots, 0)$. Будем говорить, что D -система α -вычисляет кортеж функций $\langle f_1(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_l(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle$, если каждую завершённую (т. е. заканчивающуюся финальной позицией) траекторию, началом которой служит S^α , можно разделить на две легко различимые части. В первой из них определяется набор (x_1, x_2, \dots, x_n) ($(x_1, x_2, \dots, x_n) \in N^n$), во второй—производится вычисление. Финальная позиция имеет вид $(0, 0, \dots, 0, f_1(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_l(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n), 1)$. При этом последнюю координату, не равную нулю, имеет только финальная позиция. Дополнительно предполагается, что в перечень запрещенных качеств не входят номера последних $(l+1)$ -й координат.

Кортеж $K = \langle f_1, f_2, \dots, f_l \rangle$ назовем αD -вычислимым, если существует D -система, α -вычисляющая его. Функцию f назовем αD -вычислимой, если αD -вычислим кортеж $\langle f \rangle$.

Утверждение 1. Функции $f_n^0(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha$, $f_n^i(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ и $f_n(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$ ($n = 1, 2, 3, \dots; i = 1, 2, \dots, n$) являются αD -вычислимыми.

Утверждение 2. Если $\langle f_1, f_2, \dots, f_l \rangle$ и $\langle g_1, g_2, \dots, g_m \rangle$ — αD -вычислимы, то αD -вычислим и кортеж $\langle f_1, f_2, \dots, f_l, g_1, g_2, \dots, g_m \rangle$.

Несложные, но громоздкие (в силу требований каноничности множества позиций V и равенства нулю первых координат финальной позиции) доказательства утверждений 1 и 2 опускаются.

Утверждение 3. Если функции f_1 и f_2 αD -вычислимы, то αD -вычислимы функции $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $|f_1 - f_2|$.

Для примера покажем αD -вычислимость $|f_1 - f_2|$. Пусть n -мерная система Ω αD -вычисляет кортеж $\langle f_1, f_2, f_1, f_2 \rangle$. Вектор размерности k у которого первые $k-p$ координаты равны нулю, будем записывать $(0^{k-p}, x_{k-p+1}, x_{k-p+2}, \dots, x_k)$. Расширим систему Ω , получив новую систему Ω' , размерность которой на восемь больше. Операционные векторы системы Ω будем считать операционными векторами системы Ω' , увеличив их размерность на восемь (добавив справа 8 нулей). Укажем дополнительные операционные векторы: $\gamma_1 = (0^{n-5}, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_2 = (0^{n-3}, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_3 = (0^{n-3}, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_4 = (0^{n-3}, -1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$; $\gamma_5 = (0^{n-3}, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$; $\gamma_6 = (0^{n-3}, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$; $\gamma_7 = (0^{n-3}, 0, -1, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$; $\gamma_8 = (0^{n-3}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_9 = (0^{n-3}, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_{10} = (0^{n-3}, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_{11} = (0^{n-3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$; $\gamma_{12} = (0^{n-3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0)$; $\gamma_{13} = (0^{n-3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1)$.

Дополнительный список запрещенных качеств: $(n-3, n+1)$, $(n-4, n+3)$, $(n-2, n+5)$, $(n-1, n+6)$. В процессе построения траектории системы Ω' , начинающейся с S^α , производится вычисление кортежа $\langle f_1, f_2, f_1, f_2 \rangle$. Затем применяется вектор γ_1 до тех пор, пока $(n-4)$ -я или $(n-3)$ -я координата текущей позиции не станет равной $|f_1 - f_2|$. Затем, в зависимости от того, какая из координат стала равной значению искомой функции, применяется вектор γ_2 или γ_3 (см. дополнительный список запрещенных качеств). После применения $\gamma_2(\gamma_3)$ наступает

этап попеременного применения векторов γ_4 и γ_5 (γ_6 и γ_7), переносящих $|f_1 - f_2|$ на место, соответствующее $(n + 7)$ -й координате. После окончания процесса переноса применяются векторы γ_8 или γ_9 (γ_{10} или γ_{11}) (см. дополнительный список запрещенных качеств). Процесс вычисления заканчивается применением вектора γ_{12} (γ_{13}).

Утверждение 4. Пусть $P(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n)$ полиномы с натуральными коэффициентами. Тогда функция $|P - Q|$ является αD -вычислимой.

Данное утверждение является следствием предыдущих. Возьмем P и Q такими, что уравнение $P(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет решения в натуральных числах тогда и только тогда, когда α принадлежит рекурсивному множеству M_0 [3]. Построим систему Ω_{PQ} , вычисляющую $|P - Q|$. Пусть $\tilde{\Omega}_{PQ}$ — система, полученная из Ω_{PQ} изменением направлений всех операционных векторов на противоположные. Пусть $S_1 = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$. Тогда $F(\tilde{\Omega}_{PQ}, S_1)$ есть множество нерекурсивное. Действительно, $(\alpha^0, 1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ принадлежит $F(\tilde{\Omega}_{PQ}, S_1)$ тогда и только тогда, когда уравнение $P(\alpha^0, x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(\alpha^0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет натуральные решения. Рекурсивность $F(\tilde{\Omega}_{PQ}, S_1)$ влекла бы за собой рекурсивность M_0 , что не верно по предположению.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример, доказывающий теорему 5. Пусть посредством системы Ω α -вычисляется $|P(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n) - Q(\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n)|$ (см. Приложение 1). Предположим, что эта система m -мерная. Рассмотрим $(m + 6)$ -мерную Δ -игру U . Операционные векторы игроков разделим на два класса: текущие (T_1 для первого и T_2 для второго игрока) и финальные (F_1 и F_2). Класс текущих векторов первого игрока состоит из подклассов T_1' и T_1'' . Положим $(x_1, x_2, \dots, x_{m+6}) \in T_1'$ тогда и только тогда, когда:

а) $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in K$ (K — множество операционных векторов системы Ω); б) $(x_{m+1} = 1) \wedge (x_{m+2} = -1)$ или $(x_{m+1} = -1) \wedge (x_{m+2} = 1)$; в) $x_{m+3} = x_{m+4} = x_{m+5} = x_{m+6} = 0$. В T_1'' входят два вектора, у одного из них $x_m = -1$, а $x_{m+5} = 1$, у другого $x_m = 1$, $x_{m+5} = -1$; все остальные координаты этих векторов нулевые. Класс T_2 состоит из векторов $(0, 0, 0, \dots, 0, -1, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, \dots, 0, 1, -1, 0, 0)$. Класс F_1 состоит из двух векторов, $(0, 0, \dots, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 1)$ и $(0, 0, \dots, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0)$. Класс F_2 состоит из двух подклассов, F_2' и F_2'' . Вектор $(x_1, x_2, \dots, x_{m+6}) \in F_2'$, если:

а) ровно две из первых m координат отличны от нуля, они равны единице, номера этих координат образуют пару, входящую в список запрещенных качеств системы Ω :

$$\text{б) } x_{m+3} = x_{m+4} = x_{m+5} = x_{m+6} = 0;$$

в) одна из координат x_{m+1}, x_{m+2} равна минус единице, другая равна нулю. Классу F_2'' принадлежит только вектор $(0, 0, \dots, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1)$.

Если игра начинается с позиции $(\alpha, 1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ ходом первого игрока, то он, применяя текущие векторы из T_1' , очевидным образом моделирует процесс вычисления $|P - Q|$ D -системой Ω . Выбор аргументов x_1, x_2, \dots, x_n принадлежит первому игроку. Ошибка первого игрока в процессе моделирования (она может состоять лишь

в «выходе из образа области V ») вызывает возможность применения вторым игроком вектора из F_2' , что влечет немедленный его выигрыш. Пока первый игрок моделирует процесс вычисления, второй поочередно ходит двумя векторами из T_2 . После окончания процесса счета, если абсолютная величина $|P - Q|$ оказалась неравной нулю, игрок попеременно применяет векторы из T_1' , обеспечивая тем самым ничью. Применив вектор из F_1 он выигрывает, но лишь при условии $|P - Q| = 0$. Если первый игрок применил вектор из F_1 в случае $|P - Q| \neq 0$, то второй игрок, используя вектор из F_2'' , добивается победы. Итак, построенная Δ -игра удовлетворяет требованиям, изложенным в описании структуры доказательства теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ginsburg S., Spanier E. Semigroups, Presburger Formulas and Languages, *Pacific J. Math*, **16**, № 2, 285 (1966).
2. Robinson R., Restricted, set-theoretical definitions in arithmetic, *Pros, Amer. Math. Soc.*, **9** № 2, 238 (1958).
3. Ю. В. Матиясевиц, ДАН СССР, **191**, № 6, 279 (1970).
4. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, изд Наука, М., 1969.
5. Kral J. On Multiple Grammars, *Kybernetika*, **5**, № 1, 60 (1969).
6. Р. Айзекс, Дифференциальные игры, изд Мир, М., 1967.
7. К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 февраля 1971 г.

D -SETS, Δ -SETS AND UNSOLVABLE PROBLEMS OF DISCRETE CONTROL

Kogan D. I.

Some generalizations of a points set notion given by a Presburger formula are introduced and shown to lead to unsolvable problems. The obtained unsolvabilities are interpreted on models of discrete control problems and on game problems.

УДК 62-507

КОЛЛЕКТИВ НЕЗАВИСИМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ КАК ПОИСКОВАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ СИСТЕМА

В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Е. И. Ронин

Приводятся результаты математических экспериментов, имеющих целью дальнейшее выяснение поисковых и оптимизационных возможностей коллектива независимых автоматов.

Работа содержит описание результатов математических экспериментов (проведенных на ЭВМ типа М-20), имеющих целью дальнейшее выяснение поисковых и оптимизационных возможностей коллектива независимых автоматов. Результаты предшествующих математических экспериментов содержатся в работах [1, 2]. В этих экспериментах строго выдерживается принцип независимости, поскольку основным стимулом работы было желание на примере поиска минимума функции многих переменных понять, каким образом независимые простые действия могут иметь своим результатом сложное целесообразное поведение, никак не предусмотренное создателями системы.

Коллектив независимых автоматов естественно ассоциируется с биологической системой. Однако эти ассоциации скорее могут относиться к принципам работы, чем к конкретным аналогиям.

Такие ассоциации с биологическими системами возникают и в связи с необыкновенной надежностью коллектива независимых автоматов, с его способностью к почти полной компенсации весьма значительных внутренних неисправностей и внешних помех.

Описываемые в работе эксперименты разбиваются на несколько групп. В разделах 1—3 экспериментально показывается, что коллектив независимых стохастических автоматов способен минимизировать функцию многих переменных при наличии ограничений на входящие в нее переменные, что он может осуществлять поиск оптимального режима динамического объекта (осуществлять экстремальное регулирование). Приводятся также некоторые результаты по оптимизации непрерывным аналогом независимых дискретных автоматов.

В разделах 4—6 описываются результаты ряда попыток улучшить качественные показатели поиска минимума функции путем введения большего числа возможных шагов (переменный шаг и различные шаги, автоматы с большим числом действий).

В заключение подчеркнем, что при изложении результатов экспериментов авторы намеренно не стремились ни к формализации, ни к обобщениям.

1. ПОИСК МИНИМУМА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Ниже описываются результаты экспериментов по минимизации функций $z = f(x_1, \dots, x_n)$ при наличии ограничений на возможные значения параметров x_1, \dots, x_n , задаваемых системой неравенств вида

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad (1.1)$$

определяющих область R допустимых значений переменных x_1, \dots, x_n .

Оптимизацию будем осуществлять с помощью системы, структурная схема которой изображена на рис. 1. Как и в работе [1], $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ — автоматы, перерабатывающие значения оптимизируемой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в значения переменных x_1, \dots, x_n , которые поступают в блок ограничений (БО). Блок осуществляет проверку выполнения ограничений (1.1), накладываемых на оптимизируемые переменные.

Были рассмотрены два способа контроля и исправления нарушения ограничений. Первый способ использовался в случае ограничений вида

$$a_j \leq x_j \leq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

В этом случае блок БО оставлял без изменения значения тех переменных, изменения которых нарушали ограничения (1.2). Во втором способе при нарушении ограничения все координаты оставались без изменения, а автоматы штрафовались.

В качестве минимизируемой функции была взята функция $z = x_1^2 + x_2^2$. Рассматривались ограничения двух видов: $x_1 \geq 1$ и $(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 \geq 1$. Оптимизирующие автоматы брались с двумя и тремя действиями, с памятью $m = 1, 2, 3, 4$. Графы переходов автоматов с двумя и тремя действиями изображены на рис. 2 а, б. В первом

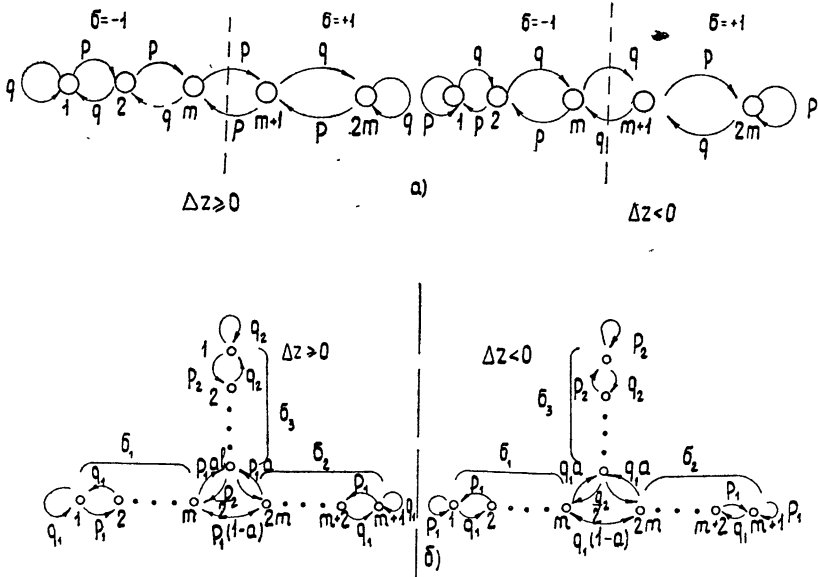


Рис. 2.

случае автомат имеет два выходных значения $\sigma = \pm 1$, а в случае автомата с тремя действиями выходная переменная σ имеет три значения $-1, 0$ и $+1$. Вероятности смены состояний при $\Delta z > 0$ (штраф) и $\Delta z \leq 0$ (поощрение) изображены непосредственно на графах (рис. 2 а, б).

В обоих случаях происходил поиск минимума с движением изображающей точки вдоль границы области, ограничивающей допустимые значения переменных. На рис. 3 приведены графики распределений вероятностей числа шагов перехода в ϵ -окрестность минимума ($\epsilon = 0,1$) из начальной точки $x_1^0 = 8, x_2^0 = 8$ для ограничения $x_1 \geq 1$ и различных описанных выше типов блоков ограничения (первого типа кривая 1 и второго—2). На рис. 4 приведены такие же графики распределения

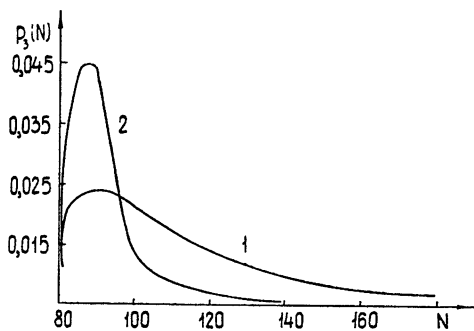


Рис. 3.

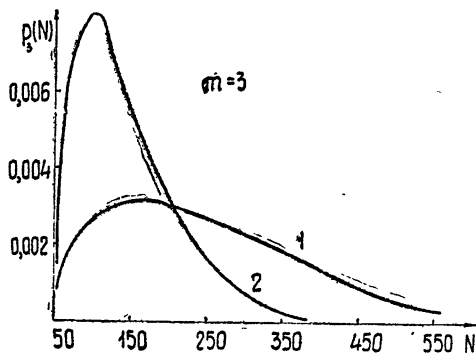


Рис. 4.

вероятностей числа шагов для второго ограничения $(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 \geq 1$ и автоматов с двумя (кривая 1) и тремя действиями (кривая 2).

В табл. 1 приведены значения установившейся точности поиска минимума δ для блоков БО первого и второго типов и ограничения на оптимизируемые параметры $x_1 \geq 1$.

В табл. 2 приведены аналогичные результаты для ограничения $(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 \geq 1$ при поиске автоматами с двумя и тремя действиями.

Таблица 1

БО \ m	1 тип.	2 тип.
1	1,438	1,538
2	1,487	1,616
3	1,568	1,802
4	1,791	1,85

Таблица 2

m \ действие	1	2 действия	3 действия
1	0,20	0,27	
2	0,45	0,38	
3	0,472	0,48	
4	0,893	0,49	

2. КОЛЛЕКТИВ НЕЗАВИСИМЫХ АВТОМАТОВ КАК СИСТЕМА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

На рис. 5 приведена структурная схема системы экстремального регулирования, реализованной коллективом независимых автоматов. По сравнению с рассматриваемой ранее системой поиска минимума функции многих переменных $z = f(x_1, \dots, x_n)$ новым в ней является временной блок. Эксперименты проводились для временного блока первого и второго порядков, описываемых соответственно уравнениями

$$T(W_n - W_{n-1}) + W_n = z_n, \tag{2.1}$$

$$T^2 W_{n+2} + (2\xi T - 2T^2) W_{n+1} + (T - 2\xi T + 1) W_n = z_n, \tag{2.2}$$

которые можно рассматривать как дискретные аппроксимации непрерывных звеньев первого и второго порядков. Эти звенья устойчивы соответственно при $T > -1/2$ и при значениях параметров, принадлежащих области плоскости T, ξ , изображенной на рис. 6.

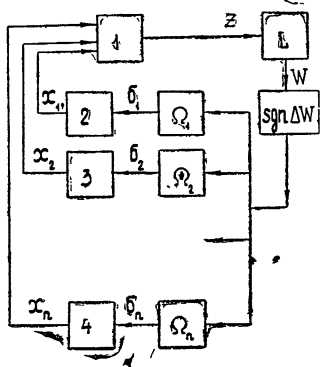


Рис. 5. 1 — $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
2 — $x_1^t = x_1^{t-1} + \sigma_1 a$, 3 — $x_2^t = x_2^{t-1} + \sigma_2 a$, 4 — $x_n^t = x_n^{t-1} + \sigma_n a$.

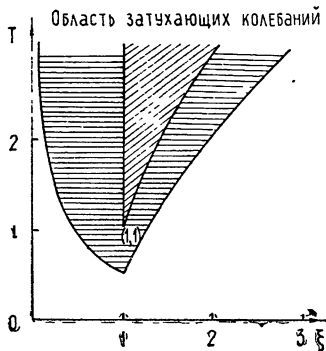


Рис. 6.

Результаты экспериментов с детерминированными автоматами при двух переменных приведены в табл. 3.

Таблица 3

$T \backslash m$	$m_1=1, m_2=2$	$m_1=1, m_2=3$	$m_1=2, m_2=3$	$m_1=2, m_2=5$	$m_1=4, m_2=5$
0	0,043	0,08	0,13	0,23	0,46
1	0,086	0,19	0,27	0,40	0,71
3	0,149	0,21	0,4	0,70	1,11
6	0,168	0,41	0,68	1,04	2,05

В табл. 3 указаны значения точности поиска минимума для звена (2.1) при различных значениях параметра T и различных значениях m_1 и m_2 памяти автоматов Ω_1 и Ω_2 . Установившимся режимом поиска в каждом из этих случаев является одно из нескольких периодических движений.

Следующий эксперимент проводился со стохастическим автоматом для временных звеньев вида (2.1) и (2.2) для функции с числом переменных n от 2 до 10 вида

$$z = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (2.3)$$

При этом изучалась зависимость среднего числа шагов поиска N_{cp} , точности и разброса поиска δ и d от параметров временных звеньев T и ξ , памяти и вероятности перехода стохастических автоматов m и p . Шаг α всюду был один и тот же ($\alpha = 0,1$).

Эти эксперименты показали, что с ростом временной постоянной T время поиска N_{cp} возрастает и существует оптимальное значение памяти и вероятности p . На рис. 7 а приведен типичный график зависимости δ от временной постоянной T . Для звена второго порядка на рис. 7 б приведен примерный график для линий равных значений δ на плоскости T, ξ ($p = 0,95, m = 3$).

Зависимость δ от p имеет выраженный оптимум. Типичный график этой зависимости показан на рис. 8 а. В рамках приведенного эксперимента наименьшее значение δ всегда было при памяти $m = 1$. Разброс

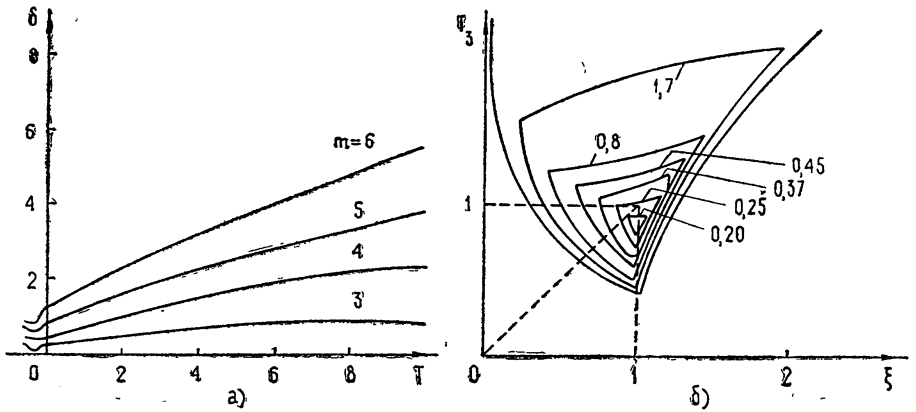


Рис. 7.

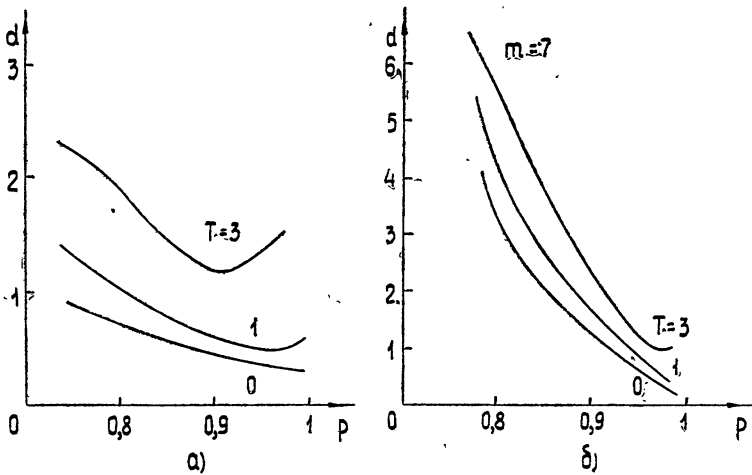


Рис. 8.

поиска d имеет оптимум по p . Один из графиков зависимости d от p при разных T изображен на рис. 8 б. Описанная система осуществляет поиск минимума и при наличии шумов, когда величина

$$\Delta z = \Delta f(x_1, \dots, x_n) + K(\xi - 0,5), \tag{2.4}$$

где ξ — псевдослучайная величина с равномерным распределением на промежутке $[0, 1]$. Однако, естественно, с ростом K точность поиска убывает.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫМ АНАЛОГОМ НЕЗАВИСИМЫХ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

Дальнейший эксперимент состоял в замене дискретных детерминированных автоматов непрерывными. Соотношение между входом $s(t)$ и выходом $f(t)$ непрерывных автоматов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями вида

$$T_i \dot{\varphi}_i + \varphi_i = -\operatorname{sgn} \varphi_i s(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.1)$$

$$f_i(t) = \operatorname{sgn} \varphi_i,$$

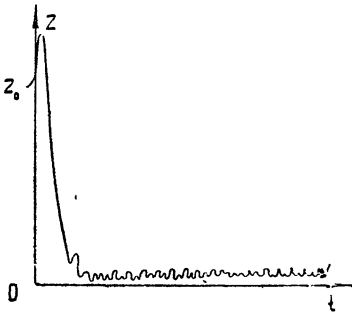


Рис. 9.

где φ — переменная внутреннего состояния автомата. Эксперимент проводился для функций от двух до четырех переменных, обнаружена способность систем к поиску минимума. При этом, в противоположность тому, что имело место при дискретной реализации, никогда не было заикливания. Даже при равных значениях постоянных T_i , являющихся аналогом глубины памяти, система не закидывалась и осуществляла отыскание минимума. Это объясняется наличием шумов, неизбежных при непрерывной реализации системы. Типичный график процесса поиска показан на рис. 9

4. ПОИСК МИНИМУМА ФУНКЦИИ КОЛЛЕКТИВОМ АВТОМАТОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

В описываемых ниже экспериментах менялась величина шага, который, однако, оставался одним и тем же для всех автоматов. Изменение этой общей для всех автоматов величины шага проводилось одним из следующих трех способов:

$$\alpha = \begin{cases} \bar{\alpha} & (\Delta z \leq 0) \\ \alpha & (\Delta z > 0) \end{cases}, \quad (4.1)$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha & (\Delta z > 0) \\ \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_1 \frac{(\Delta z)^2}{1 + (\Delta z)^2} & (\Delta z \leq 0) \end{cases}, \quad (4.2)$$

$$\alpha = \begin{cases} \bar{\alpha} & (\Delta z > 0) \\ \bar{\alpha}_1 & (-\Delta \leq \Delta z \leq \Delta) \\ \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \frac{(\Delta z - \Delta)^2}{1 + (\Delta z - \Delta)^2} & (\Delta z < -\Delta) \end{cases} \quad (4.3)$$

Соответствующие зависимости длины шага от величины текущего приращения величины z изображены на рис. 10. Числа на графике показывают, к какому из способов относится тот или иной отрезок графика зависимости α от Δz . В качестве минимизируемых функций были взяты симметричная функция $z = x_1^2 + x_2^2$ и овражная функция $z = x_1^2 + 10x_2^2$ с направлением оврага, сильно отличающимся от одного из возможных направлений среди четырех поисковых движений.

В табл. 4 приведены значения среднего времени поиска T из начальной точки $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ и точности поиска

в зависимости от памяти m при $p = 0,9$ для каждого из описанных трех способов изменения шага α .

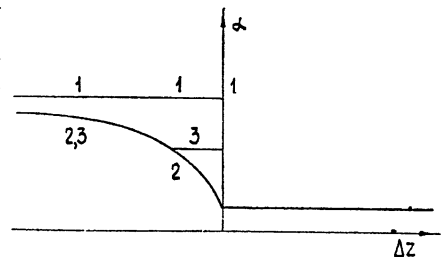


Рис. 10.

Т а б л и ц а 4

		$z = x_1^2 + x_2^2$			
		$\alpha = 0,1$	(4.1)	(4.2)	(4.3)
δ	$m=1$	0,031	0,124	0,0003	0,127
	$m=2$	0,180	0,720	0,0021	0,751
	$m=3$	0,369	1,240	0,0037	1,220
T	$m=1$	146	89	268	57
	$m=2$	121	68	79	39
	$m=3$	118	65	55	39
		$z = x_1^2 + 10 x_2^2$			
δ	$m=1$	0,262	0,969	0,002	0,98
	$m=2$	1,056	1,338	0,010	1,359
	$m=3$	1,996	1,441	0,126	1,412
T	$m=1$	232	172	393	138
	$m=?$	216	155	383	119
	$m=3$	189	158	372	136

В первой колонке каждой из таблиц для сравнения приведем такие же данные в случае поиска с фиксированным шагом $\alpha = 0,1$.

5. УВЕЛИЧЕНИЕ ЧИСЛА ПОИСКОВЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ЗА СЧЕТ ВВЕДЕНИЯ ДУБЛЕРОВ

Каждый из автоматов Ω_i заменяется несколькими автоматами, имеющими общую входную переменную $\text{sgn}(\Delta z)$ и выходную переменную, равную сумме выходных значений каждого из автоматов. При таком введении дублеров величины шагов α_i по каждой из переменных x_i получают несколько различных значений, зависящих от числа дублеров. В эксперименте число дублеров бралось равным 2 и 3. При этом числа, различных величин шагов равны соответственно 3 и 5, что соответствует 3^n и 4^n различным поисковым движениям в пространстве x_1, \dots, x_n . Напомним, что при фиксированном шаге таких различных поисковых движений 2^n . В качестве пробных функций использовались овражные функции с направлениями dna, совпадающими и не совпадающими с направлением одного из поисковых движений:

$$z(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (|x_1 - x_2| + 10 |x_1 + x_2|), \quad (5.1)$$

$$z(x_1, x_2) = |x_1| + 10 |x_2|. \quad (5.2)$$

Кроме того, исследовался поиск и для функций от четырех и восьми переменных вида

$$z = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} |x_i| \quad (n = 4, 8). \quad (5.3)$$

На рис. 11 а, б изображены траектории движения изображающей точки (x_1, x_2) с отметками числа шагов при поиске в случае (5.1) без

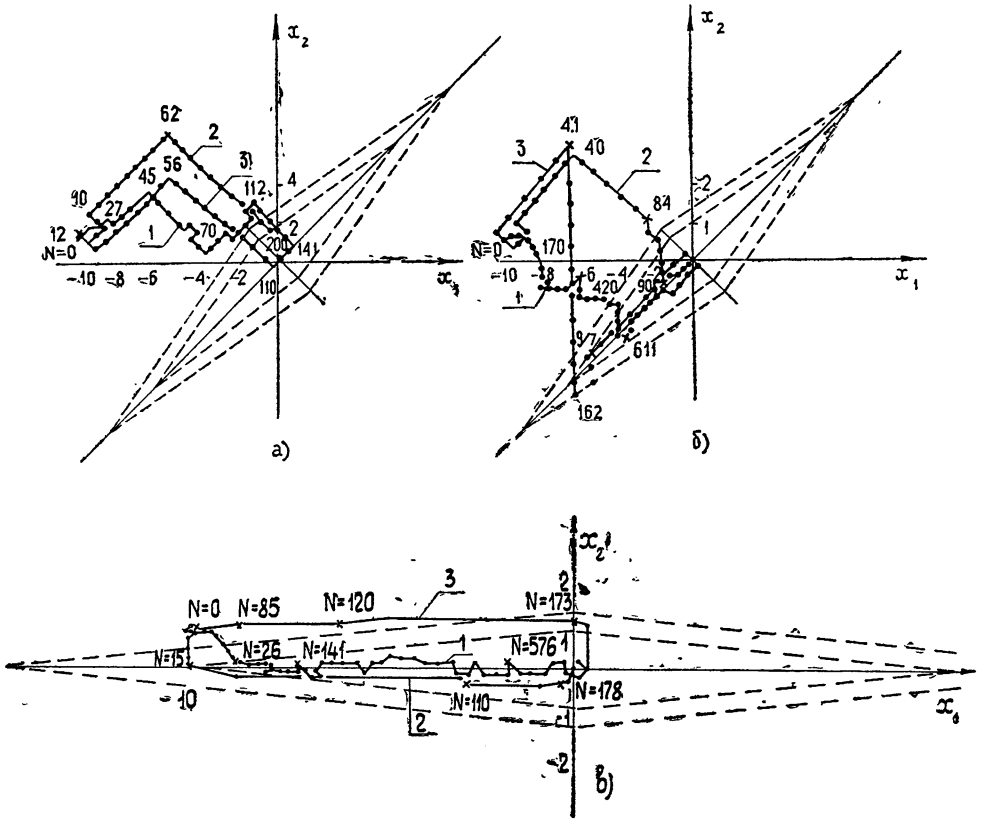


Рис. 11. а) $m = 1$, кривая 1, $m = 2$, кривая 2, $m = 3$, кривая 3, $T_1 = 160$, $T_2 = 216$, $T_3 = 110$, без дублеров; б) $m = 1$, кривая 1, $m = 2$, кривая 2, $m = 3$, кривая 3, $T_1 = 824$, $T_2 = 272$, $T_3 = 1605$, с двумя дублерами; в) $m = 1$, кривая 1, $m = 2$, кривая 2, $m = 3$, кривая 3, $T_1 \approx 760$, $T_2 \approx 386$, $T_3 \approx 932$; T — время прихода в $\varepsilon = 0,1$ окрестности точки $(0,0)$; $z = |x_1| + 10|x_2|$.

дублеров ($k = 1$) и сдублерами ($k = 2$) для $p = 0,9$ и $m = 1, 2, 3$. На рис. 11 в приведены такие же траектории движения изображающей точки в случае функции вида (5.2) с числом дублеров $k = 2$, $p = 0,9$ и $m = 1, 2, 3$. Заметим, что в последнем случае без дублирования поиск не имеет места. Напротив, в случае, когда направление оврага совпадает с одним из поисковых движений, введение дублеров или увеличение их числа приводит к существенному замедлению поиска. В экспериментах изучалась зависимость среднего времени поиска T_{cp} и точности поиска δ от числа дублеров k , памяти одинаковых стохастических автоматов m и размерности n для функций (5.1) — (5.3) и $p = 0,9$. При этом выяснилось, что T_{cp} имеет оптимум по памяти m и числу дублеров, который зависит от размерности n .

6. УВЕЛИЧЕНИЕ ЧИСЛА ПОИСКОВЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ЗА СЧЕТ УВЕЛИЧЕНИЯ ЧИСЛА ДЕЙСТВИЙ НЕЗАВИСИМЫХ АВТОМАТОВ

В описываемых ниже экспериментах число поисковых движений увеличилось за счет использования автоматов с большими чем два действиями. К имеющимся ранее возможным значениям выхода авто-

матов +1 и -1 добавлялся нулевой выход. При этом было обнаружено не только расширение возможностей поиска, связанное с увеличением числа поисковых направлений, но и увеличение точности поиска δ за счет возможности замораживания переменных, которое происходит при попадании автомата в состояния, соответствующие нулевому выходу. Для увеличения влияния «замораживания» на точность поиска, $\Delta z = 0$ было отнесено к поощрению автоматов. Эксперимент проводился для симметричной функции

$$z = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (n = 2, 5), \tag{6.1}$$

для овражных функций вида

$$z = x_1^2 + 10 x_2^2, \tag{6.2}$$

$$z = 2,75(x_1^2 + x_2^2) - 4,5 x_1 x_2 \tag{6.3}$$

и функции Розенброка

$$z = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \tag{6.4}$$

с параболическим дном оврага. Зависимость точности поиска δ глубины памяти m в случае минимизации функции (6.1) с $n = 2$ и 5 приведена в табл. 5. В таблице в скобках приведены соответствующие значения δ для автоматов с двумя действиями.

Таблица 5

		m			
		1	2	3	4
δ	$n = 2$	0,057 (0,031)	0,16 (0,18)	0,361 (0,369)	0,489 (0,517)
	$n = 5$	0,383 (0,218)	1,15 (1,16)	2,04 (3,369)	3,87 (4,358)

На рис. 12 а приведены распределения числа шагов поиска минимума функции (6.2) (кривая 1) и (6.3) (кривая 2) автоматами с тремя

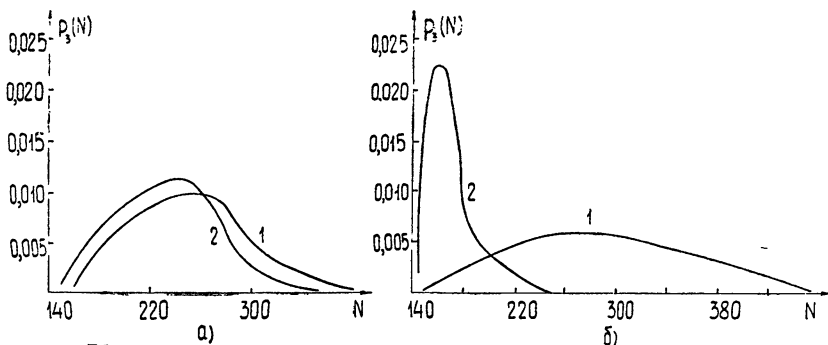


Рис. 12.

действиями. Для сравнения на рис. 12 б приведен аналогичный график для автоматов с двумя действиями. Из этих графиков видно, что в случае, когда направление дна оврага не совпадает ни с одним из поисковых движений автоматов с двумя действиями, переход к автомату с

тремя действиями приводит к значительному сокращению времени поиска. Все графики рис. 12 а, б приведены в случае $m = 3$. В табл. 6 и 7 в дополнение к этим графикам представлены данные, показывающие зависимость $T_{\text{ср}}$ и δ от m в случае минимизации функции (6.2). В этих таблицах в скобках приведены соответствующие данные для автоматов с двумя действиями. Кроме того, в табл. 7 приведены значения δ при минимизации функции (6.3).

Таблица 6

		m				
		1	2	3	4	5
$T_{\text{ср}}$	3 действия	330	220	250	260	270
	2 действия	460	382	320	411	470

Таблица 7

m		(6.2)		(6.3)	
		2 действия	3 действия	2 действия	3 действия
δ	$m = 1$	0,203	0,37	0,186	0,3
	$m = 2$	1,111	0,85	1,047	1,005
	$m = 4$	3,54	2,93	3,165	2,18
	$m = 5$	4,38	3,83	5,52	3,56

Для функции Розенброка данные по времени поиска независимыми автоматами с двумя и тремя действиями приведены на рис. 13. При этом

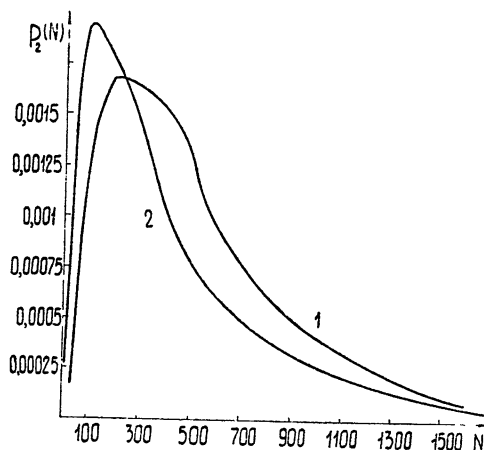


Рис. 13.

$m = 2$, $\rho = 0,9$ и $\alpha = 0,1$. В качестве начальной точки поиска бралась точка $x_1 = -1,2$, $x_2 = +1$. Заметим, что значение памяти $m = 2$ является оптимальным как для автоматов с двумя, так и тремя действиями. При $m = 1$ автоматы с тремя и двумя действиями ищут минимум достаточно плохо, причем автоматы с тремя действиями — медленнее, чем с двумя. Напротив, при $m = 3, 4, 5$ поиск автоматами с тремя действиями более быстрый, чем с двумя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапопорт, Ученые записки НИИ ПМК и ВМК, Горький, 1967, стр. 148.
2. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 7, 1019 (1968).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 декабря 1970 г.

AUTONOMOUS STOCHASTIC AUTOMATA COLLECTIVE
AS SEARCH OPTIMIZATION SYSTEM

Grigorenko V. P., Neimark Yu. I., Rapoport A. N. Ronin Ye. I.

Results of mathematical experiments aiming at further ascertainment of search and optimization capacity of an autonomous automata collective are presented.

УДК 62 — 501 32

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВОЙНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

С. В. Шильман, Т. М. Шестакова

Установлены частотные условия абсолютной устойчивости ряда нелинейных автоматических систем с двойной модуляцией (с двойной импульсной, с импульсной и непрерывной). Эти условия выражены непосредственно через частотные характеристики линейной части

Частотные условия абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с нелинейными характеристиками из угла $[0, \rho_0]$, а также при дополнительных ограничениях на нелинейности были получены в работах Я. З. Цыпкина [1,2], Э. Джури и Б. Ли [3], В. А. Якубовича [4,5] и другими авторами [6].

В статье рассматривается класс нелинейных импульсных систем с двойной модуляцией, не охватываемый перечисленными исследованиями. Для них на основе результатов [4,5] выводятся частотные критерии, дающие достаточные условия абсолютной устойчивости для систем указанного класса.

1. АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ДВОЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Рассмотрим систему, содержащую два импульсных элемента (ИЭ): нелинейный (НИЭ) и линейный (ЛИЭ), отношение периодов повторения которых рационально $\left(\frac{T_1}{T_2} = \frac{N_2}{N_1}\right)$ (рис. 1). Будем считать, что НИЭ представим в виде последовательного соединения обычного нелинейного элемента (НЭ) с характеристикой $f(\sigma)$ и идеального импульсного элемента (ИИЭ). ЛИЭ можно представить в виде последовательного соединения ИИЭ и линейных звеньев, которые на рис. 1 присоединены к линейной части системы. Линейная часть системы разделена ИИЭ на две независимые линейные части с импульсными переходными функциями $k_1(t)$ и $k_2(t)$.

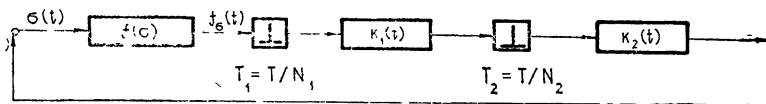


Рис. 1.

ИИЭ с периодом повторения $T_1 = T/N_1$ может быть заменен параллельным соединением N_1 ИЭ, имеющих период повторения $T = N_1 T_1$ и работающих несинфазно со сдвигом $\epsilon_s = (s-1)/N_1$ ($s = 1, \dots, N_1$), а ИИЭ с периодом повторения $T_2 = T/N_2$ — параллельным соединением N_2 ИЭ с периодом повторения $T = N_2 T_2$, работающих со сдвигом $\epsilon_r = (r-1)/N_2$ ($r = 1, \dots, N_2$).

