

СОДЕРЖАНИЕ

Зельдович Я. Б., Рахматулина А. Х., Сюняев Р. А. Наблюдение флуктуаций реликтового радиоизлучения как способ отличить адиабатические от других видов возмущений плотности вещества во Вселенной, ведущих к образованию галактик	161
Иванов В. А., Тамойкин В. В. О корреляционной теории поля обратного рассеяния в магнитоактивной плазме	172
Гавриленко В. Г., Лупанов Г. А., Степанов Н. С. Динамооптические эффекты в плазме	183
Барсуков К. А., Газазян Э. Д., Лазиев Э. М. К теории переходного излучения в волноводе	191
Рыжов В. А. О методе частичных отражений	196
Алексеев Г. В., Волковский С. А., Жуковский А. П., Оноприенко Е. И., Трофимов В. Д. Экспериментальные исследования эффективной ширины диаграмм обратного рассеяния поверхностей и распределения отраженных сигналов в метровом и дециметровом диапазонах волн	200
Мананкова А. В. Электромагнитное излучение источников над идеально проводящей расширяющейся сферой	211
Гуревич Г. Л., Пасхин В. М. Установившийся режим синхронизации мод в лазере с насыщаемым поглотителем	221
Кузнецова Т. И. Об измерениях временных характеристик излучения, основанных на многофотонных процессах во встречных световых пучках	227
Божков А. И. Вынужденное рассеяние света на поверхности жидкости при полном френелевском отражении	233
Островский Л. А., Соустов Л. В. «Само модуляция» электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи	242
Гавриленко В. Г., Дорфман Я. М. К теории рассеяния в средах с пространственно-временными флуктуациями	249
Шевченко В. В. О поведении волновых чисел волн диэлектрических волноводов за критическим значением (среды с потерями)	257
Голубицев А. Ф., Шаповалов А. С. Об одном методе учета статистических неоднородностей катода	266
Корнев И. Л., Юдин Л. А. Радиационная неустойчивость электронных колец в волноводе	272
Кузнецов М. И., Бербасов В. А., Железцова И. Н. Предосцилляционные распределения заряда в цилиндрическом магнетроне	283
Ванке В. А., Зайцев А. А., Крюков С. П., Лопухин В. М. Вопросы создания узкополосного перестраиваемого электростатического усилителя	291
Козлов В. А., Пискарев В. И. Об умножении частоты миллиметрового диапазона в $n - \text{InSb}$	300
Каплан С. А., Клейман Е. Б. О фотон-плазменном переходе $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ в водородоподобных атомах	305

Краткие сообщения и письма в редакцию

Новиков М. А., Фридман С. С., Яворовский И. Г. Дисперсия оптической активности в кристаллах йодата лития	308
--	-----

Информация

Аннотации статей, помещенных в ж. «Геомагнетизм и аэрономия», т. XI, № 5, 1971 г	310
--	-----

УДК 523.164

НАБЛЮДЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ РЕЛИКТОВОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ КАК СПОСОБ ОТЛИЧИТЬ АДИАБАТИЧЕСКИЕ ОТ ДРУГИХ ВИДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА ВО ВСЕЛЕННОЙ, ВЕДУЩИХ К ОБРАЗОВАНИЮ ГАЛАКТИК

Я. Б. Зельдович, А. Х. Рахматулина, Р. А. Сюняев

Адиабатическим возмущениям плотности свойственна своеобразная периодическая зависимость амплитуды от массы.

Детальное исследование флуктуаций реликтового излучения может привести к выяснению природы первичных возмущений плотности, с которыми связывается образование галактик и скоплений галактик.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование реликтового радиоизлучения позволяет получить информацию о раннем догалактическом периоде эволюции Вселенной. В частности, имеются предложения обнаруживать по угловому распределению его температуры возмущения плотности вещества, которые в дальнейшем приводят к образованию астрономических объектов (галактик, скоплений галактик и т. п.) [1-3].

Заметим сразу, что до настоящего времени вообще не удалось обнаружить отклонений локальной эффективной температуры от средней $T = 2,7^\circ\text{K}$, за исключением отклонения $\Delta T/T = 7 \cdot 10^{-4} \cos \theta$ [4], естественно объясняющегося движением Солнечной системы как целого относительно фона.

В этом смысле предлагаемая работа предвосхищает наблюдения, ее целью является выяснение необходимой точности эксперимента и тех качественных выводов, которые можно будет сделать после измерения эффектов. Мы не касаемся здесь ограничений, зависящих от аппаратуры и фона атмосферы, околоземной и галактической плазмы, а также вклада дискретных источников.

Характеристику общего состояния вопроса о возмущениях плотности и флуктуациях температуры частично заимствуем из работы [3].

В современной «горячей» модели Вселенной предполагается, что в далеком прошлом, до рекомбинации первичной плазмы, во времена, соответствующие красному смещению $z \sim 1000$, галактик не было, а возникновение галактик связано с незначительными отклонениями от строгой однородности, существовавшими в тот период.

В первом приближении можно считать, что после рекомбинации протонов и электронов «вещество» — нейтральные атомы — не взаимодействует с излучением, и реликтовое излучение (имеющее в настоящее время среднюю температуру $T = 2,7^\circ\text{K}$) непосредственно приносит нам информацию о состоянии при $z \sim 1000$. В частности, отклонения температуры от средней в зависимости от направления наблюдения, проводимого сейчас с Земли, характеризуют именно отклонения от однородности, т. е. зависимость физических величин от координат в пространстве на ранней стадии.

Эти отклонения в дальнейшем (после рекомбинации) возрастают за счет правитационной неустойчивости. За момент образования обособленных объектов $z_{\text{обр}}$ разумно принять время возникновения областей с плотностью по крайней мере вдвое больше средней, т. е. $\Delta\rho/\rho \sim 1$. Предполагается, что это произошло сравнительно недавно (в логарифмической шкале времени) при красном смещении $z \sim 2 \div 10$.

Для характеристики изначальной неоднородности представляют интерес не только те возмущения, которые привели к образованию галактик и скоплений галактик, интересен полный спектр возмущений; в особенности, интересны возмущения, масштаб которых $50 \div 100 \text{ Mpc}$, вплоть до $ct \sim 3000 \text{ Mpc}$.

Сами возмущения могут быть качественно различной природы: 1) возмущения плотности ядер и электронов ρ_m на фоне постоянной плотности квантов ρ_r (так называемые энтропийные возмущения); 2) волны сжатия и разрежения плазмы как целого с одновременным изменением ρ_r и ρ_m (адиабатические возмущения); 3) турбулентные движения плазмы; 4) хаотические магнитные поля и, возможно, другие типы возмущений.

Различные типы возмущений эволюционируют по-разному в плазменном периоде (до рекомбинации, $z > 1400$) и дают различные предсказания относительно образования галактик и флуктуаций реликтового излучения. В случае адиабатических возмущений плотности рассмотрение процессов, происходящих до рекомбинации, приводит к следующей картине: на поздней стадии расширения амплитуда возмущений плотности оказывается периодической функцией длины волны (массы). Такая картина была ранее получена Сахаровым [5] для возмущений плотности в «холодной» модели Вселенной. В применении к «горячей» модели этот вопрос был ранее рассмотрен в [3], ниже после изложения физической картины обсуждается возможность наблюдений и обнаружения эффектов. Эта специфичность, если она будет наблюдена, позволит сделать выбор между различными видами возмущений плотности. Обнаружить ее будет трудно по следующим причинам. Во-первых, образование объектов сопровождается выделением энергии и ионизацией межгалактического газа. Для дальнейшего существенно, чтобы ионизация произошла не слишком рано, так как в противном случае комптоновское рассеяние сгладит бы первичную угловую зависимость. Во-вторых, как было показано в [6], флуктуации фонового излучения, связанные с наличием наблюдаемых радиоисточников, в масштабах $1' \div 10'$ превышают ожидаемые первичные. Такой масштаб на небесной сфере в случае первичных флуктуаций соответствует возмущениям плотности, охватывающим массы $M < 10^{15} M_\odot$. Сформировавшиеся объекты с большими массами $M > 10^{15} M_\odot$ оптическими наблюдениями достоверно не обнаружены. Обычно предполагается, что возмущения в таких масштабах малы (в настоящее время $\Delta\rho/\rho < 1$), а в этом случае малы и ожидаемые флуктуации ($\Delta T/T < 10^{-4}$). Далее этот вопрос обсуждается более подробно.

Ниже мы перейдем к подробному изложению теории колебаний амплитуды возмущений (разд. 2), описанию ожидаемой картины на небесной сфере (разд. 3) и к математической теории обработки наблюдений для выявления этих колебаний (разд. 4). Перед этим остановимся на порядке величин ожидаемых эффектов и физических факторах, влияющих на флуктуации.

В любой теории надо иметь в виду, что рекомбинация водорода в «горячей» модели Вселенной [7, 8] происходит не мгновенно, есть довольно широкая область $900 < z < 1200$, в которой газ полупрозрачен [3]. Эффект, наблюдаемый в данном направлении ($\Delta T/T$), представля-

ет собой результат усреднения по указанной области, при этом эффект мелкомасштабных ($M < 10^{15} M_{\odot}$, $\theta < 10'$) флуктуаций оказывается резко ослабленным. Отсюда не следует делать вывод, что исследования на меньших углах не интересны, однако мелкомасштабные флуктуации должны быть другой природы и связаны с более поздними процессами. Для искомых флуктуаций, зависящих от первичных возмущений, характерна равновесная планковская форма спектра: $\Delta T/T$ не зависит от длины волны, на которой производятся измерения. Более поздние возмущения могут менять спектр, что позволит отличить их от первичных [3, 6].

Обратимся теперь к амплитуде возмущений. Возмущения, приведшие к образованию отдельных объектов, должны дать $\Delta\rho/\rho \approx 1$ по линейной теории к моменту $z_{\text{обр}}$. В пересчете на момент рекомбинации $z_p \sim 1000$ получим (учитывая, что возмущения растут по закону $\Delta\rho/\rho \sim t^{2/3} \sim (1+z)^{-1}$) $(\Delta\rho/\rho)(z_p) \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ при $z \sim 2 \div 10$.

В турбулентной (вихревой) теории возмущения в начале имеют характер несжимаемого движения и лишь позже создают возмущения плотности. Поэтому усиление возмущений гравитационной неустойчивости начинается позже. Оценка начального $\Delta\rho/\rho$ в вихревой теории дает значительно большие величины $\Delta T/T$ [9].

Подчеркнем еще раз, притом применительно ко всем возможным видам возмущений плотности, что нас интересует неоднородность в большом масштабе масс, длин и углов $M > 10^{15} M_{\odot}$, $\theta > 10'$. Периодической зависимости амплитуды от длины волны можно ожидать в области $10^{18} M_{\odot} > M > 10^{14} M_{\odot}$. В этом масштабе наблюдения не дают определенных указаний относительно неоднородности даже в нашей окрестности ($0 < z < 0,2$); косвенно на малую неоднородность указывает и малая пекулярная скорость Солнечной системы (см. выше), хотя наблюдение, относящееся к одному объекту, может быть случайным. Итак, в обсуждаемых масштабах возмущения в настоящее время малы ($\Delta\rho/\rho < 1$), поэтому и ожидаемые флуктуации $\Delta T/T$ должны быть значительно меньше, чем $10^{-2} \div 10^{-3}$. Результат, полученный в данной статье, сводится к следующему: если спектр возмущений падает не слишком быстро в сторону больших масс, то ожидаемые $\Delta T/T$ порядка $3 \cdot 10^{-6} \div 10^{-4}$.

Измерение таких $\Delta T/T$ с точностью хотя бы 20—30% их величины уже достаточно, чтобы выявить наличие или отсутствие колебаний амплитуды возмущений. Однако для этого необходим тщательный анализ угловой зависимости ΔT ; необходимо развить способ пересчета от распределения ΔT на небесной сфере к амплитудам случайных плоских волн. Этому математическому вопросу посвящен разд. 4. Определение амплитуды плоских волн по единственной доступной наблюдению «реализации» (наблюдатель в Солнечной системе) не дает вполне однозначного ответа. Обнаружение периодической зависимости амплитуды возможно лишь при спектре адиабатических возмущений, удовлетворяющем определенным условиям. Следовательно, в этом случае удастся не только обнаружить крупномасштабные возмущения, но и выявить их природу—отличить адиабатические от энтропийных или вихревых возмущений плотности.

2. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОТНОСТИ И ФЛУКТУАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТ МАСШТАБА

Как упоминалось во Введении, Сахаров [5] показал, что амплитуда возмущений плотности вещества на поздней стадии, когда давление не влияет на их эволюцию (в нашем случае—после рекомбинации), оказы-

вается периодической функцией длины волны. Эта характерная зависимость накладывается на обычно предполагаемую степенную зависимость.

Из выражения для зависимости джинсовской массы от красного смещения найдем z_J — момент, когда данная масса M равнялась джинсовской (см. [3]):

$$z_J = \Omega z_1 \left[\left(\frac{10^{16} \Omega^{-2}}{M} \right)^{1/3} - 1 \right]. \quad (1)$$

Здесь $\Omega = \rho/\rho_{кр}$ — безразмерная современная средняя плотность вещества во Вселенной, $\rho_{кр} = 3H_0^2/8\pi G = 2 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$. Все численные оценки делаются в предположении, что постоянная Хаббла $H_0 = 100 \text{ км/сек Мпс}$. Плотности энергии вещества и излучения сравниваются в ходе расширения при $z_1 \Omega = 4 \cdot 10^4$. Скорость звука при $z_p < z < z_1$ равна $a_s = (c/\sqrt{3}) \sqrt{\rho_r/\rho_m} \approx (c/\sqrt{3}) \sqrt{z/z_1 \Omega}$.

В период между z_J и z_p адиабатические возмущения плотности данного масштаба представляли собой стоячие звуковые волны. Волны, соответствующие разным масштабам, имели разные частоты, время существования их также было различным (см. рис. 1а). В результате

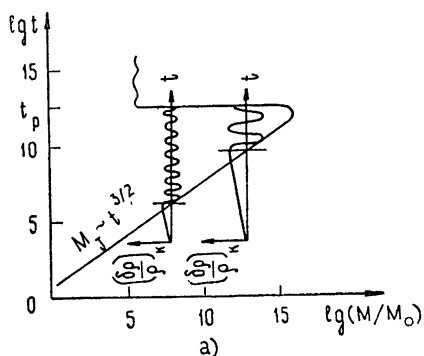


Рис. 1а. Диаграмма гравитационной неустойчивости в горячей модели.

Правее линии $M_J(t)$ — область неустойчивости, левее — область устойчивости. Два дополнительных графика демонстрируют эволюцию возмущений плотности вещества со временем: рост до того момента, пока рассматриваемая масса меньше джинсовской, и колебания после. Видно, что к моменту рекомбинации возмущения, соответствующие разным масштабам, приходят с разными фазами.

к моменту рекомбинации звуковые волны должны были приходить с фазой, зависящей от масштаба, т. е. возмущения плотности (и связанные с ними возмущения скорости и флуктуации температуры излучения) должны зависеть от массы протообъекта (см. рис. 1б).

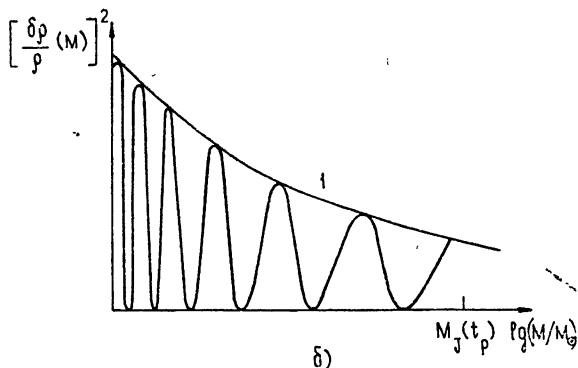


Рис. 1б. Приближенная зависимость квадрата амплитуды возмущений плотности вещества от масштаба. Кривая (1) обозначает обычно предполагаемую зависимость $(\delta\rho/\rho)(M) \sim M^{-n}$. Для простоты пренебрегается спектральными эффектами.