Назовем D -преобразованием $\sigma(nT + \epsilon T)$ [7] выражение

$$D\{\sigma(nT + \varepsilon T)\} = \sigma^*(j\omega, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(nT + \varepsilon T) e^{-i\omega nT},$$

где n — целые числа, ε — параметр, $0 \leq \varepsilon < 1$. Согласно [7] уравнение рассматриваемой системы относительно изображений в смысле D -преобразования будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma^*(j\omega, \varepsilon) = & - \sum_{s=1}^{N_1} \sum_{r=1}^{N_2} K_1^* \left(j\omega, \frac{r-1}{N_2} - \frac{s-1}{N_1} \right) \times \\ & \times K_2^* \left(j\omega, \varepsilon - \frac{r-1}{N_2} \right) f^* \left(j\omega, \frac{s-1}{N_1} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $K_1^*(j\omega, \varepsilon)$ и $K_2^*(j\omega, \varepsilon)$ — частотные характеристики линейных частей системы, а

$$f^* \left(j\omega, \frac{s-1}{N_1} \right) = D \left\{ f \left[\sigma \left(nT + \frac{s-1}{N_1} T \right) \right] \right\}.$$

Условимся обозначать

$$f \left[\sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right] = f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right).$$

Будем считать, что существуют квадратичные формы

$$F_j \left(f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right)$$

аргументов $f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right)$ и $\sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right)$, такие, что в процессе работы системы для $n \geq n_0$ (n_0 фиксировано) выполняется

$$\begin{aligned} \Phi_j = \sum_{\nu=1}^{N_1} F_j \left(f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right) \geq 0 \quad (1.2) \\ (j = 1, \dots, p); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_j = \sum_{\nu=1}^{N_1} F_j \left(f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right) = 0 \quad (1.3) \\ (j = p+1, \dots, p+q). \end{aligned}$$

Вместо (1.2) может выполняться

$$\sum_{h=n_0}^N \sum_{\nu=1}^{N_1} F_j \left(f_{\sigma} \left(hT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right) = \sum_{h=n_0}^N \Phi_j \geq \gamma_j \quad (1.4)$$

для любых $N \geq n_0$, где γ_j не зависят от N ; они могут зависеть от σ_0 , при этом

$$\gamma_j \rightarrow 0 \text{ при } |\sigma_0| \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Условию (1.2) поставим в соответствие параметр $\tau_j \in [0, +\infty)$, а (1.3) — $\tau_j \in (-\infty, +\infty)$ и назовем эти значения τ_j допустимыми. Построим форму

$$\Phi = \sum_{j=1}^{p+q} \tau_j \Phi_j = \sum_{j=1}^{p+q} \tau_j \sum_{\nu=1}^{N_1} F_j \left(f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N_1} F \left(f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right). \quad (1.6)$$

Распространим (1.6) на комплексные значения аргументов с сохранением эрмитовости (полученную эрмитову форму снова обозначим Φ). Заменяя аргументы Φ их D -преобразованиями, получим эрмитову форму

$$\Phi^* = \sum_{\nu=1}^{N_1} F^* \left(j\omega, f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right) = \sum_{\nu=1}^{N_1} F \left(\sigma^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right), f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right). \quad (1.7)$$

Теорема 1.

1. Предположим, что $\sum_{m=0}^{\infty} \left| k_i \left(mT + (-1)^i \left(\frac{\nu-1}{N_1} - \frac{r-1}{N_2} \right) T \right) \right| < +\infty$ для всех $\nu = 1, \dots, N_1$ и $r = 1, \dots, N_2$; $i = 1, 2$. (Это требование заведомо выполняется, если $k_i(t)$ абсолютно интегрируема).

2. Считая выполненными соотношения (1.2) и (1.3), предположим, что для некоторых допустимых значений τ_j и любых $\sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right)$

$$\Phi(0, \sigma) = \sum_{\nu=1}^{N_1} F \left(0, \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right)$$

неотрицательна, а

3. Φ^* отрицательно определена при тех же τ_j и

$$f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \neq 0 \quad (\nu = 1, \dots, N_1) \quad \text{для } \omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right].$$

Тогда

а) $\left| \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| \rightarrow 0$, $\left| f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\nu = 1, \dots, N_1$; ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left| f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2$ сходятся при всех $\nu = 1, \dots, N_1$;

б) если выполняется (1.6) и $\sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right)$ и $f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right)$ для $n \leq n_0$ непрерывно зависят от σ_0 в следующем смысле

$$\sum_{n=0}^{n_0} \left| \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{n_0} \left| f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } |\sigma_0| \rightarrow 0,$$

то имеет место абсолютная устойчивость: кроме а) выполнено

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } |\sigma_0| \rightarrow 0$$

для всех $\nu = 1, \dots, N_1$ равномерно по классу нелинейностей, удовлетворяющих указанным условиям.

Доказательство приведено в Приложении 1.

З а м е ч а н и е. Частотное условие 3.

$$\Phi^* = \sum_{\nu=1}^{N_1} F^* \left(j\omega, f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right) < 0$$

для $\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$ — основное условие теоремы. В совокупности с условиями 1 и 2 оно устанавливает достаточные условия абсолютной устойчивости рассматриваемой системы. Построенные квадратичные формы Φ в отличие от форм, рассмотренных в [4, 5], зависят не только от переменных $f_\sigma(nT)$, $\sigma(nT)$, но и от смещенных решетчатых функций, полученных из $f_\sigma(t)$, $\sigma(t)$ смещением на $\frac{\nu-1}{N_1}$.

Определение. Будем считать, что $f(\sigma)$ принадлежит классу $\Gamma(\mu_0)$, если

$$f(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \leq \mu_0 \quad (\sigma \neq 0) \quad (1.8)$$

и $f(\sigma)$ принадлежит классу $\Gamma(\alpha, \beta, \mu_0)$, если, кроме того,

$$-\alpha \leq \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \leq \beta. \quad (1.9)$$

Частный случай. Частотные условия абсолютной устойчивости рассматриваемой системы с нелинейностью из класса $\Gamma(\mu_0)$.

Предположим, что условие 1 теоремы для системы выполняется

$$\Phi = \tau \sum_{\nu=1}^{N_1} \operatorname{Re} \left\{ \left[\mu_0 \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) - f_\sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right] f_\sigma^c \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right\}$$

(«с» сверху означает комплексную сопряженность).

Условие $\Phi \left(0, \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right) \geq 0$ выполнено, так как $\Phi = 0$ при $f_\sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) = 0$. По формуле (1.7) составим

$$\Phi^* = \tau \sum_{\nu=1}^{N_1} \operatorname{Re} \left\{ \left[\mu_0 \sigma^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) - f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right] f^{*c} \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right\}.$$

Величина $\sigma^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right)$ связана с $f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right)$ соотношением (1.1).

Согласно условию 3 теоремы Φ^* должна быть отрицательно определенной формой переменных $f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right)$. Полагая $\tau > 0$, получаем следующий критерий абсолютной устойчивости

$$\sum_{k=1}^{N_1} \left| f^* \left(j\omega, \frac{k-1}{N_1} \right) \right|^2 (g_{kk} + 1) + \sum_{\substack{m, n=1 \\ n > m}}^{N_1} \operatorname{Re} \left[f^* \left(j\omega, \frac{m-1}{N_1} \right) \times \right. \\ \left. \times f^{*c} \left(j\omega, \frac{n-1}{N_1} \right) 2g_{mn} \right] > 0, \quad \omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right], \quad (1.10)$$

где

$$g_{kk} = \mu_0 \operatorname{Re} \sum_{r=1}^{N_2} K_1^* \left(j\omega, \frac{r-1}{N_2} - \frac{k-1}{N_1} \right) K_2^* \left(j\omega, \frac{k-1}{N_1} - \frac{r-1}{N_2} \right),$$

$$2g_{mn} = \mu_0 \sum_{r=1}^{N_2} \left[K_1^* \left(j\omega, \frac{r-1}{N_2} - \frac{m-1}{N_1} \right) K_2^* \left(j\omega, \frac{n-1}{N_1} - \frac{r-1}{N_2} \right) + \right.$$

$$\sigma_n = - \sum_{m=0}^{\infty} f_{\sigma, m} \Omega(nT - mT). \quad (2.2)$$

Применяя к уравнению (2.2) D -преобразование, получим

$$\sigma^*(j\omega) = - f^*(j\omega) \chi^*(j\omega), \quad (2.3)$$

где $\chi^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega(nT) e^{-j\omega nT}$ — частотная характеристика линейной части рассматриваемой системы.

Используя результаты общих теорем, полученных В. А. Якубовичем [5], выведем достаточные условия абсолютной устойчивости этой системы.

Если нелинейность принадлежит классу $\Gamma(\mu_0)$, то частотное условие абсолютной устойчивости имеет вид

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 v(\gamma T) K_1^*(j\omega, \gamma) K_2^*(j\omega, -\gamma) d\gamma \right\} > - \frac{1}{\mu_0 T} \left(\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right) \right).$$

В случае, когда $f(\sigma) \in \Gamma(\alpha, \beta, \mu_0)$, имеем критерий

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 v(\gamma T) K_1^*(j\omega, \gamma) K_2^*(j\omega, -\gamma) d\gamma [1 + (\tau_1 - \tau_2) \times \right. \\ & \times (1 - \cos \omega T) + j(\tau_1 + \tau_2) \sin \omega T] \left. \right\} - T(1 - \cos \omega T)(\alpha\tau_1 + \beta\tau_2) \times \\ & \times \left| \int_0^1 v(\gamma T) K_1^*(j\omega, \gamma) K_1^*(j\omega, \gamma) K_2^*(j\omega, -\gamma) d\gamma \right|^2 > - \frac{1}{\mu_0 T} \\ & \left(\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right), \tau_1, \tau_2 \geq 0 \right). \end{aligned}$$

2. Исследование систем, содержащих ЛИЭ и нелинейный преобразователь (рис. 3). Под нелинейным преобразователем понимается

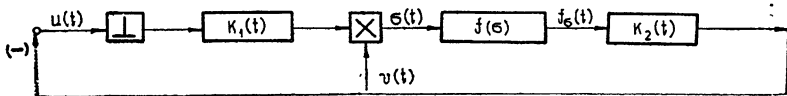


Рис. 3.

устройство, структурная схема которого может быть представлена в виде последовательного соединения умножителя на периодическую функцию, нелинейного звена и линейных звеньев. Последние на рис. 3 присоединены к линейной части системы. Их коэффициенты входят в $K_2(p)$. Поскольку

$$\sigma(t) = v(t) \sum_{m=0}^{\infty} u(mT) k_1(t - mT)$$

и

$$u(t) = - \int_0^{\cdot} k_2(t - \tau) f_{\sigma}(\tau) d\tau,$$

то уравнение рассматриваемой системы

$$\sigma(t) = - v(t) \sum_{m=0}^{\infty} k_1(t - mT) \int_0^{mT} k_2(mT - \tau) f_{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Применяя к (2.4) D -преобразование, получим [7]

$$\sigma^*(j\omega, \varepsilon) = -T\nu(\varepsilon T) K_1^*(j\omega, \varepsilon) \int_0^1 K_2^*(j\omega, -\gamma) f^*(j\omega, \gamma) d\gamma. \quad (2.5)$$

Обозначим $A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma) = T\nu(\varepsilon T) K_1^*(j\omega, \varepsilon) K_2^*(j\omega, -\gamma)$, тогда (2.5) можно записать в виде интегрального уравнения

$$\sigma^*(j\omega, \varepsilon) = - \int_0^1 A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma) f^*(j\omega, \gamma) d\gamma. \quad (2.6)$$

Будем считать, что существуют квадратичные формы $F_j(\sigma(nT + \varepsilon T), f_\sigma(nT + \varepsilon T))$, такие, что при $n \geq n_0$ для

$$\Phi_j = \int_0^1 F_j(\sigma(nT + \varepsilon T), f_\sigma(nT + \varepsilon T)) d\varepsilon$$

выполняются условия (1.2)–(1.5), рассмотренные в п. 1. По формулам (1.6) и (1.7) строим

$$\begin{aligned} \Phi(f, \sigma) &= \sum_{j=1}^{p+q} \tau_j \int_0^1 F_j(\sigma(nT + \varepsilon T), f_\sigma(nT + \varepsilon T)) d\varepsilon = \\ &= \int_0^1 F(\sigma(nT + \varepsilon T), f_\sigma(nT + \varepsilon T)) d\varepsilon \end{aligned}$$

и

$$\Phi^*(j\omega, f^*) = \int_0^1 F^*(j\omega, f^*(j\omega, \varepsilon)) d\varepsilon = \int_0^1 F(\sigma^*(j\omega, \varepsilon), f^*(j\omega, \varepsilon)) d\varepsilon.$$

Говоря о решении уравнения системы (2.4), будем иметь в виду функции $\sigma(t)$ и $f_\sigma(t)$, которые локально интегрируемы и удовлетворяют уравнению почти всюду. Будем предполагать, что для уравнения (2.4) имеет место локальная теорема существования [4].

Теорема 2.

Пусть для (2.4) имеет место усиленная локальная теорема существования 4 и пусть: 1) импульсная переходная функция системы абсолютно интегрируема; 2) для некоторых допустимых значений τ_j $\Phi(0, \sigma)$ неотрицательна для любых σ ; 3) Φ^* отрицательно определена при тех же τ_j для $\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$; 4) для $A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma)$ выполнено условие

$$\max_{\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]} \int_0^1 \int_0^1 |A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma)|^2 d\varepsilon d\gamma = B^2 < +\infty;$$

5) $\nu(t)$ — периодическая функция ограниченной вариации, тогда:

а) решение существует на полубесконечном интервале;

б) сходятся ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma(nT + \varepsilon T)|^2 d\varepsilon$, $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_\sigma(nT + \varepsilon T)|^2 d\varepsilon$

(иначе $|\sigma(t)| \in L^2_{(0, \infty)}$, $|f_\sigma(t)| \in L^2_{(0, \infty)}$);

в) если $f_\sigma(nT + \varepsilon T)$ и $\sigma(nT + \varepsilon T)$ непрерывно зависят от σ_0 для $n \leq n_0$ и выполнено (1.5), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma(nT + \varepsilon T)|^2 d\varepsilon \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_\sigma(nT + \varepsilon T)|^2 d\varepsilon \rightarrow 0$$

при $|\sigma_0| \rightarrow 0$ равномерно по классу нелинейностей, удовлетворяющих указанным условиям.

Доказательство приведено в Приложении 2.

Выведем критерий абсолютной устойчивости этой системы для $f(\sigma) \in \Gamma(\mu_0)$. Частотное условие абсолютной устойчивости рассматриваемой системы имеет вид

$$\Phi^* = \tau \int_0^1 \operatorname{Re} \{ [\mu_0 \sigma^*(j\omega, \varepsilon) - f^*(j\omega, \varepsilon)] f^{*c}(j\omega, \varepsilon) \} d\varepsilon < 0$$

$$\left(\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right) \right).$$

Полагая $\tau > 0$ и заменяя $\sigma^*(j\omega, \varepsilon)$ его выражением из (2.6), получим

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma) f^*(j\omega, \gamma) f^{*c}(j\omega, \varepsilon) d\gamma d\varepsilon \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\mu_0} \int_0^1 |f^*(j\omega, \varepsilon)|^2 d\varepsilon > 0$$

$$\left(\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right) \right).$$

Представим $f^*(j\omega, \varepsilon)$ в виде ряда [3]

$$f^*(j\omega, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr\right) e^{\varepsilon T \left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr\right)},$$

где

$$\bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr\right) = \{L[f_c(t)]\}_{p = j\omega + \frac{2\pi}{T} jr}$$

(L — преобразование Лапласа).

После несложных вычислений получим критерий абсолютной устойчивости в виде условия положительной определенности бесконечной квадратичной формы

$$\frac{1}{\mu_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jk\right) \right|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\substack{m, n=-\infty \\ n > m}}^{+\infty} \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jm\right) \times \right.$$

$$\left. \times \bar{f}^c\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jn\right) 2a_{mn} \right\} > 0 \quad \left(\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right) \right), \quad (2.7)$$

где

$$2a_{mn}(\omega) = \frac{1}{T} \left\{ K_2\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jm\right) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} K_1\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr\right) C_{n-r} + \right.$$

$$\left. + \left[K_2\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jn\right) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} K_1\left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr\right) C_{m-r} \right]^c \right\}$$

$$(n \geq m);$$

$$a_{nm}(\omega) = a_{mn}^c(\omega) \quad (n > m);$$

$$C_q = \int_0^1 v(\varepsilon T) e^{-2\pi i q \varepsilon} d\varepsilon;$$

$$K_i \left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr \right) = \{L[k_i(t)]\}_{p=j\omega + \frac{2\pi}{T} jr} \quad (i = 1, 2).$$

Условие (2.7) можно записать в виде скалярного произведения

$$\left(\left(\frac{1}{\mu_0} E + A \right) \mathbf{f}, \mathbf{f}^c \right) > 0, \quad \omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right], \quad \text{где}$$

A — оператор, заданный бесконечной матрицей $A(j\omega) = (a_{ij})$; \mathbf{f} — вектор-столбец

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{f} \left(j\omega - \frac{2\pi}{T} jr \right) \\ \vdots \\ \bar{f} (j\omega) \\ \vdots \\ \bar{f} \left(j\omega + \frac{2\pi}{T} jr \right) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Введем матричный оператор A_k , определенный матрицей $A_k(j\omega) = (a_{ij}^{(k)})$. элементы которой $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$ при $|i| \leq k, |j| \leq k$ и $a_{ij}^{(k)} = 0$ при $|i| > k, |j| > k$. Вычислим норму оператора $A_{0,k} = A - A_k$. Из формулы Бесселя следует, что $\|A_{0,k}\|^2 = \|A - A_k\|^2 = \|A\|^2 - \|A_k\|^2 = \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} |a_{ij}|^2 - \sum_{i,j=-k}^k |a_{ij}|^2$.

Оператор A изометричен вещественной части интегрального оператора A^* с ядром $A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma)$. Это означает, что

$$A = \operatorname{Re} A^* = \frac{A^* + \bar{A}^*}{2},$$

где \bar{A}^* — оператор, сопряженный с A^* . Отсюда

$$\|A\| = \|\operatorname{Re} A^*\| = \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma) + A^*(-j\omega, \gamma, \varepsilon)}{2} \right|^2 d\varepsilon d\gamma \right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\|A_{0,k}\| = \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma) + A^*(-j\omega, \gamma, \varepsilon)}{2} \right|^2 d\varepsilon d\gamma - \sum_{i,j=-k}^k |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}.$$

Обозначим $\|A_{0,k}\| = \delta_k$. Справедливо следующее неравенство:

$$|(A_{0,k} \mathbf{f}, \mathbf{f}^c)| \leq \delta_k (\mathbf{f}, \mathbf{f}^c).$$

Поэтому, если в неравенстве

$$\left(\left(\frac{1}{\mu_0} E + A_k \right) \mathbf{f}, \mathbf{f}^c \right) + (A_{0,k} \mathbf{f}, \mathbf{f}^c) > 0$$

заменить второе слагаемое слева его меньшим значением, то неравенство только усилится

$$\left(\left(\left(\frac{1}{\mu_0} - \delta_k \right) E + A_k \right) f, f^c \right) > 0. \tag{2.8}$$

Будем считать $f = f_k + f_{0, k}$, где

$$f_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \bar{f}\left(j\omega - \frac{2\pi}{T}jk\right) \\ \vdots \\ \bar{f}(j\omega) \\ \vdots \\ \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T}jk\right) \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad f_{0, k} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{f}\left(j\omega - \frac{2\pi}{T}j(k+1)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T}j(k+1)\right) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Из равенства

$$\begin{aligned} \left(\left(A_k + \left(\frac{1}{\mu_0} - \delta_k \right) E \right) f, f^c \right) &= \left(\left(A_k + \left(\frac{1}{\mu_0} - \delta_k \right) E_k \right) f_k, f_k^c \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{\mu_0} - \delta_k \right) (f_{0, k}, f_{0, k}^c) \end{aligned}$$

следует, что условие (2.8) выполняется, если

$$\delta_k < \mu_0^{-1} \quad \left(\left(A_k + \left(\frac{1}{\mu_0} - \delta_k \right) E_k \right) f_k, f_k^c \right) > 0 \quad \text{при } \omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right].$$

Первое выражение—это ограничение на величину нормы оператора $A_{0, k}$. Из этого неравенства оцениваем порядок матрицы $A_k(j\omega)$, определяющий оператор A_k . Второе неравенство—это условие положительной определенности некоторой конечной квадратичной формы

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\mu_0} - \delta_k \right) \sum_{r=-k}^k \left| \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T}jr\right) \right|^2 + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\substack{m, n=-k \\ n > m}}^k \bar{f}\left(j\omega + \frac{2\pi}{T}jm\right) \bar{f}^c\left(j\omega + \frac{2\pi}{T}jn\right) 2a_{mn} \right\} > 0 \\ &\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right], \end{aligned}$$

где

$$\delta_k = \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{A^*(j\omega, \varepsilon, \gamma) + A^*(-j\omega, \gamma, \varepsilon)}{2} \right|^2 d\varepsilon d\gamma - \sum_{i, j=-k}^k |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} < \frac{1}{\mu_0}$$

Найденное частотное условие положительной определенности конечной квадратичной формы является искомым критерием абсолютной устойчивости рассматриваемой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Так как Φ^* отрицательно определенная, то найдется $\delta > 0$, такое, что $\Phi^* \leq -\delta M \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| f^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right|^2$, где

$$M = 1 + \max_{\omega \in \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right]} \left\{ \sum_{r=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| K_2^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} - \frac{r-1}{N_2} \right) \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{s=1}^{N_1} \left| K_1^* \left(j\omega, \frac{r-1}{N_2} - \frac{s-1}{N_1} \right) \right|^2 \right\}.$$

В дальнейшем доказательстве пройдут рассуждения, приведенные в [5], вплоть до доказательства сходимости ряда

$$R_{\bar{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_1} F_0 \left(f_{\sigma, \bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right), \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right).$$

Для $nT + \frac{\nu-1}{N_1} T > \bar{N}T$ этот ряд не превосходит

$$A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2,$$

где $A = \text{const}$

Покажем теперь, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| < \infty.$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{N_0} \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| \leq \sum_{r=1}^{N_2} \left[\sum_{\nu=1}^{N_1} \sum_{p=0}^{\infty} \left| k_2 \left(pT + \frac{\nu-1}{N_1} T - \frac{r-1}{N_2} T \right) \right| \right] \times \\ \times \sum_{s=1}^{N_1} \left[\sum_{q=0}^{\infty} \left| k_1 \left(qT + \frac{r-1}{N_2} T - \frac{s-1}{N_1} T \right) \right| \sum_{l=0}^{\infty} \left| f_{\sigma, \bar{N}} \left(lT + \frac{s-1}{N_1} T \right) \right| \right], \quad (1)$$

то из первого условия доказываемой теоремы и определения функции $f_{\sigma, \bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right)$ следует выполнение (1).

Из того, что для всех $\nu=1, \dots, N_1$ и $n \left| \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right| \leq C$ и $\left| \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 \leq C \left| \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|$ вытекает сходимость $R_{\bar{N}}$.

По формуле Парсевалья

$$R_{\bar{N}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{\nu=1}^{N_1} \left\{ F \left(f_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right), \sigma_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right) + \right. \\ \left. + \delta \left(\left| f_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 + \left| \sigma_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 \right) \right\} d\omega,$$

где

$$f_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) = D \left\{ f_{\sigma, \bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right\}, \\ \sigma_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) = D \left\{ \sigma_{\bar{N}} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right\}.$$

Подынтегральное выражение не превосходит

$$\delta \left[-M + 1 + \sum_{r=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| K_2^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} - \frac{r-1}{N_2} \right) \right|^2 \right] \times \\ \times \sum_{s=1}^{N_1} \left| K_1^* \left(j\omega, \frac{r-1}{N_2} - \frac{s-1}{N_1} \right) \right|^2 \sum_{\nu=1}^{N_1} \left| f_{\bar{N}}^* \left(j\omega, \frac{\nu-1}{N_1} \right) \right|^2.$$

Так как выражение в квадратных скобках не превосходит нуля, то $S_{\bar{N}} \leq R_{\bar{N}} \leq 0$.

Из выполнения

$$\delta \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{\bar{N}_1} \left(\left| f_{\sigma} \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 + \left| \sigma \left(nT + \frac{\nu-1}{N_1} T \right) \right|^2 \right) \leq \gamma_0 + S_{\bar{N}} \leq \gamma_0$$

следует утверждение а) теоремы, а при выполнении условий б) и утверждении б) теоремы

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

$\Phi^*(j\omega, f^*)$ отрицательно определенная по условию теоремы, поэтому найдется $\delta > 0$, такое, что

$$\Phi^*(j\omega, f^*) \leq -M\delta \int_0^1 |f^*(j\omega, \varepsilon)|^2 d\varepsilon, \quad \text{где } M = 1 + B^2.$$

Строим

$$\Phi_0(f, \sigma) = \int_0^1 \{ F(f_{\sigma}(nT + \varepsilon T), \sigma(nT + \varepsilon T)) + \delta (|f_{\sigma}(nT + \varepsilon T)|^2 + \\ + |\sigma(nT + \varepsilon T)|^2) \} d\varepsilon.$$

Проводя рассуждения, аналогичные [4, 5], получим, что

$$\delta \sum_{n=0}^{\bar{N}} \int_0^1 (|f_{\sigma}(nT + \varepsilon T)|^2 + |\sigma(nT + \varepsilon T)|^2) d\varepsilon \leq S_{\bar{N}} + \gamma_0.$$

Сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |\sigma_{\bar{N}}(nT + \varepsilon T)| d\varepsilon = \int_0^{\infty} |\sigma_{\bar{N}}(t)| dt$ следует из первого условия теоремы и определения $f_{\sigma, \bar{N}}(nT + \varepsilon T)$.

Положим

$$\sigma_{\bar{N}}^*(j\omega, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\bar{N}}(nT + \varepsilon T) e^{-j\omega nT},$$

$$f_{\bar{N}}^*(j\omega, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\sigma, \bar{N}}(nT + \varepsilon T) e^{-j\omega nT}.$$

Из определения $f_{\sigma, \bar{N}}(nT + \varepsilon T)$ и первого условия теоремы следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{\bar{N}}(nT + \varepsilon T)|^2 < \infty \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

Так как общий член $R_{\bar{N}}$ для $nT + \varepsilon T > \bar{N}T$ не превосходит $A \cdot \int_0^1 |\sigma_{\bar{N}}(nT + \varepsilon T)|^2 d\varepsilon$ и $|\sigma_{\bar{N}}(nT + \varepsilon T)| \leq C$, где $A = \text{const}$ и $0 \leq \varepsilon < 1$, то сходимость $R_{\bar{N}}$ доказана.

В силу равенства Парсеваля

$$R_{\bar{N}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \int_0^1 \{ F(f_{\bar{N}}^*(j\omega, \varepsilon), \sigma_{\bar{N}}^*(j\omega, \varepsilon)) + \delta (|f_{\bar{N}}^*(j\omega, \varepsilon)|^2 + |\sigma_{\bar{N}}^*(j\omega, \varepsilon)|^2) \} d\varepsilon d\omega.$$

Так как выражение в фигурных скобках неположительно, то $S_{\bar{N}} \leq R_{\bar{N}} \leq \leq 0$. Выполнение утверждений теоремы следует из того, что

$$\delta \sum_{n=0}^{\bar{N}} \int_0^1 (|f_{\sigma}(nT + \varepsilon T)|^2 + |\sigma(nT + \varepsilon T)|^2) d\varepsilon \leq \gamma_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 145, № 1, 52 (1962); 155, № 5, 1029 (1964).
2. Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, 25, № 3, 281 (1964); 25, № 7, 1030 (1964).
3. Э. Джури, Б. Ли, Автоматика и телемеханика, 26, № 6, 945 (1965).
4. В. А. Якубович, Вестник ЛГУ, № 7, 110 (1967).
5. В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика; № 9, 59 (1967); № 2, 81 (1968).
6. Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 6, 5 (1968).
7. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 февраля 1971 г.

ON ABSOLUTE STABILITY OF NONLINEAR AUTOMATIC SYSTEMS WITH DOUBLE MODULATION

Shilman S. V., Shestakova T. M.

Frequency conditions for absolute stability of a number of nonlinear automatic systems with double modulation (with double pulsed modulation, with pulsed and continuous modulation) are stated. These conditions are expressed directly in terms of frequency characteristics of the linear part.

УДК 517.93

**О СУЩЕСТВОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАУЗЛЕННЫМИ
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ**

Х. Ганиев

Доказывается, что система трех автономных дифференциальных уравнений с полиномиальными (третьей степени и выше) правыми частями может иметь своим решением заузленную замкнутую кривую.

При исследовании фазовой картины системы трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

возникает вопрос: какие сложные формы могут принимать компоненты разбиения фазового пространства? Сложность же форм этих компонент, в частности, зависит от возможных типов периодических траекторий системы (1). В связи с этим интересно выяснить, существуют ли системы (1) с периодическими траекториями в виде нетривиального узла [1]*. Решение этой задачи основывается на следующем предложении.

Теорема. Существуют системы дифференциальных уравнений вида (1), где P, Q и R — полиномы третьей степени, допускающие решение вида

$$L: \begin{cases} x = a_{10} + \sum_{\beta=1}^3 (a_{1\beta} \sin(\beta t) + b_{1\beta} \cos(\beta t)), \\ y = a_{20} + \sum_{\beta=1}^3 (a_{2\beta} \sin(\beta t) + b_{2\beta} \cos(\beta t)), \\ z = a_{30} + \sum_{\beta=1}^3 (a_{3\beta} \sin(\beta t) + b_{3\beta} \cos(\beta t)) \end{cases} \tag{2}$$

для почти всех значений коэффициентов $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Каждой совокупности конкретных значений действительных коэффициентов $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ и, следовательно, каждой точке 21-мерного евклидова пространства E^{21} :

$$(a_{10}, a_{11}, b_{11}, a_{12}, b_{12}, a_{13}, b_{13}, a_{20}, a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}, a_{23}, b_{23}, a_{30}, a_{31}, b_{31}, a_{32}, b_{32}, a_{33}, b_{33})$$

* После того, как настоящая статья была отправлена в печать, появилась монография Л. Э. Рейзиня [2], в которой построен пример системы (1) с заузленным периодическим решением, где $P, Q, R \in C^\infty$.

соответствует одна периодическая кривая вида L . В пространстве E^{21} введем следующую метрику

$$\rho(A, A') = \max \{ |a_{10} - a'_{10}|, |a_{11} - a'_{11}|, |b_{11} - b'_{11}|, \dots, |b_{33} - b'_{33}| \},$$

где A и A' — точки в E^{21} . Топология в E^{21} порождена этой метрикой.

Пусть

$$P = \sum_{i+j+k=0}^3 p_{ijk} x^i y^j z^k,$$

$$Q = \sum_{i+j+k=0}^3 q_{ijk} x^i y^j z^k,$$

$$R = \sum_{i+j+k=0}^3 r_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Решение системы (1) будем искать в виде (2). Тогда

$$x^i y^j z^k = A_{ijk}^0 + \sum_{\alpha=1}^{3(i+j+k)} (A_{ijk}^{\alpha} \sin(\alpha t) + B_{ijk}^{\alpha} \cos(\alpha t)), \quad (3)$$

где A_{ijk}^0 , A_{ijk}^{α} и B_{ijk}^{α} — однородные полиномы степени $i+j+k$ от коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$.

Подставляя (2) и (3) в первое уравнение системы (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим следующую систему девятнадцати линейных неоднородных уравнений с двадцатью неизвестными p_{ijk} :

$$\begin{aligned} \sum_{i+j+k=0}^3 A_{ijk}^0 p_{ijk} &= 0, \\ \sum_{i+j+k=0}^3 A_{ijk}^{\alpha} p_{ijk} &= -\alpha b_{1\alpha}, \\ \sum_{i+j+k=0}^3 B_{ijk}^{\alpha} p_{ijk} &= \alpha a_{1\alpha}. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 9), \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что при подстановке (2) и (3) в другие два уравнения системы (1) получим линейные уравнения для нахождения коэффициентов q_{ijk} и r_{ijk} с точно такой же матрицей, как и система (4).

Для того, чтобы система (4) имела хотя бы одно решение, достаточно, чтобы ранг ее матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & a_{10} & a_{20} & a_{30} & A_{200}^0 & A_{110}^0 & \dots & A_{002}^0 & A_{300}^0 & A_{210}^0 & \dots & A_{003}^0 \\ 0 & a_{20} & a_{21} & a_{31} & A_{200}^1 & A_{110}^1 & \dots & A_{002}^1 & A_{300}^1 & A_{210}^1 & \dots & A_{003}^1 \\ 0 & b_{10} & b_{21} & b_{31} & B_{200}^1 & B_{110}^1 & \dots & B_{002}^1 & B_{300}^1 & B_{210}^1 & \dots & B_{003}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{13} & b_{23} & b_{33} & B_{200}^3 & B_{110}^3 & \dots & B_{002}^3 & B_{300}^3 & B_{210}^3 & \dots & B_{003}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{200}^4 & A_{110}^4 & \dots & A_{002}^4 & A_{300}^4 & A_{210}^4 & \dots & A_{003}^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{200}^6 & B_{110}^6 & \dots & B_{002}^6 & B_{300}^6 & B_{210}^6 & \dots & B_{003}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{300}^7 & A_{210}^7 & \dots & A_{003}^7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B_{300}^9 & B_{210}^9 & \dots & B_{003}^9 \end{array} \right\| \quad (5)$$

был равен девятнадцати.

Любой минор девятнадцатого порядка матрицы (5) либо тождественно равен нулю, либо есть однородный полином относительно коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ не ниже 42-й степени. Но ясно, что если какой-нибудь минор матрицы (5) отличен от нуля хотя бы в одной точке пространства E^{21} , то он непременно является полиномом, отличным от тождественного нуля.

Рассмотрим некоторую точку

$$(0, a, 0, 0, 0, b, 0, 0, 0, 0, c, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, d)$$

пространства E^{21} . В этой точке минор Δ девятнадцатого порядка, полученный из матрицы отбрасыванием столбца, состоящего из элементов вида A_{030}^a , B_{030}^b , оказывается равным следующему выражению

$$\Delta = -2^{-24} a^4 b^4 c^{12} d^{15} (a - b) \cdot (a - 2b)^3 (a + 2b)^3.$$

Следовательно, $\Delta \neq 0$ и Δ — полином. Поэтому, согласно известной теореме об аналитических функциях, в любой окрестности любой точки пространства E^{21} существует точка, в которой $\Delta \neq 0$, и систему (4) с таким минором можно решить. Решив систему (4), находим искомый полином

$$P = \sum_{i+j+k=0}^3 p_{ijk} x^i y^j z^k,$$

который является правой частью дифференциального уравнения с периодическим решением L . Теорема доказана.

Теперь, чтобы доказать существование дифференциальных уравнений вида (1) с заузленными периодическими решениями, достаточно показать существование заузленной кривой среди L , для которой минор $\Delta \neq 0$.

Пусть Π — класс всех непрерывных гладких τ -периодических не имеющих точек самопересечения кривых вида

$$S: x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

вложенных в трехмерное евклидово пространство E^3 , где

$$x(t), y(t), z(t) \in C^1, \quad |\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| + |\dot{z}(t)| > 0,$$

$$x(t + \tau) = x(t), \quad y(t + \tau) = y(t), \quad z(t + \tau) = z(t)$$

$$(0 < \tau < \infty),$$

и K — подкласс класса Π , состоящий из нетривиальных узлов [1]. Введем норму для кривой S :

$$\|S\| = \max_{t \in [0, \tau]} \{ |x(t)|, |y(t)|, |z(t)| \}.$$

Очевидно, что для любой кривой $S_0 \in \Pi$ существуют такие положительные числа ε и ε' , что если $\|S - S_0\| < \varepsilon$ и $\|\dot{S} - \dot{S}_0\| < \varepsilon'$, то кривая S эквивалентна S_0 [1], где \dot{S} означает

$$x = \dot{x}(t), \quad y = \dot{y}(t), \quad z = \dot{z}(t).$$

Классы Π и K имеют свои элементы среди кривых вида L . Например, кривая

$$L_0: x = \sin t - \sin 3t, \quad y = \sin 2t, \quad z = \cos 3t$$

принадлежит классу K . Действительно, построив ее график, можно

убедиться в том, что она представляет собой клеверный лист. В [1] доказано, что клеверный лист — нетривиальный узел.

Пусть точка $K_0(a_{10}^0, a_{11}^0, \dots, b_{13}^0, a_{20}^0, a_{21}^0, \dots, b_{23}^0, a_{30}^0, a_{31}^0, \dots, b_{33}^0)$ пространства E^{21} такая, что кривая $L_{K_0} \in K$; $\varepsilon_{K_0}, \varepsilon'_{K_0}$ — чисел. ε и ε' , которые были упомянуты выше. По числам ε_{K_0} и ε'_{K_0} можно найти окрестность U_0 точки K_0 , для любой точки A которой имеет место $\|L_A - L_{K_0}\| < \varepsilon_{K_0}, \|\dot{L}_A - \dot{L}_{K_0}\| < \varepsilon'_{K_0}$. Тогда L_A и L_{K_0} эквивалентны, следовательно, $L_A \in K$.

Пусть теперь точка K_0 соответствует кривой L_0 . Тогда найдется точка $A \in U_0$, такая, что $\Delta(A) \neq 0$, но $L_A \in K$, что и требовалось доказать.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору Ю. И. Неймарку за постановку задачи и большой интерес, проявленный к ее решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Кроуэлл, Р. Фокс, Введение в теорию узлов, изд. Мир, М, 1967.
2. А. Э. Рейзинь, Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений, изд. Зинатне, Рига, 1971.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 июля 1971 года

ON EXISTENCE OF ALGEBRAIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH KNOTTED PERIODIC SOLUTIONS

Ganiyev Kh.

It is proved that the solution for a system of three autonomous differential equations with polynomial (of third and higher powers) right hand sides may represent a knotted closed curve.

УДК 531.391

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

В. И. Горюнов

Методом точечных преобразований доказывается существование устойчивых несимметричных периодических колебаний с периодом внешней силы в ряде колебательных систем, для которых известны условия существования соответствующих симметричных колебаний.

В работе [1] доказано существование в симметричной системе с ударным взаимодействием четного числа устойчивых несимметричных двухударных периодических движений с периодом, в нечетное число раз большим периода внешнего гармонического воздействия. Показано, что в плоскости параметров системы существуют области устойчивости несимметричных колебаний, не имеющие общих границ с областями существования соответствующих симметричных колебаний.

В настоящей работе доказывается существование устойчивых несимметричных периодических движений с периодом внешней силы в случае синхронизации осциллятора с «подталкивающим» трением [2, 3] и квазигармонического осциллятора с нелинейностью вида кубической параболы с кусочно-постоянной периодической внешней силой [4]. Показывается, что несимметричные движения в таких системах существуют парами, причем существование устойчивых симметричных и несимметричных движений при одних и тех же значениях параметров возможно только в системе с «подталкивающим» трением.

Исследование проводится методом точечных преобразований и сводится к определению условий существования и устойчивости двукратных неподвижных точек вспомогательных «полупериодных» точечных преобразований, с помощью которых в [2-4] были изучены условия существования и устойчивости симметричных периодических движений с периодом внешней силы.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ С «ПОДТАЛКИВАЮЩИМ» ТРЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ТОЧНОГО ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Известно [2, 5], что уравнения рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 + \gamma^2) y, \\ \dot{y} &= -x - 2\gamma y + \operatorname{sgn} [y] - \lambda \operatorname{sgn} [\sin (\tau/p)] \end{aligned} \quad (1.1)$$

($p, \lambda > 0; 0 < \gamma < 1$)

(траектории считаются непрерывными) позволяют представить преобразование начальных точек (x_0, y_0) плоскости $\tau = 0$ в точки (x_1, y_1) плоскости $\tau = 2p\pi$ как двукратнопримененное «полупериодное» преобразование S' точек (x_0, y_0) в точки (x', y') , где $-x', -y'$ — координаты точки

пересечения фазовой траектории системы (1.1), выходящей при $\tau = 0$ из точки (x_0, y_0) , с плоскостью $\tau = p\pi$. При этом связь между координатами x', y' и x_0, y_0 определяется параметрически через полярные координаты R, φ и задается соответствующими соотношениями работы [5] после инверсии в них знака перед нелинейным трением и внешней силой.

В силу указанного смысла точечного преобразования S' , начальные точки симметричных движений с периодом внешней силы в системе (1.1) являются простыми неподвижными точками точечного преобразования S' [5], а начальные точки несимметричных движений образуют циклы двукратных неподвижных точек [6, 7].

Используя формулы точечного преобразования S' и составляя обычным образом систему уравнений для определения координат простых и двукратных неподвижных точек [8], находим, что в случае нецелочисленных значений приведенного периода p координаты двукратных неподвижных точек (R, φ) , (R', φ') S' -преобразования определяются с помощью следующего параметрического решения

$$|\rho(\alpha, \varphi)| = F \times [\pm e^{\gamma(\alpha+p\pi)} \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\varphi - \beta\pi)] \sin(\alpha + \varphi - \beta\pi), \quad (1.2)$$

$$|\rho'(\alpha, \varphi)| = F \times [\pm e^{\gamma(-\alpha+p\pi)} \sin \varphi + \sin(\alpha + \varphi - \beta\pi)] \sin(\varphi - \beta\pi), \quad (1.3)$$

$$\Lambda(\alpha, \varphi) = F \times [\pm e^{\gamma(\alpha+p\pi)} \sin(\alpha + \varphi) + \sin(\varphi - \beta\pi)] e^{\gamma\varphi} \sin(\alpha - \beta\pi) \operatorname{sgn} \rho, \quad (1.4)$$

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \{ [e^{\gamma(\alpha+p\pi)} \cos \alpha \sin(\alpha - \beta\pi) \pm \cos(\beta\pi) \sin(\alpha - \beta\pi) \mp$$

$$\mp (-1)^N e^{p\delta} \sin(\alpha + \beta\pi) - (-1)^N e^{\gamma\alpha} \cos(\alpha - \beta\pi) \sin(\alpha + \beta\pi)] \times \quad (1.5)$$

$$\times [\pm \sin(\beta\pi) \sin(\alpha - \beta\pi) - e^{\gamma(\alpha+p\pi)} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta\pi) +$$

$$+ (-1)^N e^{\gamma\alpha} \sin(\alpha - \beta\pi) \sin(\alpha + \beta\pi)]^{-1},$$

где функция

$$F(\alpha, \varphi) = [e^{2p\delta} \sin \varphi \sin(\alpha + \varphi) - \sin(\varphi - \beta\pi) \sin(\alpha + \varphi - \beta\pi)]^{-1}, \quad (1.6)$$

параметр $\alpha = \varphi' - \varphi \neq 0$; в обозначении \pm верхний знак соответствует случаю $\operatorname{sgn} \rho' = (-1)^{N+1} \operatorname{sgn} \rho$, $\beta\pi \leq \varphi \leq \pi$, $\beta\pi \leq \alpha + \varphi \leq \pi$, причем $\rho = R/r_N$, $\rho' = R'/r_N$, $\Lambda = \lambda/r_N$; нижний знак соответствует случаю $\operatorname{sgn} \rho' = (-1)^N \operatorname{sgn} \rho$, $0 < \varphi < \beta\pi$, $0 < \alpha + \varphi < \beta\pi$, причем $\rho = R/r_{N+1}$, $\rho' = R'/r_{N+1}$, $\Lambda = \lambda/r_{N+1}$ (напомним, что $r_k (e^{k\delta} - 1) (e^\delta - 1)^{-1}$, $\delta = \gamma\pi$).

Рассмотрим ряд свойств (1.2)–(1.6). Из вида соотношений (1.2), (1.3) следует, что они непротиворечивы только при $F(\alpha, \varphi) \geq 0$. Поэтому решение (1.2)–(1.6) системы (1.1) существует, если график функции $\varphi(\alpha)$ на плоскости α, φ проходит в тех частях области $D_1 \cup D_2$ определения соотношений (1.2)–(1.6) (рис. 1), которые соответствуют в D_1 значениям $\alpha \leq \alpha_{\text{дон}}(\varphi)$ и в D_2 — значениям $\alpha \geq \alpha_{\text{дон}}(\varphi)$. Здесь

$$\alpha_{\text{дон}}(\varphi) = -\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} [\operatorname{ctg}(\beta\pi) - e^{2p\delta} \sin \varphi (\sin(\beta\pi) \sin(\varphi - \beta\pi))^{-1}] \quad (1.7)$$

— решение уравнения $F(\alpha, \varphi) = 0$.

Из (1.5), (1.7) следует, что хотя графики функций $\varphi(\alpha)$ и $\alpha_{\text{дон}}(\varphi)$ внутри области $D_1 \cup D_2$ не пересекаются, угловые точки $(-(1-\beta)\pi, \pi)$, $((1-\beta)\pi, \beta\pi)$, $(-\beta\pi, \beta\pi)$, $(\beta\pi, 0)$ области могут у этих графиков быть общими. Поэтому значения α , при которых функция $\varphi(\alpha)$ существует в части области $D_1 \cup D_2$, соответствующей $F(\alpha, \varphi) > 0$, находятся из анализа относительного расположения графика функции $\varphi(\alpha)$ и граничных прямых $\varphi = \beta\pi$, $\varphi = -\alpha + \beta\pi$,

В результате указанного анализа приходим к выводу, что при $N = 1, 3, 5, \dots$, $\varphi(\alpha)$ существует в области D_1 для значений $\alpha \in [-\alpha_1^-, 0)$,

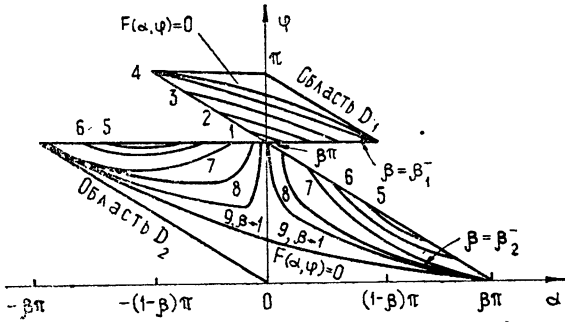


Рис. 1.

$(0, \alpha_1^-]$. При $\beta \leq \beta_1^-$, где β_1^- — корень уравнения

$$-2 \cos(\beta\pi) = e^{-(N+\beta)\delta} + e^{(\beta-1)\delta} \quad (1/2 < \beta < 1), \quad (1.8)$$

величина α_1^- является корнем уравнения

$$e^{\gamma\alpha} (e^{\rho\delta} \sin(\alpha - \beta\pi) + \sin \alpha) + e^{\rho\delta} \sin(\beta\pi) = 0 \quad (1.9)$$

$$(0 < \alpha \leq (1 - \beta)\pi)$$

и при $\beta > \beta_1^-$ $\alpha_1^- = (1 - \beta)\pi$.

В области D_2 $\varphi(\alpha)$ существует для значений $\alpha \in [-\alpha_{22}^-, -\alpha_{21}^-]$, $[\alpha_{21}^-, \alpha_{22}^-]$. При $\beta \leq \beta_2^-$, где β_2^- — корень уравнения

$$-2 \cos(\beta\pi) = e^{-(N+\beta)\delta} + e^{\beta\delta} \quad (1/2 < \beta < 1), \quad (1.10)$$

величины α_{21}^- , α_{22}^- являются корнями уравнения

$$e^{\rho\delta} \sin(\alpha + \beta\pi) + \sin \alpha + e^{\gamma(\alpha+\beta\pi)} \sin(\beta\pi) = 0 \quad (1.11)$$

$$(0 < \alpha < \beta\pi).$$

При $\beta > \beta_2^-$ (при малых γ β_2^- заведомо существует) $\alpha_{22}^- = \beta\pi$, а величина α_{21}^- по-прежнему определяется уравнением (1.11).

Используя приведенные сведения о возможном существовании функции $\varphi(\alpha)$ в области $D_1 \cup D_2$ при нечетных N , нетрудно убедиться, что на плоскости α , φ график функции $\varphi(\alpha)$ имеет вид, приведенный на рис. 1. Цифрами 1—4 и 5—9 на рисунке обозначены положения графика $\varphi(\alpha)$ в области D_1 и соответственно в области D_2 для возрастающих значений β .

При четных целочисленных значениях $N \neq 0$ $\varphi(\alpha)$ существует в области D_1 для значений $\alpha \in [-(1 - \beta)\pi, -\alpha_1^+]$, $[\alpha_1^+, (1 - \beta)\pi]$, где α_1^+ — корень уравнения

$$e^{\rho\delta} \sin(\alpha - \beta\pi) - \sin \alpha - e^{\gamma(-\alpha+\beta\pi)} \sin(\beta\pi) = 0 \quad (1.12)$$

$$(0 < \alpha \leq (1 - \beta)\pi),$$

существующий при $\beta \leq \beta_1^+$. Величина $\beta = \beta_1^+$ определяется из уравнения

$$2 \cos(\beta\pi) = e^{-(N+\beta)\delta} + e^{(\beta-1)\delta} \quad (0 < \beta < 1/2), \quad (1.13)$$

В области D_2 функция $\varphi(\alpha)$ в случае четных N существует для значений $\alpha \in [-\alpha_2^+, 0)$, $(0, \alpha_2^+]$. При $\beta > \beta_2^+$, где $\beta = \beta_2^+ -$ корень уравнения

$$2 \cos(\beta\pi) = e^{-(N+\beta)\delta} + e^{(\beta-1)\delta} \quad (0 < \beta < 1/2), \quad (1.14)$$

величина $\alpha = \alpha_2^+$ определяется из уравнения

$$e^{p\delta} \sin(\alpha + \beta\pi) - \sin \alpha - e^{\gamma(\alpha + p\pi)} \sin(\beta\pi) = 0 \quad (0 < \alpha < \beta\pi). \quad (1.15)$$

При $\beta \leq \beta_2^+$ $\alpha_2^+ = \beta\pi$.

Рис. 1 позволяет получить представление о поведении графика функции $\varphi(\alpha)$ на плоскости α , φ и для четных значений N . Для этого на рис. 1 достаточно сменить направление координатной оси φ на противоположное, взаимно поменять надписи D_1 и D_2 , исключить из рассмотрения положения 5 и 6 графика, заменить надпись β_1^- на β_2^+ , β_2^- на β_1^+ , и, кроме того, считать, что положения 1, 2, ... графика соответствуют убывающим значениям β .

Знание характера поведения функции $\varphi(\alpha)$ в области существования решения (1.2)–(1.6) системы (1.1) для различных значений N позволяет отметить основные особенности функции $\lambda(\varphi)$, получающейся при совместном рассмотрении соотношений (1.4), (1.5).

Так для нечетных N из (1.4), (1.5) и (1.8), (1.9) получаем равенства

$$\lambda(\varphi = \beta\pi, \alpha = \alpha_1^-) = \lambda(\varphi = \alpha_1^- + \beta\pi) = \quad (1.16)$$

$$= r_N e^{\gamma(\alpha_1^- - N\pi)} \sin(\beta\pi - \alpha_1^-) (\sin(\beta\pi))^{-1} \quad (\beta \leq \beta_1^-),$$

$$\lambda(\varphi = \beta\pi, \alpha = (1 - \beta)\pi) = \lambda(\varphi = \beta\pi, \alpha = -(1 - \beta)\pi) = \quad (1.17)$$

$$= -2r_N e^{\delta} (1 - e^{-(N+1)\delta}) [e^{p\delta} + e^{-p\delta} + 2 \cos(\beta\pi)]^{-1} \cos(\beta\pi)$$

$$(\beta > \beta_1^-),$$

$$\lambda(\varphi = +0, \alpha = \beta\pi) = \lambda(\varphi = \beta\pi - 0, \alpha = -\beta\pi + 0) = -2r_{N+1} (1 - e^{-N\delta}) \times \quad (1.18)$$

$$\times [e^{p\delta} + e^{-p\delta} + 2 \cos(\beta\pi)]^{-1} \cos(\beta\pi) \quad (\beta > \beta_2^-),$$

$$\lambda(\varphi = -\alpha_*^- + \beta\pi, \alpha = \alpha_*^-) = \lambda(\varphi = \beta\pi - 0, \alpha = -\alpha_*^- - 0) =$$

$$= -r_{N+1} e^{-\gamma(\alpha_*^- + N\pi)} \sin(\alpha_*^- + \beta\pi) (\sin(\beta\pi))^{-1} \quad (1.19)$$

$$(\beta > \beta_2^-, \alpha_*^- = \alpha_{21}^- \text{ или } \alpha_{22}^-).$$

Нетрудно также проверить, что при

$$\beta \leq \beta_2^- \quad \lambda(\varphi = -\alpha_{22}^- + \beta\pi) =$$

$$= \lambda(\varphi = \beta\pi - 0, \alpha = -\alpha_{22}^-), \quad \lambda(\varphi = -\alpha_{21}^- + \beta\pi) = \lambda(\varphi = \beta\pi - 0, \alpha = -\alpha_{21}^-).$$

Из приведенных соотношений следует, что в точке $\varphi = \beta\pi$ функция $\lambda(\varphi)$ непрерывна только для малых значений параметра γ , когда $\beta \geq \beta_2^-$. При больших значениях γ функция $\lambda(\varphi)$ в точке $\varphi = \beta\pi$ разрывна. При нечетных N график функции $\lambda(\varphi)$ состоит из трех участков гладкости. Для значений $\varphi < \beta\pi$, $\alpha < 0$ функция $\lambda(\varphi)$ двузначна и в остальных случаях однозначна. При $\alpha \rightarrow \pm 0$ ($\varphi > \beta\pi$) величина $\frac{d\lambda}{d\varphi} \rightarrow 0$.

При $\beta \rightarrow 1$ значение, соответствующее границе разрыва функции $\lambda(\varphi)$, находится с помощью соотношений (1.19), (1.11) и равно

$$\lambda_{\text{разр}}^- = (e^\delta - e^{-N\delta}) (e^\delta - 1)^{-1}, \quad (1.20)$$

$$\lambda_{\text{разр}}^+ = (e^\delta + e^{-N\delta}) (e^\delta - 1)^{-1}. \quad (1.21)$$

Для четных значений N имеют место соотношения

$$\lambda(\varphi = \beta\pi, \alpha = \alpha_1^+) = \lambda(\varphi = \alpha_1^+ + \beta\pi, \alpha = -\alpha_1^+),$$

$$\lambda(\varphi = \beta\pi, \alpha = (1 - \beta)\pi) = \lambda(\varphi = \pi, \alpha = -(1 - \beta)\pi),$$

$$\lambda(\varphi = +0) = \lambda(\varphi = \beta\pi - 0, \alpha = -\beta\pi + 0) \quad (\beta \leq \beta_2^+),$$

$$\lambda(\varphi = -\alpha_2^+ + \beta\pi) = \lambda(\varphi = \beta\pi - 0, \alpha = -\alpha_2^+ + 0)$$

(при $\beta > \beta_2^+$. Величина λ в каждом из четырех приведенных равенств определяется формулами, получающимися соответственно из (1.16) — (1.19) после инверсии перед последними знака и формальной замены в них α_1^- на α_1^+ и α_*^- на α_2^+ . При четных так же, как и при нечетных N , график функции $\lambda(\varphi)$ в точке $\varphi = \beta\pi$ при $\beta \leq \beta_2^+$ непрерывен и при $\beta > \beta_2^+$ разрывен. в одном из трех интервалов гладкости функция $\lambda(\varphi)$ двузначна, а в остальных интервалах однозначна; при $\alpha \rightarrow \pm 0$ ($\varphi < \beta\pi$) $\frac{d\lambda}{d\varphi} \rightarrow 0$.

При $\beta \rightarrow 0$ значение, соответствующее границе разрыва функции $\lambda(\varphi)$, находится с помощью соотношений (1.12), (1.16) и равно величине

$$\lambda_{\text{разр}} = (1 + e^{-N\delta}) (e^\delta - 1)^{-1}. \quad (1.22)$$

Используя результаты качественного рассмотрения зависимости области существования решения (1.2) — (1.6) и свойств функции $\lambda(\varphi)$ от параметров задачи, нетрудно проконтролировать результаты построения графиков функции $\lambda(\varphi)$ для $\gamma = \pi^{-1}$, $N = 1, 2$ и различных допустимых значений β (рис. 2). Из приведенных рисунков следует, что любому допустимому значению λ соответствует два, четыре и т. д. значения φ . Нетрудно проверить, что начальные точки, соответствующие каждой определенной паре указанных значений φ , различны и образуют так называемый цикл [6, 7]. Характер устойчивости точек такого цикла определяется расположением относительно единичного круга корней получающегося обычным образом [8] характеристического полинома

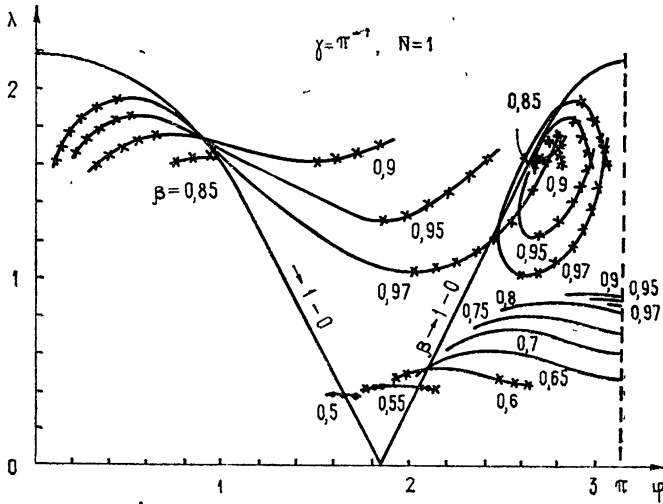
$$\begin{aligned} & | \rho | | \rho' | z^2 - [2 \cos(\beta\pi) | \rho | | \rho' | + (\cos(\beta\pi) - \gamma \sin(2\beta\pi)) \times \\ & \times (| \rho | + | \rho' |) + \cos(\alpha + \beta\pi) \cos(\alpha - \beta\pi) - \gamma^2 \sin^2 \alpha - \\ & - \gamma \sin(2\beta\pi) + \gamma^2 \sin^2(\beta\pi)] e^{-2\rho\delta} z + (| \rho | + 1) (| \rho' | + 1) e^{-4\rho\delta} = 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

в котором величины $| \rho |$ и $| \rho' |$ определяются соотношениями (1.2), (1.3).

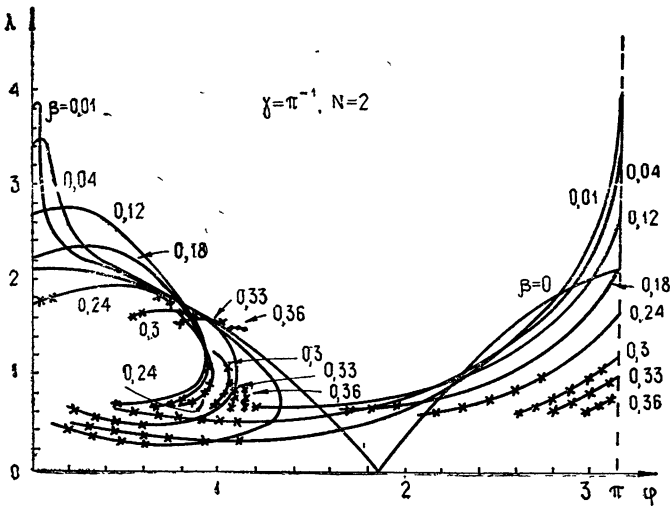
Указанную оценку расположения корней полинома (1.23) относительно единичного круга целесообразно проводить одновременно с построением решения (1.2) — (1.6), отмечая при этом знаком «устойчиво-неустойчиво» соответствующие участки графика функции $\lambda(\varphi)$. Именно таким образом на рис. 2 были определены участки графиков $\lambda(\varphi)$, соответствующие в (1.23) $| z_{1,2} | > 1$ (отмечены точками), $| z_{1,2} | \cong 1$ (отмечены крестиками), $| z_{1,2} | < 1$ (без обозначений).

Следует отметить, что необходимость знака «неустойчиво» на участках, примыкающих к точкам разрыва графика функции $\lambda(\varphi)$ ($\varphi \neq 0, \pi$), следует непосредственно из вида коэффициентов полинома (1.23). Действительно, согласно (1.2), (1.3) на участках, примыкающих к точкам разрыва функций $\lambda(\varphi)$, либо $| \rho |$, либо $| \rho' |$ сколь угодно мало. Но это

означает, что по крайней мере один из корней полинома (1.23) лежит вне единичного круга и, следовательно, соответствующий участок графика функции $\lambda(\varphi)$ «неустойчив».



а)



б)

Рис. 2.

По этой же причине участки графика функции $\lambda(\varphi)$, стягивающиеся в точку при $\beta < \beta_1^-$ (нечетные N) и при $\beta > \beta_2^+$ (четные N), соответствуют существованию неустойчивых двукратных неподвижных точек S' -преобразования.

Проведенного указанным образом рассмотрения характера устойчивости двукратных неподвижных точек S' -преобразования и выяснения соответствия его определенным участкам графика функции $\lambda(\varphi)$ оказывается достаточно для того, чтобы на плоскости p, λ ($\gamma = \text{const}$) основных параметров задачи указать области существования различного числа двукратных неподвижных точек S' -преобразования с определенным характером устойчивости.

Для случая $\gamma = \pi^{-1}$ и $1,5 < p < 2,5$ вид таких областей приведен на рис. 3. В обозначениях «20», «02» и т. д., принятых на рисунке, цифры показывают, какое число устойчивых (первая цифра) и неустойчивых (вторая цифра) двукратных неподвижных точек S' -преобразования существует при значениях параметров p и λ , взятых из соответствующей области. Область, соответствующая существованию устойчивого симметричного и двух устойчивых несимметричных колебаний, на рисунке заштрихована.

Точками на рис. 3 отмечены такие границы областей, при переходе через которые происходит слияние двух двукратных неподвижных точек с одной простой неподвижной точкой точечного преобразования S' . Границы, при переходе через которые у характеристического полинома,

определяющего устойчивость двукратных неподвижных точек, появляется один корень $z = -1$ или два комплексно-сопряженных корня $|z| = 1$, на рисунке отмечены крестиками. Границы, соответствующие слиянию устойчивых и неустойчивых двукратных неподвижных точек, отмечены однократной штриховкой. Границы, на которых исчезновение двукратных неподвижных точек обусловлено разрывным характером функций точечного преобразования S' , особых пометок не имеют.

Следует отметить, что из четырех существующих в области «42» плоскости параметров p, λ (рис. 3) устойчивых несимметричных колебаний не все колебания отличаются друг от друга существенно. Так, два несимметричных колебания, родившиеся от симметричного колебания, близки к нему и друг к другу как по форме, так и по размерам. Другая же пара устойчивых несимметричных колебаний по размерам значительно больше и имеет на периоде четко выраженную несимметрию.

Проекции устойчивых несимметричных колебаний каждой из указанных пар на плоскости x, y симметричны относительно начала координат.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ С «ПОДТАЛКИВАЮЩИМ» ТРЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ПРИБЛИЖЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В работе [3] показано, что с помощью простого переобозначения параметров систему уравнений (1.1) с точностью до знака внешней силы можно переписать в виде одного уравнения

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = \frac{\pi}{2} \gamma \operatorname{sgn} [\dot{x}] + \lambda \operatorname{sgn} [\sin(\tau/p)] \quad (2.1)$$

и, следовательно, при $\gamma \ll 1$ связь между координатами x', y' и x_0, y_0 (см. п. 1) можно установить с помощью приближенного интегрирования уравнения (2.1) в первом интервале знакопостоянства внешней силы.

Устанавливаемое таким образом соответствие точек (x_0, y_0) с точка-

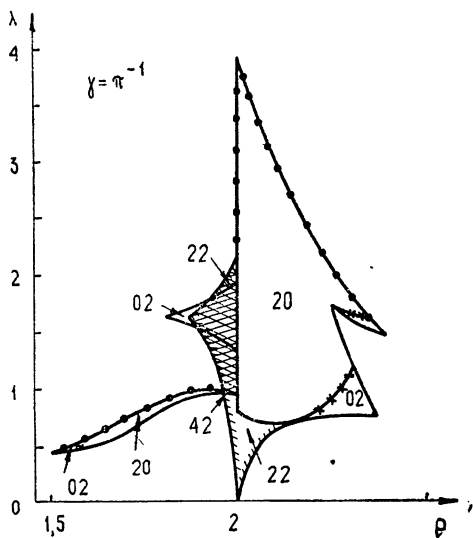


Рис. 3.

ми (x', y') определяет точечное преобразование \tilde{S}' , которое является приближением к точному точечному преобразованию S' . Поскольку \tilde{S}' -преобразование определяется с помощью более простых формул [3], нежели S' -преобразование, решение системы уравнений, определяющих координаты двукратных неподвижных точек \tilde{S}' -преобразования, находится также значительно проще. Исследование свойств такого решения с одновременной оценкой величины корней характеристического полинома, определяющего устойчивость двукратных неподвижных точек точечного преобразования \tilde{S}' , позволяет разбить плоскость параметров p, λ ($\gamma = \text{const}$) задачи (2.1) на области существования одинакового числа двукратных неподвижных точек \tilde{S}' -преобразования с определенным характером устойчивости.

Результаты такого разбиения для случая $\delta = 0,2$; $1,5 < p < 2,5$ приведены на рис. 4. Характер обозначений на рис. 4 тот же, что и на рис. 3.

Сравнивая результаты исследования свойств системы с «подталкивающим» трением с помощью приближенного и точного точечного преобразования S' , целесообразно отметить следующее.

Из сопоставления рис. 3 и рис. 4 следует, что факт существования в системе с «подталкивающим» трением устойчивых несимметричных колебаний с периодом внешней силы устанавливается как при изучении свойств точного, так и при изучении свойств приближенного точечного преобразования \tilde{S}' . Однако общая картина разбиения части плоскости p, λ на области существования одинакового числа несимметричных колебаний с определенным

характером устойчивости при исследовании с помощью приближенного точечного преобразования существенно упрощается: общее число областей уменьшается, границы остающихся областей сглаживаются, исчезает область существования устойчивого симметричного и двух устойчивых несимметричных колебаний, исключается существование области четырех устойчивых несимметричных колебаний.

Столь значительная разница в результатах исследований связана с тем, что применение метода усреднения для получения приближенного точечного преобразования \tilde{S}' приводит к качественному искажению формы траекторий движения системы в окрестности полосы отталкивания [2]. В этом случае условия несущественности разрывного характера нелинейности исходного уравнения системы заведомо не выполнены [9, 10].

О совпадении результатов точного и приближенного исследований в системе с «подталкивающим» трением, очевидно, можно говорить только тогда, когда значения параметра обобщенных потерь асимптотически малы, а амплитуда внешней силы достаточно мала. В этом случае в переменных работы [3] величина полосы отталкивания также мала и поэтому почти для всех фазовых траекторий системы разрывный характер нелинейности уравнений системы становится несущественным.

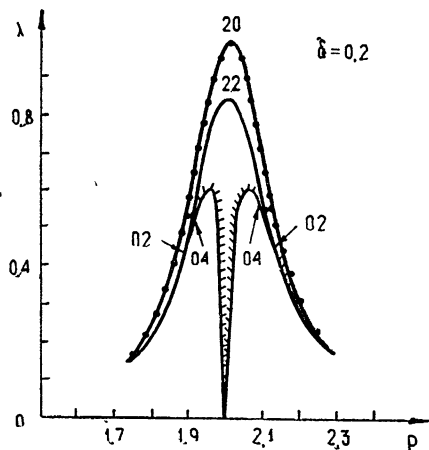


Рис. 4.

3. О НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЯХ С ПЕРИОДОМ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ В ЗАДАЧЕ СИНХРОНИЗАЦИИ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВИДА КУБИЧЕСКОЙ ПАРАБОЛЫ

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu [-1 + \alpha(1 - k_0^2 x^2)] \dot{x} + \lambda \operatorname{sgn} [\sin(\tau/p)], \quad (3.1)$$

где $\alpha > 1$, $\mu \ll 1$, k_0 , λ , $p > 0$. Согласно [5], (3.1) является уравнением «симметричного» осциллятора и поэтому, как и для системы (1.1), исследование периодических движений в системе может быть сведено к исследованию неподвижных точек «полупериодного» точечного преобразования, смысл которого приведен в п. 1. Поскольку получение аналитических формул такого преобразования для уравнения (3.1) в общем случае невозможно, используя малость μ , можно ограничиться исследованием формул приближенного «полупериодного» точечного преобразования, формулы которого приведены в работе [4]. После подстановки указанных формул в систему уравнений, определяющих координаты двукратных неподвижных точек (C, ϑ) , (c_1, ϑ_1) , и перехода к более удобным для исследования параметрам R, R_1 , где

$$R = (1 + C)^{-1/2}, \quad R_1 = (1 + C_1)^{-1/2}, \quad (3.2)$$

получающуюся систему уравнений можно разрешить относительно ϑ и ϑ_1 . Используя дважды тождество $\sin^2 + \cos^2 = 1$, для нецелочисленных значений p получаем функцию

$$\begin{aligned} \lambda(R) = R/2 \{ [1 - 2(e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R^2)^{-1/2} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1/2} \times \\ \times \cos(2p\pi) + (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R^2)^{-1} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1} \} \times \\ \times [1 - 2(e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1/2} \cos(p\pi) + (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1} \}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $R_1 = R_1(R)$ — решение уравнения

$$h(R_1) = h(R) \quad (R_1 \neq R; \quad R_1, R > 0), \quad (3.4)$$

функция

$$\begin{aligned} h(\zeta) = \zeta^2 (1 - 2(e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) \zeta^2)^{-1/2}) \cos(p\pi) + \\ + (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) \zeta^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для целочисленных значений $p = 2, 4, 6, \dots$ функция $\lambda(R)$ определяется: при $R \neq 1$ соотношениями (3.3)—(3.5) и при $R = 1$ — соотношениями

$$\lambda = -(1/2) (\cos \vartheta + \cos \vartheta_1), \quad \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta \quad (0 \leq \vartheta, \vartheta_1 \leq 2\pi; \quad R_1 = R = 1). \quad (3.6)$$

Отметим основные свойства зависимостей (3.2)—(3.6). Непосредственно из вида функции $h(\zeta)$ следует, что уравнение (3.4) имеет решение только в окрестности значений $p = 2, 4, 6, \dots$. При изменении p , как в сторону больших, так и в сторону меньших от $p = 2, 4, 6, \dots$ значений, решения уравнения (3.4) сливаются и исчезают. График функции $h(R)$ при этом становится монотонно возрастающим. В соответствии с уравнением (3.4) и характером функции $h(R)$ график функции $R_1 = R_1(R)$ имеет вид простой замкнутой кривой. В силу инвариантности уравнения (3.4) относительно замены $R_1 \rightleftharpoons R$, эта кривая симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла.

Из характера функции $R_1 = R_1(R)$ следует, что функция $\lambda(R)$ двузначна и, за исключением четных целочисленных значений p , график ее

на плоскости R, λ представляет собой уникарсальную кривую. Из (3.6) следует, что при $p \rightarrow 2, 4, 6, \dots$ указанная кривая деформируется таким образом, что при $p = 2, 4, 6, \dots$ в точке $R = 1$ возникает вертикальный участок графика.

При определении характера устойчивости двукратных неподвижных точек «полупериодного» преобразования работы [4] с помощью оценки величины корней характеристического полинома

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0, \quad (3.7)$$

где

$$a_1 = - (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R^2)^{-1/2} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1/2} \times \\ \times \{ [1 + e^{-2\delta p} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R^2)^{-1} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1}] \times \\ \times \cos(p\pi - \vartheta_1 + \vartheta) \cos(p\pi + \vartheta_1 - \vartheta) - e^{-\delta p} [(e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R^2)^{-1} + \\ + (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-1}] \sin(p\pi - \vartheta_1 + \vartheta) \sin(p\pi + \vartheta_1 - \vartheta) \}, \quad (3.8)$$

$$a_0 = e^{-2\delta p} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R^2)^{-2} (e^{-\delta p} + (1 - e^{-\delta p}) R_1^2)^{-2}, \quad (3.9)$$

учитывалась возможность влияния точности определения решения уравнения (3.4) на величину коэффициентов a_0, a_1 . Для того, чтобы устранить влияние погрешности определения величины коэффициентов полинома (3.7) на характер расположения его корней относительно единичного круга, точность решения уравнения (3.4) подбиралась в соответствии с требованием выполнения условий теоремы работы [11].

На рис. 5 представлены результаты определения устойчивости двукратных неподвижных точек (обозначения рис. 2).

Разбиение части плоскости p, λ параметров задачи на области существования двукратных неподвижных точек с одинаковым характером устойчивости, соответствующее случаю, представленному на рис. 5, приведено на рис. 6. Граница, при переходе через которую происходит сли-

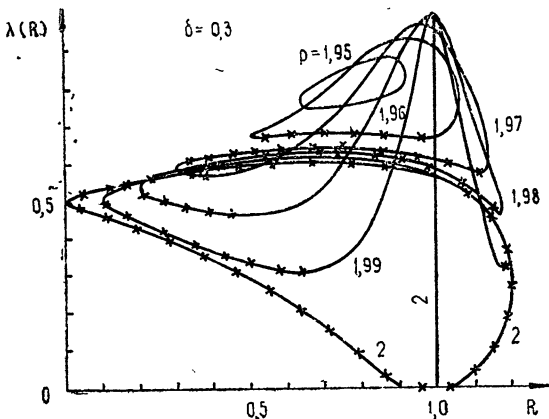


Рис. 5.

яние двух устойчивых двукратных неподвижных точек с простой устойчивой неподвижной точкой точечного преобразования, на рисунке отмечена точками. Граница, соответствующая слиянию двух неустойчивых двукратных неподвижных точек преобразования с простой неустойчивой точкой, отмечена крестиками. Характер бифуркации простой неподвижной точки на этой границе находится в соответствии с известными положениями теории бифуркаций неподвижных точек [6, 7]. Так, например,

для простой неподвижной точки M^* и двукратных неподвижных точек M_1^* и M_2^* , отражающихся от M^* при переходе через границу, разделяющую области «20» и «22» (рис. 6), имеем $(\text{ind } M^*)_{21} = -1$, $(\text{ind } M^*)_{22} = 1$, $\text{ind } M_1^* = \text{ind } M_2^* = -1$. Следовательно, $(\text{ind } M^*)_{20} = -(\text{ind } M^*)_{22} + 2 \text{ind } M_1^*$ и переход через границу происходит обычным порядком [6].

Граница, на которой сливаются устойчивые и неустойчивые двукратные точки преобразования, на рисунке отмечена штрихами. В обозначениях «20», «22», приведенных на рис. 6, первая цифра означает число устойчивых, а вторая—число неустойчивых двукратных неподвижных точек точечного преобразования.

Из рис. 6 следует, что в рассматриваемой системе возможно существование пары устойчивых несимметричных колебаний с периодом внешней силы.

Нетрудно проверить, что аналогичный качественный результат получается при учете в спектре внешней силы уравнения (3.1) только двух, ближайших к резонансной, составляющих спектра. В такой постановке решение задачи известно и при более общих предположениях относительно величины и частоты указанных спектральных составляющих [12–17]. Однако учет достаточного большого или счетного числа составляющих спектра внешней силы в задачах синхронизации, насколько известно автору, ранее не проводился. Поэтому учет кусочно-постоянного характера формы внешней силы с помощью приема, изложенного в работе [3], представляет определенный интерес не только при изучении систем с разрывными или кусочно-нелинейными характеристиками, но и при изучении систем с непрерывными (и, в частности, полиномиальными) нелинейностями.

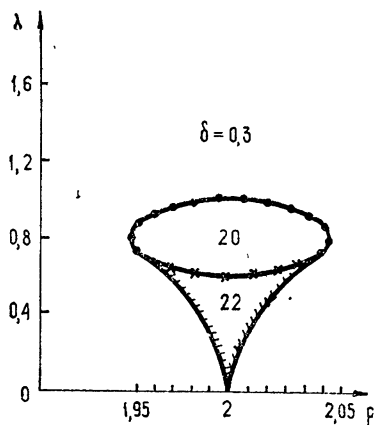


Рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 3; 389 (1967).
2. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 5, 926 (1964).
3. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 7, 999 (1967).
4. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 11, 1686 (1968).
5. Н. А. Железцов, ПММ, вып. 1, 19 (1949).
6. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 95 (1958).
7. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 146 (1958).
8. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 49 (1958).
9. Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 51 (1959).
10. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 5, 102 (1963).
11. В. И. Горюнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 7, 1083 (1969).
12. Л. Д. Гольдштейн, Изв. Ленинградского электротехнического инст. связи, вып. 4—5, 15 (1934).
13. Ю. Б. Кобзарев, ЖТФ, 5, вып. 6, 964 (1935).
14. Г. Петросян, ЖТФ, 5, вып. 9, 1552 (1935).

15. В. В. Мигулин, Е. Л. Альперт, ЖТФ, 6, вып. 5, 812 (1936).
16. Р. В. Хохлов, ДАН СССР, 97, 411 (1954).
17. В. Н. Дитенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 6, 1192 (1962).

Научно-исследовательский
физико-технический институт
При Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 января 1971 г.

ON NONSYMMETRIC OSCILLATIONS IN SOME SYMMETRIC
NONAUTONOMOUS SYSTEMS

Goryunov V. I.

Using the points mapping method the existence of stable nonsymmetric periodic oscillations with an external force period is proved for some oscillating systems with known conditions for corresponding symmetric oscillations existence.

УДК 531.

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ЭКВАТОРИАЛЬНОГО СПУТНИКА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. Хентов

Рассматриваются перманентные вращения намагниченного космического аппарата. Выявляется вид конуса перманентных осей и отмечаются на нем те образующие, которые соответствуют реальному движению. Путем построения функции Ляпунова выделяются некоторые оси, вращение вокруг которых устойчиво. В заключение рассматривается ряд частных случаев Выведение спутника на устойчивый режим перманентного вращения позволяет определенным образом стабилизировать его относительно силовой линии геомагнитного поля.

После выведения спутника на орбиту возникает проблема поддержания определенной его ориентации в пространстве. Весьма желательным, особенно для спутников с большим сроком жизни, использовать для этой цели моменты внешних сил (на этом принципе работают системы пассивной стабилизации). Первым шагом в разработке таких систем является определение стационарных положений космического аппарата во внешних полях и исследование их устойчивости. Одна из возможных систем пассивной ориентации основана на взаимодействии магнитного поля спутника с магнитным полем Земли.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим ограниченную задачу о вращательном движении спутника вокруг своего центра масс, обусловленном взаимодействием собственного магнитного поля спутника с магнитным полем Земли, предполагая, что орбита является круговой экваториальной и не зависит от вращения спутника. Магнитное поле космического аппарата возникает, в основном, за счет наличия на нем токовых систем и постоянных магнитов, а также намагничивания его металлической оболочки в полете, и может [1, 2] существенным образом влиять на его движение вокруг своего центра масс.

Будем считать, что магнитный момент спутника складывается из постоянной составляющей I (направляющие косинусы вектора I с главными центральными осями инерции спутника xyz обозначим соответственно через η_1 , η_2 и η_3) и магнитного момента оболочки. Примем еще, что оболочка намагничивается вдоль своей оси геометрической симметрии, которая совпадает с осью z . Магнитный момент оболочки в этом случае в первом приближении, согласно [3, 4], можно записать, как $\zeta\gamma_3/H$, где $\zeta = (\mu_0 - 1)vH^2/4\pi$, а μ_0 и v — соответственно магнитная проницаемость и объем оболочки, γ_3 — косинус угла между осью z и вектором геомагнитной напряженности H . Эта модель тем ближе к действительности, чем более вытянута оболочка.

Будем считать также, что магнитное поле Земли представляет собой диполь, ось которого антипараллельна оси вращения Земли. Эта модель соответствует первому члену в разложении магнитного потенциала [5, 6] и дает достаточно хорошую аппроксимацию геомагнитного

поля [7] по крайней мере для высоких спутников. Для напряженности поля в точке пространства с радиусом-вектором R при выбранной модели, согласно [8], имеем

$$H = \frac{\mu_e}{R^3} \{ 3(K \cdot e_R) e_R - K \}, \quad (1)$$

где μ_e — постоянная Земного магнетизма, K — орт оси диполя, e_R — орт направления R .

Уравнения вращения спутника по отношению к осям x_1, y_1, z_1 (ось z_1 коллинеарна оси вращения Земли), поступательно перемещающимся вместе с его центром масс, имеют вид

$$\frac{d^*}{dt} (J \omega) + [\omega \times J \omega] = [I \times H] + \frac{\zeta}{H^2} (k \cdot H) [k \times H], \quad (2)$$

$$\frac{d^* \gamma}{dt} = [\gamma \times \omega]. \quad (3)$$

Здесь J — тензор инерции спутника для его центра масс, $\omega = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ — абсолютная угловая скорость вращения спутника, p, q и r — ее проекции соответственно на орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ осей xyz , $\gamma = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}$ — орт оси z_1 , индекс (*) означает локальную производную от вектора. Для круговой экваториальной орбиты $H = \mu_e \gamma / R^3$.

Сферическое движение спутника можно в каждый момент времени интерпретировать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через его центр масс. С течением времени как положение этой оси в пространстве, так и угловая скорость, вообще говоря, изменяются.

Поставим задачу: найти частные решения уравнений (2—3), соответствующие вращениям с постоянными угловыми скоростями вокруг осей, не меняющих своего положения в пространстве, а также определить распределение этих осей в теле спутника и в репере x_1, y_1, z_1 . Такие оси, лежащие на конусе с вершиной в центре масс спутника, называются [9] перманентными, а сами частные решения — перманентными вращениями. Задача о нахождении конуса перманентных вращений была впервые поставлена в 1894 году для тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в работах [10, 11] и получила свое дальнейшее развитие, например, в работах [12—14].

2. ПЕРМАНЕНТНЫЕ ОСИ СПУТНИКА

Будем считать, что тензор инерции отнесен к главным центральным осям инерции спутника. Тогда $J \omega = A p \mathbf{i} + B q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}$, где A, B, C — главные моменты инерции спутника. Поскольку всякая перманентная ось сохраняет неизменное положение в пространстве, то она, очевидно, остается неизменной и в теле спутника. Поэтому для перманентного вращения проекции p, q и r постоянны, $d^*(J \omega) / dt = 0$, и для нахождения перманентных осей следует решить уравнение (3) совместно с уравнением

$$[\omega \times J \omega] + H[\gamma \times I] + \zeta(\gamma \cdot k)[\gamma \times k] = 0, \quad (4)$$

полагая, что вектор ω постоянен. Умножая уравнение (4) скалярно на γ , получаем $(\gamma \cdot [\omega \times J \omega]) = 0$. В предположении, что центральный эллипсоид инерции спутника отличен от сферы, последнее соотношение означает, что векторы γ, ω и $J \omega$ компланарны. Плоскость, образованная векторами ω и $J \omega$, сохраняет неизменное положение относительно спутника, а в пространстве поворачивается с угловой скоростью ω . Это

обстоятельство с учетом того, что плоскость, содержащая векторы ω и γ , должна быть неподвижна в пространстве (оба вектора постоянны), приводит к утверждению, что векторы ω и γ коллинеарны. При этом условии уравнение (3) выполняется тождественно.