На предыдущем этапе до момента z_J амплитуда возмущений плотности и связанная с ней уравнением неразрывности скорость вещества росли:

$$\begin{aligned}\Delta\rho/\rho &\sim t \sin kx, \\ u &\sim \sqrt{t} \cos kx.\end{aligned}\quad (2)$$

Отметим, что именно из-за присутствия лишь растущей моды при $z > z_J$ звуковые волны на стадии $z_p < z < z_J$ должны быть стоячими;

$$\Delta\rho/\rho \sim \sin\left(\int_{z_J}^z \omega dt + \varphi_0\right) \sin kx, \quad (3)$$

$$u = \cos\left(\int_{z_J}^z \omega dt + \varphi_0\right) \cos kx = \sin\left(\int_{z_J}^z \omega dt + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \cos kx.$$

В дальнейшем пространственные зависимости сохраняют свой вид: длина волны растет соответственно расширению. Поэтому ниже пространственные функции не выписываются.

Условия «сшивания» обеспечивают в момент z_J равные фазы для звуковых волн всех масштабов. Отметим, что $(\omega t)_{z_J}$ не зависит от k , так как $\omega = a_s k$, а $a_s t \sim \lambda_J \sim k_J^{-1}$. Тогда в момент рекомбинации z_p для данного k

$$(\Delta\rho/\rho)_k \sim \sin \varphi_k(z_p), \quad u_k \sim \cos \varphi_k(z_p). \quad (4)$$

Учитывая, что $z_p \leq z_1 \Omega$ почти для всех возможных Ω , а при этом $\frac{dt}{dz} = -H_0^{-1}/\Omega^{1/2} z^{2.5}$, находим*

$$\varphi_k(z_p) = \int_{z_J}^{z_p} \omega dt + \varphi_0 \approx \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{k}{\sqrt{z_1} \Omega z_p H_0} + \varphi_1 = bk + \varphi_1, \quad (5)$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 - (\omega t)_{z_J}$. Вспоминая, что при $z_p < z_1 \Omega$

$$\begin{aligned}\lambda_J(z_p) &= a_s \sqrt{\pi/G(\rho_r + \rho_m)} \approx \frac{c}{\sqrt{G}} \frac{\sqrt{\rho_r}}{\rho_r + \rho_m} \approx \\ &\approx \frac{c}{\sqrt{G\rho_{кр}}} \frac{1}{z_p \sqrt{z_1} \Omega} \approx \frac{\sqrt{6\pi} c H_0^{-1}}{z_p \sqrt{z_1} \Omega}\end{aligned}\quad (6)$$

и сравнивая λ_J и b (5), видим

$$\lambda_J \approx \pi/b. \quad (7)$$

Теперь легко найти нули функций $\sin \varphi_k(z_p)$ и $\Delta\rho/\rho(M)$:

$$\varphi_k(z_p) = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

* Мы заменяем $\int_{z_J}^{z_p} \omega dt$ на $\omega t|_{z_p} - \omega t|_{z_J}$, что значительно упрощает выкладки и не меняет существенно результаты.

$$\begin{aligned} bk_0 &= n\pi - \varphi_1, \\ k_0 &= (n\pi - \varphi_1)/b, \end{aligned} \quad (8)$$

что соответствует уравнению $\left(\text{так как } k = 10^3 \left(\frac{H_0}{c} \right) z_p \left(\frac{M\Omega^{-1}}{10^{15} M_\odot} \right)^{-1/3} \right)$

$$(M_J/M_0)^{1/3} = n\pi - \varphi_1 \quad (9)$$

или

$$M_0/M_J = 1/(n\pi - \varphi_1)^3 \approx 1/(n\pi)^3 \quad (n \gg 1).$$

Нули функции $u(M)$ будут сдвинуты:

$$\frac{M_0}{M_J} = \frac{1}{[(n + 1/2)\pi - \varphi_1]^3}. \quad (10)$$

В [3] было показано, что скачок амплитуды возмущений плотности во время рекомбинации связан с наличием скорости, и поэтому реальное распределение объектов по массам, казалось бы, должно описываться последней формулой. В действительности, каждому M соответствует широкий спектр k , поэтому зависимость (10) будет сильно замыта. Кроме того, наблюдать такое распределение едва ли удастся, так как массе галактики $M \sim 10^{11} M_\odot$ при $\Omega = 1$ соответствует $n \sim 15$, а при $\Omega = 0,1$ $n \sim 70$ и $\Delta M/M \ll 1$. В случае $\Omega = 1$ этот эффект дает $\Delta M \sim M$ для скоплений галактик, но возможно, что он маскируется процессами на поздней стадии расширения Вселенной.

Эффект, рассмотренный в данном разделе, имеет место лишь для адиабатических возмущений плотности, его обнаружение позволило бы сделать выбор между возмущениями плотности различной природы.

3. ФЛУКТУАЦИИ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С АДИАБАТИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ПЛОТНОСТИ

Зависимость амплитуды возмущений плотности и скорости движения вещества от масштаба должна отразиться и на флуктуациях реликтового излучения.

Представим возмущения плотности в виде интеграла Фурье:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a_k \Psi(k) \exp(ikr) d^3k, \quad (11)$$

где a_k — случайная функция вектора k («белый шум»), а $\Psi(k)$ задает спектр возмущений плотности в момент рекомбинации;

$$\begin{aligned} a(k) a(k') &= \delta(k - k'), \\ \frac{\Delta\rho}{\rho}(M) &= \frac{\Delta\rho}{\rho}(k_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\int_0^{k_0} \Psi^2(k) d^3k \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Напомним, что $k_0 = (H_0/c) z_p 10^3 (M\Omega^{-1}/10^{15} M_\odot)^{-1/3}$.

До момента рекомбинации при полной непрозрачности адиабатические флуктуации температуры в каждой точке были однозначно связаны с возмущениями плотности $\Delta T/T = (1/3) \Delta\rho_m/\rho_m$. После рекомбинации наступила полная прозрачность, и в настоящее время наблюдениям доступна уже не трехмерная, а двумерная картина первичных флуктуаций температуры, соответствующая возмущениям плотности в пе-

риод рекомбинации. (Наблюдается картина, зависящая от углов θ и φ на небесной сфере и проинтегрированная по третьей координате r , эквивалентной оптической толщине по томсоновскому рассеянию. Если бы рекомбинация происходила мгновенно, то наблюдалась бы картина флуктуаций именно в момент рекомбинации.) Учет немгновенности рекомбинации, как показано в [3], приводит к тому, что главную роль в возникновении флуктуаций температуры играет рассеяние излучения на движущемся веществе. При этом

$$\frac{\Delta T}{T} = \int_0^{\infty} \frac{u_1}{c} e^{-\tau(z)} d\tau(z), \quad (13)$$

где u_1 — проекция скорости на направление к наблюдателю, τ — оптическая толщина по томсоновскому рассеянию. Главный вклад при интегрировании по радиусу дает узкая область вблизи $r_0 = c/H_0 z_p^{3/2} \Omega^{1/2}$, соответствующего моменту рекомбинации. Поэтому

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a_k f(k) \exp(ikr_0) d^3k, \quad (14)$$

причем $f(k) = \text{const } \Psi(k)/ik$. Действительно, скорости движения вещества связаны с возмущениями плотности уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \Delta \rho / \rho}{\partial t} = \text{div } u \approx \frac{u}{il} \sim iku$$

и $u \sim \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{t}{ik}$, откуда следует $f(k) \sim \Psi(k)/ik$. Таким образом, для любого заданного спектра возмущений плотности легко найти спектр флуктуаций температуры. Очевидно, что если спектр возмущений промодулирован осциллирующей функцией, то же самое имеет место и для спектра флуктуаций. Для выделения этих колебаний (а значит, и определения природы флуктуаций) предполагается следующая обработка результатов наблюдений.

Наблюдаемая на всем небе картина флуктуаций раскладывается по сферическим функциям. При этом используется тот факт, что при разложении $\exp(ikr_0)$ по сферическим функциям коэффициентами при $P_{l,m}(\theta, \varphi)$ являются функции Бесселя полуцелого индекса $J_{l+1/2}(kr_0)$, имеющие максимум при $l \sim kr_0$, и малые как при $l \gg kr_0$, так и при $l \ll kr_0$. Именно из-за этого свойства разложения $\exp(ikr_0)$ по сферическим функциям при достаточно гладких $f(k)$ и $a(k)$ коэффициенты разложения наблюдаемой на небе картины флуктуаций должны отображать поведение $f(k)$. В разд. 4 показано, что если $f(k) = k^a (1 + \cos bk)$ и $a < 0$, то колебания $f(k)$ должны вести к сильным колебаниям в зависимости от индекса l коэффициентов разложения наблюдаемой картины флуктуаций по сферическим функциям.

Спектр возмущений плотности до сих пор неизвестен, но значения $a < 0$ вполне вероятны. Отметим лишь, что для $M < 10^{11} M_\odot$ трение вещества об излучение в плазменном периоде $z > z_p$ приводит к диссипации энергии звуковых волн и к экспоненциально малым $\Delta \rho / \rho$ [10], т. е. при k меньше определенного $k_{\max}$ $\Psi(k) \rightarrow 0$.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть наблюдаемая величина имеет вид

$$\Delta T/T = \int a(K) f(K) \exp\left(iK \frac{r}{r_0}\right) d^3 K, \quad (\text{П.1})$$

где $f(K)$ — известная функция, а $a(K)$ — случайный процесс, который является белым шумом, т. е.

$$\overline{a(K) a(K')} = \delta(K - K').$$

Здесь и ниже черта означает усреднение. Тогда коэффициенты разложения $a(K)$ по сферическим функциям удовлетворяют соотношениям

$$\overline{A_{lm} A'_{l'm'}} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{\delta(K - K')}{K^2}.$$

(Здесь $K = kr_0$, ниже $B = b/r_0$.)

Наблюдаемая функция $\rho(r)$ при фиксированном r также может быть разложена по сферическим функциям:

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi \varepsilon_m (l+m)!}} (\alpha_{lm}(r) \cos m\varphi + \beta_{lm} \sin m\varphi) P_l^m(\cos\theta),$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & (m=0) \\ 1 & (m>0) \end{cases}.$$

Для коэффициентов разложения $\alpha_{lm}(r)$, $\beta_{lm}(r)$ с вероятностью единица справедливо

$$\frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l \overline{\alpha_{lm}^2} + \overline{\beta_{lm}^2} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l (\alpha_{lm}^2 + \beta_{lm}^2) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2l+1}}\right)\right), \quad (\text{П.2})$$

где $O\left(\frac{1}{\sqrt{2l+1}}\right)$ — величина порядка $\frac{1}{\sqrt{2l+1}}$ при $l \rightarrow \infty$. С другой стороны,

$$\frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^l \overline{\alpha_{lm}^2} + \overline{\beta_{lm}^2} = \frac{\pi^3}{2} \int_0^{\infty} f^2(K) J_{l+1/2}^2(K) K dK. \quad (\text{П.3})$$

Предполагаются два возможных вида $f(K)$:

$$1) f(K) = K^a,$$

$$2) f(K) = \frac{K^a}{2} (1 + \cos bK). \quad (\text{П.4})$$

Если $a > 0$, то функция $f(K)$ отлична от нуля только для $K \leq K_{\max}$. По результатам наблюдения угловой зависимости $\rho(r)$ нужно выяснить, какому из этих видов $f(K)$ следует отдать предпочтение.

Интерес представляют достаточно большие значения l , такие, чтобы величина $O(1/\sqrt{2l+1})$ была мала. С другой стороны, не имеет смысла рассматривать гармоники с такими l , что $(1/\sqrt{2l+1}) < \delta$, где δ — относительная среднеквадратичная ошибка измерения, т. е. должно быть $l < 1/2\delta^2$.

В интересующих нас случаях величина B в (4) меняется от $1/6$ до $1/30$. Для того, чтобы можно было наблюдать колебания в случае второго вида $f(K)$, необходимо достигнуть таких значений l , что $Bl \gg 1$. Для таких l рекомендуется следующая процедура, позволяющая уменьшить случайную ошибку: сумму

$$S_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=0}^{l+1/4B} (\alpha_{lm}^2 + \beta_{lm}^2)$$

после вычисления следует усреднить для каждого l по интервалу значений l порядка $1/B$, например,

$$\bar{S}_l = 2B \sum_{K=l-1/4B}^{l+1/4B} S_K,$$

что уменьшит случайную ошибку в $\sqrt{B}$ раз.

Если $a < -1/2$ и $\alpha = -a$, то интеграл в формуле (П.3) для двух видов $f(K)$ может быть вычислен:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^\infty K^{-2a+1} J_{l+1/2}^2(K) dK &\sim A_1 l^{-2a+1}, \\ 2) \int_0^\infty K^{-2a+1} J_{l+1/2}^2 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos BK + \frac{1}{8} \cos 2BK \right) dK &\sim \\ &\sim A_2 l^{-2a+1} + \frac{A_3}{\sqrt{Bl}} \cos B \left(l + \frac{1}{2} \right) + \frac{A_4}{\sqrt{Bl}} \cos 2B \left(l + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

В обоих случаях можно выделить главный член асимптотики, предположив, что он имеет вид Al^{-2a+1} , и определив A методом наименьших квадратов.

Поскольку относительная случайная ошибка есть величина порядка $O(\sqrt{B/2l+1})$, а амплитуда ожидаемых колебаний в $1/B$ раз больше, то колебания могут быть обнаружены, если они имеют место. Несмотря на то, что ситуация имеет место, если $a > 0$ и $K_{\max} > l$. Для простоты в дальнейшем будем рассматривать функции Бесселя с целым индексом $J_l(K)$.

Используя асимптотику Карлини для функций Бесселя с целым индексом, получим с точностью до членов порядка $l^2/K_{\max}^2$

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{K_{\max}} f^2(K) J_l^2(K) K dK &\sim A_1(K_{\max}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_{\max}^{2a} \sin 2K_{\max}, \\ 2) \int_0^{K_{\max}} f^2(K) J_l^2(K) K dK &\sim A_2(K_{\max}) + \frac{1}{4\pi} K_{\max}^{2a} \sin BK_{\max}. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Различие в постоянных $A_1(K_{\max})$ и $A_2(K_{\max})$ порядка $l/K_{\max}$, т. е. для широкого интервала значений l величина, меньшая, чем $O(\sqrt{B/2l+1})$.

Таким образом, этот случай неблагоприятен для обнаружения различий между видами $f(K)$.

Случай $K_{\max} \sim l$ для $a > 0$ полностью аналогичен $a < -1/2$, с той лишь разницей, что главный член в зависимости $\bar{S}_l$ имеет вид Al^{2a+1} , т. е. является растущей функцией l . Поскольку для $a < -1/2$ и $a > 0$ характер асимптотики интегралов одинаков, то можно ожидать, что для $-1/2 \leq a \leq 0$ результаты будут аналогичными. Если $K_{\max} \ll l$, то

$$J_l(K) = (K_{\max}/2)^l [1 + O(K_{\max}/l)]/l!, \quad \text{и интегралы} \quad \int_0^{K_{\max}} f^2(K) J_l^2(K) K dK$$

могут быть вычислены для любых a с относительной точностью $O(1/l)$:

$$1) \int_0^{\bar{K}_{\max}} f^2(K) J_l^2(K) K dK = \frac{K_{\max}^{2a+1}}{2\pi l^2} \left(\frac{K_{\max} l}{2l} \right)^{2l},$$

$$2) \int_0^{K_{\max}} f^2(K) J_l^2(K) K dK = \frac{K_{\max}^{2a+1}}{2\pi l^2} \left(\frac{K_{\max} l}{2l} \right)^{2l} \left(\frac{1 + \cos BK_{\max}}{2} \right)^2,$$

т. е. в случае $K_{\max} \ll l$ колебания не могут быть наблюдаемыми.

Таким образом, случай растущих $f(K)$ неблагоприятен для обнаружения колебаний. Действительно, для того, чтобы колебания могли быть экспериментально обнаружены, должен быть промерен достаточно большой интервал значений l , по крайней мере такой, что $1 < Bl < 2\pi$. Но если даже для максимальных l из этого интервала $K_{\max} \sim l$, то мы попадаем для меньших l в область действия соотношения (6).

Результаты расчетов приведены на рис. 2 а, 2 б. По оси абсцисс отложены значения l , по оси ординат — значения $\Sigma(l) = l^{-(2a+1)} \bar{S}(l)$. Значения a указаны на графиках $b = 1/30$, $K_{\max} = 160$. На рис. 2 б видно, что для отрицательных значений с уменьшением абсолютного значения глубина модуляции уменьшается, но колебания остаются явно выраженными. При $a > 0$ (рис. 2 а) колебания не наблюдаемы совсем.

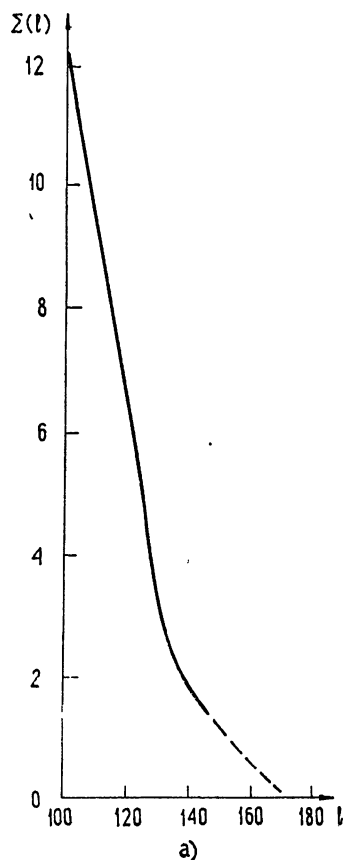


Рис. 2а. Зависимость средних значений коэффициентов разложения флуктуаций температуры по сферическим гармоникам; случай $a > 0$.

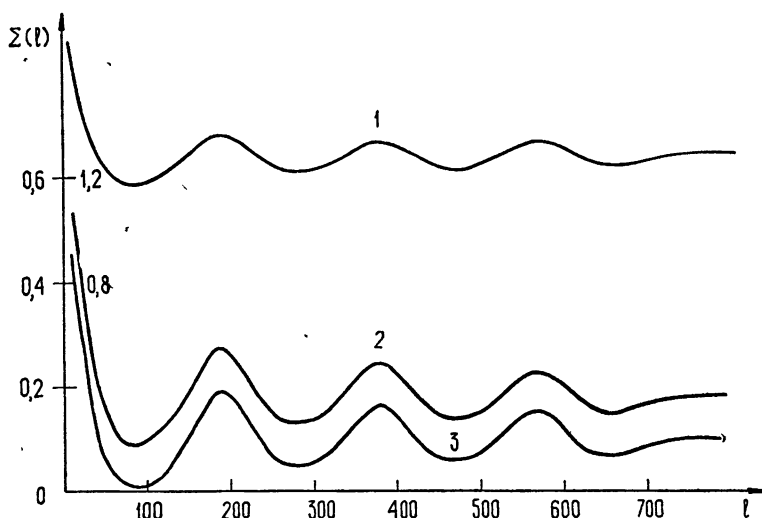


Рис. 26. Зависимость средних значений коэффициентов разложения флуктуаций температуры по сферическим гармоникам; случай $a < 0$ ($1-a = -0,55$; $2-a = -4,0$; $3-a = -1,75$; масштаб $\Sigma(l)$ для кривой 1 указан справа от оси).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Silk, *Nature*, **218**, 453 (1968).
2. R. K. Sachs, A. M. Wolf, *Appl. J.*, **147**, 73 (1967).
3. R. A. Sunyaev, Ya. B. Zeldovich, *Appl. Sp. Sci.*, **7**, 3 (1970).
4. E. K. Concklin, *Nature*, **222**, 971 (1969).
5. А. Д. Сахаров, *ЖЭТФ*, **49**, 345 (1965).
6. M. S. Longair, R. A. Sunyaev, *Nature*, **223**, 719 (1969).
7. Я. Б. Зельдович, В. Г. Курт, Р. А. Сюняев, *ЖЭТФ*, **55**, 278 (1968).
8. P. J. E. Peebles, *Appl. J.*, **153**, 1 (1968).
9. G. Chibisov, L. M. Ozernoy, *Astrophys. Lett.*, **3**, 189 (1969).
10. J. Silk, *Appl. J.*, **151**, 459 (1967).

Институт прикладной математики
АН СССР

Поступила в редакцию
5 октября 1970 г.

OBSERVATION OF RELICT RADIATION FLUCTUATIONS AS A METHOD TO DISTINGUISH ADIABATIC PERTURBATIONS OF MATERIAL DENSITY IN THE UNIVERSE LEADING TO GALAXY FORMATION

Ya. B. Zel'dovich, A. Kh. Rakhmatulina, R. A. Syunyaev

A peculiar periodic dependence of the amplitude on the mass is typical of adiabatic density perturbations.

A detailed investigation of the relict radiation fluctuations may lead to clarifying the nature of primary density perturbations with which is associated the formation of galaxies and galactic clusters.

УДК 533.922

О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В. А. Иванов, В. В. Тамойкин

Рассмотрена задача об обратном рассеянии электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, содержащей случайные неоднородности электронной концентрации. Рассмотрение проведено в предположении узких диаграмм направленности передающей и приемной антенн. Вычислены пространственно-временные корреляционные функции поля отдельных нормальных волн, а также их взаимная корреляция. Выяснено влияние наклона магнитного поля Земли на статистические характеристики принимаемого сигнала.

Для изучения неоднородной структуры ионосферы часто используется метод корреляционной обработки сигнала, принимаемого на Земле. При этом, как правило, рассматривается случай рассеяния «вперед» [1-3], когда основную роль в процессе рассеяния играют крупномасштабные неоднородности с размерами $l \gg \lambda$.

В последнее время в связи с развитием метода частичных отражений [4, 5] большой интерес приобрело изучение статистических характеристик поля обратного рассеяния.

Частичные отражения имеют место в условиях, когда частота зондирующего сигнала превышает плазменную частоту той области ионосферы, где происходит рассеяние падающего поля.

Теоретическому и экспериментальному исследованию поля обратного рассеяния посвящен ряд работ [6-10]. К сожалению, интерпретация экспериментальных результатов проводится рядом авторов на основе известных соотношений, полученных для случая рассеяния «вперед», что не всегда корректно. Кроме того, в работах [6-8], на наш взгляд, нет последовательного учета магнитного поля.

В настоящей работе рассмотрена задача об обратном рассеянии электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, содержащей случайные неоднородности электронной концентрации. Расчет проведен с учетом диаграмм направленности передающей и приемной антенн. Получено выражение для поля рассеяния. Для случая слабой гиротропии рассчитаны автокорреляция и функция взаимной корреляции обыкновенной и необыкновенной волн. На основе полученных формул выяснена корреляция амплитуд и фаз нормальных волн, найдена связь средней разности фаз $\bar{\theta}_p$ и разброса θ_p относительно среднего значения $|\theta_p - \bar{\theta}_p|^*$ со средними характеристиками среды. Показано, что измерение величины $|\theta_p - \bar{\theta}_p|$ позволяет определить локальную концентрацию электронов в рассеивающем объеме.

1. ПОЛЕ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Поле обратного рассеяния электромагнитных волн в магнитоактивной плазме будем вычислять способом, описанным в [12]. Предполагаем,

* Черта сверху здесь и ниже означает статистическое усреднение.

что средние свойства плазмы медленно меняются с высотой z и флуктуационные отклонения N —слабые. Это позволяет при расчете использовать метод возмущений, а поле падающей волны записать в приближении геометрической оптики.

На рис. 1 показана геометрия задачи. Передающая и приемная антенны расположены на уровне $z = 0$, где плазма отсутствует, а рассеивающий слой находится между плоскостями $z = z_0 - L_3/2$, $z = z_0 + L_3/2^*$.

Запишем поле падающей волны, создаваемое передающей антенной. Для этого допустим, что на антенне площадью S_1 задано постоянное поле $E_0\{E_{0x}, E_{0y}, 0\}$ ($\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = E_0 K_1(r)$, E_0 —некоторая постоянная величина, а функция $K_1(r)$ равна единице на антенне и нулю вне ее). В результате поле антенны в произвольной точке магнитоактивной плазмы в геометрико-оптическом приближении определяется формулой

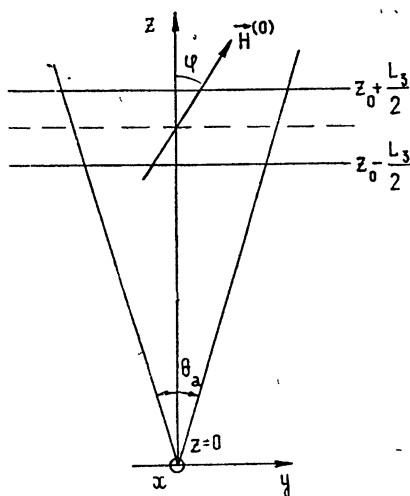


Рис. 1.

$$E_n(r, z) = \sum_{l=1}^2 \iint_{-\infty}^{\infty} C_l \exp \left[-i \int_0^z q_l(x, z) dz \right] F_0(x) e^{i x r} dx, \quad (1)$$

где $l = 1$ соответствует обыкновенной, а $l = 2$ —необыкновенной волнам, C_l —векторные амплитуды нормальных волн, определяемые (в случае достаточно узких диаграмм направленности) соотношениями [11]

$$C_l \approx \sqrt{\frac{1 - Q_l^2(0)}{1 - Q_l^2(z)}} \frac{C_l(0)}{\sqrt{n_l(z)}}, \quad (2)$$

Q_l , n_l —коэффициенты поляризации и показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн,

$$C_{1x}(0) = \frac{Q_2(0)E_{0x} - E_{0y}}{Q_2(0) - Q_1(0)}, \quad C_{2x}(0) = \frac{E_{0y} - Q_1(0)E_{0x}}{Q_2(0) - Q_1(0)}, \quad C_{1y}(0) = Q_1(0)C_{1x}(0), \quad (3)$$

$q_l(x, z) = \sqrt{k_0^2 n_l^2(z, x) - x^2}$ —продольное волновое число, являющееся корнем алгебраического уравнения 4-го порядка [11],

$$F_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} K_1(r) e^{-i x r} dr. \quad (4)$$

Используя методику расчета, развитую в [11], и выбирая объем интегрирования между плоскостями $z = 0$ и $z = \infty$ (уровни, где плазма отсутствует), легко показать, что выражение для углового спектра поля рассеяния в плоскости $z = 0$

$$a(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e(x, y, 0) \exp[-i(x_1 x + x_2 y)] dx dy \quad (5)$$

* В случае импульсного зондирования величина $L_3 = c \tau_n/2$, где τ_n —длительность импульса.

удовлетворяет соотношению

$$a(-\kappa)E^{(1)}(z=0) = \frac{ik_0^2}{(2\pi)^2 2\kappa_3} \int_{z_0-L_3/2}^{z_0+L_3/2} \int_{-\infty}^{\infty} E^{(1)}(z) \{\Delta \varepsilon E_n(r, z)\} e^{i\kappa r} dr dz, \quad (6)$$

где $\kappa_3 = \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$, $\Delta \varepsilon$ — флуктуационные отклонения тензора диэлектрической проницаемости плазмы, $E_m^{(1)}(z) = A_m(z) \exp\left(-i \int_0^z \tilde{q}_m dz\right)$ — угловой спектр вспомогательного поля, удовлетворяющего уравнениям Максвелла в среде без источников и с противоположным направлением магнитного поля $H^{(0)}$, $A_m(z)$, $q_m(z)$ — медленно меняющиеся амплитуды и продольные волновые числа нормальных волн в такой среде ($A_{x1,2}(z=0) \approx 1$, $A_{y1,2}(z=0) \approx \pm i$).

С учетом сказанного из (6) получаем

$$\dot{a}_x(-\kappa) = \frac{ik_0^2}{4(2\pi)^2 \kappa_3} \sum_{m=1}^2 \Phi_m(\kappa), \quad a_y(-\kappa) = \frac{k_0^2}{4(2\pi)^2 \kappa_3} \sum_{m=1}^2 (-1)^{m-1} \Phi_m(\kappa), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_m(\kappa) = & \sum_{l=1}^2 \int_{z_0-L_3/2}^{z_0+L_3/2} (A_m P_l) \int_{-\infty}^{\infty} \int \Delta v(r, z) F_0(\kappa') \times \\ & \times \exp\left[i\kappa r + i\kappa' r - i \int_0^z (\tilde{q}_m(z, \kappa) + q_l(z, \kappa)) dz\right] d\kappa' dr dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\Delta \varepsilon C_l = P_l(C_l) \Delta v(r, z, t); \quad (9)$$

$$\Delta v(r, z, t) = \frac{4\pi e^2}{m \omega^2} \Delta N(r, z, t); \quad (10)$$

$$P_l(C_l) = \frac{1}{1-u} \{C_l - u \hbar_0 (\hbar_0 C_l) - i \sqrt{u} [\hbar_0 C_l]\}, \quad (11)$$

$v = \omega_0^2/\omega^2$, ω_0 — ленгмюровская частота, N — электронная концентрация, e , m — заряд и масса электрона, ω — рабочая частота, $u = \omega_H^2/\omega^2$, ω_H — гирочастота, $\hbar$ — единичный вектор, направленный вдоль внешнего магнитного поля.

Поле на выходе приемной антенны определяется интегрированием e по площади раскрытия S_2 :

$$E_s = \frac{1}{S_2} \iint_{S_2} e(x, y, 0) dx dy = \frac{(2\pi)^2}{S_2} \int_{-\infty}^{\infty} a(-\kappa) \tilde{F}_0(\kappa) d\kappa, \quad (12)$$

где

$$\tilde{F}_0(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(r) e^{-i\kappa r} dr \quad (13)$$

— угловой спектр поля, определяемый площадью раскрытия приемной антенны.