Итак, перманентные вращения экваториального спутника в магнитном поле могут происходить лишь вокруг нормали к плоскости его орбиты. Для такого движения направляющие косинусы вектора γ , которые обозначим $\gamma_1 = a$, $\gamma_2 = b$ и $\gamma_3 = c$, постоянны. Вектор угловой скорости $\omega = \omega\gamma$, причем ω означает проекцию вектора ω на направление оси z_1 . Подставляя эти выражения в уравнение (4) и проектируя на оси x, y, z , получим систему уравнений для определения величин угловых скоростей перманентных вращений.

$$\begin{aligned} (C - B) \omega^2 bc &= IH(\eta_2 c - \eta_3 b) - \zeta bc, \\ (A - C) \omega^2 ac &= IH(\eta_3 a - \eta_1 c) + \zeta ac, \\ (B - C) \omega^2 ab &= IH(\eta_1 b - \eta_2 a). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку в уравнения входят только квадраты угловых скоростей, направление вращения вокруг перманентной оси не имеет значения. Чтобы система (5) была совместна, согласно теореме Кронекера—Капелли [15], ранг расширенной матрицы ее коэффициентов должен быть равен единице. Это условие выполняется, если величины a , b и c связаны соотношением

$$A_1 bc - A_2 ac + A_3 ab + Dabc = 0, \quad (6)$$

которое представляет собой уравнение геометрического места перманентных осей в главных центральных осях инерции спутника. Здесь $A_1 = (B - C)\eta_1$, $A_2 = (A - C)\eta_2$, $A_3 = (A - B)\eta_3$, $D = K(A - B)$, $K = \zeta/IH$ — безразмерный параметр. Между величинами A_1 , A_2 , A_3 существует очевидное соотношение $A_3 = \left(\frac{A_2}{\eta_2} - \frac{A_1}{\eta_1}\right)\eta_3$.

Если какая-либо из образующих конуса (6) совмещена с нормалью к плоскости орбиты и соответствующий ей согласно (5) квадрат угловой скорости положителен, то спутник будет совершать равномерное вращение вокруг этой образующей. При этом, если ни один из направляющих косинусов a , b , c не равен нулю,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{B - C} \left\{ IH \left(\frac{\eta_3}{c} - \frac{\eta_2}{b} \right) + \zeta \right\} = \frac{1}{A - C} \left\{ IH \left(\frac{\eta_3}{c} - \frac{\eta_1}{a} \right) + \zeta \right\} = \\ &= \frac{IH}{A - B} \left\{ \frac{\eta_2}{b} - \frac{\eta_1}{a} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть x, y, z — координаты точки на поверхности конуса (6). Тогда уравнение (6) получает вид

$$(A_1 yz - A_2 xz + A_3 xy) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + Dxyz = 0. \quad (8)$$

Полости этого конуса не симметричны. Его направляющими служат главные центральные оси инерции, для которых $\omega^2 = \infty$. Уравнению (6) удовлетворяют также оси

$$a = \lambda\eta_1, \quad b = \lambda\eta_2, \quad c = \lambda\eta_3/(1 - K\lambda), \quad (9)$$

для которых из уравнения (7) получаем $\omega^2 = 0$. Это значит, что соотношения (9) определяют положения равновесия спутника. Оси

$$a = \sigma\eta_1/A, \quad b = \sigma\eta_2/B, \quad c = \sigma\eta_3/(C - \sigma K) \quad (10)$$

также находятся среди образующих конуса (6). Для них $\omega^2 = -IH/\sigma$. Коэффициенты λ и σ определяются из условия $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Уравнения (2), (3) допускают существование, наряду с тривиальным $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, еще двух первых интегралов

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2(I \cdot H) - \zeta \gamma_3^2 = h, \quad (11)$$

$$Ap \gamma_1 + Bq \gamma_2 + Cr \gamma_3 = C_1. \quad (12)$$

Если положение спутника в осях $x_1 y_1 z_1$ задать углами Эйлера—углом нутации θ , углом прецессии ψ и углом собственного вращения φ , вводимыми обычным образом, то лагранжиан рассматриваемой голономной склерономной системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta = 1/2 [A(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + B(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + \\ + C(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2] + IH(\eta_1 \sin \theta \sin \varphi + \eta_2 \sin \theta \cos \varphi + \\ + \eta_3 \cos \theta) + (\zeta \cos^2 \theta)/2. \end{aligned} \quad (13)$$

Точки означают производные по времени. Координата ψ является циклической. Ей соответствует циклический интеграл $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = p_\psi = C_1$, где p_ψ — обобщенный импульс. Если ввести функцию Рауса $R = p_\psi \dot{\psi} - L$ и с помощью интеграла (12) заменить в ней циклическую скорость через позиционные переменные, то порядок системы (2), (3) понизится на две единицы, и она примет вид [16]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0. \quad (14)$$

Рассматриваемые перманентные вращения соответствуют положениям равновесия системы (14) и определяются условиями

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\psi} = \tilde{\omega}. \quad (15)$$

Положения равновесия системы (14) находятся [16] из уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi = \hat{p}_\psi^2 |2a_1 - IH(\eta_1 \sin \theta \sin \varphi + \eta_2 \sin \theta \cos \varphi + \eta_3 \cos \theta) - (\zeta \cos^2 \theta)|^2, \\ a_1 = A \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + B \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + C \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (17)$$

а \hat{p}_ψ означает интеграл (12) для движения (15).

Здесь Π — потенциал Рауса. Таким образом, уравнения (16) также определяют [16] конус перманентных вращений, однако их анализ представляет существенные трудности. Движение (15) устойчиво по отношению ко всем импульсам и позиционным координатам [17], если

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} \right)^2 > 0. \quad (18)$$

Получаемые таким способом достаточные условия устойчивости рассматриваемых перманентных вращений выписаны в работе [18]. По отношению к циклическим координатам движение (15) неустойчиво. Если корни уравнения

$$\delta^2 - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \right) \delta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} \right)^2 = 0 \quad (19)$$

имеют разные знаки (корни вещественны), то согласно [19] движение (15) неустойчиво. Если оба корня отрицательны, то для рассматриваемой гироскопически связанной системы возможна гироскопическая стабилизация перманентного вращения.

Перейдем теперь к исследованию конуса (8). Без ограничения общности можно считать, что $A > B > C$ и все величины η_1, η_2 и η_3 положительны, а, следовательно, $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, D > 0$. Тогда, если оболочка спутника не намагничивается ($D = 0$), конус перманентных вращений, как легко видеть, представляет собой симметричный конус второго порядка, одна полость которого опирается на оси $x, z, -y$, а другая на оси $-x, y, -z$. В общем случае ($D \neq 0$) конус (8) соприкасается с этим конусом по главным центральным осям инерции спутника, причем касательные плоскости к поверхностям обоих конусов имеют уравнения $z = A_3 y / A_2, z = -A_3 x / A_1$ и $y = A_2 x / A_1$ для осей x, y, z соответственно.

Для исследования поверхности (8) пересечем ее плоскостями $z = 1$ и $z = -1$. На плоскости $z = 1$ получим кривую, определяемую уравнением

$$(A_1 y - A_2 x + A_3 x y) \sqrt{1 + x^2 + y^2} D x y \equiv F(x, y) = 0. \quad (20)$$

Эта кривая проходит через начало координат и не имеет точек в четвертой четверти плоскости xy . Для нахождения ее особых точек [20] решим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} = (A_1 y - A_2 x + A_3 x y) \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + (A_3 y - A_2) \times \\ \times \sqrt{1 + x^2 + y^2} + D y = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (A_1 y - A_2 x + A_3 x y) \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + (A_1 + A_3 x) \sqrt{1 + x^2 + y^2} + D x = 0 \quad (22)$$

совместно с уравнением (20). Умножая уравнение (21) сначала на x , а уравнение (22) на $-y$ (начало координат не является особой точкой), а затем уравнение (21) на y , а уравнение (22) на $-x$ и складывая оба уравнения, получим

$$(A_1 y - A_2 x + A_3 x y) \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - (A_1 y + A_2 x) \sqrt{1 + x^2 + y^2} = 0, \quad (23)$$

$$[-A_1 x - A_2 y + A_3 (y^2 - x^2)] \sqrt{1 + x^2 + y^2} + D (y^2 - x^2) = 0. \quad (24)$$

Решая совместно уравнения (20) и (24), находим для особых точек

$$A_1 y^3 + A_2 x^3 = 0. \quad (25)$$

Из уравнения (23) получаем

$$2 A_1 y^3 + 2 A_2 x^3 + A_3 x y (y^2 - x^2) + A_1 y + A_2 x = 0. \quad (26)$$

Решая совместно уравнения (25) и (26), находим

$$A_1 y + A_2 x + A_3 (y^2 - x^2) x y = 0. \quad (27)$$

Теперь из уравнения (23) получаем

$$(x^2 - y^2) [A_1 y - A_2 x - A_3 (x^2 + y^2) x y] = 0,$$

Отсюда для случая $x^2 \neq y^2$ находим

$$A_1 y - A_2 x = A_3 (x^2 + y^2) xy.$$

Решая это уравнение совместно с (27), получаем для особых точек

$$x = (A_1/A_3)^{1/3}, \quad y = -(A_2/A_3)^{1/3}. \quad (28)$$

Точка с координатами (28) лежит в четвертой четверти плоскости xy и поэтому не может принадлежать кривой.

Проанализируем случай $x^2 = y^2$. В силу уравнения (25) следует рассматривать лишь условие $y = -x$, что возможно, если $A_1 = A_2$. Уравнения (20) — (22) при этом дают

$$(2A_1 - A_3 y) \sqrt{1 + 2y^2} - Dy = 0,$$

$$(2A_1 - A_3 y) y^2 / \sqrt{1 + 2y^2} + (A_1 - A_3 y) \sqrt{1 + 2y^2} - Dy = 0.$$

Исключая параметр D , получаем $A_3 y^3 + A_1 = 0$, $y = -(A_1/A_3)^{1/3}$, т. е. снова решение (28).

Итак, в плоскости $z = 1$ кривая (20) не имеет особых точек. Пересекая теперь конус (8) плоскостью $z = -1$, получим в сечении кривую

$$(A_1 y - A_2 x - A_3 xy) \sqrt{1 + x^2 + y^2} + Dxy \equiv F_1(x, y) = 0. \quad (29)$$

Для нахождения ее особых точек это уравнение надо решать совместно с уравнениями

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = (A_1 y - A_2 x - A_3 xy) \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - (A_2 + A_3 y) \sqrt{1 + x^2 + y^2} + Dy = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = (A_1 y - A_2 x - A_3 xy) \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + (A_1 - A_3 x) \sqrt{1 + x^2 + y^2} + Dx = 0.$$

Проделав выкладки, аналогичные описанным ранее, получим координаты особой точки

$$x = -(A_1/A_3)^{1/3}, \quad y = (A_2/A_3)^{1/3}. \quad (30)$$

Эта точка принадлежит кривой (29), если между коэффициентами A_1, A_2, A_3 и D существует соотношение $D = m^{3/2}$, где $m = A_1^{2/3} + A_2^{2/3} + A_3^{2/3}$. Угловая скорость перманентного вращения вокруг оси, проходящей через особую точку, определяется выражением

$$\omega^2 = \frac{IH \eta_3 \sqrt{m}}{A_3} \left(\frac{\eta_1}{A_1^{1/3}} + \frac{\eta_2}{A_2^{1/3}} \right).$$

Для выяснения типа особой точки, следуя [20], определим знак детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial^2 F_1 / \partial x^2 & \partial^2 F_1 / \partial x \partial y \\ \partial^2 F_1 / \partial y \partial x & \partial^2 F_1 / \partial y^2 \end{vmatrix}.$$

В особой точке $\Delta = 9(A_1 A_2 A_3)^{2/3} > 0$. Это значит, что особая точка изолированная.

Проанализируем теперь кривую, определяемую уравнением (20). При $D = 0$ конус (8), как отмечалось ранее, вырождается в конус второго порядка, и поэтому в этом случае уравнение (20) определяет коническое сечение. Его уравнение в осях $x_2 y_2$ с началом в точке $(-A_1/A_3, A_2/A_3)$, повернутых вокруг оси z на угол $\pi/4$ по часовой стрелке, имеет вид

$$x_2^2 - y_2^2 = 2 A_1 A_2 / A_3^2, \quad (31)$$

т. е. определяет равностороннюю гиперболу, асимптотами которой служат прямые $x = -A_1/A_3$ и $y = A_2/A_3$. Одна из ветвей этой гиперболы проходит через начало координат.

Поскольку предполагается, что $A > B$ и, следовательно, $D > 0$, то ветви кривой (20) при $D \neq 0$ на плоскости $z = 1$ расположены следующим образом: в области $x > 0, y > 0$ —между гиперболой (31) и осью x ; в области $x < 0, y > 0$ —между этой гиперболой и осями координат и, наконец, в области $x < 0, y < 0$ —между гиперболой и осью $(-y)$. В области $x > 0, y < 0$, как уже отмечалось, кривая (20) не имеет точек. Анализ числа перемен знаков уравнения

$$(A_1 - A_3 x)^2 y^4 + 2 A_2 x (A_1 - A_3 x) y^3 + [(A_1 - A_3 x)^2 (1 + x^2) + (A_2^2 - D^2) \times \\ \times x^2] y^2 + 2 A_2 x (A_1 - A_3 x) (1 + x^2) y + A_2^2 x^2 (1 + x^2) = 0,$$

получаемого из (20) после освобождения от радикала, позволяет, согласно теореме Декарта [15], установить, что в области $x < 0, y > 0$ рассматриваемая кривая не пересекает асимптоту $y = A_2/A_3$ по крайней мере при $D < A_1$ и асимптоту $x = -A_1/A_3$ по крайней мере при $D < A_2$.

На рис. 1 показано сечение конуса (8) плоскостью $z = 1$ для случая $A = 5, B = 3, C = 1, \eta_1 = 0,5, \eta_2 = 0,7$ и $D = 0$ (кривая 1), $D = 1$ (кривая 2), $D = 4$ (кривая 3), $D = 10$ (кривая 4).

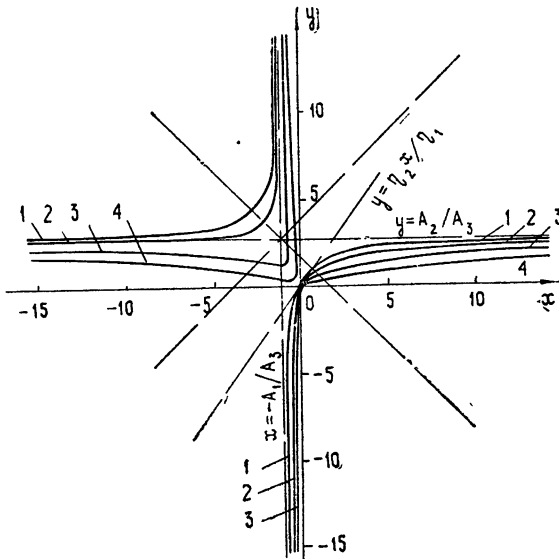


Рис. 1. Сечение конуса permanentных вращений

Рассмотрим теперь кривую, определяемую уравнением (29). При $D' = 0$ это уравнение после переноса начала координатных осей в точку $(A_2/A_3, -A_1/A_3)$ и поворота этих осей на угол $\pi/4$ против часовой стрелки вокруг оси $(-z)$ принимает вид

$$y_3^2 - x_3^2 = 2 A_1 A_2 / A_3^2, \quad (32)$$

т. е. описывает равностороннюю гиперболу с асимптотами $x = A_1/A_3$ и $y = -A_2/A_3$, одна из ветвей которой проходит через начало координат. При $D \neq 0$ ветви кривой (29) на плоскости $z = -1$ расположены следующим образом: в области $x > 0, y < 0$ —вне части плоскости,

ограниченной ветвью гиперболы (32) и осями координат; в области $x < 0, y < 0$ — между гиперболой и осью $(-y)$; в первой четверти — между гиперболой и осью x .

После освобождения в уравнении (29) от радикала получим

$$(A_1 - A_3 x)^2 y^4 + 2 A_2 x (A_3 x - A_1) y^3 + [(A_1 - A_3 x)^2 (1 + x^2) + (A_2^2 - D^2) x^2] y^2 + 2 A_2 x (A_3 x - A_1) (1 + x^2) y + A_2^2 x^2 (1 + x^2) = 0. \quad (33)$$

Анализ числа перемен знаков этого уравнения показывает, что в области $x > 0, y > 0$ кривая не пересекает асимптоту $x = A_1/A_3$ по крайней мере, если $D < A_2$; в области $x < 0, y < 0$ — кривая (29) не пересекает асимптоту $y = -A_2/A_3$ по крайней мере, если $D < A_1$. В области $x < 0, y > 0$ эта кривая при $D = 0$ не имеет точек и, как видно из уравнения (29), она не может подходить сколь угодно близко к началу координат, если коэффициенты A_1, A_2, A_3 и D одного порядка. Перегруппировкой членов уравнение (33) можно привести к виду

$$(A_2 + A_3 y)^2 x^4 - 2 A_1 y (A_3 y + A_2) x^3 + [(A_2 + A_3 y)^2 (1 + y^2) + (A_1^2 - D^2) y^2] x^2 - 2 A_1 y (A_2 + A_3 y) (1 + y^2) x + A_1^2 y^2 (1 + y^2) = 0. \quad (34)$$

При каждом фиксированном значении $x < 0$ многочлен (33) имеет, согласно теореме Декарта, либо два действительных положительных корня, либо не имеет их вовсе, а многочлен (34) при каждом фиксированном значении $y > 0$ имеет либо два отрицательных корня, либо не имеет их вовсе. Это значит, что всякая прямая $x = \text{const} < 0$ и всякая прямая $y = \text{const} > 0$ либо по два раза пересекает кривую (29) в области $x < 0, y > 0$, либо не пересекает ее вовсе. Кривая (29) не имеет точек в этой области по крайней мере, если $D^2 \leq A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$. Координаты особой точки (30) соответствуют двойному корню уравнения (33) или (34). Оценивая верхнюю и нижнюю границу действительных корней этих уравнений [15], находим, что в части плоскости $x < 0, y > 0$ точки кривой (29) могут находиться лишь в области

$$A_1 / \left[A_1 + \sqrt{D^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)} \right] \leq |x| \leq 1 + \sqrt{D^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)} / A_3,$$

$$A_2 / \left[A_2 + \sqrt{D^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)} \right] \leq y \leq 1 + \sqrt{D^2 - (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)} / A_3,$$

которая, как легко видеть, расширяется с увеличением D .

Все изложенное позволяет представить следующую картину поведения кривой (29) в области $x < 0, y > 0$. При $D < m^{3/2}$ кривая не имеет точек в этой области, при $D = m^{3/2}$ она имеет в ней изолированную точку, при $D > m^{3/2}$ кривая охватывает особую точку, причем размеры охватываемой ею части плоскости увеличиваются с увеличением коэффициента D .

На рис. 2 показано сечение конуса (8) плоскостью $z = -1$. Кривые построены для тех же значений коэффициентов, что и на рис. 1. Особой точке соответствует значение коэффициента $D \sim 7,99$.

Точки пересечения осей (10) с плоскостями $z = 1$ и $z = -1$ находятся на прямой $y = \eta_2 Ax / \eta_1 B$, которая лежит между прямой $y = \eta_2 x / \eta_1$ и касательными к кривым (20) и (29) в начале координат. По меньшей мере, по одной такой точке находится в каждой из областей $x > 0, y > 0$ плоскости $z = 1$ и $x < 0, y < 0$ плоскости $z = -1$. В области $x > 0, y > 0$ плоскости $z = -1$ существуют либо две такие точки, либо их нет вовсе.

На рис. 3 показан (качественно) конус перманентных вращений спутника (G — центр масс спутника). Одна из направляющих этого

конуса проходит через оси x , $-y$, z ; другая—через оси $(-x)$, y , $-z$. При $D = 0$ имеем конус второго порядка (его части обозначены цифрами 1 и 2). При $D \neq 0$ часть поверхности, образующей несимметричный конус, лежит внутри поверхности 1 (эта часть обозначена цифрой 3);

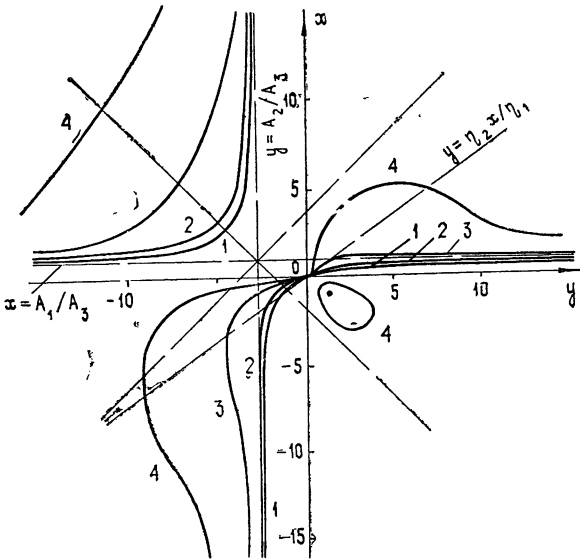


Рис. 2. Сечение конуса перманентных вращений

другая часть охватывает поверхность 2 (эта часть обозначена цифрой 4); и, наконец, если $D \geq m^{3/2}$, то спутник может совершать перманентные вращения также и вокруг осей, лежащих на конусе, обозначенном цифрой 5, расположенном внутри поверхности 2 (если $D = m^{3/2}$, конус 5 сжимается в ось 6).

Выделим на конусе перманентных вращений оси, соответствующие физически реальному движению, т. е. те, для которых квадрат угловой скорости, вычисленный в силу выражений (7), положителен. Для таких осей $(\eta_2 a - \eta_1 b)/ab \geq 0$. Числитель этого выражения обращается в нуль для точек плоскости $\eta_2 x - \eta_1 y = 0$. Поэтому реальному движению в области $x > 0, y > 0$ плоскости $z = 1$ соответствует ветвь кривой (20), лежащая между прямой $y = \eta_2 x/\eta_1$ и осью x . В областях $x < 0, y > 0$ и $x < 0, y < 0$ на ветвях этой кривой нет участков, не соответствующих возможному движению. Поскольку в первой и третьей четвертях плоскости $z = 1$ кривая лежит ниже касательной к ней в начале координат

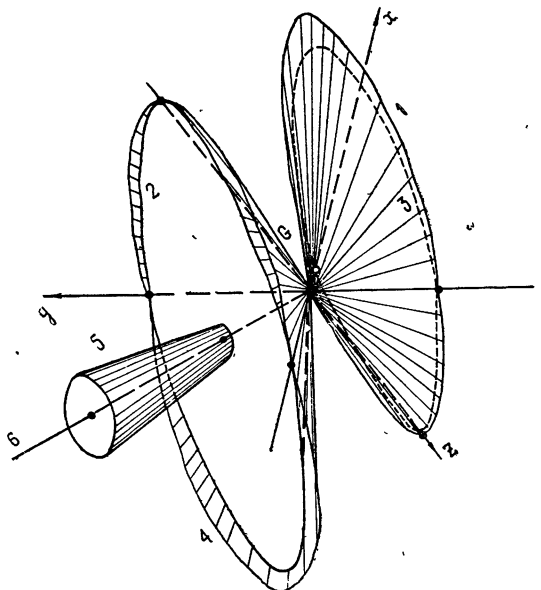


Рис. 3. Конус перманентных вращений

$y = A_2 x / A_1$, то прямая $y = \eta_2 x / \eta_1$ пересекает эту кривую по меньшей мере один раз в области $x > 0, y > 0$ и не пересекает в области $x < 0, y < 0$ ($A_2/A_1 > \eta_2/\eta_1$). В областях $x > 0, y > 0$ и $x < 0, y < 0$ плоскости $z = -1$ реальному движению соответствуют ветви кривой (29), лежащие выше прямой $y = \eta_2 x / \eta_1$; в области $x > 0, y < 0$ нет участков, соответствующих реальному движению, а в области $x < 0, y > 0$ — нереальному.

В области $x < 0, y < 0$ прямая $y = \eta_2 x / \eta_1$ по меньшей мере один раз пересекает кривую (29). Точки пересечения прямой $y = \eta_2 x / \eta_1$ с кривыми (20) и (29) соответствуют положениям равновесия спутника. Исследуем их более подробно. Образующие конуса (6), при совмещении которых с нормалью к плоскости орбиты спутника он будет находиться в равновесии, лежат в плоскости $\eta_1 b - \eta_2 a = 0$, а их направляющие косинусы связаны условиями $\eta_2 c - \eta_3 b - Kbc = 0$, $\eta_3 a - \eta_1 c + Kac = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Отсюда находим $a = \eta_1 c / (\eta_3 + Kc)$, $b = \eta_2 c / (\eta_3 + Kc)$, а c определяется из уравнения

$$K^2 c^4 + 2\eta_3 K c^3 + (1 - K^2) c^2 - 2\eta_3 K c - \eta_3^2 = 0. \quad (35)$$

Это уравнение, согласно теореме Декарта, имеет не более одного положительного корня, что в соответствии с изложенным ранее позволяет заключить, что прямая $y = \eta_2 x / \eta_1$ в первой четверти плоскости $z = 1$ только один раз пересекает кривую (20) и, следовательно, из всех образующих конуса (6), лежащих над плоскостью xy , лишь одна дает положение равновесия. Анализируя число перемен знаков коэффициентов уравнения (35) находим, что оно имеет также либо три, либо один отрицательный корень. Поскольку в положении равновесия сумма моментов относительно центра масс спутника действующих на него внешних сил равна нулю, то для выявления этих положений, наряду с уравнением (35), можно рассматривать также уравнение $(K \sin 2\theta)/2 + \sin(\theta = \vartheta) = 0$. Здесь θ — угол между осью z спутника и вектором \mathbf{H} в положении равновесия ($\cos \theta = c$), $\vartheta < \pi/2$ — постоянный угол между осью z и вектором \mathbf{I} ($\cos \vartheta = \eta_3$). Для осей $a > 0, b > 0, c > 0$ это уравнение всегда имеет только один корень, для осей $a < 0, b < 0, c < 0$ также только один корень, для осей $a > 0, b > 0, c < 0$ — либо два корня при $K \geq K_*$ (при $K = K_*$ двукратный корень), либо при $K < K_*$ ни одного. Значение $1 \leq K_* \leq 2$ определяется из соотношения

$$\pm \left(\frac{4 - K_*^2}{3} \right)^{1/2} - \left(\frac{K_* \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 3K_*^2}}{2K_* \sqrt{3}} \right)^{1/2} \cos \vartheta + \left(\frac{K_* \sqrt{3} \mp \sqrt{4 - 3K_*^2}}{2K_* \sqrt{3}} \right)^{1/2} \sin \vartheta = 0.$$

Верхние знаки выбираются, если $\vartheta \leq \pi/4$. Итак, в области $x < 0, y < 0$ плоскости $z = -1$ прямая $y = \eta_2 x / \eta_1$ пересекает кривую (29) только один раз (существует единственное положение равновесия), а в области $x > 0, y > 0$ этой же плоскости — либо два раза (два положения равновесия) при $K \geq K_*$ (при $K = K_*$ прямая $y = \eta_2 x / \eta_1$ касается кривой (29)), либо при $K < K_*$ точек пересечения нет.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости вращений вокруг образующих конуса (8). Достаточные условия устойчивости (18) ввиду их громоздкости (см. [8]), по-видимому, можно эффективно использовать лишь в частных случаях. Для общего случая анализ устойчивости проведем на основании первых интегралов (11) — (12) уравнений движения.

В возмущенном движении имеем $p = \tilde{\omega} a + n_1$, $q = \tilde{\omega} b + n_2$, $r = \tilde{\omega} c + n_3$, $\gamma_1 = a + n_4$, $\gamma_2 = b + n_5$, $\gamma_3 = c + n_6$. Здесь n_k — возмущения. Первые интегралы системы (2) — (3) имеют вид

$$\begin{aligned}
 & An_1^2 + Bn_2^2 + Cn_3^2 + 2\tilde{\omega}(Aan_1 + Bbn_2 + Ccn_3) - 2IH \times \\
 & \quad \times (\gamma_1 n_4 + \gamma_2 n_5 + \gamma_3 n_6) - 2\zeta cn_6 - \zeta n_6^2 = V_1, \\
 & An_1 a + Bn_2 b + Cn_3 c + An_1 n_4 + Bn_2 n_5 + Bn_3 n_6 + \tilde{\omega} \times \\
 & \quad \times (Aan_4 + Bbn_5 + Ccn_6) = V_2, \\
 & 2an_4 + 2bn_5 + 2cn_6 + \sum_{i=4}^6 n_i^2 = V_3.
 \end{aligned}$$

Здесь V_k — постоянные. Для установления устойчивости невозмущенного движения в смысле Ляпунова по переменным $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ рассмотрим связку интегралов (α и μ — постоянные)

$$V = V_1 - 2\tilde{\omega}V_2 + \alpha V_3 + \mu V_3^2.$$

Производная от функции V в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю. Сама функция V будет положительно определенной при выполнении следующих условий

$$\begin{aligned}
 & 4\mu a^2 + IH \frac{\gamma_1}{a} > 0, \\
 & 4\mu \left(\frac{\gamma_2}{b} a^2 + \frac{\gamma_1}{a} b^2 \right) + IH \frac{\gamma_1 \gamma_2}{ab} > 0, \quad (36) \\
 & 4\mu \left(\frac{\gamma_1 \gamma_2}{ab} c^2 + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{ac} b^2 + \frac{\gamma_2 \gamma_3}{bc} a^2 \right) + \frac{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{abc} IH > 0, \\
 & \alpha = A\omega^2 + IH \frac{\gamma_1}{a} = B\omega^2 + IH \frac{\gamma_2}{b} = C\omega^2 + IH \frac{\gamma_3}{c} + \zeta.
 \end{aligned}$$

Вращение вокруг тех осей, для которых условия (36) выполняются, устойчиво по Ляпунову [21]. Эти условия, очевидно, выполнены при $\mu \geq 0$ для перманентных осей $a > 0, b > 0, c > 0$, т. е. на ветви кривой, лежащей в первой четверти плоскости $z = 1$. Поэтому физически реальные вращения ($\omega^2 \geq 0$), соответствующие точкам этой ветви кривой, устойчивы. Условиям (36) можно также удовлетворить выбором достаточно большого положительного значения μ для перманентных осей, находящихся в малой окрестности оси ($-x$) (b и c положительны и малы, a — отрицательно и по модулю близко к единице); т. е. на ветви кривой (20), лежащей в области $x < 0, y > 0$, также есть участок, которому соответствуют устойчивые перманентные вращения.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

а. Пусть постоянная составляющая магнитного момента спутника отсутствует ($I = 0$), а его магнитный момент возникает за счет намагничивания оболочки ($\zeta \neq 0$). Тогда уравнение (6) вырождается в $\zeta(A - B)abc = 0$, и если $A \neq B$, то конус перманентных вращений распадается на три плоскости: xy, yz и xz . Для осей, находящихся в плоскости xy ($c = 0$), согласно (5), получаем $\omega^2 = 0$, т. е. при их совмещении с нормалью к плоскости орбиты спутник будет находиться в равновесии. Поскольку для таких положений силовая функция, как легко видеть, имеет изолированный минимум, то эти равновесия неустойчивы [21]. Для осей, находящихся в плоскости xz ($b = 0$), $\omega^2 = \zeta / (A - C)$, (если

$A = C$, то возможны лишь вращения вокруг главных осей x и z с произвольной угловой скоростью). Реальное движение происходит, когда $A > C$. Для такого движения имеем

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{(A - B)}{(A - C)} \zeta a^2, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = \frac{4 \zeta a^2 c^2 (A - C)}{A a^2 + C c^2}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = 0.$$

Поэтому, если $A > B$, вращение устойчиво, если же $A < B$ — неустойчиво. Для осей, находящихся в плоскости yz ($a = 0$), $\omega^2 = \zeta / (B - C)$, (если $B = C$, то возможны вращения только вокруг осей y и z с произвольной угловой скоростью). Реальное движение происходит, если $B > C$. Для такого движения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{(A - B)}{(B - C)} \zeta b^2, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = \frac{4 \zeta b^2 c^2 (B - C)}{B b^2 + C c^2}, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = 0.$$

Если $A > B$, движение неустойчиво, если же $A < B$ — устойчиво.

Рассмотрим еще перманентные вращения вокруг главных осей инерции спутника. Как следует из уравнения (5), они могут происходить с произвольной угловой скоростью. Вращение вокруг оси z ($a = b = 0$), согласно условиям (36) устойчиво, если $\omega^2 C + \zeta > A \omega^2$, $\omega^2 C + \zeta > B \omega^2$. Характеристическое уравнение системы уравнений в вариациях для такого движения имеет вид

$$AB \Delta^4 + [AB \omega^2 + \zeta (A + B) + (C - A)(C - B) \omega^2] \Delta^2 + [(C - B) \omega^2 + \zeta] [(C - A) \omega^2 + \zeta] = 0.$$

Отсюда легко видеть, что если выполнено одно из двух неравенств

$$A \omega^2 > \zeta + C \omega^2 > B \omega^2, \quad B \omega^2 > \zeta + C \omega^2 > A \omega^2,$$

то перманентное вращение вокруг оси z спутника неустойчиво. Вращение вокруг оси x устойчиво, согласно (36), если $A > B$ и $A \omega^2 > C \omega^2 + \zeta$. Для такого движения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = (A - B) \omega^2, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = (A - C) \omega^2 - \zeta, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = 0,$$

т. е. оно неустойчиво, когда $(A - C) \omega^2 < \zeta$ (при $A > B$), или, когда $(A - C) \omega^2 > \zeta$ (при $B > A$). Аналогично находим, что вращение вокруг оси y устойчиво, если $B > A$ и $B \omega^2 > C \omega^2 + \zeta$, и неустойчиво, когда $(B - C) \omega^2 > \zeta$ (при $A > B$) или $(B - C) \omega^2 < \zeta$ (при $B > A$). Для динамически симметричного спутника ($A = B, I = 0$) конус перманентных вращений не существует: возможно вращение вокруг любой оси, причем $\omega^2 = \zeta / (A - C)$.

б. В случае динамически симметричного спутника ($A = B \neq C$) без ограничения общности можно считать, что $\eta_2 = 0$. Тогда уравнение конуса перманентных вращений таково: $(A - C) \eta_1 b c = 0$. При $A \neq C$ этот конус вырождается в две плоскости xz ($b = 0$) и xy ($c = 0$). Для осей, лежащих в плоскости xy ($a \neq 0, b \neq 0$), согласно (5), находим $\omega^2 = \infty$, что физически невозможно. Для осей, лежащих в плоскости xz , получаем $\omega^2 = I N (\gamma_3 a - \gamma_1 c + K a c) / (A - C) a c$. Оси, соответствующие физически реальным вращениям, отделяются от прочих осями, обращающимися в нуль числитель этого выражения. Положение таких осей на плоскости xz определяется направляющими косинусами, которые можно найти из уравнений $a = \eta_1 / (\gamma_3 + K c)$ и (35). Последнее из них, как показано ранее, всегда имеет один положительный и один отрицательный корень, а если $K > K_*$, то отрицательных корней три. Итак, при $K > K_*$ существуют четыре оси, при совмещении которых с вектором H ,

спутник будет оставаться в равновесии. На рис. 4 а заштрихованы части плоскости xz , в которых находятся оси, не соответствующие физически реальному движению (предполагалось, что $A > C$, $K > K_*$). Для осей, лежащих в области $a > 0$, $c > 0$ выполнены достаточные условия устойчивости (36). Кроме того, имеем

$$\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2 = IH \eta_1 a, \quad \partial^2 \Pi / \partial \theta^2 = IH(\eta_1 c^3 + \eta_3 a^3) / ac, \quad \partial^2 \Pi / \partial \varphi \partial \theta = 0.$$

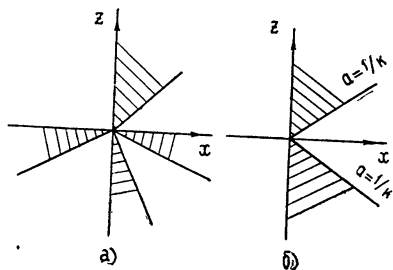


Рис. 4. Вырождение конуса permanentных вращений в частных случаях.

Отсюда следует, что устойчивые permanentные вращения возможны также вокруг осей, расположенных в области $a > 0$, $c < 0$, если $\eta_1 c^3 + \eta_3 a^3 < 0$, если же в этой области $\eta_1 c^3 + \eta_3 a^3 > 0$, то такие вращения неустойчивы. Неустойчивыми будут также вращения вокруг осей, лежащих в области $a < 0$, $c > 0$, если $\eta_1 c^3 + \eta_3 a^3 < 0$ (выполнено, например, в окрестности оси $-x$). Если магнитный момент I направлен по оси x , то для осей, лежащих в плоскости xz (кроме случая $a = 0$, когда угловая скорость произвольна), $\omega^2 = IH(ka - 1) / (A - C)a$. Части плоскости xz , содержащие оси, вращение вокруг которых невозможно, заштрихованы на рис. 4 б (случай $A > C$). Вращение устойчиво, если $a > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Bandoen, W. P. Manger, J. Geophys. Res., 65, № 9, 2992 (1960).
2. Р. Е. Фишелл, Ф. Ф. Мобли, Проблемы ориентации искусственных спутников Земли, изд. Наука, 1966, стр. 106.
3. G. Colombo, On the Motion of Explorer XI around its Center of Mass, Preprint Amer. Astronaut. Soc., № 45, 1962.
4. В. В. Белецкий, Движение искусственного спутника относительно центра масс, изд. Наука, 1965.
5. Б. М. Яновский, Земной магнетизм, изд. ЛГУ, Л., 1964.
6. Н. В. Адам, Н. П. Бенькова и др., Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 5, 949 (1962).
7. Н. П. Бенькова, Тр. Третьего совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, 1954.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
9. Т. Леви-Чивита, У. Амальди, Курс теоретической механики, 2, (ч. 2), ИЛ, М., 1951.
10. O. Staude, J. für die reine und angew. Mat., Bd. 113, 318 (1894).
11. Б. К. Млодзеевский, Тр. отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 7, вып. 1, 46 (1894).
12. В. В. Румянцев, ПММ, 20, вып. 1, 51 (1956).
13. П. В. Харламов, ПММ, 29, вып. 2, 373 (1965).
14. А. Анчев, ПММ, 31, вып. 1, 49 (1967).
15. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959.
16. Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, изд. Наука, М., 1966.
17. Г. К. Пожарицкий, ПММ, 22, вып. 2, 145 (1958).
18. А. А. Хентов, ПММ, 31, вып. 5, 947 (1967).
19. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, изд. Наука, М., 1965.
20. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1968.
21. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М., 1950.

ON PERMANENT ROTATIONS OF EQUATORIAL SATELLITE IN
GEOMAGNETIC FIELD

Khentov A. A.

Permanent rotations of a magnetized spacecraft are studied. The cone kind of permanent axes is revealed and generatrices on it that correspond to the real motion are marked. By constructing the Liapunov function certain axes of stable rotations are singled out. In conclusion a number of particular cases are considered. Bringing a satellite to a stable regime of permanent rotation allows in a certain way to stabilize the satellite with respect to geomagnetic field lines.

УДК 62—506

К ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ

К. К. Седова

На примере исследования релейной разностной системы автоматической оптимизации обсуждается и апробируется новая методика оценки качества работы импульсных систем с постоянными по площади управляющими импульсами в установившихся режимах.

1. Одним из основных показателей качества работы систем автоматической оптимизации является величина ошибки слежения за экстремумом выхода объекта управления. Статья посвящена проблеме оценки качества работы в стационарных режимах экстремальных систем шагового типа.

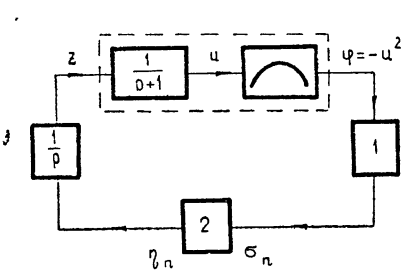
Исследования общепринятых математических моделей шаговых и релейных разностных систем автоматической оптимизации [1, 2] показали наличие в таких моделях однопараметрических континуальных множеств стационарных движений, порождающих стационарные движения соответствующих реальных систем. В связи с этим в [1] была предложена оценка качества работы шаговых систем в стационарных режимах, заключающаяся в усреднении оценок для отдельных режимов по множеству порождающих движений.

В настоящей работе на примере исследования релейной разностной системы автоматической оптимизации показана необходимость применения в общем случае указанной оценки при анализе качества работы экстремальных систем.

Рассматривается управление одноканальным инерционным объектом (при отсутствии возмущений) с постоянной скоростью поиска (т. е. с постоянной по модулю скоростью изменения входной координаты объекта). Направление поиска может изменяться лишь в фиксированные равноотстоящие моменты времени, разбивающие на шаги весь процесс работы системы. Информацией о поведении системы является величина приращения выхода объекта за время одного шага. Согласно принятому алгоритму управления направление поиска не меняется, если это приращение больше некоторой величины Δ , и меняется на противоположное, если приращение меньше Δ , где Δ — порог срабатывания оптимизатора. Обычно порог срабатывания $\Delta < 0$. В [3, 4] предложено ввести положительный порог срабатывания оптимизатора для улучшения качества работы. При таком алгоритме управления с $\Delta > 0$ в системе могут существовать стационарные режимы с минимально возможным периодом колебаний $T = 2\tau$, где τ — период квантования системы. Обозначим эти режимы через R . По сравнению с другими возможными в системе режимами при работе системы в R -режиме существенно уменьшается амплитуда автоколебаний, увеличивается быстродействие системы и можно получить очень незначительные потери на рыскание для отдельных R -режимов при удачно подобранных параметрах системы и опреде-

ленных начальных условиях. Но так как в системе существует не единственный R -режим, а континуальное по начальным условиям множество режимов, то о качестве работы системы нельзя судить по отдельным режимам: Более полное и правильное представление о работе системы можно получить только при исследовании с оценкой по порождающему множеству стационарных движений. Ниже проводится такое исследование для R -режимов, рекомендованных в [3, 4] как наиболее выгодных, с точки зрения потерь на рыскание, и полученные результаты сравниваются с результатами исследования системы с $\Delta < 0$, опубликованными в [5]. Сравнение результатов говорит о том, что при некоторых значениях параметров системы оценка для системы с $\Delta > 0$ лучше оценки, полученной для системы с $\Delta < 0$, но чувствительность оценки к изменениям этих параметров несравнимо выше для управления с $\Delta > 0$, что в условиях работы реальных систем с дрейфующими параметрами существенно снижает качество их работы.

2. Уравнения движения рассматриваемой экстремальной системы (рис. 1) записываются следующим образом:



$$\begin{aligned} \varphi &= -u^2, \\ \dot{u} + u &= z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{z} = \eta_n$$

при $t \in (n\tau, n\tau + \tau)$, $n = 0, 1, \dots$,

$$\eta_{n+1}^i = \begin{cases} \eta_n^i & \text{если } \bar{z}\sigma_n > \Delta \\ -\eta_n^i & \text{если } \sigma_n \leq \Delta \end{cases}$$

Рис. 1. 1 — блок разности, 2 — оптимизатор. $\sigma_n = \varphi(n\tau + \tau) - \varphi(n\tau)$, где η_0 постоянно на интервале $(0, \tau)$ и равно либо $+1$, либо -1 .

Фазовое пространство системы (1) трехмерное $\Phi(t, u, v)$, где $v \equiv \dot{u}$, образованное пространствами Φ_{+1} и Φ_{-1} , в которых η соответственно равно $+1$ и -1 . Фазовые траектории системы (1) в пространстве Φ_η описываются равенствами

$$\begin{aligned} v &= \eta + (v_0 - \eta) e^{-t}, \\ u + v &= u_0 + v_0 + \eta t, \end{aligned} \quad (2)$$

где u_0, v_0 характеризуют состояние системы в момент времени $t = 0$. На рис. 2-а изображены траектории пространства Φ_{+1} в проекции на плоскость $u-v$.

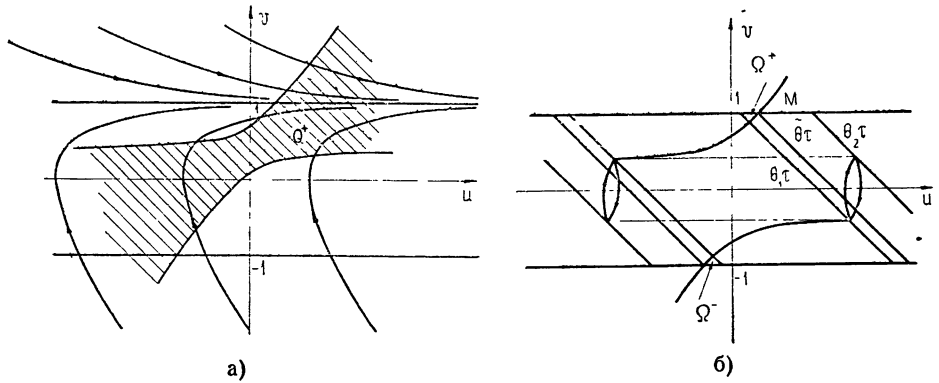


Рис. 2.

кость uv . Траектории пространства Φ_{-1} симметричны траекториям пространства Φ_{+1} относительно оси времени t . Области переключения знака величины η определяются (согласно (2) и неравенству $\sigma \leq \Delta$) следующим неравенством:

$$\left[2u - \frac{1-\lambda}{\lambda} (v - \eta C) \right] \left[-\frac{1-\lambda}{\lambda} (v - \eta C) \right] \leq \Delta, \quad (3)$$

где $\lambda = e^{-\tau}$, $C = 1 - \frac{\tau\lambda}{1-\lambda}$.

Проекция областей переключения на плоскость uv обозначим через Q^+ для пространства Φ_{+1} и через Q^- для пространства Φ_{-1} . На рис. 2-а область Q^+ заштрихована. Как и в [2], изучение движений системы (1) сводится к изучению отображения Π плоскости $t=0$ пространства $\Phi(t, u, v)$ в себя, а изучение отображения Π , в свою очередь, сводится к исследованию отображения прямой $u+v = \text{const}$ в прямую. Режимам работы R соответствуют двухкратные неподвижные точки отображения Π , координаты которых определяются из следующих равенств:

$$\begin{aligned} v &= \eta \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \\ u &= \Theta\tau - \eta \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \end{aligned} \quad (4)$$

где Θ — параметр, характеризующий смещение режима R относительно точки экстремума. Координаты неподвижной двухкратной точки u, v должны удовлетворять неравенству (3), откуда получим следующие пределы изменения Θ :

$$\begin{aligned} -\Theta_1 &\leq \Theta \leq \Theta_2 && \text{для } v > 0, \\ -\Theta_2 &\leq \Theta \leq \Theta_1 && \text{для } v < 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Theta_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\tau \left(\tau - 2 \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)}, \quad (6)$$

$$\Theta_2 = \Theta_1 + 1. \quad (7)$$

При любых значениях параметров Δ, τ , отличных от нуля, выбором соответствующих начальных условий можно добиться установления в системе (1) режима R (при отсутствии возмущений). Режимы R образуют однопараметрическое континуальное множество, своеобразный «цилиндр» в проекции на плоскость uv , по параметру Θ , значения которого меняются в пределах (5) (рис. 2б). В общем случае в системе (1) при других начальных условиях могут существовать другие, более сложные режимы, аналогичные режимам, рассмотренным в [2], которые в данной работе не рассматриваются.

Покажем, что в пространстве параметров Δ, τ существуют области таких значений Δ и τ , при которых в системе (1) при любых начальных условиях устанавливаются только режимы R .

Достаточно рассматривать движения фазовой точки только в полосе $|v| \leq 1$, так как фазовая точка, движущаяся вне полосы, через некото-

рое время обязательно попадает в полосу $|v| \leq 1$ и в дальнейшем из нее не выходит. Обозначим на плоскости uv через M точку пересечения прямой $v = 1$ с границей области Q^+ . Если фазовая точка с начальными координатами $u_0 + v_0 = c$ через m тактов попадает в область переключения знака величины η , то

$$|c + \eta m \tau| \leq (\tilde{\Theta} + 1) \tau,$$

где $\tilde{\Theta}\tau = u + v$ — прямая, проходящая через точку M . Дальнейшее движение фазовой точки в проекции на плоскость uv происходит между прямыми $u + v = c + \eta(m - 1)\tau$ и $u + v = c + \eta m \tau$ с переключением знака η на каждом шаге до тех пор, пока фазовая точка не покинет область переключения. Нетрудно видеть, что если $\tilde{\Theta} + 1 \leq \Theta_2$, то фазовая точка не сможет выйти из области переключения (при условии идеальности экстремального регулятора, отсутствия помех и т. п.), и в системе (1) установится режим R . Отсюда следует, что неравенство $\tilde{\Theta} \leq \Theta_1$ или

$$\Delta \geq \frac{\tau(\tau + 1) \left(\tau - 2 \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)}{\tau - \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}} \quad (8)$$

является достаточным условием существования в системе (1) режимов R независимо от начальных условий.

В случае $\Theta_1 < \tilde{\Theta}$ из всего пространства начальных состояний рассмотрим область Ω^+ (рис. 2б), для которой условия существования режимов R наиболее жесткие. В области Ω^+ Θ изменяется в пределах $\Theta_1 \leq \Theta \leq \tilde{\Theta}$. Нетрудно показать, что если точки области Ω^+ (или Ω^-) не отображаются в точки области Ω^- (или Ω^+), то в системе (1) при любых начальных условиях устанавливается режим R . Это условие можно записать в виде двух следующих неравенств:

$$(2\Theta\tau + 2 - 2n\tau + \tau - 2\lambda^n) \left(\tau - 2\lambda^n \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right) \leq \Delta \quad (9)$$

или

$$n - \Theta_1 \leq \Theta, \quad (10)$$

где $\Theta_1 \leq \Theta \leq \tilde{\Theta}$, $E[\tilde{\Theta} + \Theta_1] \leq n \leq E[2\tilde{\Theta}]$, $E[x]$ — целая часть x . Обозначим через Δ_1 граничное значение Δ , определенное из (9), через Δ_2 — граничное значение Δ , определенное из (10), тогда необходимое и достаточное условие существования режимов R при любых начальных условиях запишется следующим образом:

$$\Delta(\tau) \geq \min \{ \Delta_1, \Delta_2 \}.$$

На рис. 3 на плоскости параметров $\Delta\tau$ показана область существования режимов R и границы, определенные с помощью равенств (8), (9), (10).

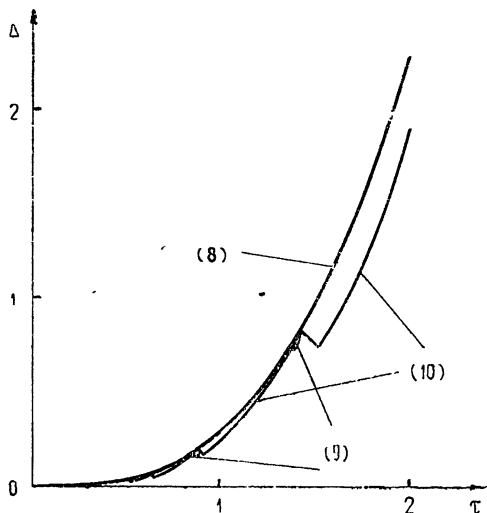


Рис. 3.

3. При движении фазовой точки по траектории периодического режима R с периодом $T = 2\tau$ средняя за период ошибка слежения за экстремальным значением выхода объекта равна

$$\delta(\Theta, \tau) = \frac{1}{2\tau} \left| \int_0^{2\tau} \varphi(t) dt \right| = \tau^2 \left(\Theta^2 + \Theta + \frac{1}{3} \right) - 1 + 2 \frac{1-\lambda}{\tau(1+\lambda)}, \quad (11)$$

где $-\Theta_2 \leq \Theta \leq \Theta_1$.

Из (11) следует, что средняя за период ошибка $\delta(\Theta, \tau)$ имеет наименьшее значение при $\Theta = -\frac{1}{2}$ и с ростом $|\Theta|$ растет пропорционально Θ^2 , достигая наибольшего значения при Θ_1 или $-\Theta_2$, так как $\delta(\Theta_1) = \delta(-\Theta_2) = \delta_{\max}(\Theta)$. Очевидно, что средняя за период ошибка $\delta(\Theta, \tau)$ не может служить критерием качества работы системы (1). В реальных системах величина Θ для одной и той же траектории движения системы не остается постоянной. Изменение Θ может быть вызвано неидеальностью экстремального регулятора, при которой скорость увеличения входа объекта отлична от скорости уменьшения, внешними помехами, дрейфом экстремальной характеристики и т.п. В связи с этим в [1] была предложена оценка качества работы экстремальной системы, заключающаяся в усреднении оценок для отдельных режимов по множеству стационарных движений, порождающих стационарные движения реальных систем.

Рассмотрим, как изменится множество стационарных движений системы в случае, когда существует небольшая постоянная составляющая скорости изменения величины Θ . Новая система описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -u^2, \\ \dot{u} + u &= z, \\ \dot{z} &= \eta_n \end{aligned} \quad (12)$$

при $t \in (n\tau, n\tau + \tau)$, $n = 0, 1, \dots$

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} 1 + \mu, & \text{если } \sigma_n \eta_n > \Delta \\ -1, & \text{если } \sigma_n \eta_n \leq \Delta \end{cases},$$

где $\sigma_n = \varphi(n\tau + \tau) - \varphi(n\tau)$, η_0 — постоянно на интервале $(0, \tau)$ и равно либо $1 + \mu$, либо -1 . Фазовая точка с начальными координатами u_0, v_0 , движущаяся в области переключения знака η , через интервал времени $t = 2\tau$ будет иметь координаты u_2, v_2

$$u_2 + v_2 = u_0 + v_0 + \mu\tau,$$

а через интервал времени $t = 2n\tau - u_{2n}, v_{2n}$

$$u_{2n} + v_{2n} = u_0 + v_0 + \mu n\tau.$$

Таким образом, движения фазовой точки в проекции на плоскость uv представляют собой не замкнутые кривые R , как в системе (1), а спирали, скручивающиеся с «цилиндра». Причем сам «цилиндр» тоже изменяется: смещается вверх по оси v , укорачивается слева и вытягивается вправо тем сильнее, чем больше значение μ , и при $\mu_{кр} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \left(\tau - 2 \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)$ становится бесконечно длинным. На рис. 4 показана зависимость $\mu_{кр}$ от τ .

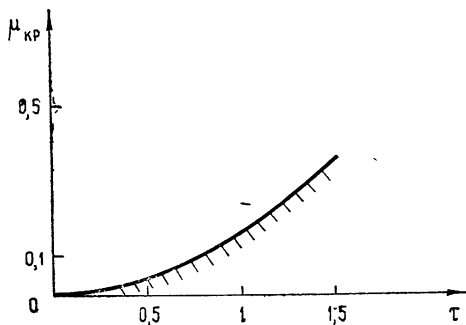


Рис. 4.

При $\mu \geq \mu_{кр}$ $u + v \rightarrow \infty$, т. е. фазовая точка движется вправо по бесконечно длинной спирали. При $\mu < \mu_{кр}$ наступает момент, когда фазовая точка выходит из области переключения знака η и движется по траектории пространства Φ_{-1} до тех пор, пока вновь не попадает в область переключения (затем снова выходит на спираль и т. д.). Пусть это произойдет на $(k+1)$ -м такте. Тогда $k = E[\tilde{\Theta}' + \Theta'_1]$, где

$$\Theta'_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{2\tau \left[\tau - 2 \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - \mu \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right]} + \frac{\mu}{2\tau}, \quad (13)$$

$\tilde{\Theta}'\tau = u + v$ — прямая на плоскости uv , проходящая через точку M' , аналогичную точке M системы (1). В системе (12) устанавливается движение (см. рис. 6), при котором Θ меняется в пределах

$$\Theta'_1 - (k+1) \leq \Theta \leq \Theta'_1.$$

При достаточно малых значениях μ можно считать, что

$$\begin{aligned} k &= E[\tilde{\Theta} + \Theta_1], \\ \Theta_1 - (k+1) &\leq \Theta \leq \Theta_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Неравенство (14) определяет порождающее множество стационарных движений системы (1) для одного класса возмущений, по которому и следует согласно [1] проводить усреднение оценки (11)

$$\begin{aligned} \gamma(\tau, \Delta) &= \frac{1}{k+1} \int_{\Theta_1 - (k+1)}^{\Theta_1} \delta(\Theta, \tau) d\Theta = \\ &= \tau^2 \left[\Theta_1^2 - \Theta_1 k + \frac{(k+1)^2}{3} - \frac{k+1}{2} + \frac{1}{3} \right] - 1 + 2 \frac{1-\lambda}{\tau(1+\lambda)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Зависимость $\gamma(\tau, \Delta)$ имеет разрывы непрерывности в точках изменения числа k . Сечения поверхности $\gamma(\tau, \Delta)$ плоскостями $\tau = \text{const}$, $\Delta = \text{const}$ изображены на рис. 5 а, б. Наименьшее значение γ принимает на границе области существования режимов R .

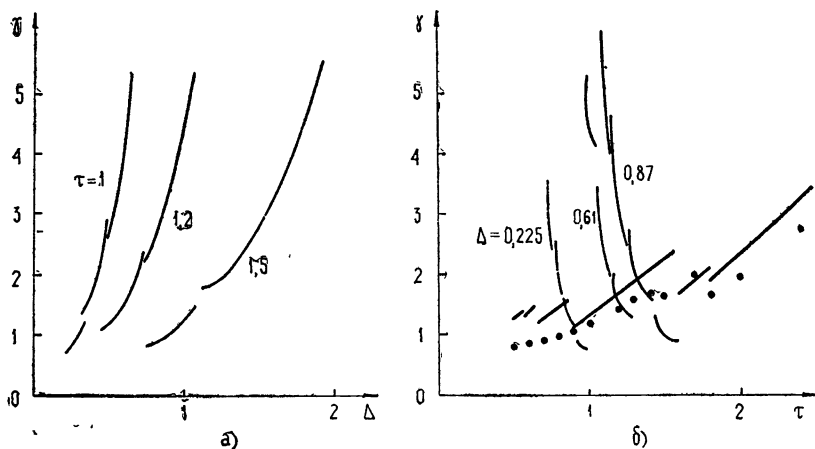


Рис. 5б. Точками обозначается экспериментальный результат для системы с $\Delta < 0$; тонкими линиями—теоретические результаты для режимов R системы (1) с $\Delta > 0$, толстыми линиями — для $\Delta = 0$.

4. На основании полученных выше результатов и результатов работы [5] можно провести сравнение влияния положительного и отрицательного порога срабатывания оптимизатора на качество работы рассматриваемой системы.

На рис. 5 б изображены зависимости $\gamma(\tau, \Delta)$ для $\Delta = 0$, $\Delta > 0$, $\Delta < 0$. Из рисунка видно, что при некоторых значениях параметров ошибка слежения для $\Delta > 0$ меньше ошибки для $\Delta < 0$, а чувствительность величины γ к изменениям параметров Δ , τ для $\Delta > 0$ несравнимо выше, чем для $\Delta < 0$. Следовательно, при оптимизации процессов с практически постоянными параметрами путем тонкой настройки оптимизатора с $\Delta > 0$ можно добиться улучшения качества работы системы по сравнению со случаем $\Delta < 0$. Если же оптимизируется система с дрейфующими параметрами, то очевидна более высокая эффективность применения оптимизатора с $\Delta < 0$.

5. Экспериментальное исследование систем (1) и (12) на аналоговой машине МНБ-1 подтвердило содержащиеся в данной работе теоретические выводы. Движение изображающей точки в проекции на плос-

кость uv для системы (12) записано двухкоординатным самопишущим потенциометром ПДС-021М и изображено на рис. 6.

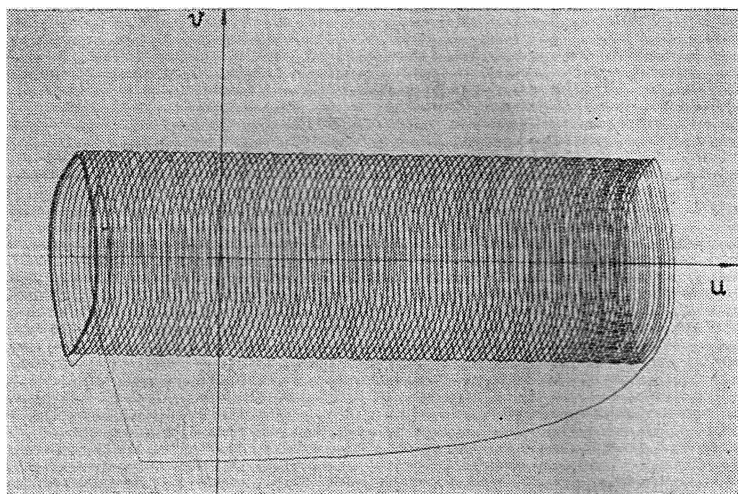


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 5, 958 (1964).
2. Н. Н. Леонов, К. К. Седова, И. С. Балтовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 341 (1969).
3. В. М. Кунцевич, Импульсные самонастраивающиеся и экстремальные системы автоматического управления, изд. Техника, Киев, 1966.
4. О. Р. Савин, Автоматика, № 2, 33 (1964).
5. Н. Н. Леонов, К. К. Седова, И. С. Балтовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 352 (1969).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 февраля 1971 г

ON ESTIMATION OF OPERATION QUALITY OF AUTOMATIC OPTIMIZATION SYSTEMS IN STEADY STATE REGIMES

Sedova K. K.

A new procedure for estimation of operation quality of pulse systems with area-preserving control pulses in steady state regimes is discussed and approved using an example of investigation into a relay differential automatic optimization system.

УДК 62—504

АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ. I

Н. Д. Егупов, В. А. Иванов

Рассмотрен анализ дискретных систем автоматического регулирования с переменными параметрами, когда коэффициенты разностного уравнения системы удовлетворяют определенным условиям. Анализ производится с помощью разложения выходного сигнала по специально построенной ортонормированной системе функций. Алгоритм счета может быть реализован на ЦВМ.

Рассмотрим анализ линейных дискретных систем автоматического регулирования (САР) с переменными параметрами. Полагаем, что динамика дискретной САР описывается линейным разностным уравнением i -го порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_i(n)x(n+i) + a_{i-1}(n)x(n+i-1) + \dots + a_0(n)x(n) = \\ = b_r(n)y(n+r) + b_{r-1}(n)y(n+r-1) + \dots + b_0(n)y(n), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(n)$ — выходная координата системы, $y(n)$ — входное воздействие, и предполагается, что $i > r$.

Под анализом дискретной САР понимается определение реакции системы на произвольное входное воздействие, в частности, например, импульсной переходной функции.

Этот метод исследования применим для асимптотически устойчивых дискретных систем, когда входное воздействие $y(n) \in L^2[0, \infty)$. В том случае, если $y(n) \in \bar{L}^2[0, \infty)$, например, $y(n) = 1(n)$, или $y(n) = \sum_{k=0}^N a_k n^k$,

то для решения задачи анализа вначале требуется предлагаемым методом определить импульсную переходную функцию системы, а затем, пользуясь известными методами, найти выходную реакцию.

В зависимости от характера изменения коэффициентов уравнения (1) можно рассмотреть следующие частные случаи.

1 случай. Пусть коэффициенты разностного уравнения (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_l(n) &= \sum_{k=0}^{g_l} A_k^l e^{-kn} & (l = 0, 1, \dots, i), \\ b_l(n) &= \sum_{k=0}^{g_l} B_k^l e^{-kn} & (l = 0, 1, \dots, r). \end{aligned} \tag{2}$$

Полагаем, что задано входное воздействие $y = y(n)$.

Определим реакцию дискретной САР, описываемой разностным уравнением (1), коэффициенты которого удовлетворяют условию (2)*.

* Не уменьшая общности рассуждений, ниже рассмотрим случай нулевых начальных условий.

Решение уравнения (1) будем находить в виде разложения по некоторой специально выбранной системе ортонормированных функций.

Полагаем, что входное воздействие $y(n)$ и выходная координата $x(n)$ преобразуемы по Лапласу. Обозначим

$$\begin{aligned} D\{x(n)\} &= X^*(q), \\ D\{y(n)\} &= Y^*(q). \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание теорему смещения в области оригиналов и теорему сдвига в области изображений [1], выражения (3) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} D\{A_k^l e^{-nk} x(n+m)\} &= A_k^l e^{m(q+k)} X^*(q+k), \\ D\{B_k^l e^{-nk} y(n+m)\} &= B_k^l e^{m(q+k)} Y^*(q+k). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (1) с учетом (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} x(n+i) \sum_{k=0}^g A_k^l e^{-kn} + x(n+i-1) \sum_{k=0}^g A_k^{l-1} e^{-kn} + \\ + \dots x(n) \sum_{k=0}^g A_k^0 e^{-kn} = y(n+r) \sum_{k=0}^{g_1} B_k^r e^{-kn} + \\ + y(n+r-1) \sum_{k=0}^{g_1} B_k^{r-1} e^{-kn} + \dots + y(n) \sum_{k=0}^{g_1} B_k^0 e^{-kn}. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуем по Лапласу обе части уравнения (5). Учитывая равенства (4), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^g A_k^l e^{l(q+k)} X^*(q+k) + \sum_{k=0}^g A_k^{l-1} e^{(l-1)(q+k)} X^*(q+k) + \\ + \dots + \sum_{k=0}^g A_k^0 X^*(q+k) = \sum_{k=0}^{g_1} B_k^r e^{r(q+k)} Y^*(q+k) + \\ + \sum_{k=0}^{g_1} B_k^{r-1} e^{(r-1)(q+k)} Y^*(q+k) + \dots + \sum_{k=0}^{g_1} B_k^0 Y^*(q+k). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} d_0(q) X^*(q) + d_1(q) X^*(q+1) + \dots + d_g(q) X^*(q+g) = \\ = e_0(q) Y^*(q) + e_1(q) Y^*(q+1) + \dots + e_{g_1}(q) Y^*(q+g_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{l=0}^i A_k^l e^{l(q+k)} & (k=0, 1, \dots, g), \\ e_k &= \sum_{l=0}^r B_k^l e^{l(q+k)} & (k=0, 1, \dots, g_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Если входное воздействие $y(n)$ задано, то правая часть уравнения (7)

$$e_0(q)Y^*(q) + e_1(q)Y^*(q + 1) + \dots + e_g(q)Y^*(q + g_1) = \Phi(q)$$

представляет собой известную функцию переменного q .

Выберем линейно-независимую систему функций

$$\begin{aligned} f_1(n) &= d_0(1)e^{-n} + \dots + d_g(1)e^{-n(g+1)}, \\ f_2(n) &= d_0(2)e^{-2n} + \dots + d_g(2)e^{-n(g+2)}, \\ &\dots \\ f_l(n) &= d_0(l)e^{-ln} + \dots + d_g(l)e^{-n(g+l)}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{9}$$

Ортогонализируем и пронормируем систему функций (9). Получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= c_{11}f_1(n), \\ &\dots \\ \varphi_k(n) &= c_{k1}f_1(n) + \dots + c_{kk}f_k(n), \\ &\dots \end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициенты c_{ij} определяются известным способом. Система решетчатых функций (10) ортогональна на полуинтервале $[0, \infty)$ с весом $\rho(n) = 1$.

Решение уравнения (1) $x(n)$ ищем в виде разложения по ортонормированной системе функций (10) [2]

$$x(n) = \sum_{k=1}^l c_k \varphi_k(n). \tag{11}$$

Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \varphi_k(n) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{k1}f_1(n) + \dots + \\ &+ c_{kk}f_k(n)] x(n) = c_{k1} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) [d_0(1)e^{-n} + \dots + \\ &+ d_g(1)e^{-n(g+1)}] + \dots + c_{kk} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) [d_0(k)e^{-kn} + \\ &+ \dots + d_g(k)e^{-n(g+k)}] = c_{k1} \Phi(1) + \dots + c_{kk} \Phi(k). \end{aligned} \tag{12}$$

Коэффициенты c_{ij} и функция $\Phi(q)$ известны.

Определив по формуле (12) коэффициенты разложения c_k , можно по формуле (11) найти реакцию $x(n)$ системы на произвольное входное воздействие $y(n)$.

2 случай. Представим коэффициенты линейного разностного уравнения (1) в виде

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{k=0}^g A_k^l n^k \quad (l = 0, 1, \dots, i), \\ b_l &= \sum_{k=0}^{g_1} B_k^l n^k \quad (l = 0, 1, \dots, r) \end{aligned} \tag{13}$$

и, учитывая формулы (3), (13), запишем уравнение (1) следующим образом:

$$\sum_{l=0}^i A_0^l x(n+l) + n \sum_{l=0}^i A_1^l x(n+l) + \dots + n^g \sum_{l=0}^i A_g^l x(n+l) =$$

$$= \sum_{l=0}^r B_0^l y(n+l) + \dots + n^{g_1} \sum_{l=0}^r B_{g_1}^l y(n+l). \quad (14)$$

Принимая во внимание теорему смещения в области оригиналов и теорему умножения на n^k [1], будем иметь

$$D \left\{ n^k \sum_{l=0}^i A_k^l x(n+l) \right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} \left\{ X^*(q) \sum_{l=0}^i A_k^l e^{gl} \right\}. \quad (15)$$

Пусть

$$D_k(q) = \sum_{l=0}^i A_k^l e^{gl} \quad (k = 0, 1, \dots, g),$$

$$H_k(q) = \sum_{l=0}^r B_k^l e^{g_1 l} \quad (k = 0, 1, \dots, g_1),$$

тогда формула (15) принимает вид

$$D \left\{ n^k \sum_{l=0}^i A_k^l x(n+l) \right\} = (-1)^k [D_k^{(k)}(q) X^*(q) + C_k^1 D_k^{(k-1)}(q) X^{*'}(q) +$$

$$+ \dots + C_k^{k-1} D_k'(q) X^{*(k-1)}(q) + D_k(q) X^{*(k)}(q)], \quad (17)$$

где

$$C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

Применим к обеим частям уравнения (14) преобразование Лапласа. Учитывая выражение (17), получим

$$D_0(q) X^*(q) - D_1'(q) X^*(q) - D_1(q) X^{*'}(q) +$$

$$+ D_2''(q) X^*(q) + C_2^1 D_2'(q) X^{*'}(q) + D_2(q) X^{*''}(q) -$$

$$- \dots +$$

$$+ (-1)^k [D_k^{(k)}(q) X^*(q) + C_k^1 D_k^{(k-1)}(q) X^{*'}(q) + \dots +$$

$$+ C_k^{k-1} D_k'(q) X^{*(k-1)}(q) + D_k(q) X^{*(k)}(q)] +$$

$$+ \dots +$$

$$+ (-1)^g [D_g^{(g)}(q) X^*(q) + \dots + D_g(q) X^{*(g)}(q)] = H_0(q) Y^*(q) +$$

$$+ \dots + (-1)^k [H_k^{(k)}(q) Y^*(q) + C_k^1 H_k^{(k-1)}(q) Y^{*'}(q) + \dots + H_k(q) Y^{*k}(q)] +$$

$$+ \dots + (-1)^{g_1} [H_{g_1}^{(g_1)}(q) Y^*(q) + \dots + H_{g_1}(q) Y^{*(g_1)}(q)].$$

Уравнение (18) запишем в виде

$$E_0(q) X^*(q) + \dots + E_k(q) \frac{d^k X^*(q)}{dq^k} + \dots + E_g(q) \frac{d^g X^*(q)}{dq^g} =$$

$$= G_0(q) Y^*(q) + \dots + G_k(q) \frac{d^k Y^*(q)}{dq^k} + \dots + G_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} Y^*(q)}{dq^{g_1}}, \quad (19)$$

где

$$E_k(q) \sum_{l=k}^g (-1)^l C_l^{l-k} D_l^{(l-k)} \quad (k = 0, 1, \dots, g), \quad (20)$$

$$G_k(q) = \sum_{l=k}^{g_1} (-1)^l C_l^{l-k} H_l^{(l-k)} \quad (k = 0, 1, \dots, g_1).$$

Учитывая, что

$$\frac{d^k X^*(q)}{dq^k} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) (-n)^k e^{-nq}, \quad (21)$$

и вводя обозначение

$$T(q) = G_0(q) Y^*(q) + \dots + G_k(q) \frac{d^k Y^*(q)}{dq^k} + \dots + G_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} Y^*(q)}{dq^{g_1}}, \quad (22)$$

перепишем уравнение (19) следующим образом:

$$E_0(q) \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-nq} + \dots + E_k(q) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^k x(n) e^{-nq} + \dots + E_g(q) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^g x(n) e^{-nq} = T(q). \quad (23)$$

Придавая q значения $1, 2, 3, \dots, k, \dots$, получим систему равенств, которые потребуются нам в дальнейшем при определении $x(n)$

$$E_0(1) \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-n} + \dots + E_k(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^k x(n) e^{-n} + \dots + E_g(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^g x(n) e^{-n} = T(1), \quad (24)$$

$$E_0(2) \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-2n} + \dots + E_k(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^k x(n) e^{-2n} + \dots + E_g(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^g x(n) e^{-2n} = T(2).$$

.....

$$E_0(k) \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-kn} + \dots + E_k(k) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^k x(n) e^{-kn} + \dots + E_g(k) \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^g x(n) e^{-kn} = T(k),$$

.....

Решение $x(n)$ ищем в виде [2]

$$x(n) = \sum_{k=1}^l c_k \varphi_k(n), \quad (25)$$

где $\{\varphi_k(n)\}$ — некоторая ортонормированная система функций, получен-

ная в результате ортогонализации следующей системы линейно-независимых функций

$$\begin{aligned} f_1(n) &= e^{-n} [E_0(1) - E_1(1)n + \dots + (-1)^g E_g(1)n^g], \\ f_2(n) &= e^{-2n} [E_0(2) - E_1(2)n + \dots + (-1)^g E_g(2)n^g], \\ &\dots \dots \dots \\ f_k(n) &= e^{-kn} [E_0(k) - E_1(k)n + \dots + (-1)^g E_g(k)n^g], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= c_{11} f_1(n), \\ \varphi_2(n) &= c_{21} f_1(n) + c_{22} f_2(n), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_k(n) &= c_{k1} f_1(n) + \dots + c_{kk} f_k(n), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Коэффициенты c_{ij} выбираются таким образом, чтобы система функций $\{\varphi_k(n)\}$ была ортонормированной. Коэффициенты c_k в разложении (25) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \varphi_k(n) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_{k1} f_1(n) + \dots + c_{kk} f_k(n)] x(n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{k1} e^{-n} [E_0(1) - E_1(1)n + \dots + (-1)^g E_g(1)n^g] x(n) + \\ &+ \dots + \sum_{n=0}^{\infty} c_{kk} e^{-kn} [E_0(k) - E_1(k)n + \dots + (-1)^g E_g(k)n^g] x(n). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (24), окончательно можем записать

$$c_k = c_{k1} T(1) + c_{k2} T(2) + \dots + c_{kk} T(k). \quad (28)$$

3 случай. Пусть теперь коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{k=0}^g A_k^l \cos(k\omega_0 n - \varphi_k) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, i), \\ b_l &= \sum_{k=0}^{g_1} B_k^l \cos(k\omega_0 n - \psi_k) \quad (l = 0, 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая, что

$$\cos(k\omega_0 n - \varphi_k) = \{ \exp(j(k\omega_0 n - \varphi_k)) + \exp(-j(k\omega_0 n - \varphi_k)) \} / 2, \quad (30)$$

условие (29) можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{k=-g}^g G_k^l e^{jk\omega_0 n}, \quad (l = 0, 1, \dots, i), \\ b_l &= \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_k^l e^{jk\omega_0 n} \quad (l = 0, 1, \dots, r), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$G_0^l = A_0^l \cos \varphi_0,$$

$$\left. \begin{aligned} G_k^l &= (A_k^l/2) e^{-j\varphi_k} \\ G_{-k}^l &= (A_k^l/2) e^{j\varphi_k} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots, g), \quad (32)$$

$$H_0^l = B_0^l \cos \psi_0,$$

$$\left. \begin{aligned} H_k^l &= (B_k^l/2) e^{-j\psi_k} \\ H_{-k}^l &= (B_k^l/2) e^{j\psi_k} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots, g_1). \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что

$$G_{-k}^l = \overline{G_k^l}, \quad H_{-k}^l = \overline{H_k^l}. \quad (34)$$

Учитывая (31), запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} &x(n+i) \sum_{k=-g}^g G_k^l e^{jk\omega_0 n} + x(n+i-1) \sum_{k=-g}^g G_k^{l-1} e^{jk\omega_0 n} + \dots \\ &+ \dots + x(n) \sum_{k=-g}^g G_k^0 e^{jk\omega_0 n} = y(n+r) \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_k^r e^{jk\omega_0 n} + \dots + y(n) \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_k^0 e^{jk\omega_0 n}. \end{aligned} \quad (35)$$

Используя теорему смещения в области оригиналов и теорему сдвига в области изображений, запишем равенство

$$D \{ x(n+l) G_k^l e^{jk\omega_0 n} \} = G_k^l e^{l(q-jk\omega_0)} X^*(q-jk\omega_0). \quad (36)$$

Применим дискретное преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (35). Принимая во внимание равенство (36), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-g}^g G_k^l e^{l(q-jk\omega_0)} X^*(q-jk\omega_0) + \sum_{k=-g}^g G_k^{l-1} e^{(l-1)(q-jk\omega_0)} X^*(q-jk\omega_0) + \dots + \\ &+ \sum_{k=-g}^g G_k^0 X^*(q-jk\omega_0) = \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_k^r e^{r(q-jk\omega_0)} Y^*(q-jk\omega_0) + \dots + \\ &+ \dots + \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_k^0 Y^*(q-jk\omega_0). \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнение (37) запишем в виде

$$\begin{aligned} &d_0(q) X^*(q) + d_1(q) X^*(q-j\omega_0) + \dots + d_g(q) X^*(q-jg\omega_0) + \\ &+ d_{-1}(q) X^*(q+j\omega_0) + \dots + d_{-g}(q) X^*(q+jg\omega_0) = h_0(q) Y^*(q) + \\ &+ h_1(q) Y^*(q-j\omega_0) + \dots + h_{g_1}(q) Y^*(q-jg_1\omega_0) + \\ &+ h_{-1}(q) Y^*(q+j\omega_0) + \dots + h_{-g_1}(q) Y^*(q+jg_1\omega_0), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_0(q) &= \sum_{l=0}^i G_0^l e^{lq}, \\ d_k(q) &= \sum_{l=0}^i G_k^l e^{l(q-jk\omega_0)} \\ d_{-k}(q) &= \sum_{l=0}^i G_{-k}^l e^{l(q+jk\omega_0)} \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots, g), \quad (39)$$

$$h_0(q) = \sum_{l=0}^r H_0^l e^{lq},$$

$$\left. \begin{aligned} h_k(q) &= \sum_{l=0}^r H_k^l e^{l(q-lk\omega_0)} \\ h_{-k}(q) &= \sum_{l=0}^r H_{-k}^l e^{l(q+l\omega_0)} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, g_1),$$

Правую часть уравнения (38) обозначим

$$\begin{aligned} h_0(q) Y^*(q) + h_1(q) Y^*(q - j\omega_0) + \dots + h_{g_1}(q) Y^*(q - jg_1\omega_0) + \\ + h_{-1}(q) Y^*(q + j\omega_0) + \dots + h_{-g_1}(q) Y^*(q + jg_1\omega_0) = \end{aligned} \quad (40)$$

$$= \Phi_0(q) + \Phi_1(q) + \Phi_{-1}(q),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(q) &= h_0(q) Y^*(q), \\ \Phi_1(q) &= \sum_{k=1}^{g_1} h_k(q) Y^*(q - jk\omega_0), \\ \Phi_{-1}(q) &= \sum_{k=1}^{g_1} h_{-k}(q) Y^*(q + jk\omega_0). \end{aligned} \quad (41)$$

Если в уравнении (38) придавать q значения $1, 2, \dots, m$, то получим систему равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=-g}^g d_k(1) X^*(1 - jk\omega_0) = \Phi_0(1) + \Phi_1(1) + \Phi_{-1}(1), \\ \dots \\ \sum_{k=-g}^g d_k(m) X^*(m - jk\omega_0) = \Phi_0(m) + \Phi_1(m) + \Phi_{-1}(m). \end{aligned} \quad (42)$$

Из формул (34), (39), (41) следует, что

$$d_{-k}(m) = \bar{d}_k(m), \quad \Phi_{-1}(m) = \bar{\Phi}_1(m). \quad (43)$$

Тогда система равенств (42) запишется в виде

$$\begin{aligned} d_0(1) X^*(1) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^g d_k(1) X^*(1 - jk\omega_0) = \Phi_0(1) + 2 \operatorname{Re} \Phi_1(1), \\ \dots \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} d_0(m) X^*(m) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^g d_k(m) X^*(m - jk\omega_0) = \Phi_0(m) + 2 \operatorname{Re} \Phi_1(m). \\ \dots \end{aligned}$$

Выберем линейно-независимую систему функций

$$\begin{aligned} f_1(n) &= d_0(1) e^{-n} + d_1(1) e^{-n(1-j\omega_0)} + \dots + d_g(1) e^{-n(1-jg\omega_0)} + \\ &+ d_{-1}(1) e^{-n(1+j\omega_0)} + \dots + d_{-g}(1) e^{-n(1+jg\omega_0)}, \\ \dots \\ f_k(n) &= d_0(k) e^{-kn} + d_1(k) e^{-n(k-j\omega_0)} + \dots + d_g(k) e^{-n(k-jg\omega_0)} + \\ &+ d_{-1}(k) e^{-n(k+j\omega_0)} + \dots + d_{-g}(k) e^{-n(k+jg\omega_0)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Перейдем от линейно-независимой системы функций $\{f_k(n)\}$ к ортонормированной системе функций $\{\varphi_k(n)\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= c_{11} f_1(n), \\ \varphi_2(n) &= c_{21} f_1(n) + c_{22} f_2(n), \\ &\dots \\ \varphi_k(n) &= c_{k1} f_1(n) + \dots + c_{kk} f_k(n), \\ &\dots \end{aligned} \tag{46}$$

Решение уравнения (35) ищем в виде разложения по ортонормированной системе функции (46)

$$x(n) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(n). \tag{47}$$

Коэффициенты разложения, учитывая равенства (44), (45), (46), определяются следующим образом

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \varphi_k(n) = c_{k1} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) [d_0(1) e^{-n} + d_1(1) e^{-n(1-j\omega_0)} + \\ &+ \dots + d_g(1) e^{-n(1-ig\omega_0)} + d_{-1}(1) e^{-n(1+j\omega_0)} + \dots + d_{-g}(1) e^{-n(1+jg\omega_0)}] + \dots + \\ &+ c_{kk} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) [d_0(k) e^{-kn} + d_1(k) e^{-n(k-j\omega_0)} + \dots + d_g(k) e^{-n(k-ig\omega_0)} + \\ &+ d_{-1}(k) e^{-n(k+j\omega_0)} + \dots + d_{-g}(k) e^{-n(k+jg\omega_0)}] = c_{k1} [\Phi_0(1) + 2 \operatorname{Re} \Phi_1(1)] + \\ &+ \dots + c_{kk} [\Phi_0(k) + 2 \operatorname{Re} \Phi_1(k)]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\Phi_0(m) + 2 \operatorname{Re} \Phi_1(m) = \Phi(m) \quad (m = 1, 2, \dots, k), \tag{48}$$

окончательно получим

$$c_k = c_{k1} \Phi(1) + \dots + c_{kk} \Phi(k). \tag{49}$$

Изучим систему функций (45). Запишем

$$d_k(r) = \sum_{l=0}^i G_k^l e^{l(r-jk\omega_0)} = \tilde{d}_k(r) - j \tilde{d}_k^{\sim}(r),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k(r) &= \sum_{l=0}^i (A_k^l/2) e^{lr} \cos(kl\omega_0 + \varphi_k), \\ \tilde{d}_k^{\sim}(r) &= \sum_{l=0}^i (A_k^l/2) e^{lr} \sin(kl\omega_0 + \varphi_k), \end{aligned} \tag{50}$$

тогда

$$\begin{aligned} d_k(r) e^{-n(r-jk\omega_0)} &= e^{-nr} \{ [\tilde{d}_k(r) \cos(nk\omega_0) + \tilde{d}_k^{\sim}(r) \sin(nk\omega_0)] + \\ &+ j [\tilde{d}_k^{\sim}(r) \sin(nk\omega_0) - \tilde{d}_k(r) \cos(nk\omega_0)] \}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $d_k(r) e^{-n(r+jk\omega_0)} = \overline{d_k(r) e^{-n(r-jk\omega_0)}}$, систему функций (45) можно записать в виде

$$f_i(n) = d_0(k) e^{-in} \sum_{j=1}^g [\tilde{d}_j(i) \cos(in \omega_0) + \tilde{d}_j(i) \sin(in \omega_0)] \quad (51)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k).$$

Система функций (51) линейно-независима. Ортогонализируя эту систему функций, получим ортонормированную систему функций $\{\varphi_k(n)\}$. В заключение приведем к более удобному для вычисления виду функцию

$$\Phi(m) = \Phi_0(m) + 2 \operatorname{Re} \Phi_1(m).$$

Имеем

$$\Phi_0(m) = h_0(m) Y^*(m) = Y^*(m) \sum_{l=0}^r H_0^l e^{lm} = Y^*(m) \cos \psi_0 \sum_{l=0}^r B_0^l e^{lm}.$$

Аналогично

$$2 \operatorname{Re} \Phi_1(m) = \sum_{l=0}^r e^{lm} \sum_{k=1}^{g_1} B_k^l [P_y^*(k, m) \cos(lk \omega_0 + \psi_k) + Q_y^*(k, m) \sin(lk \omega_0 + \psi_k)], \quad (52)$$

где

$$P_y^*(k, m) = \operatorname{Re} Y^*(m - jk \omega_0),$$

$$Q_y^*(k, m) = \operatorname{Im} Y^*(m - jk \omega_0).$$

Таким образом,

$$\Phi(m) = \sum_{l=0}^r e^{lm} \left\{ B_0^l Y^*(m) \cos \psi_0 + \sum_{k=1}^{g_1} B_k^l [P_y^*(k, m) \cos(lk \omega_0 + \psi_k) + Q_y^*(k, m) \sin(lk \omega_0 + \psi_k)] \right\}. \quad (53)$$

Пример. Рассмотрим линейное разностное уравнение с переменными коэффициентами

$$2 e^{-n} x(n+1) + x(n) = y(n). \quad (54)$$

Найдем решение этого уравнения, когда $y(n) = 1(n)$, причем начальное условие $x(0) = 0$.