Отсюда для компонент поля обратного рассеяния имеем

$$E_{sx} = \frac{ik_0^2}{4S_2} \sum_{m=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(x)}{x_3} \Phi_m(x) dx, \quad (14)$$

$$E_{sy} = \frac{ik_0^2}{4S_2} \sum_{m=1}^2 (-1)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}_0(x)}{x_3} \Phi_m(x) dx.$$

Если диаграммы направленности передающей и приемной антенн достаточно узкие, то $F_0(x')$ и $\tilde{F}_0(x)$ в выражениях (14) — «острые» функции x ($|x| \sim \lambda/D_2$, $|x'| \sim \lambda/D_1$), что позволяет положить $x_3 \approx k_0$, а $q_l(x')$ и $q_m(x)$ представить в виде

$$q_l(z, x') \approx k_0 n_l(z, \varphi) + \alpha_l(z, \varphi) x'_2 + \beta_l(z, \varphi) x'^2_2 + \gamma_l(z, \varphi) x'^2_2; \quad (15)$$

здесь φ — угол между h_0 и осью z . Величины α_l и β_l отличны от нуля лишь в условиях, когда угол φ не равен нулю и $\pi/2$. Далее положим

$$\int_0^z q_l(z) dz \approx k_0 \int_0^z n_l dz + \Psi_l(z, x'),$$

$$\tilde{q}_m(z) \approx k_0 \tilde{n}_m(z, \varphi) + \alpha_m(z, \varphi) x_2 + \beta_m(z, \varphi) x^2_2 + \gamma_m(z, \varphi) x^2_2, \quad (16)$$

$$\int_0^z q_m(z) dz \approx k_0 \int_0^z \tilde{n}_m(z) dz + \tilde{\Psi}_m(z, x),$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_l(z, x') &= a_l(z) x'_2 + b_l(z) x'^2_2 + c_l(z) x'^2_2, \\ \tilde{\Psi}_m(z, x) &= a_m(z) x_2 + b_m(z) x^2_2 + c_m(z) x^2_2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$a_{l,m} = \int_0^z \alpha_{l,m} dz, \quad b_{l,m} = \int_0^z \beta_{l,m} dz, \quad c_{l,m} = \int_0^z \gamma_{l,m} dz.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{l,m} &= \frac{v \sqrt{u_L u_T} (1 - n_{l,m}^2)}{(1 - u - v + u_L v) \left\{ 2n_{l,m}^2 - \frac{2[(1 - v)^2 - u] + v(u_L + u)}{1 - u - v + u_L v} \right\}}, \\ \beta_{l,m} &= - \left\{ \left[\alpha_{l,m} [6\alpha_{l,m} n_{l,m}^2 (1 - u - v + u_L v) - \alpha_{l,m} (2[(1 - v)^2 - u] + v(u_L + u)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2v \sqrt{u_L u_T} (3n_{l,m}^2 - 1) \right] \left[(1 - u - v + u_L v) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[2n_{l,m}^2 - \frac{2[(1 - v)^2 - u] + v(u_L + u)}{1 - u - v + u_L v} \right] \right] \right]^{-1} + \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ \frac{vu_T(1 - n_{l,m}^2)}{(1 - u - v + u_L v) \left[2n_{l,m}^2 - \frac{2[(1-v)^2 - u] + v(u_L + u)}{1 - u - v + u_L v} \right]} \left\{ \frac{1}{2k_0 n_{l,m}}, \right.$$

$$\gamma_{l,m} = \frac{[2(1 - u - v) + u_L v] n_{l,m}^2 - [2(1 - v)^2 - u(1 - v) - u]}{(1 - u - v + u_L v) \left[2n_{l,m}^2 - \frac{2[(1-v)^2 - u] + v(u_L + u)}{1 - u - v + u_L v} \right]} \frac{1}{2k_0 n_{l,m}},$$

$$u_L = u \cos^2 \varphi, \quad u_T = u \sin^2 \varphi.$$

Учитывая это, выделим в (13), (14) интеграл по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$:

$$J_1 = \iiint_{-\infty}^{\infty} F_0(\mathbf{x}') \tilde{F}_0(\mathbf{x}) \exp\{i(\mathbf{x} + \mathbf{x}')\mathbf{r} - i[\tilde{\Psi}_m(z, \mathbf{x}) + \Psi_l(z, \mathbf{x}')]\} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} K_1(\mathbf{r}_1) K_2(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\mathbf{x}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + i\mathbf{x}'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) -$$

$$- i[\tilde{\Psi}_m(z, \mathbf{x}) + \Psi_l(z, \mathbf{x}')]\} d\mathbf{x} d\mathbf{x}'.$$

Если выполнены неравенства

$$\frac{D_{1,2}}{4(b_{l,m} + c_{l,m})} \ll 1, \quad (19)$$

то выражение для J_1 можно представить в виде

$$J_1 \approx - \frac{S_1 S_2}{4(2\pi)^2 \sqrt{c_l c_m (b_l + c_l)(b_m + c_m)}} \exp\left[i \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{c_l} + \frac{1}{c_m}\right) + \right. \quad (20)$$

$$\left. + i \frac{(y - a_l)^2}{4(b_l + c_l)} + i \frac{(y - a_m)^2}{4(b_m + c_m)}\right] f_1\left(\frac{x}{2c_l}, \frac{y - a_l}{2(b_l + c_l)}\right) f_2\left(\frac{x}{2c_m}, \frac{y - a_m}{2(b_m + c_m)}\right),$$

где

$$f_{1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}) = \frac{1}{S_{1,2}} \int_{S_{1,2}} \exp(-i\alpha x_{1,2} - i\beta y_{1,2}) d\alpha d\beta \quad (21)$$

— диаграммы направленности передающей и приемной антенн. Легко видеть, что их максимумы смещены в плоскости yz на величину $a_{l,m}$, связанную с наклоном магнитного поля Земли по отношению к вертикали.

Согласно (14), (20) x -компонента рассеянного поля равна

$$E_{sx} = - \frac{ik_0 S_1}{64\pi^2} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \int_{z_0 - L_2/2}^{z_0 + L_2/2} \frac{(A_m P_l)}{\sqrt{c_l c_m (b_l + c_l)(b_m + c_m)}} \times$$

$$\times \exp\left[-ik_0 \int_0^z (n_l + \tilde{n}_m) dz\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{c_l} + \frac{1}{c_m}\right) + i \frac{(y - a_l)^2}{4(b_l + c_l)} + \right. \quad (22)$$

$$\left. + i \frac{(y - a_m)^2}{4(b_m + c_m)}\right] \Delta v(x, y, z) f_1\left(\frac{x}{2c_l}, \frac{y - a_l}{2(b_l + c_l)}\right) f_2\left(\frac{x}{2c_m}, \frac{y - a_m}{2(b_m + c_m)}\right) dx dy dz.$$

Выражение для E_{sy} отличается от (22) множителем $(-1)^{m-1} l$.

Поле E_s имеет довольно сложный характер, поэтому целесообразно рассмотреть вначале рассеяние одной из нормальных волн. В частности, если на неоднородный слой плазмы падает только обыкновенная волна ($C_2 = 0$), то поле рассеяния имеет вид

$$E_{sx} = -\frac{ik_0 S_1}{64\pi^2} \sum_{m=1}^2 \int_{z_0-L_0/2}^{z_0+L_0/2} \frac{(A_m P_1)}{\sqrt{c_1 c_m (b_1 + c_1)(b_m + c_m)}} \exp\left[-ik_0 \int_0^z (n_1 + \tilde{n}_m) dz\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{x^2}{4} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_m}\right) + i \frac{(y-a_1)^2}{4(b_1 + c_1)} + i \frac{(y-a_m)^2}{4(b_m + c_m)}\right] \Delta v(x, y, z) f_1 f_2 dx dy dz.$$

Появление в формуле (23) слагаемого с индексом «2,1» связано с тем, что при рассеянии волны одного типа возникает волна другого типа. Правда, при выполнении условий

$$u \ll 1, \quad \frac{uv \sin^2 \varphi}{(1-v)^2} \ll 1 \quad (24)$$

явлением взаимодействия волн можно пренебречь, поскольку, как показывает исследование, отношение $(A_2 P_1)/(A_1 P_1) \sim uv \sin^2 \varphi / (1-v)^2 \ll 1$.

2. СЛУЧАЙ СЛАБОЙ ГИРОТРОПИИ ($u \ll 1$)

Часто в практических задачах выполняется условие слабой гиротропии ($u \ll 1$). Если, кроме того, предполагать, что v не очень близко к единице, то неравенства (24) могут быть выполнены. Следовательно, в этом случае имеет место рассеяние одного типа нормальных волн в тот же тип волн.

Легко показать, что с точностью до членов порядка $\sqrt{u}$

$$n_{1,2}^2 \approx 1 - v \pm \sqrt{u} v \cos \varphi, \quad \varphi < \pi/2; \quad (25)$$

$$a_{1,2} \approx \pm \frac{\sqrt{u} v \sin \varphi}{2(1-v)}, \quad \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad (26)$$

$$\frac{\beta_{1,2}}{\gamma_{1,2}} \sim u \ll 1, \quad \gamma_{1,2} \approx -\frac{1}{2k_0 n_{1,2}}. \quad (27)$$

В рассматриваемом приближении поле рассеяния обыкновенной волны равно

$$E_{sx}^{o6} = iE_{sy}^{o6} = -\frac{ik_0 S_1}{64\pi^2} \int_{z_0-L_0/2}^{z_0+L_0/2} \frac{(A_1 P_1)}{c_1^2(z)} \exp\left(-2ik_0 \int_0^z n_1(z) dz\right) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \frac{x^2}{2c_1(z)} + i \frac{(y-a_1(z))^2}{2c_1(z)}\right] \Delta v(x, y, z) f_1 f_2 dx dy dz.$$

Выражение для поля необыкновенной волны ($E_{sx}^H = -iE_{sy}^H$) получается из (28) заменой индекса «1» на индекс «2».

Далее подсчитаем временную корреляционную функцию. Для этого предполагаем, что неоднородности электронной концентрации $\Delta N(r, t)$ движутся в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью V (мо-

дель замороженной турбулентности). Тогда, согласно (28), корреляционная функция $\Gamma_{E^{06}}(\tau) = \overline{E^{06}(t) E^{06*}(t + \tau)} = \overline{2E_x^{06}(t) E_x^{06*}(t + \tau)}$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{E^{06}}(\tau) = \Gamma_{11}(\tau) \approx & \frac{S_1^2 k_0^6}{16(2\pi)^4} \int_{z_0 - L_3/2}^{z_0 + L_3/2} \int \frac{(A_1(z_1) P_1(z_1))(A_1(z_2) P_1(z_2))^*}{L_{rp1}^2 L_{rp2}^2} \times \\ & \times \exp \left(-2ik_0 \int_{z_2}^{z_1} n_1(z) dz \right) \int \int \int \int \exp \left[i \frac{k_0 x_1^2}{L_{rp1}} - i \frac{k_0 x_2^2}{L_{rp2}} + \right. \\ & \left. + i \frac{k_0 (y_1 - a_1(z_1))^2}{L_{rp1}} - i \frac{k_0 (y_2 - a_1(z_2))^2}{L_{rp2}} \right] \times \\ & \times \Gamma_{\Delta v}(\rho_1 - \rho_2 - V\tau, z_1 - z_2) f_1(\rho_1) f_1(\rho_2) f_2(\rho_1) f_2(\rho_2) d\rho_1 d\rho_2 dz_1 dz_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $L_{rp1,2} = \int_0^{z_{1,2}} \frac{dz}{n_1(z)}$ — групповой путь волны,

$$\rho = \{x, y, \theta\}. \quad (30)$$

Предполагая, что масштаб изменения средних свойств среды, толщина слоя L_3 и характерный размер пятна, создаваемого диаграммами направленности антенн в области рассеяния, велики по сравнению с радиусом корреляции l_0 флуктуаций $\Delta v(\mathbf{r})$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{E^{06}}(\tau) \approx & \frac{S_1^2 k_0^6}{16(2\pi)^4} \int_{-L_3/2}^{L_3/2} \frac{|A_1(z_0 + z_1) P_1(z_0 + z_1)|^2}{L_{rp}^4(z_0 + z_1)} \int \int \int \int \exp \left[-2ik_0 n_1 \zeta + \right. \\ & \left. + i \frac{k_0}{L_{rp}(z_0 + z_1)} (2\rho_1 V\tau + 2\rho_1 \rho - \rho V\tau) - i \frac{2k_0}{L_{rp}(z_0 + z_1)} a_1(z_0 + z_1) (\rho_y + V_y \tau) \right] \times \\ & \times \Gamma_{\Delta v}(\rho, \zeta) f_1 \left(\rho_1 + \frac{V\tau}{2} \right) f_2 \left(\rho_1 + \frac{V\tau}{2} \right) f_1 \left(\rho_1 - \frac{V\tau}{2} \right) f_2 \left(\rho_1 - \frac{V\tau}{2} \right) d\rho d\rho_1 d\zeta dz_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Для простоты дальнейших вычислений аппроксимируем функцию регулярной освещенности, обусловленную диаграммами направленности в области рассеяния, следующим образом:

$$f_1(\rho_1) f_2(\rho_1) = \exp \left[-\frac{x_1^2}{L_1^2} - \frac{(y_1 - a_1)^2}{L_1^2} \right], \quad (32)$$

где $2L_1 \approx z_0 \theta_a$, θ_a — ширина диаграммы направленности эквивалентной антенны с $f(\rho_1) = f_1(\rho_1) f_2(\rho_1)$. Кроме того, будем считать, что функция корреляции флуктуаций $\Delta v(\mathbf{r})$ равна

$$\Gamma_{\Delta v}(\rho, \zeta) = \overline{(\Delta v)^2} \exp \left(-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \zeta^2}{l_0^2} \right). \quad (33)$$

Отсюда имеем

$$\Gamma_{E^{06}}(\tau) \approx \frac{k_0^6 S_1^2 l_0^3 L_1^2}{32\pi^{3/2}} \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \frac{|A_1(z_0+z_1)P_1(z_0+z_1)|^2}{[2L_{\text{гр}}(z_0+z_1)]^4} \exp\left(-k_0^2 n_1^2 l_0^2 - \frac{V^2 \tau^2 k_0^2 L_1^2}{2L_{\text{гр}}^2}\right) dz_1, \quad (34)$$

причем выражение (34) справедливо при условиях

$$L_1 \gg l_0, \quad \lambda L_{\text{гр}} \gg l_0 L_1. \quad (35)$$

Из (34) можно найти время корреляции (характерное время пульсаций принимаемого сигнала), которое определяется соотношением

$$\tau_0 \approx \frac{\sqrt{2} L_{\text{гр}}(z_0)}{k_0 L_1 V}, \quad (36)$$

т. е. τ_0 возрастает с ростом пружинного пути в плазме. Заметим, что если пренебречь изменением средних характеристик среды, то при тех же линейных размерах освещенного пятна L_1 время τ_0 равно

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2} z_0}{k_0 n_1 L_1 V} = \frac{\sqrt{2} \lambda_1}{\pi \theta_{a_0} V}, \quad (37)$$

где λ_1 — длина волны в среде, характеризующей показателем преломления n_1 , а $\theta_{a_0} = 2L_1/z_0$ — ширина диаграммы направленности антенны в вакууме.

Таким образом, для отдельных нормальных волн в плазме время корреляции можно определять по «изотропной» формуле [5, 6] для среды с показателями преломления n_1 и n_2 соответственно.

Аналогичным способом можно вычислить пространственно-временную функцию корреляции полей в двух разнесенных точках. В тех же приближениях, при которых получено выражение (37), для полей в точках, находящихся на расстоянии x_0 по оси x , имеем

$$\Gamma_{E^{06}}(x_0, \tau) \sim \exp\left\{-\frac{k_0^2 n_1^2 L_1^2}{2z_0^2} \left[\left(V_x \tau - \frac{x_0}{2}\right)^2 + V_y^2 \tau^2\right]\right\}. \quad (38)$$

Функция $\Gamma_{E^{06}}(x_0, \tau)$ максимальна при

$$\tau_{\text{max}} = \frac{x_0 V_x}{2V^2} = \frac{x_0}{2V_x}. \quad (39)$$

Здесь $V^2 = V_x^2 + V_y^2$; V_x , V_y — соответственно x -я и y -я компоненты скорости; $V_x' = V_y'/V_x$ — кажущаяся скорость движения вдоль оси x .

Величина функции $\Gamma_{E^{06}}(x_0, \tau)/\Gamma_{E^{06}}(0, 0)$ в максимуме определяется значением $k_0^2 n_1^2 L_1^2/2z_0^2$ и может существенно отличаться от единицы [10].

3. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ПОЛЯ РАССЕЯНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

Взаимная корреляция нормальных волн характеризуется функцией

$$\Gamma_{E^{06}E^{n*}} = \Gamma_{E_{1,}} = \overline{E^{06} E^{n*}} = 2 \overline{E_x^{06} E_x^{n*}}. \quad (40)$$

Последняя в тех же приближениях, которые сделаны в разд. 2, может быть представлена в виде

$$\Gamma_{E_{1,}}(\tau) \approx \frac{k_0^2 S_1^2}{(64\pi^2)^2} \int_{z_0-L_0/2}^{z_0+L_0/2} \frac{(A_1 P_1)(A_2 P_2)}{c_1^2(z) c_2^2(z)} \int \int \int \int \exp\left[-2ik_0 \int_0^z (n_1 - n_2) dz - \right]$$

$$-ik_0(n_1+n_2)\zeta + \frac{i\rho_0^2}{2c_0} + \frac{i\rho_0\rho}{2c_{эфф}} + \frac{i\rho^2}{8c_0} \Gamma_{\Delta v}(\rho_x - V_x\tau, \rho_y + \tilde{a} - V_y\tau, \zeta) \times \\ \times f_1\left(\rho_0 + \frac{\rho}{2}\right) f_2\left(\rho_0 + \frac{\rho}{2}\right) f_1\left(\rho_0 - \frac{\rho}{2}\right) f_2\left(\rho_0 - \frac{\rho}{2}\right) d\rho_0 d\rho d\zeta dz, \quad (41)$$

где $\tilde{a} = a_1 - a_2$, $c_0 = c_1 c_2 / (c_2 - c_1)$, $c_{эфф} = c_1 c_2 / (c_2 + c_1)$. Для дальнейших расчетов функции $f_1(\rho)f_2(\rho)$ и $\Gamma_{\Delta v}(\rho)$ представим в форме (32), (33).