Имеем

$$A_0^0 = 1; \quad A_1^1 = 2; \quad A_0^1 = 0; \quad B_0^0 = 1,$$

тогда

$$d_0 = \sum_{l=0}^1 A_0^l e^{lq} = 1,$$

$$d_1 = \sum_{l=0}^1 A_1^l e^{l(q+1)} = 2 e^{q+1},$$

$$e_0 = \sum_{l=0}^1 B_0^l e^{lq} = 1.$$

Выберем линейно-независимую систему функций

$$f_1(n) = e^{-n} + 2 e^2 e^{-2n},$$

$$f_2(n) = e^{-2n} + 2 e^3 e^{-3n},$$

.....

$$f_k(n) = e^{-kn} + 2 e^{k+1} e^{-(k+1)n}.$$

Соответствующая ей ортонормированная система функций будет

$$\begin{aligned}\varphi_1(n) &= c_{11} f_1(n), \\ \varphi_2(n) &= c_{21} f_1(n) + c_{22} f_2(n), \\ &\dots\end{aligned}$$

причем

$$c_{11} = \frac{1}{1 + 2e^2}, \quad c_{21} = -e, \quad c_{22} = \frac{e(1 + 2e^2)}{1 + 2e^3} \approx 1.$$

Учитывая, что $\Phi(q) = \frac{e^q}{e^q - 1}$, получим $\Phi(1) = \frac{e}{e - 1}$, $\Phi(2) = \frac{e^2}{e^2 - 1}$.

Тогда

$$x(n) \approx c_1 \varphi_1(n) + c_2 \varphi_2(n),$$

где

$$c_1 = \frac{e}{(e - 1)(1 + 2e^2)}, \quad c_2 = -\frac{e^3}{e^2 - 1}.$$

В статье рассмотрен приближенный способ решения линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих поведение широкого класса нестационарных линейных дискретных САР.

Решение проводится с помощью разложения по некоторой специально построенной ортонормированной системе. Алгоритм построения ортонормированной системы функций и определение коэффициентов разложения легко реализуется на ЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963.
2. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов, Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных спектров, книга Техническая кибернетика, Теория автоматического регулирования, книга 3, часть II, под ред. Солодовникова В. В., Машиностроение, М., 1969

Калужский филиал
Высшего технического училища
имени Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
19 января 1971 г.

ANALYSIS OF AUTOMATIC CONTROL DISCRETE SYSTEMS WITH VARIABLE PARAMETERs BY ORTHOGONAL DECOMPOSITIONS METHOD. I

Egupov N. D., Ivanov V. A.

An analysis of automatic control discrete systems with variable parameters is considered when system's difference equation coefficients satisfy certain conditions. The analysis is carried out using output signal decomposition in a specially constructed orthonormal system of functions. The computation algorithm is DC-realizable.

УДК 62 — 504

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ. II.

Н. Д. Егунов, В. А. Иванов

Рассмотрено определение математического ожидания и корреляционной функции выходного сигнала дискретных систем автоматического регулирования с переменными параметрами. Статистические характеристики выходного сигнала определяются с помощью разложения по некоторой специально построенной ортонормированной системе функций. Алгоритм счета может быть реализован на ЦВМ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Под статистическим анализом дискретных систем автоматического регулирования с переменными параметрами понимается определение статистических характеристик выходных сигналов этих систем.

В общем случае динамика дискретной САР с переменными параметрами описывается разностным уравнением

$$a_i(n)x(n+i) + a_{i-1}(n)x(n+i-1) + \dots + a_0(n)x(n) = b_j(n)y(n+j) + \dots + b_0(n)y(n), \tag{1}$$

где $y(n)$ — входной сигнал, $x(n)$ — выходной сигнал.

При анализе определяются математическое ожидание (МО) и корреляционная функция выходного сигнала. Статистические характеристики входного сигнала $y(n)$, в частности математическое ожидание $m_y(n)$ и корреляционная функция $K_y(n, m)$, полагаются известными. Решение задачи производится с помощью разложения по некоторой, специально выбранной системе ортонормированных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Для удобства дальнейших выкладок запишем уравнение (1) в виде

$$a_i(n)\Delta^i x(n) + \dots + d_0(n)x(n) = e_j(n)\Delta^j y(n) + \dots + e_0(n)y(n), \tag{2}$$

где

$$d_{i-k}(n) = \sum_{\nu=0}^k a_{i-\nu}(n) C_{i-\nu}^{k-\nu} \quad (k = 0, 1, \dots, i), \tag{3}$$

$$e_{j-k}(n) = \sum_{\nu=0}^k b_{j-\nu}(n) C_{j-\nu}^{k-\nu} \quad (k = 0, 1, \dots, j).$$

Коэффициенты уравнения (1), а следовательно, и уравнения (2) полагаются детерминированными величинами, поэтому применив операцию математического ожидания к обеим частям уравнения (2), полу-

чим следующее уравнение для математического ожидания $m_x(n)$ выходной координаты

$$\begin{aligned} d_l(n) \Delta^l m_x(n) + \dots + d_0(n) m_x(n) = \\ = e_j(n) \Delta^j m_y(n) + \dots + e_0(n) m_y(n). \end{aligned} \quad (4)$$

Решение уравнения (4) для частных случаев, когда коэффициенты уравнения представляют собой либо конечные суммы экспоненциальных функций, либо полиномы, либо суммы гармонических функций, можно выполнить методом, аналогичным рассмотренному в [1].

Пусть, например, коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} d_l(n) = \sum_{k=0}^g D_k^l e^{-kn} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, i), \\ e_l(n) = \sum_{k=0}^{g_1} E_k^l e^{-kn} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, j). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагаем, что математические ожидания m_y и $m_x(n)$ преобразуемы по Лапласу.

Применим к обеим частям уравнения (4) дискретное преобразование Лапласа. Используя теорему об изображении разности и теорему смещения [2], можно написать

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^g D_k^i (e^{q+k} - 1)^i M_x^*(q+k) + \dots + \\ + \sum_{k=0}^g D_k^0 M_x^*(q+k) = \\ = \sum_{k=0}^{g_1} E_k^j (e^{q+k} - 1)^j M_y^*(q+k) + \dots + \sum_{k=0}^{g_1} E_k^0 M_y^*(q+k), \end{aligned} \quad (6)$$

где $M_x^*(q) = D\{m_x(n)\}$, $M_y^*(q) = D\{m_y(n)\}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} r_k(q) = \sum_{l=0}^i D_k^l (e^{q+k} - 1)^l \quad (k = 0, 1, \dots, g), \\ h_k(q) = \sum_{l=0}^j E_k^l (e^{q+k} - 1)^l \quad (k = 0, 1, \dots, g_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем уравнение (6) в виде

$$\begin{aligned} r_g(q) M_x^*(q+g) + r_{g-1}(q) M_x^*(q+g-1) + \\ + \dots + r_0(q) M_x^*(q) = \Phi(q), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Phi(q)$ представляет собой правую часть уравнения (6)

$$\Phi(q) = h_{g_1}(q) M_y^*(q+g_1) + \dots + h_0(q) M_y^*(q). \quad (9)$$

Математическое ожидание $m_y(n)$ задано, поэтому $\Phi(q)$ — известная функция.

Рассмотрим систему линейно-независимых функций

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_0(1) e^{-n} + \dots + r_g(1) e^{-n(g+1)}, \\ f_2(n) &= r_0(2) e^{-2n} + \dots + r_g(2) e^{-n(g+2)}, \\ &\dots \\ f_l(n) &= r_0(l) e^{-ln} + \dots + r_g(l) e^{-n(g+l)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Перейдем от системы функций $\{f_k(n)\}$ к ортонормированной системе функций $\{\varphi_k(n)\}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= c_{11} f_1(n), \\ \varphi_2(n) &= c_{21} f_1(n) + c_{22} f_2(n), \\ &\dots \\ \varphi_k(n) &= c_{k1} f_1(n) + \dots + c_{kk} f_k(n), \\ &\dots \end{aligned} \quad (11)$$

Математическое ожидание $m_x(n)$ ищем в виде

$$m_x(n) = \sum_{k=1}^l c_k \varphi_k(n). \quad (12)$$

Коэффициенты разложения c_k определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=0}^{\infty} m_x(n) \varphi_k(n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} m_x(n) [c_{k1} f_1(n) + \dots + c_{kk} f_k(n)] = \\ &= c_{k1} \sum_{n=0}^{\infty} m_x(n) [r_0(1) e^{-n} + \dots + r_g(1) e^{-n(g+1)}] + \\ &+ c_{k2} \sum_{n=0}^{\infty} m_x(n) [r_0(2) e^{-2n} + \dots + r_g(2) e^{-n(g+2)}] + \dots + \\ &+ c_{kk} \sum_{n=0}^{\infty} m_x(n) [r_0(k) e^{-kn} + \dots + r_g(k) e^{-n(g+k)}] = \\ &= c_{k1} \Phi(1) + \dots + c_{kk} \Phi(k) \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) позволяет определить коэффициенты разложения c_k , тем самым находится и математическое ожидание $m_x(n)$. Аналогично можно определить $m_x(n)$, когда коэффициенты уравнения (1) представляют собой полиномы или конечные суммы гармонических функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Определение корреляционной функции выходного сигнала $k_x(n, m)$ выполняется в два этапа. Вначале находится взаимная корреляционная функция $K_{xy}(n, m)$, а затем и корреляционная функция $K_x(n, m)$. Получим уравнение для определения взаимной корреляционной функ-

ции $K_{xy}(n, m)$. Вычитая из уравнения (2) уравнение (4), будем иметь уравнение для центрированных величин

$$\begin{aligned} d_i(n) \Delta^i x_0(n) + \dots + d_0(n) \Delta x_0(n) = \\ = e_j(n) \Delta^j y_0(n) + \dots + e_0(n) y_0(n). \end{aligned} \quad (14)$$

Известно, что если $z_k(n) = \Delta^k x(n)$, $z_l(n) = \Delta^l x(n)$, то

$$K_{z_k z_l}(n, m) = \Delta_n^k \Delta_m^l K_x(n, m). \quad (15)$$

Умножим обе части уравнения (14) на $y_0(m)$ и возьмем математическое ожидание от обеих частей уравнения. Учитывая (15), получим

$$\begin{aligned} d_i(n) \Delta_n^i K_{xy}(n, m) + \dots + d_0(n) K_{xy}(n, m) = \\ = e_j(n) \Delta_n^j K_{yy}(n, m) + \dots + e_0(n) K_{yy}(n, m). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение уравнения (16), когда коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (5), проводится так же, как решение уравнения (4). Взаимная корреляционная функция $K_{xy}(n, m)$ запишется в виде

$$K_{xy}(n, m) = \sum_{k=1}^l c_k(m) \varphi_k(n), \quad (17)$$

где $\{\varphi_k(n)\}$ — ортонормированная система функций, определяемая равенствами (11). Коэффициенты разложения $c_k(m)$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} c_k(m) = c_{k1} \Phi_1(1, m) + \\ + c_{k2} \Phi_1(2, m) + \dots + c_{kk} \Phi_1(k, m) \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(q, m) = h_{g_1}(q) K_{yy}^*(q + g_1, m) + \\ + \dots + h_0(q) K_{yy}^*(q, m), \end{aligned} \quad (19)$$

$$K_{yy}^*(q, m) = D_{n \rightarrow q} \{K_{yy}(n, m)\},$$

а коэффициенты $h_l(q)$ определяются равенствами (7). Получим уравнение для корреляционной функции $K_x(n, m)$. Умножив обе части уравнения (14) на $x_0(m)$ и взяв математическое ожидание от обеих частей уравнения, будем иметь

$$\begin{aligned} d_i(n) \Delta_n^i K_x(n, m) + \dots + d_0(n) K_x(n, m) = \\ = e_j(n) \Delta_n^j K_{yx}(n, m) + \dots + e_0(n) K_{yx}(n, m). \end{aligned} \quad (20)$$

Взаимная корреляционная функция обладает свойством [2]

$$K_{xy}(n, m) = K_{yx}(m, n), \quad (21)$$

следовательно, взаимная корреляционная функция $K_{yx}(n, m)$ также известна и определяется равенством

$$K_{yx}(n, m) = \sum_{k=1}^l c_k(n) \varphi_k(m). \quad (22)$$

Применим D -преобразование по аргументу n к обеим частям уравнения (20), получим

$$\begin{aligned} r_g(q) K_x^*(q + g, m) + \dots + r_0(q) K_x^*(q, m) = \\ = h_{g_1}(q) K_{yx}^*(q + g_1, m) + \dots + h_0(q) K_{yx}^*(q, m), \end{aligned} \quad (23)$$

где коэффициенты $r_l(q)$ и $h_l(q)$ определяются равенством (7).

Учитывая равенство (22), правую часть уравнения (23) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_2(q, m) = h_{g_1}(q) K_{yx}^*(q + g_1, m) + \dots + \\ + h_0(q) K_{yx}^*(q, m) = h_{g_1}(q) \sum_{k=1}^l c_k^*(q + g_1) \varphi_k(m) + \\ + \dots + h_0(q) \sum_{k=1}^l c_k^*(q) \varphi_k(m) = \\ = \sum_{k=1}^l \varphi_k(m) \sum_{v=0}^{g_1} h_v(q) c_k^*(q + v) = \sum_{k=1}^l \varphi_k(m) \tilde{c}_k(q), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$c_k^*(q) = D\{c_k(n)\}, \quad (25)$$

$$\tilde{c}_k(q) = \sum_{v=0}^{g_1} h_v(q) c_k^*(q + v).$$

Решение уравнения (20) имеет вид

$$K_x(n, m) = \sum_{k=1}^l c_k'(m) \varphi_k(n), \quad (26)$$

где $\{\varphi_k(n)\}$ — ортонормированная система функций (11).

Коэффициенты разложения $c_k'(m)$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} c_k'(m) = c_{k1} \Phi_2(1, m) + \dots + c_{kk} \Phi_2(k, m) = \\ = \sum_{r=1}^l \varphi_r(m) \sum_{v=1}^k c_{kv} \cdot \tilde{c}_r(v) = \sum_{r=1}^l \varphi_r(m) \cdot \tilde{c}_{kr}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\tilde{c}_{kr} = \sum_{v=1}^k c_{kv} \cdot \tilde{c}_r(v) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Окончательно выражение для корреляционной функции $K_x(n, m)$ имеет вид

$$K_x(n, m) = \sum_{k,r=1}^l \varphi_k(n) \varphi_r(m) \tilde{c}_{kr}. \quad (29)$$

Рассмотрим определения корреляционной функции $K_x(n, m)$ выходного сигнала $x(n)$, когда коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условию

$$d_i(n) = \sum_{k=0}^g D_k^l n^k \quad (l = 0, 1, \dots, i). \quad (30)$$

$$e_i(n) = \sum_{k=0}^{g_1} D_k^l n^k \quad (l = 0, 1, \dots, j).$$

Учитывая условие (30), запишем уравнение (16) в виде

$$n^g \sum_{l=0}^i D_g^l \Delta_n^l K_{xy}(n, m) + \dots + n \sum_{l=0}^i D_1^l \Delta_n^l K_{xy}(n, m) +$$

$$+ \sum_{l=0}^i D_0^l \Delta_n^l K_{xy}(n, m) = \quad (31)$$

$$= n^{g_1} \sum_{l=0}^i E_{g_1}^l \Delta_n^l K_{yy}(n, m) + \dots + \sum_{l=0}^i E_0^l \Delta_n^l K_{yy}(n, m).$$

Применим к обеим частям уравнения (31) D -преобразование по аргументу n . Учитывая, что

$$D \left\{ n^k \sum_{l=0}^i \Delta_n^l K_{xy}(n, m) \right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} [p_k(q) K_{xy}^*(q, m)], \quad (32)$$

$$D \left\{ n^k \sum_{l=0}^i \Delta_n^l K_{yy}(n, m) \right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} [t_k(q) K_{yy}^*(q, m)],$$

где

$$p_k(q) = \sum_{l=0}^i D_k^l (e^q - 1)^l \quad (k = 0, 1, \dots, g), \quad (33)$$

$$t_k(q) = \sum_{l=0}^i E_k^l (e^q - 1)^l \quad (k = 0, 1, \dots, g_1),$$

получим

$$(-1)^g \left[\frac{d^g p_g(q)}{dq^g} K_{xy}^*(q, m) + C_g^1 \frac{d^{g-1} p_g(q)}{dq^{g-1}} \times \right.$$

$$\times \left. \frac{dK_{xy}^*(q, m)}{dq} + \dots + p_g(q) \cdot \frac{d^g K_{xy}^*(q, m)}{dq^g} \right] +$$

$$+ \dots + (-1)^k \left[\frac{d^k p_k(q)}{dq^k} K_{xy}^*(q, m) + \right.$$

$$+ C_k^1 \frac{d^{k-1} p_k(q)}{dq^{k-1}} \frac{dK_{xy}^*(q, m)}{dq} + \dots + p_k(q) \times$$

$$\times \left. \frac{d^k K_{xy}^*(q, m)}{dq^k} \right] + \dots - \frac{dp_1(q)}{dq} K_{xy}^*(q, m) -$$

$$- p_1(q) \frac{dK_{xy}^*(q, m)}{dq} + p_0(q) K_{xy}^*(q, m) = \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{g_1} \left[\frac{d^{g_1} t_{g_1}(q)}{dq^{g_1}} K_{yy}^*(q, m) + C_{g_1}^1 \times \right. \\
 &\times \frac{d^{g_1} t_{g_1-1}(q)}{dq^{g_1-1}} \frac{dK_{yy}^*(q, m)}{dq} + \dots + t_{g_1}(q) \times \\
 &\times \left. \frac{d^{g_1} K_{yy}^*(q, m)}{dq^{g_1}} \right] + \dots - \frac{dt_1(q)}{dq} K_{yy}^*(q, m) - \\
 &- t_1(q) \frac{dK_{yy}^*(q, m)}{dq} + t_0(q) K_{yy}^*(q, m).
 \end{aligned}$$

Уравнение (34) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_g(q) \frac{d^g K_{xy}^*(q, m)}{dq^g} + \dots + P_1(q) \frac{dK_{xy}^*(q, m)}{dq} + \\
 + P_0(q) K_{xy}^*(q, m) = T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} K_{yy}^*(q, m)}{dq^{g_1}} + \\
 + \dots + T_1(q) \frac{dK_{yy}^*(q, m)}{dq} + T_0(q) K_{yy}^*(q, m),
 \end{aligned} \tag{35}$$

причем

$$\begin{aligned}
 P_k(q) &= \sum_{l=k}^g (-1)^l C_l^{l-k} \frac{d^{l-k} p_l(q)}{dq^{l-k}} \quad (k = 0, 1, \dots, g), \\
 T_k(q) &= \sum_{l=k}^{g_1} (-1)^l C_l^{l-k} \frac{d^{l-k} t_l(q)}{dq^{l-k}} \quad (k = 0, 1, \dots, g_1).
 \end{aligned} \tag{36}$$

Обозначим правую часть уравнения (35)

$$T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} K_{yy}^*(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots + T_0(q) K_{yy}^*(q, m) = V(q, m). \tag{37}$$

Решение уравнения (16) ищем в виде

$$K_{xy}(n, m) = \sum_{k=1}^l c_k(m) \varphi_k(n). \tag{38}$$

В формуле (38) $\{\varphi_k(n)\}$ — система ортонормированных функций, полученная в результате ортогонализации следующей линейно-независимой системы функций:

$$\begin{aligned}
 f_1(n) &= e^{-n} [P_0(1) - P_1(1) n + \dots + (-1)^g P_g(1) n^g], \\
 f_2(n) &= e^{-2n} [P_0(2) - P_1(2) n + \dots + (-1)^g P_g(2) n^g], \\
 &\dots \\
 f_l(n) &= e^{-ln} [P_0(l) - P_1(l) n + \dots + (-1)^g P_g(l) n^g]
 \end{aligned} \tag{39}$$

Таким образом,

$$\varphi_1(n) = c_{11} f_1(n),$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(n) &= c_{21} f_1(n) + c_{22} f_2(n), \\ &\dots \\ \varphi_k(n) &= c_{k1} f_1(n) + \dots + c_{kk} f_k(n), \\ &\dots \end{aligned}$$

причем коэффициенты c_{ki} выбраны так, чтобы система функций $\{\varphi_k(n)\}$ была ортонормированной. Коэффициенты $c_k(m)$ разложения (38) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} c_k(m) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_{xy}(n, m) \varphi_k(n) = \\ &= c_{k1} \sum_{n=0}^{\infty} K_{xy}(n, m) e^{-n} [P_0(1) - P_1(1) n + \\ &\quad + \dots + (-1)^g P_g(1) n^g] + \dots + \\ &+ c_{kk} \sum_{n=0}^{\infty} K_{xy}(n, m) e^{-kn} [P_0(k) - P_1(k) n + \\ &\quad + \dots + (-1)^g P_g(k) n^g] = c_{k1} V(1, m) + \dots + c_{kk} V(k, m) \end{aligned} \tag{40}$$

$(k = 1, 2, \dots)$.

Определим, далее, корреляционную функцию $K_x(n, m)$. Коэффициенты уравнения (20), определяющего корреляционную функцию $K_x(n, m)$, удовлетворяют условию (30). Выполнив преобразование, аналогичное рассмотренным выше, получим следующее уравнение для изображения корреляционной функции $K_x(n, m)$

$$\begin{aligned} P_g(q) \frac{d^g K_x^*(q, m)}{dq^g} + \dots + P_0(q) K_x^*(q, m) &= \\ = T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} K_{yx}^*(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots + T_0(q) K_{yx}^*(q, m). \end{aligned} \tag{41}$$

Коэффициенты $P_k(q)$ и $T_k(q)$ определяются формулами (36). Обозначим правую часть уравнения (41)

$$\begin{aligned} T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} K_{yx}^*(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots + \\ + T_0(q) K_{yx}^*(q, m) = V_1(q, m). \end{aligned} \tag{42}$$

Учитывая, что

$$K_{yx}(n, m) = K_{xy}(m, n) = \sum_{k=1}^l c_k(n) \varphi_k(m), \tag{43}$$

получим

$$K_{yx}^*(q, m) = \sum_{k=1}^l c_k^*(q) \varphi_k(m), \tag{44}$$

где

$$c_k^*(q) = D\{c_k(n)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 V_1(q, m) &= T_{g_1}(q) \sum_{k=1}^l \frac{d^{g_1} c_k^*(q)}{dq^{g_1}} \varphi_k(m) + \\
 &+ \dots + T_0(q) \sum_{k=1}^l c_k^*(q) \varphi_k(m) = \\
 &= \sum_{k=1}^l \varphi_k(m) \sum_{v=0}^{g_1} T_v(q) \frac{d^v c_k^*(q)}{dq^v} = \\
 &= \sum_{k=1}^l \varphi_k(m) \tilde{c}_k(q),
 \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$\tilde{c}_k(q) = \sum_{v=0}^{g_1} T_v(q) \frac{d^v c_k^*(q)}{dq^v}. \tag{46}$$

Решение уравнения (20) для этого случая ищем в виде

$$K_x(n, m) = \sum_{k=1}^l c'_k(m) \varphi_k(n), \tag{47}$$

причем ортонормированная система функций $\{\varphi_k(n)\}$ получена в результате ортогонализации линейно-независимой системы функций (39).

Определим коэффициенты разложения $c'_k(m)$

$$\begin{aligned}
 c'_k(m) &= \sum_{v=1}^k c_{k,v} V_1(v, m) = \\
 &= \sum_{v=1}^k c_{k,v} \sum_{r=1}^l \varphi_r(m) \tilde{c}_r(v) = \\
 &= \sum_{r=1}^l \varphi_r(m) \sum_{v=1}^k c_{k,v} \tilde{c}_r(v) = \sum_{r=1}^l \varphi_r(m) \tilde{c}_{kr},
 \end{aligned} \tag{48}$$

причем

$$\tilde{c}_{kr} \approx \sum_{v=1}^{-k} c_{k,r} \tilde{c}_r(v). \tag{49}$$

Окончательно имеем

$$K_x(n, m) = \sum_{k,r=1}^l \tilde{c}_{kr} \varphi_k(n) \varphi_r(m). \tag{50}$$

В том случае, когда коэффициенты уравнения (2) представляют собой суммы периодических функций вида

$$\begin{aligned}
 d_l(n) &= \sum_{k=0}^g D_k^l \cos(k\omega_0 n - \varphi_k) \quad (l = 0, 1, \dots, i), \\
 e_l(n) &= \sum_{k=0}^{g_1} E_k^l \cos(k\omega_0 n - \psi_k) \quad (l = 0, 1, \dots, j),
 \end{aligned} \tag{51}$$

вычисление корреляционной функции $K_x(n, m)$ производится аналогично. При этом выбирается специальная система ортонормированных функций [1].

В статье рассматривается определение математического ожидания и корреляционной функции выходного сигнала дискретных линейных нестационарных САР. Задача решается с помощью разложения искомым характеристик по некоторой специально настроенной ортонормированной системе функций. Алгоритм построения ортонормированной системы функций и определение коэффициентов разложения довольно громоздкий, но легко поддается реализации на ЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Егупов, В. А. Иванов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 3, 438 (1972).
2. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963.
3. П. Д. Крутько, Статистическая динамика импульсных систем, изд. Сов. радио, М., 1963.

Калужский филиал Высшего технического училища
им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
19 января 1971 г.

STATISTICAL ANALYSIS OF CONTROL DISCRETE SYSTEMS WITH PARAMETERS BY ORTHOGONAL DECOMPOSITIONS METHOD. 11

Ėgupov N. D., Ivanov V. A.

A determination of mathematical expectation and correlation function of output signal of automatic control discrete systems with variable parameters is considered. The output signal statistical characteristics are found using decomposition in a specially constructed orthonormal system of functions. The somputation algorithm is DC-realizable,

УДК 517.944

**АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ
ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА КОМПАКТНОМ РИМАНОВОМ
МНОГООБРАЗИИ**

В. Р. Коган, А. Д. Крахнов

Изучаются асимптотические свойства спектра оператора Лапласа на римановом многообразии. Получены новые асимптотические формулы для серий спектра, связанные с устойчивыми геодезическими.

1. Асимптотические свойства спектра эллиптического оператора на гладком многообразии тесно связаны со свойствами гамильтоновой системы, построенной по его символу [1]. Для оператора Лапласа эта система (с точностью до множителя 1/2) совпадает с геодезическим потоком, индуцированным соответствующей римановой метрикой. Случай интегрируемого геодезического потока рассматривался в [2-4].

В настоящей работе рассматривается риманово многообразие с неинтегрируемым геодезическим потоком. Предполагаем, что на многообразии существует устойчивая замкнутая геодезическая $l(t)$. В окрестности $l(t)$ при некоторых условиях геодезический поток можно аппроксимировать с любой точностью интегрируемой системой.

Используя результаты В. П. Маслова [1] для этой аппроксимирующей системы, получаем асимптотику собственных значений и функций. Формулы для собственных функций, выраженные через канонический оператор, допускают упрощение. Ограничиваясь линейной гамильтоновой системой и локально аппроксимируя инвариантное лагранжево многообразие касательными плоскостями, получаем простые выражения для собственных функций. Эти выражения отличаются от полученных в работах [5-6] методом параболического уравнения.

2. Пусть M — $(n+1)$ -мерное компактное риманово многообразие с метрическим тензором $g = (g_{ij})$ и пусть Δ — соответствующий оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial q^i} g^{ij} \sqrt{\det(g)} \frac{\partial}{\partial q^j}$$

Здесь $(g^{ij}) = g^{-1}$.

На кокасательном расслоении T^*M можно задать дифференциальную форму первого порядка Θ^1 . Обозначим через $T^*M|_U$ кокасательное расслоение над окрестностью U , в которой введены локальные координаты (q^0, q^1, \dots, q^n) . Тогда в $T^*M|_U$ индуцируются координаты $(q^0, q^1, \dots, q^n, p_0, p_1, \dots, p_n)$ и форма Θ^1 имеет вид $\sum_{i=1}^n p_i dq^i$.

Гамильтонова система на T^*M , построенная по символу оператора Лапласа, имеет гамильтониан

$$H(p_0, p_1, \dots, p_n, q^0, q^1, \dots, q^n) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(q^0, q^1, \dots, q^n) p_i p_j$$

Предположим, что у этой гамильтоновой системы существует семейство инвариантных замкнутых лагранжевых* многообразий T_μ , зависящих от параметра $\mu \in \Omega$ (причем ∞ — предельная точка Ω) и лежащих на уровне $H = 1$.

Для риманова многообразия можно доказать аналог теоремы В. П. Маслова [1].

Теорема. Предположим, что в семействе T_μ можно выделить счетную последовательность многообразий T_k , $k \rightarrow \infty$, таких, что будут выполняться соотношения

$$\frac{2k}{\pi} \int_{\gamma^i} \Theta^1 \equiv \text{Ind } \gamma^i \pmod{4}. \quad (1)$$

Тогда существует серия функций

$$\Psi_k(q^0, q^1, \dots, q^n) = \frac{1}{(\det(g))^{1/4}} K_{T_k}^{\alpha_0} \cdot 1,$$

такая, что

$$\Delta \Psi_k + k^2 \Psi_k = O(1).$$

Здесь γ^i — i -й базисный цикл группы гомологий $H_1(T_k, Z)$, $\text{Ind } \gamma^i$ — индекс базисного цикла γ^{i**} , $K_{T_k}^{\alpha_0}$ — канонический оператор Маслова [1].

3. Предположим, что на M есть замкнутая геодезическая l , параметризованная длиной дуги t . В некоторой окрестности U геодезической $l(t)$ введем координаты (q^0, q^1, \dots, q^n) , такие, что $g_{i0}(t, 0, \dots, 0) = 0$ и уравнение геодезической будет иметь вид $q^0 = t$, $q^i = 0$, $i = 1, \dots, n$, т. е. $q^0 = t$ — периодическая координата с периодом L , где L — длина геодезической. В качестве такой системы можно взять, например, геодезическую систему координат. Соответствующие координаты в $T^*M|_U$ имеют вид

$$(q^0, q^1, \dots, q^n, p_0, p_1, \dots, p_n) = (q^0, q, p_0, p_n).$$

Очевидно, что у гамильтоновой системы с гамильтонианом H существует семейство замкнутых траекторий, которые проектируются на замкнутую геодезическую l . Обозначим через \tilde{l} замкнутую траекторию, лежащую на уровне $H = 1$.

Уравнение $H(p_0, p, t, q) = 1$ в $T^*M|_U$ можно разрешить относительно p_0 : $p_0 = \tilde{H}(p, t, q)$. Степенной ряд для \tilde{H} по степеням (p, q) в окрестности точки $p = q = 0$ будет иметь вид

$$\tilde{H}(p, t, q) = -1 + 1/2 H_2(p, t, q) + \dots + 1/s! H_s(p, t, q) + \dots,$$

где $H_i(p, t, q)$ — однородный полином степени i относительно (p, q) с коэффициентами периода L по t .

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$\bar{H}_s(p, t, q) = -1 + \sum_{i=2}^s \frac{1}{i!} H_i(p, t, q).$$

* Т. е. для любых двух векторов u, v , касательных к Γ , $(d\Theta^1)(u, v) = 0$.

** Определение индекса пути, данное в [1], полностью переносится на случай риманова многообразия.

Ясно, что \tilde{l} — периодическая траектория этой системы. Обозначим ее характеристические показатели через σ_ν , $\nu = 0, 1, \dots, 2n+1$. Два из них обязательно равны нулю, так как у системы есть первый интеграл $\overline{H}_s = C$. Будем считать, что $\sigma_0 = \sigma_{2n+1} = 0$. Предположим, что остальные характеристические показатели чисто мнимые $\sigma_\nu = i\beta_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, 2n$ (т. е. мультипликаторы $\lambda_\nu = \exp(L\sigma_\nu)$ по модулю равны единице). Поскольку система гамильтонова, то характеристические показатели можно перенумеровать так, чтобы $\beta_\nu = -\beta_{n+\nu}$, $\beta_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. Если периодическое решение \tilde{l} в линейном приближении устойчиво и $\sum_{i=1}^n k_i \beta_i \neq k_0 \frac{2\pi}{L}$ при $|k| = \sum_{i=1}^n |k_i| \leq 2s - 1$, $k_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то гамильтониан \overline{H}_s может быть приведен [7] каноническим преобразованием $T(t): (\eta, \xi) \rightarrow (p, q)$ с периодом L к нормальной форме

$$\overline{H}_s(p, t, q) = -1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \tau_i + \dots + \sum_{i_1 \dots i_r} \beta_{i_1 \dots i_r} \tau_{i_1} \dots \tau_{i_r},$$

где

$$r = \left[\frac{s}{2} \right], \quad 2\tau_i = (\eta_i^2 + \xi_i^2).$$

Коэффициенты $\beta_i, \dots, \beta_{i_1 \dots i_r}$ — инварианты гамильтониана относительно канонических преобразований. Для системы с гамильтонианом \overline{H}_s существует $(n+1)$ первых интегралов в инволюции

$$\overline{H}_s(p, t, q) = C, \quad \eta_i^2 + \xi_i^2 = C_i^2.$$

Многообразие уровня этих первых интегралов будет $(n+1)$ -мерным тором T^{n+1} . Можно считать, что вдоль i -го базисного цикла группы $H_1(T^{n+1}, Z)$ изменяются только координаты (η_i, ξ_i) . Соответствующие интегралы из теоремы 1 будут иметь вид

$$\frac{2k}{\pi} \oint_{\gamma^0} \eta_0 d\xi^0 = -4m, \quad \frac{2k}{\pi} \oint_{\gamma^i} \eta_i d\xi_i = 2 + 4m_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как

$$\oint_{\gamma^i} \eta_i d\xi_i = \pi C_i^2,$$

$$\oint_{\gamma^0} \eta_0 d\xi_0 = \oint_{\gamma^0} \left(-1 + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2} C_i^2 + \dots + \sum_{i_1 \dots i_r} \frac{\beta_{i_1 \dots i_r}}{2^r} \times \right. \\ \left. \times C_{i_1}^2 \dots C_{i_r}^2 \right) dq^0 = L \left(-1 + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2} C_i^2 + \dots + \sum_{i_1 \dots i_r} \frac{\beta_{i_1 \dots i_r}}{2^r} C_{i_1}^2 \dots C_{i_r}^2 \right),$$

то

$$C_i^2 = \frac{1 + 2m_i}{k},$$

$$kL \left(-1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\left(m_i + \frac{1}{2}\right)}{k} + \dots + \sum_{i_1 \dots i_r} \beta_{i_1 \dots i_r} \frac{\left(m_{i_1} + \frac{1}{2}\right) \dots \left(m_{i_r} + \frac{1}{2}\right)}{k^r} \right) = \\ = -2\pi m.$$

Или, если обозначить

$$k_0 = \frac{2\pi m}{L} + \sum_{j=1}^n \left(m_j + \frac{1}{2}\right) \beta_j,$$

то асимптотика собственных значений будет выражаться формулой

$$k \approx \frac{2\pi m}{L} + \sum_{j=1}^n \left(m_j + \frac{1}{2}\right) \beta_j + \sum_{i,j} \left(m_i + \frac{1}{2}\right) \left(m_j + \frac{1}{2}\right) \frac{\beta_{ij}}{k_0} + \dots$$

$$\dots + \sum_{i_1 \dots i_r} \left(m_{i_1} + \frac{1}{2}\right) \dots \left(m_{i_r} + \frac{1}{2}\right) \frac{\beta_{i_1 \dots i_r}}{k_0^{r-1}}.$$

4. Рассмотрим систему с гамильтонианом \bar{H}_2 . Окрестность траектории \tilde{l} расслаивается на $(n+1)$ -мерные лагранжевы торы T^{n+1} , и сечение $t = \text{const}$ определяет на каждом торе T^{n+1} n -мерный тор T^n . Предположим, что для T^{n+1} выполняются условия (1).

T_0^n можно покрыть координатными областями Ω_k^i , такими, что в Ω_k^i можно выбрать в качестве координат набор $y_k = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k}, q^{i_{k+1}}, \dots, q^{i_n})$ [1]. Пусть $z_k = (q^{i_1}, \dots, q^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$ и $\pi: T^{n+1} \rightarrow M$ — проекция. Предположим, что $\pi^{-1}(t, q)$ состоит из r точек $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_r$ и все они неособые относительно проекции π . Траектория γ_j , проходящая через x_j пересекает T_0^n в некоторой точке x_j^0 . Точка x_j^0 имеет координаты $(p_1^j, \dots, p_n^j, q_1^j, \dots, q_n^j)$. Если $y_k^j = (p_{i_1}^j, \dots, p_{i_k}^j, q^{i_{k+1}}, \dots, q^{i_n})$ и $z_k^j = (q^{i_1}, \dots, q^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$, то уравнение траектории γ_j можно записать в виде

$$p(t) = A(t) z_k^j + B(t) y_k^j,$$

$$q(t) = C(t) z_k^j + D(t) y_k^j, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), C(t), D(t)$ — действительные $n \times n$ матрицы.

Так как $\pi^{-1}(t, q)$ состоит из неособых точек, то в окрестности точки (t, q) можно ввести две системы координат (t, q) и (t, y_k^j) .

Тогда

$$\det \left(\frac{Dq}{Dy_k^j} \right) = \det \left(C(t) \frac{Dz_k^j}{Dy_k^j} + D(t) \right).$$

Для гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$\bar{H}_2 = -1 + \frac{1}{2} H_2$$

функция $S(t, q)$, такая, что

$$dS = \sum_{i=1}^n p_i dq^i - \bar{H}_2 dt$$

будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dS}{dt} = 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n p_i q^i \right).$$

В самом деле, пользуясь тем, что H_2 — однородная функция степени 2 по p_i, q^i имеем

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{dq^i}{dt} + 1 - \frac{1}{2} H_2 = 1 + \sum_{i=1}^n \left[p_i \frac{dq^i}{dt} - \frac{1}{2} \left(p_i \frac{\partial H_2}{\partial p_i} + q^i \frac{\partial H_2}{\partial q^i} \right) \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{dq^i}{dt} + q^i \frac{dp_i}{dt} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n p_i q^i \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(t, q) = t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i(q) q^i.$$

Функции $p_i(q)$ находятся из системы нелинейных уравнений, определяющих тор T_t^n .

Асимптотика собственных функций будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \Psi_k(t, q) &= \frac{1}{(\det(g))^{1/4}} \sum_{i=1}^n \left[\det \left(C(t) \frac{Dz_k^i}{Dy_k^i} + D(t) \right) \right]^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -i \left[\frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha_0, x_j] - k_0 \left(t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i(q) q^i \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где α_0 — некоторая фиксированная точка на T^{n+1} и $\text{Ind } l[\alpha_0, x_j]$ — индекс Маслова пути $l[\alpha_0, x_j]$, соединяющего точки α_0 и x_j .

5. В достаточно малой окрестности точки (t, q) каждое слагаемое в формуле (3) можно аппроксимировать следующим образом.

Уравнение касательной плоскости к лагранжеву тору T_0^n в точке x_j^0 имеет вид

$$z_k = S_0 y_k + \hat{y}_k, \quad (4)$$

где S_0 — симметричная матрица. Так как по предположению x_j — неособая точка, то уравнение касательной плоскости к T_t^n в x_j может быть записано

$$p = S(t) q + \hat{p}(t), \quad (5)$$

$S(t) = (S_{ij}(t))$ тоже симметрична.

Из (4), (5) получаем

$$S(t) = (A(t) S_0 + B(t)) (C(t) S_0 + D(t))^{-1},$$

$$\hat{p}(t) = (A(t) - S(t) C(t)) \hat{y}_k.$$

Используя (2), (4), находим

$$\det \left(\frac{Dq}{Dy_k} \right) = \det (C(t) S_0 + D(t)).$$

Таким образом, асимптотика в окрестности точки (t, q) записывается

$$\Psi_k(t, q) = \frac{1}{(\det g(t, 0))^{1/4}} \sum_{i=1}^n [\det (C(t) S_0 + D(t))]^{-1/2} \times$$

$$\times \exp \left\{ -i \left[\frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha_0, x_j] - k_0 \left(t + \frac{1}{2} \sum_{i < j}^n S_{ij}(t) q^i q^j + \sum_{i=1}^n \hat{p}_i(t) q^i \right) \right] \right\}.$$

Авторы благодарят С. И. Альбера за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, изд. МГУ, М., 1965.
2. В. П. Быков, Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах, в сб. Электроника больших мощностей, вып. 4, изд. Наука, М., 1965.
3. Л. А. Вайштейн, Лучевые потоки в трехосном эллипсоиде, в сб. Электроника больших мощностей, вып. 4, изд. Наука, М., 1965.
4. В. Р. Коган, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, 1675 (1969).
5. В. М. Бабич, О собственных функциях оператора Лапласа, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической, Тр. научн. семинаров ЛОМИ, 9, Л., 1968.
6. М. Ф. Пышкина, Асимптотика собственных функций уравнения Гельмгольца, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 15, Л., 1969, стр. 154.
7. Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, ГОНТИ, М., 1941.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 марта 1971 г.

ASYMPTOTICS OF EIGEN VALUES AND FUNCTIONS OF LAPLACIAN ON COMPACT RIEMANN MANIFOLD

Kogan V. R., Krakhnov A. D.

Asymptotic properties of a Laplacian spectrum on a Riemann manifold are studied. New spectral series asymptotic formulae related to stable geodesics are obtained.

УДК 519.24

УСЛОВИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ВАЖНЫХ АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ И ЕГО СВЯЗЬ С ЭФФЕКТИВНЫМИ ОЦЕНКАМИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Б. А. Гришанин

Производится сравнение скоростей сходимости двух важных алгоритмов теории адаптации, один из которых минимизирует эмпирический риск, а другой — байесовский апостериорный риск, рассчитываемый по заданной системе распределений вероятностей, зависящих от набора неизвестных параметров. Устанавливается класс распределений, для которых скорости сходимости указанных алгоритмов совпадают. Исследуется связь между условиями указанного совпадения и условиями существования эффективных оценок неизвестных параметров распределения вероятностей.

1. АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КРИТЕРИЯМ МИНИМУМА ЭМПИРИЧЕСКОГО И БАЙЕСОВСКОГО РИСКОВ

Одна из фундаментальных задач теории адаптации [1-3] состоит в отыскании для заданной небайесовской системы $[c(x, u); P(dx|\vartheta)]$ решения (управления) $u_n^T = (u_1, \dots, u_n)$, возможно наиболее близкого к решению u_ϑ , минимизирующего риск

$$R(u|\vartheta) = \int c(x, u) P(dx|\vartheta). \tag{1.1}$$

Здесь $c(x, u)$ — заданная функция штрафов, $P(dx|\vartheta)$ — распределение вероятностей, заданное с точностью до набора неизвестных параметров $\vartheta^T = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)$. Искомая оценка $u_n = \gamma_n(x_1, \dots, x_n)$ оптимального решения u_ϑ предполагается зависящей от наблюдаемой (обучающей) выборки x_1, \dots, x_n независимых реализаций случайной величины x , имеющей распределение вероятностей $P(dx|\vartheta)$. При этом требуется оптимизировать оценку u_n лишь для больших значений n , когда u_n заведомо близка к u_ϑ , и можно пренебречь членами более высокого порядка, чем $(u_n - u_\vartheta)^2$. Такой асимптотический подход имеет под собой глубокое принципиальное обоснование, поскольку в теории адаптации вследствие наличия неизвестных распределений вероятностей не может существовать универсальных количественных критериев качества, не носящих асимптотического характера.

Суть подхода, позволяющего преодолеть трудности, связанные с незнанием априорного распределения $P(d\vartheta)$, состоит [2] во введении достаточно произвольного распределения $P(d\vartheta)$ и определении оценок u_n минимизацией соответствующего апостериорного риска

$$\hat{R}_n(u) = \int c(x, u) P(dx|x_1, \dots, x_n), \tag{1.2}$$

где в соответствии с теоремой Байеса

$$P(dx|x_1, \dots, x_n) = \int_{\vartheta} P(dx|\vartheta) \frac{P(dx_1|\vartheta) \dots P(dx_n|\vartheta) P(d\vartheta)}{\int_{\vartheta} P(dx_1|\vartheta) \dots P(dx_n|\vartheta) P(d\vartheta)}.$$

При больших значениях n апостериорное распределение $P(dx | x_1, \dots, x_n)$ асимптотически совпадает [4] с распределением $P(dx | \hat{\vartheta}_n)$, где $\hat{\vartheta}_n = \vartheta_n(x_1, \dots, x_n)$ — оценка максимума правдоподобия для параметров ϑ . Поэтому зависимость от априорного распределения выпадает, и риск (1.2) асимптотически переходит в риск

$$\hat{R}_n(u) = R(u | \hat{\vartheta}_n) = \int c(x, u) P(dx | \hat{\vartheta}_n). \quad (1.3)$$

Для получения оптимальной оценки u_n остается минимизировать апостериорный байесовский риск (1.3) по переменным u , что приводит к оптимальному (в указанном асимптотическом смысле) алгоритму $u_n = \hat{\gamma}_n(x_1, \dots, x_n)$, определяемому соотношением

$$R_n(u_n) = \min_u \hat{R}_n(u). \quad (1.4)$$

Этот алгоритм (используя канонические рекуррентные соотношения [5] для оценки максимума правдоподобия) можно представить в виде следующей рекуррентной системы соотношений:

$$u_n = u_{n-1} - \left[\frac{\partial^2 R(u_{n-1} | \vartheta_{n-1})}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1} \frac{\partial^2 R(u_{n-1} | \vartheta_{n-1})}{\partial u^T \partial \vartheta} (\vartheta_n - \vartheta_{n-1}),$$

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} + I_{n-1}^{-1} \frac{\partial \ln P(dx_n | \vartheta_{n-1})}{\partial \vartheta^T},$$

$$I_n = I_{n-1} + \frac{\partial^2 \ln P(dx_n | \vartheta_{n-1})}{\partial \vartheta^T \partial \vartheta},$$

где в соответствии с (1.1)

$$\frac{\partial^2 R(u | \vartheta)}{\partial u^T \partial u} = \int P(dx | \vartheta) \frac{\partial^2 c(x, u)}{\partial u^T \partial u},$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u^T \partial \vartheta} = \int \frac{\partial c(x, u)}{\partial u^T} \frac{\partial P(dx | \vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Другой возможный подход [3] состоит в отыскании оценок u_n минимизацией эмпирического риска

$$\bar{R}_n(u) = \frac{1}{n} [c(x_1, u) + \dots + c(x_n, u)], \quad (1.5)$$

т. е. эмпирический алгоритм $u_n = \bar{\gamma}_n(x_1, \dots, x_n)$ определяется соотношением

$$\bar{R}_n(u_n) = \min_u \bar{R}_n(u). \quad (1.6)$$

При больших n этот алгоритм также может быть представлен в виде канонических рекуррентных соотношений

$$u_n = u_{n-1} - B_n^{-1} \frac{\partial c(x_n, u_{n-1})}{\partial u^T},$$

$$B_n = B_{n-1} + \frac{\partial^2 c(x_n, u_{n-1})}{\partial u^T \partial u}.$$

Этот алгоритм игнорирует информацию, содержащуюся в распределении $P(dx|\vartheta)$, и потому в общем случае является неоптимальным, так как дает худшую по сравнению с оптимальным алгоритмом скорость сходимости.

Следует подчеркнуть, что для производимого в данной статье сравнения качеств рассматриваемых алгоритмов $\hat{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n$ не имеют никакого значения вопросы сходимости рекуррентных форм этих алгоритмов, которые приведены здесь для справки как центральные рекуррентные алгоритмы теории адаптации.

2. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ $\hat{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n$

Отличие оценок u_n , даваемых указанными алгоритмами, от их предельного значения u_ϑ обусловлено отличием соответствующих этим алгоритмам критериев $\hat{R}_n(u)$ и $\bar{R}_n(u)$ от предельного критерия (1.1), соответствующего точному знанию истинных значений параметров ϑ . Оценки u_n удовлетворяют экстремальным уравнениям вида

$$\frac{\partial R_n(u)}{\partial u^T} = 0 \quad (R_n = \hat{R}_n, \bar{R}_n), \quad (2.1)$$

Корреляционная матрица K_n оценок u_n , находимых из (2.1), в первом приближении выражается через корреляционную матрицу Q_n производных $\frac{\partial R_n(u_\vartheta)}{\partial u^T}$ и матрицу вторых производных $\frac{\partial^2 R_n(u_\vartheta)}{\partial u^T \partial u} \approx \frac{\partial^2 R(u_\vartheta|\vartheta)}{\partial u^T \partial u}$ следующим образом:

$$K_n = M(u_n - u_\vartheta)(u_n - u_\vartheta)^T = \left[\frac{\partial^2 R(u_\vartheta|\vartheta)}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1} Q_n \left[\frac{\partial^2 R(u_\vartheta|\vartheta)}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1}, \quad (2.2)$$

где

$$Q_n = M \frac{\partial R_n(u_\vartheta)}{\partial u^T} \frac{\partial R_n(u_\vartheta)}{\partial u}. \quad (2.3)$$

Качество $\Delta R \equiv MR(u_n|\vartheta) - R(u_\vartheta|\vartheta)$ (скорость сходимости) оценок u_n с использованием (2.2) может быть получено разложением $R(u_n|\vartheta)$ в ряд Тейлора по u_n в точке $u_n = u_\vartheta$

$$\Delta R \approx \frac{1}{2} M(u_n - u_\vartheta) \frac{\partial^2 R(u_\vartheta|\vartheta)}{\partial u^T \partial u} (u_n - u_\vartheta) = \frac{1}{2} Sp K_n \frac{\partial^2 R(u_\vartheta|\vartheta)}{\partial u^T \partial u}.$$

С использованием (2.2) отсюда получаем

$$\Delta R = \frac{1}{2} Sp \left[\frac{\partial^2 R(u_\vartheta|\vartheta)}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1} Q_n. \quad (2.4)$$

Таким образом, качество оценок u_n при больших n определяется в соответствии с (2.4) корреляционной матрицей (2.3) производных $\frac{\partial R_n(u_\vartheta)}{\partial u^T}$ от соответствующего критерия качества $R_n(u)$ в предельной

точке $u = u_\vartheta$. Сравнение скоростей сходимости алгоритмов $\hat{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n$ сводится, следовательно, к вычислению корреляционных матриц

$$\hat{Q}_n = M \frac{\partial \hat{R}_n(u_\vartheta)}{\partial u^T} \frac{\partial \hat{R}(u_\vartheta)}{\partial u}, \quad (2.5)$$

$$\bar{Q}_n = M \frac{\partial \bar{R}_n(u_\vartheta)}{\partial u^T} \frac{\partial \bar{R}_n(u_\vartheta)}{\partial u} \quad (2.6)$$

и сравнению штрафов

$$\Delta \hat{R} = \frac{1}{2} Sp \left[\frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1} \hat{Q}_n, \quad (2.7)$$

$$\Delta \bar{R} = \frac{1}{2} Sp \left[\frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1} \bar{Q}_n. \quad (2.8)$$

Корреляционная матрица \bar{Q}_n на основании (1.5), (2.6) имеет вид

$$\bar{Q}_n = \frac{1}{n} \int \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u^T} \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u} P(dx | \vartheta), \quad (2.9)$$

т. е. отличается от корреляционной матрицы производных $\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u^T}$ множителем $1/n$.

Корреляционная матрица \hat{Q}_n вычисляется на основании (1.3), (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_n &= M \frac{\partial R(u_\vartheta | \hat{\vartheta}_n)}{\partial u^T} \frac{\partial R(u_\vartheta | \hat{\vartheta}_n)}{\partial u} = M \left[\frac{\partial R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u^T} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u^T \partial \vartheta} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) + \dots \right] \left[\frac{\partial R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u} + \frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u \partial \vartheta} (\hat{\vartheta}_n - \vartheta) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что в силу оптимальности решения u_ϑ $\frac{\partial R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u} = 0$, получим (с точностью до членов $O(n^{-3/2})$)

$$\begin{aligned} \hat{Q}_n &= \frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u^T \partial \vartheta} [M(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T] \frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial \vartheta^T \partial u} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial u^T \partial \vartheta} I^{-1}(\vartheta) \frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial \vartheta^T \partial u}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$I(\vartheta) = \int \frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \vartheta^T} \frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \vartheta} P(dx | \vartheta) \quad (2.11)$$

— информационная матрица Фишера, определяющая при $n \rightarrow \infty$ матрицу корреляций оценки максимума правдоподобия $\hat{\vartheta}_n$ [6].

Теперь заданы все основные соотношения, определяющие скорости сходимости (2.7), (2.8) алгоритмов (1.4), (1.6). Однако, чтобы доказать прямым сравнением соотношение $\Delta \hat{R} \leq \Delta \bar{R}$, ожидаемое из общих соображений, целесообразно сделать следующие замены переменных.

Заменой $\tilde{u} = U(\vartheta)u$, где $U(\vartheta)$ — ортогональное преобразование, зависящее от ϑ , следует добиться диагональности матрицы вторых производных

$$\frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial \tilde{u}^T \partial \tilde{u}} = \|\rho_i \delta_{ij}\|, \quad (2.12)$$

Преобразованием $\tilde{\vartheta} = f(\vartheta)$ можно превратить невырожденную (по предположению) матрицу $I(\vartheta)$ в единичную матрицу

$$\left\| \int \frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} \frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_l} P(dx | \vartheta) \right\| = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tilde{\vartheta}^T} I(\vartheta) \frac{\partial \vartheta^T}{\partial \tilde{\vartheta}^T} = \|\delta_{kl}\|. \quad (2.13)$$

С учетом указанных преобразований величины $\hat{\Delta R}$, $\bar{\Delta R}$, определяемые соответственно соотношениями (2.7), (2.10) и (2.8), (2.9), принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta \bar{R} &= \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \int \left[\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \right]^2 P(dx | \vartheta), \\ \Delta \hat{R} &= \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\frac{\partial^2 R(u_\vartheta | \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i \partial \tilde{\vartheta}_k} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Последнее выражение с учетом (1.1) можно записать подробнее

$$\begin{aligned} \Delta \hat{R} &= \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\int \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \frac{\partial P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\int \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} P(dx | \vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Выражение, стоящее в (2.15) в последнем выражении под знаком интеграла, есть не что иное как k -ые проекции с весом $P(dx | \vartheta)$ векторов $\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i}$ (компоненты которых нумеруются переменной x) на ортонормированную (вследствие (2.13)) с тем же весом систему векторов $\frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k}$. Поэтому при любых i

$$\int \left[\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \right]^2 P(dx | \vartheta) \geq \sum_k \left[\int \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \frac{\partial \ln P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} P(dx | \vartheta) \right]^2, \quad (2.16)$$

так как квадрат модуля вектора $\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i}$ не меньше суммы квадратов его проекций на любую ортонормированную систему векторов. Сравнивая (2.14) и (2.15) с учетом (2.16), получаем доказываемое соотношение $\Delta \bar{R} \geq \Delta \hat{R}$.

Очевидно, что равенство в (2.16) достигается лишь в том случае, если вектор $\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\frac{\partial \ln P(dx|\vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k}$. Это будет в равной степени относиться и к исходным

векторам $\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u_i} = \frac{\partial c(\cdot)}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u_i}$ и $\frac{\partial \ln P(dx|\vartheta)}{\partial \vartheta_k} = \frac{\partial \ln P(\cdot)}{\partial \tilde{\vartheta}} \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial \vartheta_k}$.

Поэтому условие совпадения скоростей сходимости алгоритмов $\Delta \bar{R} = \Delta \bar{R}^\wedge$ (с учетом положительности собственных чисел ρ_i), записанное через исходные переменные u, ϑ , будет иметь вид

$$\frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^s A_{ik}(\vartheta) \frac{\partial \ln P(dx|\vartheta)}{\partial \vartheta_k}; \quad i = 1, \dots, r; \quad (2.17)$$

где $A_{ik}(\vartheta)$ — произвольные функции ϑ .

3. КАНОНИЧЕСКИЕ НЕБАЙЕСОВСКИЕ СИСТЕМЫ И СВЯЗЬ УСЛОВИЙ КАНОНИЧНОСТИ С УСЛОВИЯМИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ϑ

Небайесовскую систему $\{c(x, u); P(dx|\vartheta)\}$ будем называть канонической, если:

1) каждая из систем векторов $h_i(\vartheta) = \left\{ \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u_i} \right\}$ ($i = 1, \dots, r$) (u_ϑ — точка минимума риска (1.1)) и

$$g_k(\vartheta) = \left\{ \frac{\partial \ln P(dx|\vartheta)}{\partial \vartheta_k} \right\} \quad k = 1, \dots, s,$$

при любых ϑ линейно-независима.

2) каждый из векторов $h_i(\vartheta)$ при любых ϑ принадлежит линейному подпространству $E_s(\vartheta)$, натянутому на систему векторов $g_k(\vartheta)$.

Условие 2) можно записать в виде

$$E_r(\vartheta) \subset E_s(\vartheta), \quad (3.1)$$

где $E_r(\vartheta)$ — линейное подпространство, натянутое на систему векторов $h_i(\vartheta)$. С учетом условия 1) (3.1) приводит к соотношению

$$r \leq s. \quad (3.2)$$

Для определенной подобным образом канонической небайесовской системы в соответствии с результатами п. 2 скорости сходимости алгоритмов (1.4), (1.6) совпадают.

Отметим, что множество X значений наблюдаемой переменной x до сих пор нигде не конкретизировалось. Независимо от его структуры для любой небайесовской системы $\{c(x, u); P(dx|\vartheta)\}$ все векторы $h_i(\vartheta)$, $g_k(\vartheta)$ принадлежат, очевидно, линейному подпространству $E^f(\vartheta)$ векторов $f = \{f(x)\}$, удовлетворяющих условию

$$\int f(x) P(dx|\vartheta) = 0. \quad (3.3)$$

Действительно, в силу оптимальности значения $u = u_\vartheta$

$$\int h_i(x, \vartheta) P(dx|\vartheta) \equiv \int \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial u_i} P(dx|\vartheta) = 0,$$

а с учетом условия нормировки $\int P(dx|\vartheta) = 1$ имеем

$$\int g_k(x, \vartheta) P(dx|\vartheta) = \int \frac{\partial \ln P(dx|\vartheta)}{\partial \vartheta_k} P(dx|\vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \int P(dx|\vartheta) = 0.$$

Если множество X состоит из конечного числа q элементов x^1, \dots, x^q , то подпространство $E^f(\vartheta)$ является $(q-1)$ -мерной гиперплоскостью $E_{q-1}(\vartheta)$. В этом случае

$$E_r(\vartheta) \subset E_{q-1}(\vartheta), \quad E_s(\vartheta) \subset E_{q-1}(\vartheta). \quad (3.4)$$

С учетом условия 1) каноничности из (3.4) следуют соотношения

$$r \leq q-1, \quad s \leq q-1. \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что если $s = q-1$, то из соотношений (3.4) немедленно вытекает условие каноничности (3.1). Следовательно, когда число s неизвестных параметров распределения $P(dx|\vartheta)$ на единицу меньше числа значений x , то алгоритмы, построенные на основании минимизации байесовского риска (1.2) и эмпирического риска (1.5) асимптотически эквивалентны. В этом нет ничего неожиданного. Действительно, равенство $s = q-1$ означает, что число неизвестных параметров равно числу независимых вероятностей $P(x^j)$ распределения $P(dx|\vartheta)$, и их можно отождествить. Нахождение оценки максимума правдоподобия для параметров сводится к нахождению оценки максимума правдоподобия \hat{P} для всего распределения $P = \{P(dx)\} = \{P(x^1), \dots, P(x^q)\}$. Такой оценкой при наблюдении последовательности независимых реализаций x , случайной величины x , как известно [7], является эмпирическое распределение

$$\hat{P} = \left\{ \frac{n(x^1)}{n}, \dots, \frac{n(x^q)}{n} \right\}, \quad (3.6)$$

где $n(x^j)$ — число реализаций x_i , совпадающих со значениями $x = x^j$. Усреднение функции штрафов по формуле апостериорного байесовского риска (1.3) с распределением вероятностей $P(dx|\hat{\vartheta}_n) = \hat{P}$ как раз и дает эмпирический риск (1.5). Таким образом, в этом частном случае канонической небайесовской системы критерии (1.3), (1.5) совпадают во всем диапазоне значений переменной n , и притом уже при конечных значениях n . В общем случае совпадение этих критериев для канонической небайесовской системы имеет асимптотический и локальный (в первом порядке по $u - u_\vartheta$) характер.

Если для какой-либо небайесовской системы число компонент искомого управления превосходит число оцениваемых параметров ϑ (а естественное требование 1) в условиях каноничности выполнено), то соотношения (3.1), (3.2) для нее заведомо не выполняются и такая небайесовская система не может быть канонической. Для такой системы алгоритм (1.6) заведомо не является оптимальным, и следует пользоваться оптимальным алгоритмом (1.4).

Условие каноничности небайесовской системы при $c(x, u) = [u - \varphi(x)]^T g [u - \varphi(x)]$ ($u^T = (u_1, \dots, u_s)$, g — невырожденная матрица) оказывается эквивалентным условию эффективности оценок $\varphi(x)$ параметров $m(\vartheta) = \int \varphi(x) P(dx|\vartheta) = u_\vartheta$, если понимать под эффектив-

ностью достижение нижней границы в многомерном варианте неравенства Крамера — Рао [6]

$$A = K_{\varphi\varphi} - \frac{\partial m(\vartheta)}{\partial \vartheta} I^{-1}(\vartheta) \frac{\partial m^T(\vartheta)}{\partial \vartheta^T} \geq 0, \quad (3.7)$$

где $K_{\varphi\varphi} = M[\varphi(x) - m][\varphi(x) - m]^T$ — корреляционная матрица оценок $\varphi(x)$, $I(\vartheta)$ — информационная матрица Фишера (2.11), а выражение $A \geq 0$ понимается в смысле неотрицательной определенности матрицы A .

Действительно, условие (2.17) для данного случая дает соотношения

$$\varphi_i(x) - m_i(\vartheta) = \sum_{k=1}^s \tilde{A}_{ik}(\vartheta) \frac{\partial \ln P(dx|\vartheta)}{\partial \vartheta_k} \quad (3.8)$$

$$(i = 1, \dots, s; \quad \tilde{A}(\vartheta) = g^{-1} A(\vartheta)),$$

что одновременно является условием эффективности оценок $\varphi(x)$.

Между задачей оценки параметров $m(\vartheta)$ и задачей оптимизации штрафов $R_n(u)$ имеет место следующее соответствие. При оценке параметров требуется найти случайную функцию $\varphi(x)$, по возможности, наиболее близкую (в среднем квадратичном) к неслучайному параметру $m(\vartheta)$. При оптимизации штрафов $R_n(u)$ требуется найти оценку u_n для неслучайного решения $u_\vartheta = m(\vartheta)$, которое в среднем наиболее близко к случайной функции $\varphi(x)$. Критерий близости в обоих случаях является функцией разности: в первом случае разности

$$\varphi(x) - m(\vartheta),$$

во втором —

$$u_n - \varphi(x) = [u_n - m(\vartheta)] + [m(\vartheta) - \varphi(x)]. \quad (3.9)$$

В соответствии с полученными результатами совпадение качества рассмотренных алгоритмов, которое определяется свойствами первой разности в (3.9), влечет одновременно эффективность оценки $\varphi(x)$, т. е. в соответствии с (3.7) «минимальность» второй разности в (3.9).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. З. Цыпкин, Адаптация и обучение в автоматических системах, изд. Наука, М., 1968.
- 2 Р. Л. Стратонович, Автоматика и телемеханика, № 1, 96 (1968).
- 3 Р. Л. Стратонович, Автоматика и телемеханика, № 5, 97 (1970).
- 4 Дж. Нейман, Математика, 8, № 2, 113 (1964)
- 5 Р. Л. Стратонович, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6 (1969).
- 6 С. Рао, Линейные статистические методы и их применения, изд. Наука, М., 1968.
- 7 Г. Роббинс, Математика, 8, № 2, 133 (1964).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
23 ноября 1970 г.

EQUIVALENCE CONDITION FOR TWO IMPORTANT ADAPTATION ALGORITHMS AND ITS RELATION TO EFFICIENT ESTIMATES OF PROBABILITY DISTRIBUTION PARAMETERS

Grishanin B. A.

A convergence velocity comparison for two algorithms important in the adaptation theory is carried out, one of the algorithms minimizing the empiric risk, the other minimizing the Bayes a posteriori risk computed with a given system of probability distributions depending on a set of unknown parameters. The distribution class of equal convergence velocities for these algorithms is found. The relation between the conditions for the above equality and the existence conditions for efficient estimates of unknown parameters of probability distribution is investigated.

УДК 519.24

УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ, ОСНОВАННЫХ НА ЭМПИРИЧЕСКОМ БАЙЕСОВСКОМ ПОДХОДЕ К СТАТИСТИКЕ

Б. А. Гришанин

Рассматриваются два эмпирических (основанных на эмпирическом байесовском подходе) алгоритма адаптации для информационных (т. е. с неполным наблюдением) небайесовских систем. Рассчитываются соответствующие им скорости сходимости, которые сравниваются со скоростью сходимости оптимального алгоритма, основанного на оценке максимума правдоподобия. Устанавливаются условия совпадения указанных скоростей, при выполнении которых рассматриваемые эмпирические алгоритмы являются оптимальными. Для одного из рассмотренных алгоритмов выполнение условия оптимальности оказывается возможным в том (и только в том) случае, если распределение вероятностей наблюдаемой случайной величины допускает существование эффективных оценок неизвестных параметров.

В данной работе продолжается начатое в [1] исследование условий совпадения качества алгоритмов адаптации, основанных на эмпирическом байесовском подходе [2] и на оптимальных методах [3] теории адаптации [4]. В [1] рассматривался наиболее простой случай неинформационных небайесовских систем $[c(x, u); P(dx|\vartheta)]$ ($c(x, u)$ — заданная функция штрафов, $P(dx|\vartheta)$ — заданное семейство распределений, зависящих от набора неизвестных параметров — вектора $\vartheta^T = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_s)$). В [1] с оптимальным сравнивался эмпирический алгоритм γ_n , основанный на минимизации эмпирического байесовского риска

$$\bar{R}_n(u) = \frac{1}{n} [c(x_1, u) + \dots + c(x_n, u)] = \int c(x, u) \bar{P}(dx), \quad (1)$$

где

$$\bar{P}_n(dx) = \frac{1}{n} [\delta(dx, x_1) + \dots + \delta(dx, x_n)], \quad (2)$$

$$\left(\delta(dx, z) = \begin{cases} 1, & z \in dx \\ 0, & z \notin dx \end{cases} \right) \quad (3)$$

— эмпирическое распределение, используемое вместо не полностью известного распределения $P(dx|\vartheta)$.

В данной работе рассматривается несколько более сложный случай информационных небайесовских систем $\{c(x, u); P(dy|x); P(dx|\vartheta)\}$, для которых требуется построить алгоритм адаптации $u_n = \gamma_n(y_1, \dots, y_n; y)$, зависящий помимо наблюдений y_1, \dots, y_n еще и от (будущей) информации y . Качество алгоритма γ_n при заданных параметрах ϑ определяется средней величиной «будущих» штрафов

$$R_n(\vartheta) = M \left[\int \int c(x, \gamma_n(y_1, \dots, y_n; y)) P(dy|x) P(dx|\vartheta) | \vartheta \right], \quad (4)$$

где символ M , как и везде в дальнейшем, означает усреднение по выборкам y_1, \dots, y_n , которое производится при фиксированных параметрах

рах ϑ , не меняющихся от наблюдения к наблюдению. Реализации y_1, \dots, y_n будем предполагать независимыми и имеющими одинаковое распределение вероятностей

$$P(dy|\vartheta) = \int_x P(dy|x)P(dx|\vartheta). \quad (5)$$

В статье рассчитывается асимптотический вид штрафов (4) при $n \rightarrow \infty$ для произвольных состоятельных (т. е. сходящихся при $n \rightarrow \infty$ к алгоритму γ_ϑ , оптимальному в случае заданных ϑ) алгоритмов γ_n и соответствующие им скорости сходимости (определяемые в п. 2). Алгоритм, имеющий скорость сходимости такую же, что и оптимальный алгоритм $\hat{\gamma}_n$ (см. п. 1), называется эффективным. Здесь выясняются условия эффективности двух алгоритмов $\bar{\gamma}_n, \tilde{\gamma}_n$, основанных на эмпирическом байесовском подходе.

1. АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ОПТИМАЛЬНОМ И ЭМПИРИЧЕСКОМ БАЙЕСОВСКИХ ПОДХОДАХ

Оптимальный байесовский подход [3], состоящий во введении произвольного распределения $P(d\vartheta)$ и минимизации по γ_n соответствующего байесовского риска $R(\gamma_n) = \int R_n(\vartheta)P(d\vartheta)$, как легко убедиться (с учетом (4) и соображений, аналогичных изложенным в [1]), приводит к алгоритму $u_n = \hat{\gamma}_n(y_1, \dots, y_n; y)$, основанному на оценке максимума правдоподобия (так же, как и в [1]) $\hat{\vartheta}_n = \Theta_n(y_1, \dots, y_n)$. Этот алгоритм заключается в минимизации

$$r(u_n | y, \hat{\vartheta}_n) = \min_u r(u | y, \vartheta_n) \quad (1.1)$$

условного риска

$$r(u | y, \vartheta) = \int c(x, u) P(dx | y, \vartheta), \quad (1.2)$$

$$\left(P(dx | y, \vartheta) = \frac{P(dy | x) P(dx | \vartheta)}{P(dy | \vartheta)} \right) \quad (1.3)$$

при $\vartheta = \hat{\vartheta}_n$.

Взяв за основу эмпирический байесовский подход [2], можно попытаться построить один из рассматриваемых здесь алгоритмов $u_n = \hat{\gamma}_n(y_1, \dots, y_n; y)$ следующим образом (другой, более универсальный алгоритм рассмотрен в п. 4). На основании наблюдений y_1, \dots, y_n строим аналогично (3) эмпирическое распределение

$$\bar{P}_n(dy) = \frac{1}{n} [\delta(dy, y_1) + \dots + \delta(dy, y_n)], \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в левую часть соотношения (5) вместо неизвестного распределения $P(dy|\vartheta)$, можно рассматривать это соотношение как уравнение

$$\bar{P}_n(dy) = \int_x P(dy|x)P(dx) \quad (1.5)$$

для определения неизвестного распределения $P(dx)$. Для того, чтобы иметь возможность записать решение этого уравнения, придется ограничиться случаем дискретных переменных x, y . В целях единообразия

обозначений будем и в формулах, относящихся к данному варианту эмпирического подхода, применять для обозначения суммирования интегрирование по Лебегу (при этом обозначения dx , dy эквивалентны, соответственно x , y). Если линейный оператор $P(dy|x)$ в (1.5) имеет обратный $P^{-1}(dx|y)$, то в качестве эмпирической оценки для $P(dx)$ можно взять эмпирическое распределение

$$\bar{P}_n(dx) = \int_y P^{-1}(dx|y) \bar{P}_n(dy). \quad (1.6)$$

В общем случае уравнение (1.5) имеет решение не при любых распределениях $\bar{P}_n(dy)$. В подобной ситуации следует произвести подходящую редукцию $\tilde{y} = t(y)$ переменной y . В результате этой редукции получим из $P(dy|x)$, $\bar{P}_n(dy)$ соответственно распределения $P(\tilde{d}y|x)$, $\bar{P}_n(\tilde{d}y)$, для которых уравнение

$$\bar{P}_n(\tilde{d}y) = \int_x P(\tilde{d}y|x) P(dx) \quad (1.7)$$

будет иметь однозначное решение при любых $\bar{P}_n(dy)$. (Смысл такой процедуры состоит в уменьшении числа уравнений (1.5). Если добиться однозначности решения невозможно (пространство переменной x слишком богато), то эмпирический подход не может гарантировать адаптации к любому распределению $P(dx)$; этот случай здесь не рассматривается). Для решения уравнения (1.7) будем иметь формулу

$$\bar{P}_n(dx) = \int_{\tilde{y}} P^{-1}(dx|\tilde{y}) \bar{P}_n(\tilde{d}y), \quad (1.8)$$

заменяющую (1.7) в общем случае. При этом эмпирическое распределение $\bar{P}_n(\tilde{d}y)$ определяется той же формулой (1.4), что и $P_n(dy)$.

С помощью эмпирического распределения (1.8) алгоритм адаптации $u_n = \gamma_n(y_1, \dots, y_n; y)$ получается минимизацией

$$\bar{r}_n(u_n|y) = \min_u \bar{r}_n(u|y) \quad (1.9)$$

эмпирического условного риска

$$r_n(u|y) = \int c(x, u) \bar{P}_n(dx|y), \quad (1.10)$$

где

$$\bar{P}_n(dx|y) = \frac{P(dy|x) \bar{P}_n(dx)}{\int_x P(dy|x) \bar{P}_n(dx)}. \quad (1.11)$$

Риск (1.10) заменяет эмпирический риск (2) в случае информационных небайесовских систем.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ АДАПТАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ $\hat{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n$

Сначала выразим качество алгоритма γ_n , определяемое выражением (4), через условный риск (1.2)

$$R_n(\vartheta) = \int P(dy|\vartheta) M[r(\gamma_n(y_1, \dots, y_n; y)|y, \vartheta)|\vartheta]. \quad (2.1)$$

Описанные в п. 1 алгоритмы $\hat{\gamma}_n, \bar{\gamma}_n$ при $n \rightarrow \infty$ стремятся к алгоритму $u_\vartheta = \gamma_\vartheta(y)$, который получается минимизацией

$$r(u_\vartheta | y, \vartheta) = \min_u r(u | y, \vartheta), \quad (2.2)$$

т. е. соответствует случаю точно известных параметров ϑ . С помощью этого алгоритма удобно определить качество алгоритма $u_n = \gamma_n(\cdot)$ как величину

$$\Delta R_n = \int \Delta r_n(y, \vartheta) P(dy | \vartheta), \quad (2.3)$$

где

$$\Delta r_n(y, \vartheta) = M[r(u_n | y, \vartheta) - r(u_\vartheta | y, \vartheta) | \vartheta]. \quad (2.4)$$

Выражение (2.3) представляет собой разность между средним риском, соответствующим алгоритму γ_n , и таким же риском, соответствующим алгоритму γ_ϑ . Под скоростью сходимости алгоритма γ_n обычно понимается асимптотический вид качества (2.3) при $n \rightarrow \infty$, а асимптотическое поведение условного качества (2.4) дает условную скорость сходимости, соответствующую фиксированному y .

Оба изучаемых алгоритма $u_n = \hat{\gamma}_n(y_1, \dots, y_n; y)$, $u_n = \bar{\gamma}_n(y_1, \dots, y_n; y)$ удовлетворяют условию $\frac{\partial r_n(u | y)}{\partial u} = 0$, где для алгоритма $\hat{\gamma}_n$

$$r_n(u | y) = \hat{r}_n(u | y) \equiv r(u | y, \hat{\vartheta}_n) \quad (2.5)$$

(см. (1.1), (1.2), а для $\bar{\gamma}_n$ —

$$r_n(u | y) = \bar{r}_n(u | y) \quad (2.6)$$

(см. (1.9), (1.10)). В обоих случаях при $n \rightarrow \infty$ $r_n \rightarrow r(u | y, \vartheta)$. Для подобных алгоритмов справедлива следующая асимптотическая формула для качества (2.4), вывод которой приведен в [1] (в несколько других обозначениях, поскольку там рассматривались неинформационные системы)

$$\Delta r_n(y, \vartheta) = \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial u^T \partial u} \right]^{-1} Q_n, \quad (2.7)$$

где

$$Q_n = M \left[\frac{\partial r_n(u_\vartheta | y)}{\partial u^T} \frac{\partial r_n(u_\vartheta | y)}{\partial u} \Big| \vartheta \right]. \quad (2.8)$$

В выражении (2.7) целесообразно перейти с помощью унитарного преобразования $\tilde{u} = U(y, \vartheta)u$ к переменным \tilde{u} , в которых матрица $\frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial u^T \partial u}$ диагональна, т. е.

$$\frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial u^T \partial u} = \|\rho_i(y, \vartheta)\delta_{ij}\|.$$

Тогда (2.7) с использованием (2.8) дает

$$\Delta r_n(y, \vartheta) = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i(y, \vartheta)^{-1} M \left\{ \left[\frac{\partial r_n(u_\vartheta | y)}{\partial \tilde{u}_i} \right]^2 \Big| \vartheta \right\}. \quad (2.9)$$

Для получения из (2.9) явного выражения для условных скоростей сходимости $\hat{\Delta} r_n$, $\bar{\Delta} r_n$ рассматриваемых алгоритмов $\hat{\gamma}_n$, $\bar{\gamma}_n$ остается произвести расчеты, соответствующие подстановкам (2.5), (2.6).