Выполняя в (41) последовательное интегрирование по переменным ρ_0, ρ и полагая, что

$$\frac{\rho^2}{8c_0} \sim \frac{k_0^2 l_0^2}{8z_0} (n_2 - n_1) \ll 1, \quad l_0 \ll L_{эфф}, \quad \frac{l_0^2 L_{эфф}^2}{16c_{эфф}^2} \ll 1 \quad \left(L_{эфф}^2 = \frac{L_1^2 L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} \right),$$

получим

$$\Gamma_{E_{1,2}}(\tau) \approx \frac{k_0^2 S_1^2 l_0^2}{(64\pi^2)^2} \exp \left[-2ik_0 \int_0^{z_0} (n_1 - n_2) dz \right] \times \\ \times \int_{z_0 - L_{эфф}/2}^{z_0 + L_{эфф}/2} \frac{(A_1 P_1) (A_2 P_2)^* \exp \left[- (k_0^2/4) (n_1 + n_2)^2 l_0^2 \right]}{c_1^2(z) c_2^2(z) (1/L_{эфф}^2 - i/2c_0)} \times \quad (42) \\ \times \exp \left[-2ik_0 \int_{z_0}^z (n_1 - n_2) dz - \frac{(V_y \tau - \tilde{a})^2 + V_x^2 \tau^2}{16c_{эфф}^2 (1/L_{эфф}^2 - i/2c_0)} \right] dz.$$

Если в рассеивающем объеме можно пренебречь изменением средних свойств плазмы, то (42) упрощается:

$$\Gamma_{E_{1,2}}(\tau) \sim \left(\frac{1}{L_{эфф}^2} - \frac{i}{2c_0} \right)^{-1} \frac{\sin(k_0 L_3 \Delta n)}{k_0 L_3 \Delta n} \exp \left[- \frac{(V_y \tau - \tilde{a})^2 + V_x^2 \tau^2}{16c_{эфф}^2 (1/L_{эфф}^2 - i/2c_0)} \right]. \quad (43)$$

Временная зависимость в формуле (42) аналогична (38). Это означает, что наклон магнитного поля приводит к временному смещению максимума корреляции ($\tau_{\max} \approx \tilde{a} V_y / V^2$). Наибольшее значение $\Gamma_{E_{1,2}}$ пропорционально

$$\Gamma_{E_{1,2}}(\tau = \tau_{\max}) \sim \left(\frac{1}{L_{эфф}^2} - \frac{i}{2c_0} \right)^{-1} \frac{\sin(k_0 L_3 \Delta n)}{k_0 L_3 \Delta n} \exp \left[- \frac{\tilde{a}^2 V^{-2} V_x^2}{16c_{эфф}^2 (1/L_{эфф}^2 - i/2c_0)} \right]. \quad (44)$$

При выполнении условий

$$2c_0 \gg L_{эфф}^2, \quad \frac{\tilde{a}^2 L_{эфф}^2}{16c_{эфф}^2} \ll k_0^2 (\Delta n)^2 L_3^2 \quad (45)$$

величина $\Gamma_{E_{1,2}}(\tau_{\max})$ определяется в основном выражением $\frac{\sin(k_0 L_3 \Delta n)}{k_0 L_3 \Delta n}$, которое приведено в работе [6].

Поскольку $\Delta n = (n_1 - n_2) \sim N$, корреляционный метод является одним из способов измерения $N(z)$ -характеристик в нижней ионосфере [13].

4. КОРРЕЛЯЦИЯ ФАЗ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

В рассматриваемом случае размеры рассеивающего объема значительно превосходят радиус корреляции флуктуаций $\Delta v(r, t)$. Это позволяет полагать, что случайное рассеянное поле в точке приема является гауссовым. Тогда, согласно [14], амплитудно-фазовый закон распределения имеет вид

$$W(R_1, R_2, \theta_p) = \frac{R_1 R_2}{2\pi(1-p^2)} \exp \left[-\frac{R_1^2 - 2pR_1 R_2 \cos(\theta_p - \theta_0) + R_2^2}{2(1-p^2)} \right], \quad (46)$$

где $\theta_p = \chi_1 - \chi_2$ — разность фаз; $R_1 = A_1/\sigma_1$, $R_2 = A_2/\sigma_2$ — нормированные амплитуды ($\sigma_1^2 = (1/2)\Gamma_{E_{1,1}}(0)$, $\sigma_2^2 = (1/2)\Gamma_{E_{2,2}}(0)$); $p = (1/2\sigma_1\sigma_2)\sqrt{\Gamma_{E_{1,1}}\Gamma_{E_{2,1}}}$ — обобщенный коэффициент корреляции; θ_0 — обобщенный фазовый параметр.

Используя формулу (46) и производя соответствующее интегрирование, можно получить амплитудные и фазовые корреляционные функции, которые будут выражаться через корреляционные функции обратнорассеянных полей $\Gamma_{E_{1,1}}$, $\Gamma_{E_{2,2}}$, $\Gamma_{E_{2,1}}$, $\Gamma_{E_{1,2}}$. Так для автокорреляции амплитуд и фаз справедливы соотношения [14]

$$B_{A_{1,2}}(\tau) = \frac{\overline{A_{1,2}(t)A_{1,2}(t+\tau)} - \overline{A_{1,2}(t)}^2}{\overline{A_{1,2}^2(t)} - \overline{A_{1,2}(t)}^2} = 0,921B_{E_{11,22}}^2(\tau) + 0,058B_{E_{11,22}}^4(\tau) + \dots,$$

$$B_{\chi_{1,2}}(\tau) = \frac{\overline{\chi_{1,2}(t)\chi_{1,2}(t+\tau)} - \overline{\chi_{1,2}(t)}^2}{\overline{\chi_{1,2}^2(t)} - \overline{\chi_{1,2}(t)}^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} B_{E_{11,22}}(\tau) + \frac{1}{4} B_{E_{11,22}}^2(\tau) + \frac{7\pi}{12} B_{E_{11,22}}^3(\tau) + \dots$$

Здесь под $B_{E_{11,22}}$ следует понимать нормированные корреляционные функции рассеянных нормальных волн $\left(B_{E_{11,22}}^2(\tau) = \frac{\Gamma_{E_{11,22}}(\tau)\Gamma_{E_{11,22}}^*(\tau)}{\Gamma_{E_{11,22}}(0)\Gamma_{E_{11,22}}^*(0)} \right)$.

Обобщенный фазовый параметр равен средней разности фаз полей [14]:

$$\theta_0 = \overline{\theta_p} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_p W(R_1, R_2, \theta_p) dR_1 dR_2 d\theta_p.$$

В свою очередь величина θ_0 связана с корреляционными функциями рассеянных полей выражением

$$\Gamma_{E_{1,1}}/\Gamma_{E_{2,1}} = \exp(-2i\theta_0). \quad (48)$$

Согласно выражению (42), отношение $\Gamma_{E_{1,1}}/\Gamma_{E_{2,1}}$ равно

$$\Gamma_{E_{1,1}}/\Gamma_{E_{2,1}} \approx \exp \left[-4ik_0 \int_0^{z_0} (n_1 - n_2) dz \right], \quad (49)$$

откуда $\theta_0 = 2k_0 \int_0^{z_0} (n_1 - n_2) dz$, и так как $(n_1 - n_2) \sim N$, то измерение средней разности фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами в принципе позволяет получать сведения о высотном распределении электронной концентрации.

Величина $|\theta_p - \theta_0|$ характеризует разброс значений θ_p около θ_0 и связана с обобщенным коэффициентом корреляции соотношением [14] $|\theta_p - \theta_0| = \arccos p$, а величина p с учетом условий (45) равна

$$p \approx \frac{\sin(k_0 L_3 \Delta n)}{k_0 L_3 \Delta n}. \quad (50)$$

Из (50) следует, что точность измерения разности фаз определяется разностью фазовых набегов нормальных волн в рассеивающем объеме толщиной L_3 . Естественно, что, когда величина фазовых набегов мала, $p \approx 1$ и $|\theta_p - \theta_0| \approx 0$. Наоборот, если разность фазовых набегов близка к π^* , то $|\theta_p - \theta_0| \approx \pi/2$.

Из изложенного следует вывод, что измерение $N(z)$ по разности фаз имеет смысл до высот, где разность фазовых набегов близка к π . В то же время измерение $|\theta_p - \theta_0|$ может служить методом определения локальной электронной концентрации (концентрации внутри рассеивающего объема).

Авторы приносят благодарность Н. Г. Денисову за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 3, 393 (1960).
- 2 Л. В. Гришкевич, Кандидатская диссертация, Горький, 1963.
- 3 Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэронавигация, 4, № 1, 75 (1964).
- 4 J. S. Beigose, M. J. Burke, J. Geophys. Res., 63, № 13, 2799 (1964).
- 5 В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат, Геомагнетизм и аэронавигация, 11, № 6, 1090 (1971).
- 6 Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, В. В. Тамойкин, сб. «Ветры, дрейфы и неоднородности в ионосфере», М., 1971 г., стр. 152 (материалы симпозиума, Новосибирск, 27 июля—2 августа 1970 г.).
- 7 Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1331 (1971).
- 8 H. A. von Biel, W. A. Flood and H. G. Camnitz, J. Geophys. Res., 75, № 25, 4863 (1970).
- 9 Ю. В. Гребенюк, А. И. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1461 (1969).
- 10 G. J. Fraser, R. A. Vincent, J. Atmosph. Terr. Phys., 32, № 9, 1951 (1970).
- 11 Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
- 12 M. L. V. Pitteway, Proc. Roy. Soc., A246, 556 (1958).
- 13 Е. А. Бенедиктов, В. Л. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1452 (1971).
- 14 Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 1, изд. Сов. радио, М., 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 мая 1971 г.

THE CORRELATION THEORY OF BACK-SCATTERING FIELD IN A MAGNETOACTIVE PLASMA

V. A. Ivanov, V. V. Tamoykin

The back scattering of electromagnetic waves in a inhomogeneous magnetoactive plasma containing random inhomogeneities of the electron density is considered. The consideration is made under the assumption of narrow radiation patterns of transmitting and receiving antennas. The field spatial-time correlation and cross-correlation functions of the separate normal waves are calculated. The influence of the slope of the Earth's magnetic field on the statistical characteristics of the signal received is clarified.

* В последнем случае амплитуды нормальных волн некоррелированы.

УДК 533.9.01

ДИНАМООПТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПЛАЗМЕ*В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов*

Рассматривается распространение электромагнитных волн в неоднородно движущейся холодной электронной плазме без внешнего магнитного поля и соударений. Движение предполагается стационарным. Показано, что в случае плавного изменения параметров среды траектории лучей в нулевом приближении геометрической оптики определяются распределением концентрации, а движение приводит к вращению плоскости поляризации в волне. Для плоскостного течения с постоянным градиентом скорости получено точное решение уравнений, представляющее собой суперпозицию двух независимых волн, эллиптически поляризованных в противоположных направлениях. Найден закон преломления этих волн и рассчитаны соответствующие коэффициенты отражения и проникновения в случае слоя конечной толщины.

Известно, что неоднородное движение среды приводит к ее оптической анизотропии, при этом в выражении для тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} появляются члены, пропорциональные производной скорости дрейфа. Следуя [1], связанные с этим эффекты будем называть динамооптическими, к таковым относится, например, вращение плоскости поляризации электромагнитных волн вследствие двойного преломления (эффект Максвелла). Не останавливаясь на обзоре относящихся сюда многочисленных работ, заметим, что в них рассматривались лишь эффекты, вызванные ориентирующим воздействием неоднородных потоков на несимметричные молекулы среды или взвешенные в ней частицы (см., например, [1, 2]).

В настоящей работе показывается, что аналогичные явления могут иметь место и в электронной плазме, когда «ориентационный» механизм возникновения анизотропии отсутствует. Физически они обусловлены пространственной дисперсией и представляют собой релятивистские эффекты, однако на больших расстояниях их роль может быть достаточно существенной. В первой части статьи (разд. 1 и 2) рассматриваются волны в изотропной плазме с медленно изменяющимися в пространстве параметрами, когда можно воспользоваться приближением геометрической оптики. В разд. 3 приводится пример точного решения задачи для слоя с произвольно быстрым изменением скорости; в этом случае происходит не только вращение плоскости поляризации распространяющихся волн, но и изменение характера поляризации при отражении и преломлении в слое.

1. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЫ

Пусть имеем холодную электронную плазму без внешнего магнитного поля, движущуюся стационарным образом, так что невозмущенная концентрация N_0 и скорость дрейфа V зависят только от координат. Соударениями будем пренебрегать. Распространение слабых гармонических во времени ($\sim e^{i\omega t}$) волн в такой среде описывается следующей системой линеаризованных уравнений:

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (1a)$$

$$\operatorname{rot} B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c} (N_s V + N_0 v_s); \quad (16)$$

$$(i\omega + V \nabla) v_s + (v_s \nabla) V = \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [VB] \right); \quad (1b)$$

$$(i\omega + V \nabla) N_s + N_s \operatorname{div} V = -N_0 \operatorname{div} v_s - (v_s \nabla) N_0, \quad (1r)$$

где, как обычно, E и B — электрическое и магнитное поля, N_s и v_s — возмущения концентрации и скорости электронов под влиянием этих полей, e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света. В уравнениях (1) пренебрежено величинами порядка β^2 (где $\beta = V/c$).

Будем теперь считать, что величины N_0 и V мало меняются на расстояниях порядка длины волны λ , так что можно ввести малый параметр задачи $\chi \sim \lambda/L \ll 1$, где L — характерный масштаб неоднородностей; при этих условиях решение можно найти в приближении геометрической оптики. Искомые переменные будем представлять в виде $E = \tilde{E}e^{iS}$, $B = \tilde{B}e^{iS}$ и т. д., где $\tilde{E}$ и $\tilde{B}$ — медленно изменяющиеся функции r . Разлагая последние по степеням χ , нетрудно получить уравнения последовательных приближений. В принципе, соответствующую процедуру можно применить непосредственно к уравнениям микротeorии (1), однако для сравнения с известными соотношениями феноменологической теории удобнее сначала вычислить тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ij} для неоднородно движущейся плазмы. Вместе с тем, такой путь оказывается и более простым.

Как обычно для плазмоподобных сред, вектор электрической индукции определим как $D = E + 4\pi j/i\omega$, где $j = N_0 v_s + N_s V$ — плотность всех наведенных в среде токов. Существенно, что движение среды приводит к появлению пространственной дисперсии, в результате чего связь между амплитудами $\tilde{D}$ и $\tilde{E}$ перестает быть локальной. Исходя из феноменологического выражения диэлектрической проницаемости среды с пространственной дисперсией $\epsilon_{ij}(\omega, k, r) = \int d\tau \int dR \epsilon_{ij}^A(\tau, R, r) \times \exp[i(\omega\tau - kR)]$, где ядро ϵ_{ij}^A явно зависит от r , можно получить следующее материальное уравнение [3]:

$$\tilde{D}_i = \epsilon_{ij} \tilde{E}_j + i \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial k_\alpha} \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial x_\alpha} + \frac{i}{2} \frac{\partial k_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \tilde{E}_j + O(\chi^2), \quad (2)$$

где $k = -\nabla S$. Входящий в (2) тензор ϵ_{ij} , вообще говоря, отличается от аналогичного оператора ϵ_{ij}^0 , найденного для постоянных параметров среды:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \delta\epsilon_{ij}. \quad (3)$$

В рассматриваемом здесь случае (для однородной равномерно движущейся плазмы без столкновений) тензор ϵ_{ij}^0 симметричен и веществен [4]:

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon(\omega) \delta_{ij} - (\omega_p^2/\omega^2) (\beta_i n_j + \beta_j n_i), \quad (4)$$

где обозначено $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N_0 m^{-1}$, $n = ck/\omega$, δ_{ij} — символ Кронекера. Величина же $\delta\epsilon_{ij}$ для слабонеоднородных сред является, очевидно, поправкой порядка χ . Из феноменологических сообра-

жений (точнее, из условия сохранения адиабатического инварианта, которое для стационарной среды сводится к сохранению энергии в электромагнитной волне) удастся найти лишь антиэрмитову часть $\delta\epsilon_{ij}$ [5].

В общем случае поправка $\delta\epsilon_{ij}$ должна быть найдена из микротeorии. Пример такого расчета для неподвижной неоднородной плазмы имеется в работе [6], в которой величина $\delta\epsilon_{ij}$ получена в результате рассмотрения системы уравнений микротeorии в приближении геометрической оптики с точностью до величин порядка χ включительно. Между тем, мы хотим здесь обратить внимание на то обстоятельство, что расчет указанной поправки может быть проведен значительно более коротким путем. В самом деле, по смыслу оператора ϵ_{ij} в (2) для отыскания $\delta\epsilon_{ij}$ достаточно найти отклик $D(\mathbf{r})$ на заданную строго гармоническую в пространстве составляющую поля $E(\mathbf{r})$, и нет необходимости искать решение самосогласованной системы (1), поскольку учет плавного изменения E_0 и $\mathbf{k}$ дает добавочную поправку к $\delta\epsilon_{ij}$ лишь следующего порядка малости (т. е. $\sim \chi^2$). В том же приближении (пренебрегая членами $\sim \chi^2$) во втором члене в правой части (2) вместо ϵ_{ij} можно подставить ϵ_{ij}^0 .

Учитывая сказанное и полагая $E = \widetilde{E}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ (где $\widetilde{E}$ и $\mathbf{k}$ постоянны), из уравнений (1в), (1г) нетрудно найти амплитуду индуцированных колебаний N_s и $\mathbf{v}_s$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_s = -\frac{ie}{m\omega} \left[(1 + n\beta) \widetilde{E} + [\beta \widetilde{B}] + \frac{i}{\omega} (\widetilde{E} \nabla) V \right],$$

$$\widetilde{N}_s = -\frac{ieN_0}{m\omega c} \left[(n\widetilde{E}) + i \frac{c}{\omega N_0} (\widetilde{E} \nabla) N_0 \right].$$

Согласно (1а), здесь вектор $\widetilde{B}$ однозначно связан с $\widetilde{E}$: $\widetilde{B} = [n\widetilde{E}]$; подставляя $\mathbf{v}_s$ и N_s в выражение для D и сопоставляя с (2)–(4), находим поправку $\delta\epsilon_{ij}$:

$$\delta\epsilon_{ij} = -i \frac{c}{\omega^3} \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega^2 \beta_i). \quad (5)$$

Заметим, что антиэрмитова часть $\delta\epsilon_{ij}$ удовлетворяет соотношению, выведенному в [5]: $\delta\epsilon_{ij}^a = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}^0}{\partial r \partial k}$. Для рассматриваемых ниже эффектов, однако, существенна также эрмитова составляющая $\delta\epsilon_{ij}^e$.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛАБНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Перейдем теперь к рассмотрению особенностей распространения электромагнитных волн в плазме с медленно меняющимися $N_0(\mathbf{r})$ и $V(\mathbf{r})$. При найденном тензоре ϵ_{ij} выкладки оказываются наиболее компактными, если исходить из уравнения

$$\text{rot rot } E - \frac{\omega^2}{c^2} D = 0, \quad (6)$$

вытекающего из (1а), (1б). Подставляя сюда амплитуды полей в виде рядов $(\widetilde{E} = \widetilde{E}^0 + \widetilde{E}^1 + \dots)$ и используя соотношения (2)–(5), получаем системы уравнений для $\widetilde{E}_i^0$, $\widetilde{E}_j^1$ и т. д.; при этом член $\delta\epsilon_{ij} \widetilde{E}_j^0$ естествен-

* Следующий член, согласно (4), имеет порядок $\beta^2 \chi$ и может быть отброшен,

но отнести к уравнениям первого приближения. В результате в нулевом приближении имеем

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}^0) \widetilde{E}_j^0 = 0. \quad (7)$$

Из условия совместности системы (7) с учетом (4) следует обычное дисперсионное уравнение для изотропной плазмы: $n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (где теперь $\omega_p = \omega_p(\mathbf{r})$). В последнее выражение скорость дрейфа $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ не входит, что связано с известным фактом отсутствия френелевского увлечения в изотропной плазме. В результате направления волнового и лучевого векторов совпадают, причем траектории лучей не зависят от скорости дрейфа и определяются лишь градиентом концентрации $N_0(\mathbf{r})$. Движение плазмы, однако, влияет на структуру поля в волне — электрическое поле $\widetilde{\mathbf{E}}^0$ перестает быть поперечным даже при постоянных N_0 и $\mathbf{V}$ (см. [4]). Заметим, что вектор Пойнтинга здесь оказывается равным $\mathbf{S} = (c/8\pi) (\widetilde{\mathbf{E}}^0)^2 \mathbf{n}$.

Для получения соотношений, определяющих изменения амплитуд вдоль лучей, а также поляризации волн, необходимо рассмотреть уравнения первого порядка относительно χ , которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} (n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}^0) \widetilde{E}_j^1 = i \frac{c}{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} [(n_i - (1 - n^2) \beta_i) \widetilde{E}_m^0] + \right. \\ \left. + [n_m - (1 - n^2) \beta_m] \frac{\partial \widetilde{E}_m^0}{\partial x_i} - \frac{\partial n_m}{\partial x_m} \widetilde{E}_i^0 - 2n_m \frac{\partial \widetilde{E}_i^0}{\partial x_m} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что ранг матрицы этой системы равен единице (т. е. имеет место поляризационное вырождение). Поэтому для разрешимости (8) относительно $\widetilde{E}_j^1$ требуется выполнение двух условий совместности, соответствующих, с учетом эрмитовости и вещественности тензора ϵ_{ij}^0 в (4), ортогональности правых частей (8) двум линейно независимым решениям (7) (см. [7, 8]). Последние возьмем в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1^0 &= \Phi \cos \varphi \left[N + \frac{1 - n^2}{n^2} (\beta N) n \right], \\ \widetilde{E}_2^0 &= \Phi \sin \varphi \left[b + \frac{1 - n^2}{n^2} (\beta b) n \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{b}$ — соответственно векторы нормали и бинормали к лучу. Одно из условий тогда сводится к закону сохранения энергии

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (10)$$

означающему, что изменение амплитуды волн вдоль луча определяется сходимостью или расходимостью лучей. Второе же условие дает закон вращения плоскости поляризации в волне, который после некоторых выкладок можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{(\beta \mathbf{b})}{n\rho} - \frac{1 - n^2}{2n^2} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \beta), \quad (11a)$$

где ds — элемент длины вдоль луча, T — радиус кручения луча, ρ — радиус кривизны.

Первый член в (11a), полученный еще в [8], связан с кручением луча и не имеет отношения к движению среды, в плоскостной среде этот член исчезает ($T = \infty$). Остальные два члена обязаны своим про-

исхождением движению среды. В частности, второй член имеет место и при равномерном движении неоднородной плазмы как целого ($\beta = \text{const}$). Физический смысл этого явления можно пояснить следующим образом. Пусть, например, $\beta \parallel b$, и в сопровождающей плазму системе отсчета вектор $\vec{E}'$ лежит в соприкасающейся плоскости; при $\rho < \infty$ рефракция приводит к повороту этого вектора в той же плоскости ($\frac{d\vec{E}'}{ds'} \parallel \mathbf{n}'$), в соответствии с первым членом в (11 а). Согласно формулам релятивистского пересчета полей, в лабораторной системе отсчета тогда при $\beta^2 \ll 1$ $d\vec{E} = d\vec{E}'$, однако вследствие абберации это приращение уже не параллельно вектору $\mathbf{n}$ в исходной системе и имеет составляющую вдоль бинормали, что и дает вращение вектора поляризации в соответствии с (11 а).

Последний член в (11 а) соответствует собственно динамооптическому эффекту, связанному с неоднородностью скорости среды, и может иметь место даже в отсутствие кручения и рефракции лучей, т. е. при $N_0 = \text{const}$. В частности, подобный эффект возможен в плоскостной плазме с ламинарным течением, когда, например, $\beta = \beta(\beta, 0, 0)$, где $\beta = \beta(\mathbf{z})$. При этом $\text{rot } \beta \parallel y$, и для волн, распространяющихся под углом θ к оси y , из (11 а) следует

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1 - n^2}{2n} \frac{\partial \beta}{\partial z} \cos \theta, \quad (116)$$

т. е. происходит монотонное вращение плоскости поляризации. Заметим, что формально последнее выражение совпадает с фарадеевским вращением плоскости поляризации электромагнитных волн в слабом магнитном поле с $B_{\text{эфф}} = (mc^2/e) \text{rot } \beta$, т. е. с электронной гирочастотой $\omega_H = |\text{rot } V|$. При этом эффект может быть особенно значительным вблизи плазменного резонанса, когда $n \rightarrow 0$, однако в этой области частот приближение геометрической оптики, вообще говоря, перестает быть применимым.

3. ПРОХОЖДЕНИЕ ВОЛН ЧЕРЕЗ СЛОЙ С ПОСТОЯННЫМ ГРАДИЕНТОМ СКОРОСТИ

В некоторых представляющих интерес частных случаях уравнения (1) допускают точное аналитическое решение. Пусть, например, плазма движется вдоль оси x , а параметры ее N_0 и V меняются вдоль z , так что $\text{rot } \beta = -[x_0 \nabla \beta]$, где $x_0 = \beta/\beta$. Распространение волн в плоскости xz (когда $\mathbf{n} \perp \text{rot } \beta$) было рассмотрено в работах [9, 10]; конкретные решения в них были приведены для случаев, когда $N = \text{const}$ и функция $\beta(z)$ имеет параболический профиль или вид симметричного слоя Эпштейна. При этом, однако, поляризационные эффекты типа (11) отсутствуют, изменение поляризации волн здесь может происходить лишь вследствие различного коэффициента отражения ТЕ- и ТМ-волн.

В настоящей работе рассмотрим класс решений, когда все искомые переменные пропорциональны $F(z) \exp[i(\omega t - \gamma y)]$, что соответствует волнам, распространяющимся в плоскости yz . В этом случае с помощью уравнений (1) проекции векторов E, B, v , и величину N , удастся выразить через E_x и B_x , для которых в пренебрежении членами $\sim \beta^2$ (точнее, при $\beta^2 \ll \varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$) можно получить систему уравнений

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + h^2 E_x = i B_x \frac{\gamma}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta \omega_p^2}{\varepsilon} \right), \quad (12)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + h^2 B_x = -i E_x \frac{\gamma \varepsilon}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta \omega_p^2}{\varepsilon} \right),$$

где $h^2 = \varepsilon \omega^2 c^{-2} - \gamma^2$.

Задача существенно упрощается для постоянной концентрации среды ($\omega_p^2 \sim N = \text{const}$, $\varepsilon(\omega) = \text{const}$), что, далее и будем предполагать. Введем новые переменные:

$$f_{\pm} = \sqrt{\varepsilon} E_x \pm i B_x; \quad (13)$$

тогда из (12) нетрудно получить отдельные уравнения для переменных $f_{\pm}$:

$$\frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial z^2} + x_{\pm}^2 f_{\pm} = 0, \quad (14)$$

где

$$x_{\pm}^2 = h^2 \mp \frac{\gamma \omega_p^2}{\omega^2 \sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

Таким образом, волны правой (f_{+}) и левой (f_{-}) поляризации здесь распространяются независимо. Для определенных законов изменения $\beta(z)$ уравнения (14) могут быть решены в квадратурах; наиболее простым из них, естественно, является случай постоянного градиента скорости ($\frac{\partial \beta}{\partial z} = \alpha = \text{const}$), который ниже и рассмотрим. При этом коэффициенты $x_{\pm}$ в (14) постоянны, и при $x_{\pm}^2 > 0$ нормальные волны $f_{\pm}$ соответствуют плоским волнам с $k_y = \gamma$, $k_z = x_{\pm}$, имеющим, как нетрудно показать из (1) и (13), эллиптическую поляризацию векторов $E_{\perp}$ и B :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon} E &= A \exp [i(\omega t - \gamma y - x_{\pm} z)] \left(\pm i [k_0 x_0] + p_{\pm} x_0 + \beta \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} k_0 \right), \\ B &= A \exp [i(\omega t - \gamma y - x_{\pm} z)] ([k_0 x_0]' \mp i p_{\pm} x_0), \end{aligned} \quad (15)$$

где $k_0 = k/k$, $x_0 = \beta/\beta$, A — постоянный множитель, $p_{\pm} = [1 \mp \alpha \gamma c^2 (1 - \varepsilon) \omega^2 \varepsilon^{-3/2}]^{-1/2}$ — параметр, определяющий эксцентриситет эллипса поляризации.

Заметим, что эффективные фазовые скорости нормальных волн оказываются различными. Выражая γ и $x_{\pm}$ в виде $\gamma = k \cos \theta$, $x_{\pm} = k \sin \theta$, нетрудно найти, что для заданного угла θ значения $n_{\pm} = ck_{\pm}/\omega$ равны

$$n_{\pm}(\theta) = \sqrt{\varepsilon + \frac{\alpha^2 c^2 (1 - \varepsilon)^2}{4 \varepsilon \omega^2} \cos^2 \theta \mp \frac{\alpha c (1 - \varepsilon)}{2 \omega \sqrt{\varepsilon}} \cos \theta}. \quad (16)$$

Для плавного профиля течения ($p \rightarrow 1$) из (15) следуют результаты, совпадающие с полученными выше в приближении геометрической оптики. Поскольку линейно поляризованная волна может быть представлена в виде суперпозиции нормальных волн, имеющих в этом пределе циркулярную поляризацию, то плоскость поляризации будет вращаться по закону $\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\omega}{2c} \right) (n_{-} - n_{+}) = (1 - n^2) (2n)^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial z} \cos \theta$, что согласуется с (11 б). Вместе с тем становится ясным и критерий применимости этого результата. При больших значениях градиента $\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial z}$, когда

параметр p заметно отличается от единицы, картина сложнее: здесь, кроме вращения, по мере распространения поляризация результирующего поля из линейной периодически превращается в эллиптическую. Максимальное отношение малой полуоси эллипса поляризации к большой, равное $(1/2)|p_+ - p_-|$, достигается при $\varphi = (2r + 1)\pi/2$, где r — целое число.

Если область с постоянным градиентом скорости граничит с неподвижной плазмой (или, в более общем случае, $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ терпит скачок), на такой границе будет иметь место отражение и преломление волн. Пусть скорость V при этом непрерывна, тогда, как нетрудно видеть, граничные условия сводятся к непрерывности переменных $f_{\pm}$ и их производных $\frac{df_{\pm}}{dz}$ (первое условие следует непосредственно из непрерывности E_x и B_x , второе можно получить, проинтегрировав уравнение (14) по тонкому переходному слою Δz вблизи границы и устремляя $\Delta z \rightarrow 0$).

Найдем сначала закон преломления волн. Если снова угол θ отсчитывать от оси y , то, очевидно, $\cos \theta = k_y/k$; из условия $k_y = \text{const}$ тогда следует:

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} = \frac{n_0}{n_{\pm}(\theta)}, \quad (17)$$

где θ_0 относится к неподвижной плазме (в которой $\alpha = 0$ и $n = n_0 = \sqrt{\epsilon}$). При малых α результирующий волновой вектор поворачивается на угол $\Delta\theta = \theta - \theta_0 \approx \pm \alpha c (1 - \epsilon)(2\omega\epsilon)^{-1} \cotg \theta_0 \cos \theta_0$; знаки $\pm$, как и выше, относятся соответственно к волнам правой и левой поляризации ($f_{\pm}$), которые, таким образом, отклоняются в разные стороны. Двойное преломление отсутствует лишь при нормальном падении волн на слой ($\cos \theta_0 = 0$).