Для алгоритма $\hat{\gamma}_n$, учитывая второе равенство в (2.5), и пользуясь асимптотическими выражениями (2.12) для матрицы корреляций \hat{K}_n оценки максимума правдоподобия, точно так же, как и в [1], получаем из (2.9)

$$\Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i \partial \vartheta} I(\vartheta)^{-1} \frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial \vartheta^T \partial \tilde{u}_i}, \quad (2.10)$$

где

$$I(\vartheta) = - \int \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \vartheta^T} \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \vartheta} P(dy | \vartheta) \quad (2.11)$$

— информационная матрица Фишера, которая связана с матрицей \hat{K}_n асимптотическим соотношением

$$\hat{K}_n (\equiv M(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)^T) = \frac{1}{n} I(\vartheta)^{-1}. \quad (2.12)$$

В переменных $\tilde{\vartheta} = f(\vartheta)$, в которых матрица (2.11) приводится к единичной,

$$\Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \sum_k \rho_i^{-1} \left[\frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i \partial \tilde{\vartheta}_k} \right]^2. \quad (2.13)$$

После выполнения дифференцирования в (2.13) с учетом выражения (1.2) для условного диска $r(u | y, \vartheta)$ и условия экстремальности $\frac{\partial r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}} = 0$ алгоритма $u_\vartheta = \gamma_\vartheta(y)$ получим

$$\Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n P(dy | \vartheta)^2} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\int_x \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} P(dy | x) \frac{\partial P(dx | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} \right]^2. \quad (2.14)$$

Перейдем к вычислению $\Delta \bar{r}_n(y, \vartheta)$. С учетом (1.10) средний квадрат производной в (2.9) представим в виде

$$\begin{aligned} & M \left\{ \left[\frac{\partial \bar{r}_n(u_\vartheta | y)}{\partial \tilde{u}_i} \right]^2 \middle| \vartheta \right\} = \\ & = M \left[\int \int \frac{\partial c(x_1, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \frac{\partial c(x_2, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \bar{P}_n(dx_1 | y) \bar{P}_n(dx_2 | y) \middle| \vartheta \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Распределение $\bar{P}_n(dx | y)$, входящее в (2.15), имеет согласно (1.11) вид

$$\bar{P}_n(dx | y) = \frac{P(dy | x)}{\bar{P}_n(dy)} \bar{P}_n(dx), \quad (2.16)$$

где $\bar{P}_n(dy) = \int_x P(dy | x) \bar{P}_n(dx)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к распределению

$P(dy|\vartheta)$, поскольку в рассматриваемых предположениях $\bar{P}_n(dx) \rightarrow P(dx|\vartheta)$. С использованием (2.16) записываем (2.15) в виде

$$M \left\{ \left[\frac{\partial \bar{r}_n(\cdot)}{\partial \tilde{u}_i} \right]^2 \middle| \vartheta \right\} = \quad (2.17)$$

$$= M \left[\frac{1}{\tilde{P}_n(dy)^2} \int \int \frac{\partial c(\cdot)}{\partial \tilde{u}_i} \frac{\partial c(\cdot)}{\partial \tilde{u}_i} P(dy|x_1) P(dy|x_2) \bar{P}_n(dx_1) \bar{P}_n(dx_2) | \vartheta \right].$$

Здесь при выполнении усреднения можно пренебречь отличием $\tilde{P}_n(dy)$ от $P(dy|\vartheta)$, поскольку это влечет погрешность более высокого порядка малости по n , чем порядок (равный n^{-1}) выражения, стоящего под знаком двойного интегрирования. В результате вычисление (2.17) сводится к усреднению

$$M[\bar{P}_n(dx_1) \bar{P}_n(dx_2) | \vartheta] = \quad (2.18)$$

$$= \int \int_{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2} P^{-1}(dx_1|\tilde{y}_1) P^{-1}(dx_2|\tilde{y}_2) M[\bar{P}_n(d\tilde{y}_1) \bar{P}_n(d\tilde{y}_2) | \vartheta],$$

где использовано (1.8).

Выполняя с учетом (1.4), (где в соответствии с указанием в формуле (1.8) следует положить $\tilde{d}y = dy$) усреднение

$$M[\bar{P}_n(d\tilde{y}_1) \bar{P}_n(d\tilde{y}_2) | \vartheta] = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_i M[\delta(\tilde{d}y_1, \tilde{y}_i) \delta(\tilde{d}y_2, \tilde{y}_j) | \vartheta] =$$

$$= \frac{1}{n} P(d\tilde{y}_1 \cap d\tilde{y}_2 | \vartheta)$$

(символ \cap означает пересечение множеств), имеем из (2.18) после интегрирования по одной из переменных \tilde{y}_1, \tilde{y}_2

$$M[\bar{P}_n(dx_1) \bar{P}_n(dx_2) | \vartheta] = \frac{1}{n} \int_{\tilde{y}} P^{-1}(dx_1|\tilde{y}) P^{-1}(dx_2|\tilde{y}) P(d\tilde{y}|\vartheta).$$

На основании этого результата из (2.17) получаем (с учетом возможности замены $\tilde{P}_n(dy) \rightarrow P(dy|\vartheta)$) выражение

$$M \left\{ \left[\frac{\partial \bar{r}_n(u_\vartheta|y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \right]^2 \middle| \vartheta \right\} = \frac{1}{n P(dy|\vartheta)^2} \int_{\tilde{y}} P(d\tilde{y}|\vartheta) \times$$

$$\times \left[\int_x \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} P(dy|x) P^{-1}(dx|\tilde{y}) \right]^2,$$

где переменная \tilde{y} рассматривается как независимая от y . После подстановки этого выражения в (2.11) получаем искомую условную скорость сходимости

$$\Delta \bar{r}_n = \frac{1}{2n P(dy|\vartheta)^2} \sum_i \rho_i^{-1} \int_{\tilde{y}} P(d\tilde{y}|\vartheta) \times \quad (2.19)$$

$$\times \left[\int_x \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} P(dy|x) P^{-1}(dx|\tilde{y}) \right]^2$$

алгоритма $\bar{\gamma}_n$, которую предстоит сравнить со скоростью сходимости оптимального алгоритма $\hat{\gamma}_n$.

3. УСЛОВИЯ СОВПАДЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ

$\bar{\gamma}_n$ и $\hat{\gamma}_n$

Для упрощения записи формул (2.14), (2.19) введем обозначение

$$f_i(x, y) = \frac{\partial c(x, u_\vartheta)}{\partial \tilde{u}_i} \frac{P(dy|x)}{P(dy|\vartheta)}. \quad (3.1)$$

Тогда получим

$$\Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\int f_i(x, y) \frac{\partial P(dx|\vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} \right]^2, \quad (3.2)$$

$$\Delta \bar{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \int \left[\int f_i(x, y) P^{-1}(dx|\tilde{y}) \right]^2 P(d\tilde{y}|\vartheta). \quad (3.3)$$

Для распределения $P(dx|\vartheta)$ в силу соотношения (1.8), в котором следует положить $\bar{P}_n(d\tilde{y}) = P(d\tilde{y}|\vartheta)$, имеем

$$P(dx|\vartheta) = \int_{\tilde{y}} P^{-1}(dx|\tilde{y}) P(d\tilde{y}|\vartheta),$$

Это выражение позволяет представить (3.2) в виде

$$\Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left\{ \int \left[\int f_i(x, y) P^{-1}(dx|\tilde{y}) \right] \frac{\partial \ln P(d\tilde{y}|\vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} P(d\tilde{y}|\vartheta) \right\}^2. \quad (3.4)$$

Введем еще одно обозначение для функций

$$F_i(\tilde{y}) = \int f_i(x, y) P^{-1}(dx|\tilde{y}), \quad (3.5)$$

зависящих еще от y, ϑ как от параметров, которые не выписаны для краткости. С помощью (3.5) из формул (3.3), (3.4) следует

$$\Delta \bar{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \int F_i(\tilde{y})^2 P(d\tilde{y}|\vartheta); \quad (3.6)$$

$$\Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\int F_i(\tilde{y}) \frac{\partial \ln P(d\tilde{y}|\vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} P(d\tilde{y}|\vartheta) \right]^2. \quad (3.7)$$

Нетрудно убедиться, что (3.7) можно представить следующим образом:

$$\Delta \tilde{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k \left[\int \tilde{F}_i(y) \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} P(dy | \vartheta) \right]^2, \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{F}_i(y) = F_i(\tilde{y}) = F_i(t(y)) \quad (3.9)$$

(для проверки (3.8) следует произвести дифференцирование по $\tilde{\vartheta}_k$ и проинтегрировать по области $t(y) \in \tilde{dy}$). С использованием обозначения (3.9)

$$\Delta \bar{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \int \tilde{F}_i(y)^2 P(dy | \vartheta). \quad (3.10)$$

Интеграл, стоящий в (3.10), есть не что иное, как квадрат модуля вектор-функции $\tilde{F}_i(y)$ с весом $P(dy | \vartheta)$. Выражение же в квадратных скобках в (3.8) есть квадрат проекции с весом $P(dy | \vartheta)$ вектора $\tilde{F}_i(y)$ на k -й вектор ортонормированной (вследствие единичности матрицы (2.12) в переменных $\tilde{\vartheta}$) системы векторов $\frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k}$ ($k = 1, \dots, s$). Так

как сумма квадратов проекций вектора на ортонормированную систему векторов не больше квадрата его модуля, то

$$\sum_k \left[\int \tilde{F}_i(y) \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} P(dy | \vartheta) \right]^2 \leq \int \tilde{F}_i(y)^2 P(dy | \vartheta), \quad (3.11)$$

и

$$\hat{\Delta} r_n \leq \bar{\Delta} r_n \quad (3.12)$$

(последнее соотношение можно было доказать и минуя вычисления).

Равенство в (3.11) будет достигнуто, если вектор $\tilde{F}_i(y)$ разлагается на линейную комбинацию векторов $\frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k}$

$$\tilde{F}_i(y) = \sum_{k=1}^s A_{ik}(\vartheta) \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k}. \quad (3.13)$$

Для обеспечения равенства условных скоростей сходимости в (3.12) необходимо и достаточно выполнения соотношения (3.13) при всех $i = 1, \dots, r$.

Возвращаясь по формулам (3.1), (3.5), (3.9) к исходным данным, получим, что для совпадения

$$\hat{\Delta} r_n(y', \vartheta) = \bar{\Delta} r_n(y', \vartheta) \quad (3.14)$$

рассматриваемых условных скоростей сходимости необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int \frac{\partial c(x, \gamma_\vartheta(y'))}{\partial u_i} \frac{P(dy' | x)}{P(dy' | \tilde{y})} P^{-1}(dx | \tilde{y}) = \sum_{k=1}^s B_{ik}(y', \vartheta) \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \tilde{\vartheta}_k} \quad (3.15)$$

($i = 1, \dots, r$),

где $B_{ik}(y', \vartheta)$ — набор некоторых функций, не зависящих от $y, \tilde{y} = t(y)$. Поскольку левая часть в (3.15) не зависит от y при фиксированном $\tilde{y} = t(y)$, то выполнения соотношений (3.15) (может быть, за редкими исключениями) следует ожидать, лишь если все функции $\frac{\partial \ln P(dy|\vartheta)}{\partial \vartheta_k}$ в правой части не зависят от y . Это означает, что распределение $P(dy|\vartheta)$ имеет вид

$$P(dy|\vartheta) = \frac{\mu(dy)}{\mu(\tilde{d}y)} P(\tilde{d}y|\vartheta), \quad (3.16)$$

где $\mu(dy)$ — некоторое распределение вероятностей, не зависящее от ϑ , а $\mu(\tilde{d}y)$ — распределение, полученное из $\mu(dy)$ редукцией $\tilde{y} = t(y)$. Это выражение можно принять в качестве одного из условий совпадения (3.14). Другое же условие, в соответствии с (3.15), имеет вид

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial c(x, \gamma_\vartheta(y))}{\partial u_i} \frac{P(dy|x)}{P(dy|\vartheta)} P^{-1}(dx|\tilde{y}) = \\ = \sum_{k=1}^s B_{ik}(y, \vartheta) \frac{\partial \ln P(\tilde{d}y|\vartheta)}{\partial \vartheta_k}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где переменные y, \tilde{y} рассматриваются как независимые.

Для совпадения скоростей сходимости $\Delta \hat{R}_n = \int \Delta \hat{r}_n(y, \vartheta) P(dy|\vartheta)$ и $\Delta \bar{R}_n = \int \Delta \bar{r}_n(y, \vartheta) P(dy|\vartheta)$, очевидно, необходимо и достаточно совпадения $\Delta \bar{r}_n, \Delta \hat{r}_n$ при всех y (конечно, за исключением множества меры нуль). Следовательно, условия (3.17) должны выполняться при всех y , что представляется возможным лишь в исключительных случаях (или, когда число неизвестных параметров равно числу значений переменной x (см. п. 3 работы [1]). Можно поэтому считать, что практически всегда рассмотренный эмпирический алгоритм хуже оптимального.

4. ЕЩЕ ОДИН ЭМПИРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ И УСЛОВИЯ ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТИ

Рассмотренный выше эмпирический алгоритм имел недостаток, который легко мог быть замечен с самого начала: он не учитывал информацию, заключенную в знании семейства $P(dx|\vartheta)$, и использовал оценку для всего распределения $P(dx)$ (предполагаемого полностью неизвестным), а не для меньшего (в общем случае) количества параметров ϑ . Можно предложить следующий эмпирический алгоритм, свободный от этого недостатка (особенно существенного при непрерывном x).

Выберем некоторую систему $\varphi^T(y) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_s(y))$ линейно-независимых функций $\varphi_k(y)$. Это возможно, если множество значений y , по крайней мере, содержит не менее s точек (в противном случае часть параметров заведомо не представляет интереса при вынесении решения). Для этой системы можно вычислить вектор математических ожиданий

$$m(\vartheta) = \int \varphi(y) P(dy|\vartheta) \quad (4.1)$$

как заданную функцию неизвестных параметров ϑ . Для этой функции по формуле

$$\bar{m}_n = \int \varphi(y) \bar{P}_n(dy) \quad (4.2)$$

можно построить эмпирическую оценку \bar{m}_n . С использованием для эмпирического распределения $\bar{P}_n(dy)$ обычного выражения (1.4) оценка (4.2) приобретает стандартный вид среднего арифметического

$$\bar{m}_n = \frac{1}{n} [\varphi(y_1) + \dots + \varphi(y_n)]. \quad (4.3)$$

Приравнивая (4.1), (4.3), получаем систему уравнений

$$m(\vartheta) = \bar{m}_n. \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.4) при больших n становится разрешимой с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Решение $\hat{\vartheta}_n = \bar{\Theta}_n(y_1, \dots, y_n)$ этой системы уравнений далее можно использовать для построения эмпирического алгоритма так же, как в п. 1 использовалась для построения оптимального алгоритма оценка максимума правдоподобия. Описываемый эмпирический алгоритм, следовательно, будет определяться минимизацией (1.1), где следует сделать замену $\hat{\vartheta}_n \rightarrow \tilde{\vartheta}_n$.

Условная скорость сходимости $\Delta \tilde{r}_n(y, \vartheta)$ для данного алгоритма будет определяться формулой, подобной (2.10), где вместо асимптотического выражения $\hat{K}_n = I(\vartheta)^{-1}/n$ для корреляционной матрицы оценок $\hat{\vartheta}_n$ следует подставить асимптотическое выражение

$$\tilde{K}_n \equiv M(\tilde{\vartheta}_n - \vartheta)(\tilde{\vartheta}_n - \vartheta)^T = \frac{1}{n} \left(\frac{dm}{d\vartheta} \right)^{-1} K_{\varphi\varphi} \left(\frac{dm^T}{d\vartheta^T} \right)^{-1}, \quad (4.5)$$

где

$$K_{\varphi\varphi} \equiv \int [\varphi(y) - m(\vartheta)][\varphi(y) - m(\vartheta)]^T P(dy | \vartheta)$$

— корреляционная матрица функций $\varphi(y)$. В результате получим

$$\Delta \tilde{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \frac{\partial^2 r(u_{\vartheta} | y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i \partial \vartheta} \left(\frac{dm}{d\vartheta} \right)^{-1} K_{\varphi\varphi} \left(\frac{dm^T}{d\vartheta^T} \right)^{-1} \frac{\partial^2 r(u_{\vartheta} | y, \vartheta)}{\partial \vartheta^T \partial \tilde{u}_i}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{r}_n - \Delta \hat{r}_n &= \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \frac{\partial^2 r(\cdot)}{\partial \tilde{u}_i \partial \vartheta} \left[\left(\frac{dm}{d\vartheta} \right)^{-1} K_{\varphi\varphi} \left(\frac{dm^T}{d\vartheta^T} \right)^{-1} - I^{-1} \right] \times \\ &\times \frac{\partial^2 r(\cdot)}{\partial \vartheta^T \partial \tilde{u}_i} = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \frac{\partial^2 r(u_{\vartheta} | y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i \partial m} F(\vartheta) \frac{\partial^2 r(u_{\vartheta} | y, \vartheta)}{\partial m^T \partial \tilde{u}_i}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$F(\vartheta) = K_{\varphi\varphi} - \frac{dm(\vartheta)}{d\vartheta} I(\vartheta)^{-1} \frac{dm^T(\vartheta)}{d\vartheta^T}. \quad (4.8)$$

Матрица F в силу многомерного варианта неравенства Крамера—Рао [5] является неотрицательно определенной. Поэтому ее собственные

значения F_k являются неотрицательными. Приводя ее к диагональному виду ортогональным преобразованием $F \rightarrow V F V^T$ ($\tilde{m} = V m$), представим разность (4.7) в виде

$$\Delta \tilde{r}_n - \Delta \hat{r}_n = \frac{1}{2n} \sum_i \rho_i^{-1} \sum_k F_k \left[\frac{\partial^2 r(u_\vartheta^i | y, \vartheta)}{\partial \tilde{u}_i \partial \tilde{m}_k} \right]^2. \quad (4.9)$$

Чтобы эта разность обращалась в нуль, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial^2 r(u_\vartheta | y, \vartheta)}{\partial u^T \partial \tilde{m}_k} = 0 \quad (4.10)$$

для тех k , при которых $F_k \neq 0$, ($u^T = (u_1, \dots, u_r)$ — непреобразованный вектор решения).

Таким образом, чтобы скорость сходимости рассматриваемого эмпирического алгоритма совпадала с оптимальной, производная $\frac{\partial r}{\partial u}$

условного риска не должна зависеть от части параметров $\tilde{m}_k(\vartheta)$, если среди собственных чисел F_k не все равны нулю. Но если это имеет место в некоторой области значений ϑ , то такие параметры (в данной области) следует исключить. (т. е. в таких случаях следует сделать необходимые преобразования параметров). Поэтому в общем случае следует считать обращение в нуль второй производной $\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial m}$ возможным лишь в изолированных точках (и то только в специальных случаях).

Тогда на основании (4.10) заключаем, что для эффективности ($\Delta \tilde{r}_n = \Delta \hat{r}_n$) рассматриваемого эмпирического алгоритма необходимо и достаточно условия

$$F(\vartheta) = 0 \quad (4.11)$$

при всех ϑ . Если (4.11) выполняется лишь при некоторых изолированных значениях ϑ , то алгоритм будет при данных ϑ локально-эффективным. Для локальной эффективности, вообще говоря, условие (4.11) не является необходимым, оно может быть заменено более общим условием (4.10).

Условие (4.11) есть не что иное как условие эффективности оценок $m = \varphi(y)$ параметров $m(\vartheta) = \int \varphi(y) P(dy | \vartheta)$. Из него вытекают известные условия эффективности

$$\varphi_k(y) - m_k(\vartheta) = \sum_{k'=1}^s A_{kk'}(\vartheta) \frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \vartheta_{k'}} \quad (4.12)$$

$$(k = 1, \dots, s),$$

означающие представимость системы функций $\varphi(y)$ в виде линейной комбинации системы функций $\frac{\partial \ln P(dy | \vartheta)}{\partial \vartheta}$. Существование системы функций $\varphi(y)$, удовлетворяющей указанным свойствам, возможно далеко не при любых распределениях $P(dy | \vartheta)$. Следовательно, эмпирические алгоритмы описанного здесь типа могут быть эффективными лишь для

таких небайесовских систем $[c(x, u); P(dy|x); P(dx|\vartheta)]$, у которых распределение вероятностей $P(dy|\vartheta)$ допускает существование эффективных оценок. Если это условие выполнено, то при подходящем выборе системы функций $\varphi(y)$ соответствующий эмпирический алгоритм будет оптимальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Гришанин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 3, 454 (1972).
2. Г. Роббинс, Математика, 10, № 5, 122 (1966).
3. Р. Л. Стратонович, Автоматика и телемеханика, № 1, 96 (1967).
4. Я. З. Цыпкин, Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах, изд. Наука, М., 1968.
5. С. Рао, Линейные статистические методы и их применения, изд. Наука, М., 1968.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
23 ноября 1970 г. —

EFFICIENCY CONDITIONS FOR ADAPTATION ALGORITHMS BASED
ON EMPIRICAL BAYES APPROACH TO STATISTICS

Grishanin B. A.

Two empirical (based on empirical Bayes approach) algorithms of adaptation for informational (i. e. with incomplete observation) non-Bayes systems are considered. Their corresponding convergence velocities are computed and compared with the convergence velocity of optimal algorithm based on maximum likelihood estimation. Conditions for the velocities equality are determined under which the considered empirical algorithms are optimal. For one of the algorithms the optimality condition is possible if the observed random value probability distribution admits existence of efficient estimations of unknown parameters.

УДК 531.3

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ПОДВЕСКИ ЭКИПАЖА

Р. А. Мусарский

Методами статистической динамики определяются значения параметров системы подвески экипажа, удовлетворяющие обобщенному критерию качества. Показано, что характеристика демпфирующего элемента должна быть существенно нелинейной для удовлетворения различных условий движения. Дается метод определения такой характеристики.

При расчете системы подвески экипажа необходимо решать задачу совместного выбора ее параметров для оптимального удовлетворения эксплуатационно-технических качеств при различных условиях движения. Трудность решения этой задачи объясняется сложностью исходной колебательной модели, имеющей несколько степеней свободы и широким диапазоном изменения условий движения.

1. Систему амортизации, гасящую вертикальные колебания, при определенных соотношениях между радиусами инерции амортизируемой массы и координатами точек подвеса можно привести к простейшей [1]. В случае амортизации экипажа простейшей моделью будет распространенная двухмассовая модель, движение которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k \frac{d}{dt} (x_2 - x_1) + c (x_2 - x_1) = 0, \quad (1)$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - k \frac{d}{dt} (x_2 - x_1) - c (x_2 - x_1) + k_1 \frac{d}{dt} (x_1 - q) + c_1 (x_1 - q) = 0,$$

где x_2, x_1 — соответственно координаты подрессоренной и неподрессоренной масс, k, c — коэффициенты демпфирования и упругости подвески, k_1, c_1 — коэффициенты демпфирования и упругости шины, m_1, m_2 — неподрессоренная и подрессоренная массы, $q(t)$ — функция микропрофиля дороги, представляющая нормальный, стационарный, эргодический случайный процесс с заданной корреляционной функцией вида [2]

$$R_q(\tau) = R_q(0) \exp(-\alpha |\tau|) \cos \beta \tau,$$

где $R_q(0)$ — дисперсия функции дорожного микропрофиля, $\alpha = \alpha_1 v$; $\beta = \beta_1 v$, v — скорость движения, α_1 и β_1 — параметры, характеризующие тип и качество микропрофиля дороги. Отношение α/β , как показано в [2], обладает большим постоянством для большинства микропрофилей дорог. Поэтому можно считать, что параметром, характеризующим различные условия движения по таким дорогам, является параметр α .

Система амортизации должна быть выбрана из условия наилучшего удовлетворения эксплуатационно-технических требований. Для рассматриваемой простейшей системы они сводятся в основном к двум: наилучшей плавности хода и безопасности при движении с возможно большими скоростями по заданной дороге. Найдем значения параметров под-

вески, при которых плавность хода машины была бы наилучшей при выполнении условий, обеспечивающих безопасность движения.

Плавность хода характеризуется величиной ускорений x_2 . Аналитически для удовлетворения требования плавности хода будем требовать минимума дисперсии $D\ddot{x}_2$ ускорений подрессоренной массы при ограничениях, накладываемых другими требованиями.

Наложим ограничения на дисперсию относительных перемещений неподдресоренной массы и микропрофиля дороги

$$D_{x_1-q} < A. \quad (2)$$

Это ограничение вызвано требованием безопасности движения.

Из конструктивных соображений необходимо также ввести ограничение на дисперсию относительного перемещения неподдресоренной и подрессоренной масс, так как при превышении ею некоторого уровня возникают удары об ограничитель хода, приводящие к увеличению ускорений подрессоренной массы и, следовательно, к резкому ухудшению плавности хода

$$D_{x_2-x_1} < B. \quad (3)$$

Таким образом, наша задача сводится к задаче о нахождении совокупности параметров системы, минимизирующих функцию $D\ddot{x}_2$ при выполнении ограничений (2) и (3). Для удобства реализации этой задачи с помощью ЭЦВМ ее можно свести к задаче нахождения параметров, минимизирующих следующий обобщенный критерий качества

$$I = \rho_1 D\ddot{x}_2 + \rho_2 D_{x_1-q} + \rho_3 D_{x_2-x_1}, \quad (4)$$

где ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 — некоторые специальным образом подобранные функции, которые можно определить следующим образом [3]:

$$\rho_1 = \begin{cases} 1 & \text{при выполнении ограничений (2) и (3),} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\rho_2 = \begin{cases} 1 & \text{при невыполнении ограничения (2),} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\rho_3 = \begin{cases} 1 & \text{при невыполнении ограничения (3),} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

при условии, что из значений параметров, минимизирующих (4), исключаются те, при которых ограничения (2) и (3) не выполняются.

2. Уменьшим число параметров системы, перейдя в уравнениях (1)

к новому безразмерному времени $t_n = \frac{k}{m_2} t_{ст}$

$$\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 - \dot{x}_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) = 0,$$

$$\mu x_1 - x_2 + x_1 - \lambda_2(x_2 - x_1) + \varkappa(\dot{x}_1 - \dot{q}) + \lambda_1(x_1 - q) = 0,$$

где $\lambda_1 = \frac{c_1 m_2}{k^2}$; $\lambda_2 = \frac{cm_2}{k^2}$; $\mu = \frac{m_1}{m_2}$; $\varkappa = \frac{k_1}{k}$ — новые параметры. (Точками сверху обозначены производные по новому времени.)

Параметр μ , представляющий отношение неподдресоренной и подрессоренной масс, и \varkappa , представляющий отношение коэффициентов демпфирования, малы и меняются незначительно. Без ущерба для общности

рассмотрения при синтезе параметров экипажа их можно считать малыми параметрами и уделить основное внимание поиску оптимальных параметров λ_1 и λ_2 . При этом можно считать, что $\mu = \kappa = 0,1$, что приемлемо для большинства типов экипажей.

Возьмем дисперсию микропрофиля дороги равной $R_q(0) = 2,89 \text{ см}^2$ (это соответствует микропрофилю булыжной дороги [2]). Выберем уровни ограничения $A = 1,35 \text{ см}^2$, $B = 11,1 \text{ см}^2$, соответствующие 3σ -му уровню для динамического хода поддрессоренной и неподдрессоренной масс, равному 10 см (по известному правилу «трех сигма»), и 2σ -му уровню при статическом прогибе шины, равному 2 см при условии нормального закона распределения исследуемых процессов.

Кривые оптимальных по критерию (4) значений λ_1 и λ_2 для различных значений α , соответствующих различным значениям v , приведены на рис. 1 а. Для оценки эффекта оптимизации на рис. 1 б дана зави-

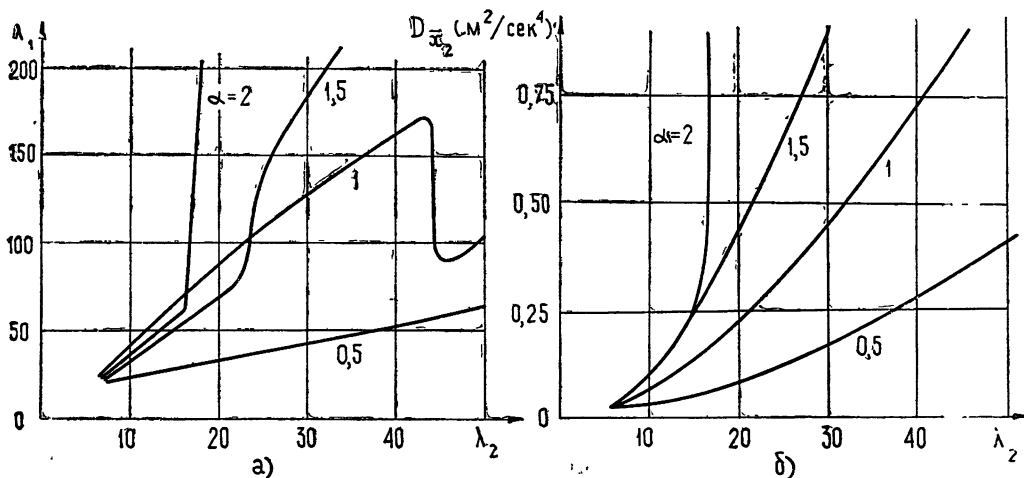


Рис. 1.

симость дисперсии ускорений поддрессоренной массы (в новом времени) от параметра λ_2 и соответствующего ему по критерию (4) λ_1 (из рис. 1 а).

Из рисунков видно, что при конструировании подвески экипажа желательно по возможности уменьшать значения параметров λ_1 и λ_2 , если оптимизация не затрагивает параметры m_2 и k , влияющие на изменение масштаба времени и, следовательно, на значение минимума (4). Заметим, что при выборе параметров подвески иногда нельзя свободно выбирать все параметры системы. Имеет смысл провести оптимизацию, задавшись, например, значением поддрессоренной массы или меняя его в незначительных пределах. На рис. 2 а приведены оптимальные в смысле критерия (4) значения параметров k и c для различных скоростей движения v в $\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$, а на рис. 2 б — значения дисперсии ускорения поддрессоренной массы (в реальном времени) в зависимости от изменения жесткости упругого элемента и соответствующего ей из рис. 2 а оптимального коэффициента k ($m_2 = 0,4 \div 0,5 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \text{ см}^{-1}$, $\alpha = 0,32 v$, $\beta = 2\alpha$, $R_q(0) = 2,89 \text{ см}^2$). Уменьшение жесткости упругого элемента не обязательно требует увеличения сопротивления демпфирования, как это кажется из интуитивных соображений.

Расчет показывает, что в вышеприведенном примере в основном играло роль ограничение (2), связанное с безопасностью движения. Дисперсия же относительных перемещений $D_{x_2-x_1}$ колеблется в пределах $4-8 \text{ см}^2$ независимо от скорости движения, что явно ниже уровня ограничения.

Кроме того, расчет показывает, что при скорости движения больше $30 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ условия (2) и (3) не выполняются в области физически реализуемых параметров, что говорит об ограниченных возможностях пассивной амортизации.

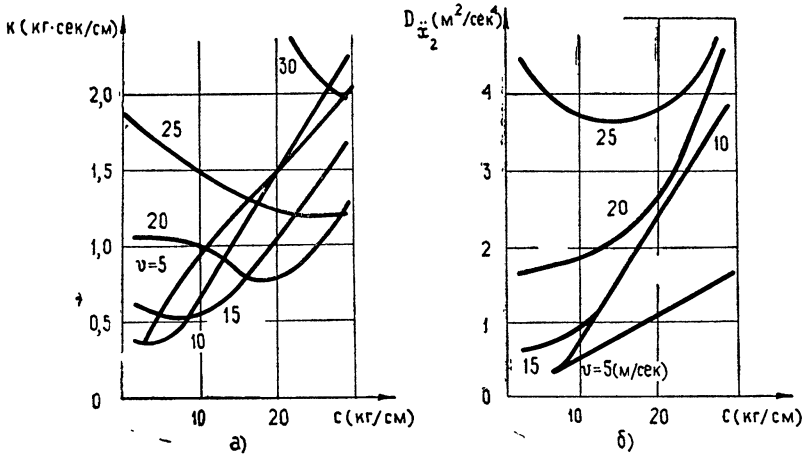


Рис. 2.

С точки зрения уменьшения поперечных и продольных колебаний экипажа (повороты, торможения), желательнее упругий элемент выбрать более жестким. Из рис. 2 б видно, что жесткость порядка $18-22 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-1}$ является вполне удовлетворительной для всех скоростей движения. Как показывают проведенные расчеты, изменение подрессоренной массы в пределах от $0,4$ до $0,5 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{см}^{-1}$ практически не сказывается на выборе оптимальных параметров c и k . Что касается подбора демпфирующего элемента, то, как видно из рис. 2 а, значение коэффициента демпфирования k , минимизирующее (4), должно меняться с изменением скорости движения v .

Из полученных условий удовлетворения минимума критерия качества (4) получаем зависимость k от $\alpha = \alpha_1 v$ (рис. 2 а). Затем по соответствующим этим значениям k значение дисперсии скорости относительным значениям движения (1) находим соответствующее этим значениям k значение дисперсии скорости относительных перемещений $\sigma_{x_2 - \dot{x}_1}^2 = \sigma_{x_2 - x_1}^2(k)$ и удовлетворяющее эксплуатационно-техническим требованиям значение математического ожидания силы демпфирования \bar{f} . Эти зависимости понадобятся нам для дальнейших рассуждений.

3. Поставим задачу синтеза такой нелинейной характеристики демпфирующего элемента, которая была бы эквивалентна (согласно некоторому условию эквивалентности) на каждой скорости движения линейной, с оптимальным коэффициентом демпфирования. Предлагаемый метод синтеза такой характеристики состоит в следующем.

Определим эквивалентность линейного и искомого нелинейного $f(u)$ элементов, например, посредством второго критерия статистической линеаризации [4], т. е. будем основываться на критерии минимума среднего квадратичного отклонения процессов на выходе искомого нелинейного и оптимального для каждого значения v линейного элементов. Этот критерий приводит к следующим соотношениям

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) W(u) du, \tag{5}$$

$$k\sigma_u^2(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) (u - \bar{u}) W(u) du.$$

Уравнения (5) могут быть рассмотрены как интегральные уравнения относительно функции $f(u)$. Если u подчиняется нормальному закону распределения, то $W(u) = \exp\{-(u - \bar{u})^2/2\sigma_u^2(k)\}/\sqrt{2\pi}\sigma_u(k)$. В этом случае уравнения (5) могут быть приведены к интегральным уравнениям обращения Лапласа.

Действительно, представляя $f(u)$ в виде суммы четной и нечетной составляющих относительно значения математического ожидания

$$f(u) = f_{\text{ч}}(u - \bar{u}) + f_{\text{н}}(u - \bar{u})$$

и заменив $p = 1/2\sigma_u^2(k)$ и $(u - \bar{u})^2 = t$, из (5) получим

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\sigma_u(k)\bar{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\{-p(u - \bar{u})^2\} du = \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_{\text{ч}}(u - \bar{u}) \exp\{-p(u - \bar{u})^2\} d(u - \bar{u}) = \\ &= \int_0^{\infty} [f_{\text{ч}}(\sqrt{t})/\sqrt{t}] \exp\{-pt\} dt; \\ \sqrt{2\pi}k\sigma_u^3(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) (u - \bar{u}) \exp\{-p(u - \bar{u})^2\} du = \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_{\text{н}}(u - \bar{u}) (u - \bar{u}) \exp\{-p(u - \bar{u})^2\} du = \\ &= \int_0^{\infty} f_{\text{н}}(\sqrt{t}) \exp\{-pt\} dt. \end{aligned}$$

Нахождение четной и нечетной составляющих функции свелось к последовательному применению преобразования Лапласа

$$\sqrt{2\pi}\sigma_u(k)\bar{f} = \sqrt{\pi/p}\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} [f_{\text{ч}}(\sqrt{t})/\sqrt{t}] \exp\{-pt\} dt, \quad (6)$$

$$\sqrt{2\pi}k\sigma_u^3(k) = \sqrt{\pi/p} \frac{k(p)}{2p} = \int_0^{\infty} f_{\text{н}}(\sqrt{t}) \exp\{-pt\} dt.$$

Опираясь на эти соотношения, перейдем к синтезу оптимальной характеристики демпфера подвески для рассмотренного выше примера. Заметим, что в этом случае второе из уравнений (5) имеет физический смысл равенства мощности, рассеиваемой реальным нелинейным и эквивалентным линейным элементами.

На рис. 3б показана зависимость средней квадратической скорости относительных перемещений σ_u от оптимальных для разных скоростей движения коэффициентов демпфирования, соответствующих различным жесткостям упругого элемента (характеристические линии). Как видно из соотношений (6), эти зависимости можно рассматривать как изображения искомых функциональных характеристик демпфирующего

элемента. Наиболее близко к оптимальной характеристике приближается симметричная нелинейная характеристика кусочно-линейного типа

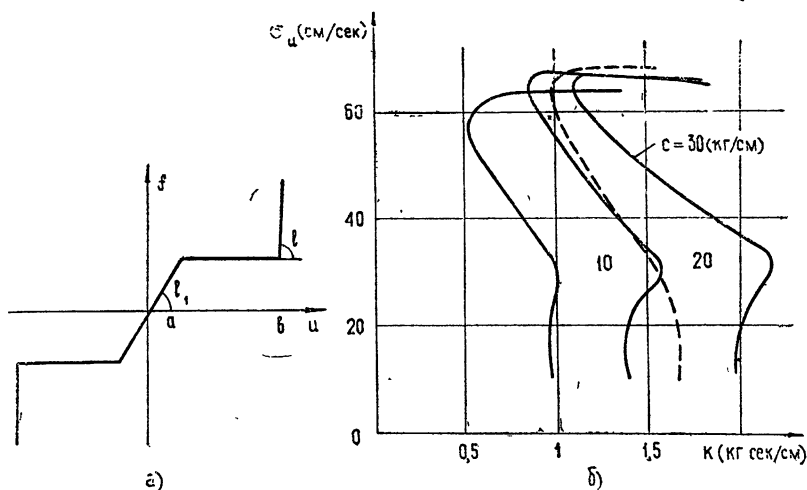


Рис. 3.

(рис. 3 а), характеристическая линия которой $k(\sigma) = 2l_1 \Phi(a/\sigma) + l[1 - 2\Phi(b/\sigma)]$ ($\Phi(y)$ — функция Крампса [4], для наиболее целесообразного значения жесткости упругого элемента представлена на рис. 3 б в виде пунктирной линии. (Значения параметров: $a = 50 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, $b = 220 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, $l_1 = 1,7 \text{ кг} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^{-1}$; а значение параметра l должно быть очень велико, что диктуется требованием безопасности движения на больших скоростях).

Расчет показывает, что изменение подрессоренной массы в указанных выше пределах влияет на изменение лишь начального участка (l_1) синтезированной характеристики. Отметим также, что вид функциональной характеристики остается тем же и для движения по асфальтовой дороге.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. З. Коловский, *Машиноведение*, № 5, 21 (1966).
2. И. Г. Пархиловский, *Автомобильная промышленность*, № 4, 28 (1969).
3. А. А. Фельдбаум, *Основы теории оптимальных автоматических систем*, изд. Наука, М., 1966
4. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов, *Статистическая динамика нелинейных автоматических систем*, Физматгиз, М., 1962.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1970 г.,
после доработки
6 июня 1971 г.

PARAMETERS SYNTHESIS FOR VEHICLE SUSPENSION SYSTEM

Mussarsky R. A.

Parameters of a suspension system that satisfy a generalized criterion of quality are determined using methods of statistical dynamics. It is shown that to meet various traffic conditions the damping element characteristic should be substantially nonlinear. A method to determine such characteristic is given,

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 517.432.1

**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ НЕСОБОНЫХ МАТРИЦ**

А. С. Алексеев

Имея в виду существенную роль операционного исчисления [1, 2] при исследовании динамики линейных дискретных и распределенных систем [3, 4, 5], рассмотрим на примере преобразования Лапласа — Карсона [1] возможность построения операционного исчисления для однопараметрических функций неособых матриц.

Если функция $f(xt) \in C^{\max(k_i-1)}$, где k_i — кратность собственного значения λ_i неособой постоянной квадратной матрицы A , и преобразуема по Лапласу, то можно простой заменой скалярного аргумента x на матрицу A получать из таблиц операционного исчисления изображения функций $f(At)$ матрицы A , т. е. $\bar{f}\left(\frac{p}{A}\right)$ вместо $\bar{f}\left(\frac{p}{x}\right)$.

Действительно, если $k_i = 1$ для $i = 1, 2, \dots, n$, то, используя компоненты [4, 6] матрицы A , получим

$$\begin{aligned} f(At) &\doteq p \int_0^\infty e^{-pt} f(At) dt = p \sum_{i=1}^n Z_i \int_0^\infty e^{-pt} f(\lambda_i t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n Z_i \frac{p}{\lambda_i} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p}{\lambda_i} \tau_i\right) f(\tau_i) d\tau_i = \sum_{i=1}^n Z_i \bar{f}\left(\frac{p}{\lambda_i}\right) = \bar{f}(pA^{-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогичное соответствие нетрудно получить и для случая кратных корней. Для этого предварительно заметим, что для $j = 1, 2, \dots, k_i$

$$f_x^{(j)}(xt) = \frac{t^j}{x^j} f_t^{(j)}(xt), \quad \bar{f}_p^{(j)}\left(\frac{p}{x}\right) = \left(-\frac{x}{p}\right)^j \bar{f}_x^{(j)}\left(\frac{p}{x}\right), \tag{2}$$

а также, что преобразование Лапласа — Карсона дает [1]

$$f(at) \doteq \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right), \quad \left(t \frac{d}{dt}\right)^j f(at) \doteq p(-p)^j \frac{d^j}{dp^j} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right). \tag{3}$$

Теперь в связи с тем, что [4]

$$f(At) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} Z_{ij} f_x^{(j)}(\lambda_i t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} Z_{ij} \frac{t^j}{\lambda_i^j} f_t^{(j)}(\lambda_i t),$$

на основании (2) и (3) получим

$$f(At) \doteq \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} Z_{ij} \left(-\frac{p}{\lambda_i} \frac{d}{dp}\right)^j \bar{f}\left(\frac{p}{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} Z_{ij} \bar{f}_{\lambda_i}^{(j)}\left(\frac{p}{\lambda_i}\right) = \bar{f}(pA^{-1}). \tag{4}$$

Соответствия (1) и (4) устанавливают упомянутую возможность, которая может быть перенесена на известные случаи некоторых других интегральных преобразований [1, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, ГИФМЛ, М., 1961.
2. Я. Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ., М., 1956.
3. Г. Е. Шилов, Математический анализ; второй специальный курс, изд Наука, ГИФМЛ, М., 1965
4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1953.
5. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, 8, 1156 (1970).
6. Б. В. Булгаков Колебания, ГИТТЛ, М., 1954.
7. К. Дж. Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, М., 1956

Научно-исследовательский
физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 сентября 1971 г.