Коэффициенты отражения (R) и проникновения (T) для f_+ и f_- , естественно, также оказываются различными. Приведем здесь их значения для переходного слоя с постоянным градиентом скорости. Пусть

$$\beta(z) = \begin{cases} 0 & (z \leq -d) \\ \beta_0(1 + z/d) & (-d < z < 0) \\ \beta_0 = \text{const} & (z \geq 0) \end{cases} \quad (18)$$

Учитывая упомянутые выше условия непрерывности $f_{\pm}$ и $\frac{df_{\pm}}{dz}$ на обеих границах ($z = 0$ и $z = -d$), нетрудно найти:

$$R_{\pm} = \mp \frac{2i\alpha\gamma(1 - \epsilon)\epsilon^{-1/2}e^{2ihd} \sin x_{\pm}d}{(x_{\pm} + h)^2 \exp(ix_{\pm}d) - (x_{\pm} + h)^2 \exp(-ix_{\pm}d)}, \quad (19)$$

$$T_{\pm} = \frac{4x_{\pm}he^{ihd}}{(x_{\pm} + h)^2 \exp(ix_{\pm}d) - (x_{\pm} + h)^2 \exp(-ix_{\pm}d)}$$

(здесь под коэффициентом T понимается отношение поперечных к волновому вектору составляющих $E_{\perp}$).

Из-за различия между R_+ и R_- при падении линейно поляризованной волны отраженная и преломленная волны в общем случае будут эллиптически поляризованными (ориентация эллипса поляризации по отношению к падающей волне определяется разницей в значениях

$\arg R_{\pm}$). В частных случаях (при $\sin \kappa d = 0$) для одной из нормальных волн может быть $R = 0$, тогда отраженная волна циркулярно поляризована.

Отметим, наконец, что при $|\alpha\gamma(1 - \epsilon)| > h^2\sqrt{\epsilon}$ один из коэффициентов $\kappa_{\pm}^2$ (в зависимости от знака $\alpha\gamma$) становится отрицательным; в приведенном выше примере (18) для $\beta_0 > 0$ и $\theta_0 > 0$ это имеет место для правополяризованной волны (f_+), если $(1 - \epsilon)\beta_0 \cos \theta_0 > c^{-1}\omega\epsilon d \sin^2 \theta_0$. В таких случаях соответствующая волна экспоненциально затухает вдоль z , иначе говоря, неоднородно движущаяся плазма становится непрозрачной для этой волны даже при $\epsilon(\omega) > 0$. Для коэффициентов R и T здесь можно сохранить формулы (19), заменив в них $\kappa \rightarrow i|\kappa|$. При достаточной толщине слоя $|\kappa|d \gg 1$ тогда коэффициент проникновения T будет экспоненциально малой величиной ($|T| \sim \exp(-|\kappa|d) \rightarrow 0$), и волна практически полностью отражается. В случае линейно поляризованной падающей волны прошедшая через слой волна будет поляризована циркулярно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
2. H. G. Jerrard, Chemical Rev., 59, № 3, 345 (1959).
3. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, 1470 (1968).
4. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов, ЖТФ, 43, № 3, 534 (1971).
5. Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 57, 1730 (1969).
6. Ю. А. Кравцов, А. И. Кугушев, А. В. Черных, ЖЭТФ, 59, 2161 (1970).
7. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М., 1933.
8. С. М. Рытов, Тр ФИАН, 2, № 1 (1940).
9. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов, Доклад на Симпозиуме по дифракции волн, г. Ленинград, 1970.
10. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 9, 1350 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
16 апреля 1971 г.

DYNAMO-OPTICAL EFFECTS IN A PLASMA

V. G. Gavrilenko, G. A. Lupanov, N. S. Stepanov

The propagation of electromagnetic waves in an inhomogeneous moving cold electron plasma without the external magnetic field and collisions is considered. The motion is assumed stationary. It is shown that in the case of a smooth change of the medium parameters the beam trajectories in the zero geometrical optics approximation are determined by the density distribution and the motion leads to the rotation of the wave polarization plane. An exact solution of equations, representing a superposition of two independent waves, elliptically polarized with opposite senses of rotation is obtained for a plane-stratified flow with a constant velocity gradient. The law of these wave refraction is found. The corresponding reflection and penetration coefficients are calculated for the case of the finite layer thickness.

УДК 621.372 827

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВОЛНОВОДЕ

К. А. Барсуков, Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев

Рассмотрено переходное излучение частицы, пересекающей волновод перпендикулярно его оси. Получены выражения для полей и интенсивности излучения. На примере прямоугольного волновода исследованы свойства излучения и получены условия, определяющие спектр излучения Вавилова — Черенкова.

Переходное излучение в волноводах рассматривалось в ряде работ (см., например, [1, 2]), в которых исследовались особенности этого излучения при движении заряда параллельно оси волновода. Возникающие здесь экспериментальные трудности, связанные с узкополосностью трансформаторов волны и разделением пучка и излучения, могут быть исключены при движении пучка в поперечном направлении к оси волновода. Частично эта задача рассматривалась в [3]. Ниже предлагается теория этого явления для регулярного волновода, заполненного диэлектриком с постоянной ϵ .

Пусть ось волновода совпадает с осью z некоторой прямоугольной системы координат и заряженная частица с зарядом q движется равномерно и прямолинейно параллельно оси Ox , пересекая при своем движении стенки волновода в точках $M_1(x_1, y_0, 0)$ и $M_2(x_2, y_0, 0)$. Плотность заряда и тока движущейся частицы можно записать в виде

$$\rho = q \delta(x - vt) \delta(y - y_0) \delta(z),$$

$$j_x = j = qv \delta(x - vt) \delta(y - y_0) \delta(z). \quad (1)$$

Для нахождения поля излучения используем метод работы [4]. В качестве потенциалов поля используем продольные по отношению к оси волновода составляющие электрического и магнитного векторов E_z и H_z , которые, как нетрудно показать, исходя из системы уравнений Максвелла, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta E_{\omega z} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E_{\omega z} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho_{\omega}}{\partial z},$$

$$\Delta H_{\omega z} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon H_{\omega z} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_{\omega}}{\partial y}. \quad (2)$$

Заметим, что поле, определяемое потенциалом $E_{\omega z}$, дает волну ТМ, а $H_{\omega z}$ — волну ТЕ. В соответствии с этим будем искать решения уравнений (2) в виде разложений по ортонормированным собственным функциям первой и второй краевой задач для поперечного сечения волновода:

$$E_{\omega z} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z) \psi_n(x, y),$$

$$H_{\omega z} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \hat{\psi}_n(x, y). \quad (3)$$

Функции $\psi_n(x, y)$ и $\hat{\psi}_n(x, y)$ удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\Delta_{\perp} \psi_n(x, y) + \lambda_n^2 \psi_n(x, y) = 0 \text{ и } \psi_n|_{\Sigma} = 0, \\ \Delta_{\perp} \hat{\psi}_n(x, y) + \hat{\lambda}_n^2 \hat{\psi}_n(x, y) = 0 \text{ и } \hat{\psi}_n|_{\Sigma} = 0, \quad (4)$$

где $\Delta_{\perp}$ — поперечная двумерная часть оператора Лапласа, Σ — контур поперечного сечения волновода. Если теперь разложить правые части уравнений (2) по собственным функциям соответственно $\psi_n(x, y)$ и $\hat{\psi}_n(x, y)$ с одновременным разложением всех величин по координате z в интеграл Фурье, то после ряда несложных выкладок $E_n(z)$ и $H_n(z)$ можно представить в следующем виде:

$$E_n(z) = -\frac{iq}{\pi \epsilon v} A_n \int_c \frac{\mu e^{i\mu z}}{\mu^2 - \gamma_n^2} d\mu, \quad H_n(z) = -\frac{q}{\pi c} B_n \int_c \frac{e^{i\mu z}}{\mu^2 - \hat{\gamma}_n^2}, \quad (5)$$

где

$$A_n = \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-i \frac{\omega}{v} \xi\right) \psi_n(\xi, y_0) d\xi, \quad B_n = - \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-i \frac{\omega}{v} \xi\right) \frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial y_0}(\xi, y_0) d\xi,$$

$\gamma_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \lambda_n^2}$, $\hat{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \hat{\lambda}_n^2}$ — постоянные распространения волн ТМ и ТЕ соответственно. Выбор контура c продиктован условиями излучения, согласно которым в волноводе не должны существовать волны, бегущие к источнику излучения. Заметим, что, поскольку направления $z > 0$ и $z < 0$ в рассматриваемой задаче равноправны, то решение должно быть симметрично по координате z . Выполняя в формулах (5) интегрирование в плоскости комплексной переменной μ , получим

$$E_n(z) = \frac{q}{\epsilon v} A_n \exp(-i \gamma_n |z|) \operatorname{sgn} z, \quad H_n(z) = \frac{iq}{c \hat{\gamma}_n} B_n \exp(-i \hat{\gamma}_n |z|). \quad (6)$$

Остальные компоненты поля могут быть выражены через $E_n(z)$ и $H_n(z)$ с помощью формул [4]

$$E_z(\omega) = \sum_n \lambda_n^{-2} \frac{\partial E_n(z)}{\partial z} \nabla \psi_n(x, y), \quad (7)$$

$$H_z(\omega) = \frac{i \omega \epsilon}{c} \sum_n \lambda_n^{-2} E_n(z) [z_0 \nabla \psi_n(x, y)]$$

для ТМ-волны и

$$E_z(\omega) = -i \frac{\omega}{c} \sum_n \hat{\lambda}_n^{-2} H_n(z) [z_0 \nabla \hat{\psi}_n(x, y)], \quad (8)$$

$$H_z(\omega) = - \sum_n \lambda_n^{-2} \frac{\partial H_n(z)}{\partial z} \nabla \psi_n(x, y)$$

для ТЕ-волны (здесь z_0 — орт оси z).

Энергия переходного излучения может быть найдена с помощью вектора Пойнтинга. Воспользуемся выражением для энергии излучения [4], которое для n -й моды дает

$$S_n^{(TM)} = \frac{q^2}{v^2 \lambda_n^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\gamma_n |A_n|^2 \omega}{\varepsilon(\omega)} d\omega,$$

$$S_n^{(TE)} = \frac{q^2}{c^2 \lambda_n^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{|B_n|^2 \omega}{\hat{\gamma}_n} d\omega. \quad (9)$$

Полная энергия переходного излучения для $z > 0$ или $z < 0$ выражается формулой

$$S = S^{(TE)} + S^{(TM)} = \sum_n S_n^{(TE)} + \sum_{n'} S_{n'}^{(TM)}, \quad (10)$$

где суммирование проводится по распространяющимся модам. В силу отмеченной выше симметрии задачи, как это видно из формул (9) и (10), в направлении $z > 0$ и $z < 0$ излучается одинаковая энергия.

При $\varepsilon = 1$ приведенные выше формулы описывают эффект чисто переходного излучения, возникающего при пересечении зарядом стенок волновода в точках $M_1(x_1, y_0, 0)$ и $M_2(x_2, y_0, 0)$. Если же $\varepsilon > 1$, то при $\beta\Gamma\varepsilon > 1$ наряду с переходным излучением может возникнуть также излучение Вавилова—Черенкова. Обсуждение свойств этого излучения мы проведем ниже на сравнительно простом случае прямоугольного волновода.

Пусть стенки волновода есть плоскости $x = 0, y = 0, x = a, y = b$, и частица движется параллельно оси x , пересекая волновод в точках $(0, y_0, 0)$ и $(a, y_0, 0)$. Ортонормированные собственные функции и собственные значения первой краевой задачи для поперечного сечения волновода представляются в указанном случае в виде

$$\psi_n(M) = \psi_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\varepsilon_j = 2, \quad j \neq 0, \quad \varepsilon_0 = 1,$$

$$\lambda_n = \hat{\lambda}_n = \lambda_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \quad (11)$$

Проводя несложное интегрирование в выражениях для A_n и B_n , из (5) с помощью формул (11) получим для энергии излучения

$$S_{n,m}^{(TM)} = \frac{16 q^2 \pi^2 m^2 \sin^2 \left(\frac{\pi n y_0}{b} \right)}{v^2 \lambda_{nm}^2 a^3 b} \operatorname{Re} \int \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v} \right) \frac{a}{2} \gamma_{nm} \omega d\omega}{\left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \right]^2 \varepsilon}; \quad (12)$$

$$S_{n,m}^{(TE)} = \frac{8 q^2 \varepsilon_m \pi^2 n^2 \sin^2 \left(\frac{\pi n y_0}{b} \right)}{a b^3 c^2 v^2 \lambda_{nm}^2} \operatorname{Re} \int \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v} \right) \frac{a}{2} \omega^3 d\omega}{\left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \right]^2 \hat{\gamma}_{nm}}. \quad (13)$$

Из полученных формул видно, что в излучении могут отсутствовать

некоторые типы распространяющихся волн, именно будут отсутствовать моды с первым индексом n , если число ny_0/b — целое. Это означает, что траектория движения заряда попадает целиком в узел продольной составляющей электрического поля соответствующей моды и поэтому отсутствует взаимодействие между частицей и волной этого типа. Спектр переходного излучения оказывается непрерывным, причем в излучении отсутствуют частоты, удовлетворяющие условию

$$\frac{\omega a}{2v} - \frac{\pi m}{2} = \pi s, \quad (14)$$

где s — целое число.

Знаменатели подынтегральных выражений в (12) и (13) имеют особые точки при значениях частот

$$\omega_m = \frac{\pi m}{a} v. \quad (15)$$

Условие распространения волны с индексами n и m для частоты, определяемой (15), имеет вид

$$(\beta^2 \epsilon - 1) \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 > 0, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Разрешая это неравенство относительно β , получим

$$\beta > \left[\frac{1}{\epsilon} \left(1 + \left(\frac{an}{bm} \right)^2 \right) \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Очевидно, что (16) может быть выполнено, если

$$\epsilon - 1 > \left(\frac{an}{bm} \right)^2. \quad (17)$$

Покажем, что условие (15) определяет спектр излучения Вавилова—Черенкова в волноводе, причем пороговые значения скорости и диэлектрической проницаемости для этого излучения определяются неравенствами (15) и (16). Действительно, в плоскости x, y поле в волноводе представляет собой набор плоских стоячих волн. Поэтому всегда существует волна, которая сопутствует движущемуся заряду. Фазовая скорость этой волны есть $v_{\phi m, n} = \frac{\omega a}{\pi m}$, где $\frac{\pi m}{a}$ — ее волновое число. С этой точки

зрения соотношение (15) можно рассматривать как условие равенства скорости частицы и фазовой скорости сопутствующей частицы волны. Возникающая здесь ситуация полностью аналогична физической картине излучения Вавилова—Черенкова в резонаторе; заполненном диэлектриком [5], где движущаяся частица также взаимодействует с сопутствующим полем в стоячей волне.

Однако разделение переходного излучения и излучения Вавилова—Черенкова оказывается в общем случае затруднительным. Это разделение частично возможно для той моды излучения, для которой выполнено соотношение

$$\omega a/2v \gg 1. \quad (18)$$

В этом случае множитель в (12) и (13)

$$\left[\frac{\sin \frac{a}{2} \left(\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v} \right)}{\frac{\pi m}{a} - \frac{\omega}{v}} \right]^2 \quad (19)$$

в окрестности частоты, определяемой (15), принимает значения, пропорциональные a^2 — квадрату длины траектории заряда. Это означает, что на фоне спектра переходного излучения в окрестности частоты ω_m (см. (15)) возникает резкий пик, высота которого определяется выражением

$$\frac{dS_{\text{Чер. } n, m}^{(\text{TM})}}{d\omega} = \frac{q^2 m \sin^2 \left(\frac{\pi n y_0}{b} \right)}{v \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) b \varepsilon} \sqrt{(\beta^2 \varepsilon - 1) \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}},$$

$$\frac{dS_{\text{Чер. } n, m}^{(\text{TM})}}{d\omega} = \frac{q^2 v n^2 m \sin^2 \left(\frac{\pi n y_0}{b} \right)}{b^3 c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \sqrt{\frac{1}{(\beta^2 \varepsilon - 1) \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}}.$$
(20)

Полуширина этого пика может быть найдена из условия первого нуля знаменателя (19) на его краю. Последнее условие может быть записано в виде

$$\Delta \omega_{n, m} = \frac{2 \pi v}{a}. \quad (21)$$

Умножая высоту пика на его ширину, получим следующие выражения для энергии излучения Вавилова—Черенкова:

$$S_{\text{Чер. } n, m}^{(\text{TM})} = \frac{2 \pi q^2 m \sin^2 \left(\frac{\pi n y_0}{b} \right)}{a b \varepsilon v \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \sqrt{(\beta^2 \varepsilon - 1) \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}},$$

$$S_{\text{Чер. } n, m}^{(\text{TE})} = \frac{2 \pi v^2 m n^2 \sin^2 \left(\frac{\pi n y_0}{b} \right)}{a b^3 c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \sqrt{\frac{1}{(\beta^2 \varepsilon - 1) \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}}.$$
(22)

Последние формулы, хотя и были получены из полукачественных соображений, оказываются точными и могут быть получены путем предельного перехода из (12) и (13) при $a \gg 2v/\omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, ЖЭТФ, **37**, 1106 (1959).
2. К. А. Барсуков, ЖТФ, **32**, 161 (1962).
3. Л. Г. Ломизе, ЖТФ, **31**, 301 (1961).
4. Л. Г. Нарышкина, К. А. Барсуков, ЖТФ, **33**, 444 (1963).
5. А. С. Адамчук, Л. Г. Нарышкина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).

Поступила в редакцию
4 июня 1971 г.

TO THE THEORY OF TRANSITION RADIATION IN A WAVEGUIDE

K. A. Barsukov, E. D. Gazazyan, E. M. Laziev

The transition radiation from a particle crossing the waveguide perpendicular to its axis has been considered. The expressions are derived for the fields and radiation intensity. The radiation features are investigated on the example of a rectangular waveguide. Conditions are obtained which determine the spectrum of Vavilov-Cherenkov radiation.

УДК 621.371.25

О МЕТОДЕ ЧАСТИЧНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

В. А. Рыжов

Предлагается вариант метода частичных отражений. Показано, что в отдельных случаях с его помощью можно получать одновременно профили электронной концентрации и числа соударений в D -области ионосферы.

Метод частичных отражений является одним из современных способов, которые применяются для определения профилей электронной концентрации в D -области ионосферы (50—90 км) [1—4]. Для получения информации о высотной зависимости плотности электронов обычно используется следующее соотношение [1, 2]:

$$B_0(h) = R(\nu_0) + \int_0^h F(\nu_0, N_0) dh, \quad (1)$$

где

$$B_0 = \ln \left(\frac{\overline{A_x^2}}{\overline{A_0^2}} \right)^{1/2}, \quad R = \ln \frac{|R_x|}{|R_0|}, \quad F = -\frac{2\omega_1}{c} (K_x - K_0), \quad \omega_1 = 2\pi f_1,$$

f_1 — частота зондирования ионосферной станции, c — скорость света в вакууме, R_x и R_0 — коэффициенты отражения для необыкновенной и обыкновенной волн, K_x и K_0 — соответственно коэффициенты поглощения этих волн, $\nu_0(h)$ — число соударений электронов с молекулами, $N_0(h)$ — концентрация электронов, A_x и A_0 — амплитуды частичных отражений необыкновенной и обыкновенной волн, которые определяются непосредственно из эксперимента. Черта сверху в выражениях $\overline{A_x^2}$ и $\overline{A_0^2}$ означает усреднение по времени. Как видно из уравнения (1), точность определения электронной концентрации существенно зависит от выбора $\nu_0(h)$ -профиля. При вычислениях концентрации электронов в уравнении (1) часто используют общепринятые зависимости числа соударений от высоты, которые, конечно, не являются универсальными и могут существенно отличаться от $\nu_0(h)$ -профилей, соответствующих тем или иным конкретным условиям проведения эксперимента. Эксперименты свидетельствуют о том, что имеются значительные сезонные вариации числа соударений [5, 6].

При комбинированной работе двух передающих станций в отдельных случаях можно получить одновременно $\nu_0(h)$ - и $N_0(h)$ -профили. Пусть один из наземных передатчиков работает в импульсном режиме. С его помощью ведутся наблюдения частичных отражений. Вторая станция работает в режиме непрерывного излучения. Здесь для простоты принимается, что излучение является монохроматическим (с частотой f_2 и мощностью P_2). Станция служит для эффективного нагрева электронного газа в D -области. Комбинированная работа передатчиков состоит в выполнении двух последовательных сеансов наблюдения

частичных отражений. В одном сеансе наблюдений мощный передатчик не излучает ($P_2 = 0$). Во втором сеансе наблюдений электроны эффективно разогреваются в поле монохроматической волны ($P_2 \neq 0$). Повышение эффективной температуры электронов сопровождается регулярным изменением числа соударений и электронной концентрации в ионосфере. Принимая это во внимание, для второго сеанса наблюдений можно написать соотношение

$$B(h) = R(\nu) + \int_0^h F(\nu, N) dh, \quad (2)$$

где $N = F_1(N_0, T_e)$ и $\nu = F_2(\nu_0, T_e)$ — возмущенные профили электронной концентрации и частоты соударений в ионосфере, T_e — эффективная температура электронов. Ниже будет показано, что на практике можно реализовать случай $N(h) \approx N_0(h)$. Что касается функции F_2 , то она зависит в общем случае от характера теплового воздействия волны на среду. Чтобы найти параметры невозмущенной ионосферы из уравнений (1) и (2), необходимо знать функции F_1 и F_2 , а также зависимость $T_e(h)$. Зависимость числа соударений от температуры электронов определяется соотношением [7-9]

$$\nu(T_e) = \nu(T_{e0}) \Theta, \quad \Theta = \frac{T_e(h)}{T_{e0}(h)}, \quad (3)$$

где $T_{e0}(h)$ — температура электронов в невозмущенной ионосфере. На высотах 50–90 км она близка к температуре T нейтральных частиц. В рамках элементарной теории эффективная температура электронов находится из уравнения [10]

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_2}{E_0} \right)^2 (\omega_2^2 + \nu_0^2) \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{\omega_2^2 + \nu^2(T_e)} + \frac{\sin^2 \beta}{2[(\omega_2 - \omega_H)^2 + \nu^2(T_e)]} + \frac{\sin^2 \beta}{2[(\omega_2 + \omega_H)^2 + \nu^2(T_e)]} \right\}, \quad (4)$$

где $\omega_H = \frac{|e|H_0}{mc}$ — гирочастота электронов, β — угол между полем E_2 возмущающей волны и магнитным полем H_0 , $\omega_2 = 2\pi f_2$, E_p — характерное плазменное поле для тепловых эффектов. Систему уравнений (1)–(4) необходимо дополнить уравнением для амплитуды поля

$$E_2(h) = \frac{E_{20}h_0}{h} \exp \left[-\frac{\omega_2}{c} \int_{h_0}^h K(\nu_0, N_0) dh \right], \quad (5)$$

где h_0 — координата начала слоя ионизации, K — коэффициент поглощения сильной волны. Здесь для простоты не учитывается эффект самовоздействия мощной волны. Учет этого эффекта несколько усложняет расчет теплового воздействия электромагнитной волны на ионосферу и, в конечном итоге, процедуру отыскания $\nu_0(h)$, $N_0(h)$ -профилей, однако принципиальных трудностей не вызывает. Вид функции F_1 зависит от характера микропроцессов в D -области и условий эксперимента. Изменение концентрации электронов из-за наличия градиентов электронной температуры происходит за время амбиполярной диффузии ионов $\tau_i \sim 10^5 \div 10^6$ сек, поэтому заметные возмущения плотности ионизации возникают только при нарушении рекомбинационно-ионизационного баланса электронов [11, 12].

В D -области скорость ионизации задана и не зависит от эффективной температуры электронов в пределах небольших изменений $\Delta T_e \sim T_{e0}(h)$. Для значений $P_2 \sim 400$ квт, КНД передающей антенны ~ 250 в диапазоне частот $f_2 \sim 2-6$ МГц относительная температура $\Theta = T_e/T_{e0}$ достигает величины $\sim 1,1-1,2$ на высотах 50—60 км, а в интервале высот 70—90 км величина Θ будет $\sim 1,5-4$. Таким образом, при нагреве электронов на высотах 50—90 км вариации электронной плотности определяются такими процессами неупругих соударений как рекомбинация, отлипание, прилипание электронов. Конкретный анализ этих процессов выходит за рамки данного сообщения, поэтому мы ограничимся рассмотрением одного простейшего случая. Если время сеанса наблюдений значительно меньше времени рекомбинации электронов $\tau_p = 1/\alpha_{эфф} N$ ($\alpha_{эфф}$ — эффективный коэффициент рекомбинации), то возмущения концентрации электронов невелики и $N(h) \approx N_0(h)$. В этом случае исследование системы уравнений (1)—(5) значительно упрощается. Обычно для нахождения профиля электронной концентрации задают $\nu_0(h)$ -профиль. Затем, используя соотношение (1), подбирают такой $N_0(h)$ -профиль, который удовлетворял бы экспериментальной зависимости $B_0(h)$. Аналогичным образом следует поступить и в рассматриваемом случае. Поскольку естественные изменения числа соударений $\Delta \nu_0 \ll \nu_0$, то достаточно выбрать несколько различных профилей $\nu_{01}(h), \nu_{02}, \dots, \nu_{0m}$ и, действуя указанным выше способом, получить с помощью уравнения (1) соответствующие им зависимости $N_{01}(h), N_{02}, \dots, N_{0m}$. Затем из них выбирается пара зависимостей (ν_{0k}, N_{0k}) , которая после подстановки в правую часть уравнения (2) обращала бы его в тождество (при этом следует учесть соотношения (3)—(5)). Нетрудно видеть, что функция $B(h)$ неявно зависит от мощности передатчика P_2 . Варьируя этот параметр, можно получить дополнительные сведения о процессах в D -слое и, в частности, уточнить наши представления о механизме частичных отражений.

Практически удобно использовать для нагрева электронов импульсный передатчик с синхронным запуском импульсов относительно импульсов ионосферной станции; последние следуют с некоторым временным запаздыванием по отношению к импульсам мощного передатчика. Длительности импульсов, время запаздывания и частоту их повторения всегда можно подобрать таким образом, чтобы процессы установления электронной температуры не играли заметной роли. Если при этом наибольшая из длительностей τ удовлетворяет условию $\tau \ll \tau_p$, то изменения электронной концентрации будут невелики и, следовательно, имеет место случай $N(h) \approx N_0(h)$.

Предлагаемый вариант метода частичных отражений не исключает все трудности, которые возникают при интерпретации результатов экспериментов по наблюдениям слабых отражений от D -области. Однако он может оказаться полезным именно с точки зрения понимания физической природы частичных отражений, а в сочетании с экспериментальными по кросс-модуляции может служить дополнительным средством исследования тепловых эффектов в нижней ионосфере. Зависимость тепловых эффектов от мощности передатчика (P_2) и частоты (f_2) позволяет несколько расширить границы возможностей обычного метода частичных отражений.

Автор признателен Н. А. Митякову за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. S. Belrose, M. J. Burke, J. Geophys. Res., 69, № 13, 2799 (1964).
2. J. S. Belrose, J. Atm. Terr. Phys., 32, № 4, 567 (1970).

3. Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Т. Н. Федосеева, *Геомагнетизм и аэрономия*, 11, № 3, 458 (1971).
4. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, В. В. Тамойкин, *Сб. трудов конференции по ветрам и дрейфам*, июль 1970 г., Новосибирск.
5. M. Jørgensen, A. Haug, B. L. Landmark, *Proceeding of the NATO Advanced Study Institute held at Finse, Norway, April 1965, 27—30*, Edited by Ion Frihagen, North-Holland Publishing Company John Wiley and Sons, INC—New York, 1966.
6. J. B. Gregory, A. H. Manson, *J. Geophys. Res.*, 72, № 3, 1073 (1967).
7. Р. К. Уиттен, И. Дж. Поппов, *Физика нижней ионосферы* (перевод с английского), изд. Мир, М., 1968.
8. M. Mentrone, *J. Geophys. Res.*, 73, № 13, 4444 (1968).
9. V. N. Sharma, *Int. J. of Electronics*, 29, № 3, 275 (1970).
10. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, *УФН*, 70, № 2, 201 (1960); № 3, 393 (1960).
11. А. В. Гуревич, *Геомагнетизм и аэрономия*, 5, № 1, 70 (1965).
12. А. В. Гуревич, *Геомагнетизм и аэрономия*, 7, № 2, 291 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
3 мая 1971 г.

ON THE METHOD OF PARTIAL REFLECTIONS

V. A. Ryzhov

A variant of the partial reflection method is proposed. It is shown that in some cases using this method one can obtain simultaneously the electron density profiles and the collision number in the ionospheric *D*-region.

УДК 621.371.332.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ШИРИНЫ ДИАГРАММ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ В МЕТРОВом И ДЕЦИМЕТРОВом ДИАПАЗОНАХ ВОЛН

Г. В. Алексеев, С. А. Волковский, А. П. Жуковский, Е. И. Оноприенко,
В. Д. Трофимов

Излагается методика определения диаграмм обратного рассеяния поверхности с использованием эффекта Доплера. Приводятся результаты экспериментальных исследований в диапазоне волн от 11 см до 2 м над разными видами поверхностей (море, пашня, лес, барханы). Даны результаты измерений соотношения уровней зеркальной и рассеянной компонент отраженного сигнала на основе полученных законов распределения. Указано на возможность дистанционного определения статистических характеристик поверхности.

При анализе энергетических и точностных характеристик радиотехнических устройств, использующих сигнал, рассеянный шероховатой поверхностью, принципиально необходимо знание диаграммы обратного рассеяния (ДОР) поверхности (или ее удельной эффективной площади рассеяния). В то же время для целого класса устройств, работающих при углах облучения, близких к вертикальным, достаточно иметь не полную угловую характеристику ДОР, а только ее эффективную ширину и коэффициент отражения, так как форма ДОР слабо влияет на точностные характеристики. Хорошо известен способ определения ДОР с помощью узконаправленных поворотных антенных систем [1, 2], который, однако, в метровом диапазоне практически трудно реализовать. Исследования в широком диапазоне радиоволн выявили необходимость в разработке новой методики определения ДОР и ее эффективной ширины.

При вычислении ошибок отмеченных радиоустройств также необходимо знать законы распределения отраженного сигнала или его огибающей и, в частности, отношение $N_s = P_s/P_p$ — мощностей зеркальной (когерентной) и рассеянной компонент, — которое однозначно связано с дисперсией неровностей поверхности. Одновременное исследование в широком диапазоне волн позволяет получить частотную зависимость N_s для каждого типа поверхности.

Практически весьма специфичной оказывается обработка принятого сигнала, содержащего зеркальную компоненту. Кроме того, излучаемые сигналы являются модулированными, что вносит дополнительную периодическую нестационарность, причем модулирующая функция искажается из-за протяженности поверхности. Неучет этих факторов при обработке сигнала может привести к грубым ошибкам. Поэтому изложенная ниже методика эксперимента и, в частности, метод синхронной дискретной выборки оказались принципиально необходимыми при выполнении настоящих исследований и могут быть полезны в других случаях.

1. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ШИРИНЫ ДОР И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

Средний доплеровский спектр сигнала, отраженного от статистически изотропной шероховатой поверхности при моночастотном излучении, осесимметричных ориентированных вертикально вниз антеннах и горизонтальном полете, может быть представлен в виде [3, 4]

$$G(f) = \frac{P_t (G_a^0)^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{\lambda}{2H} \right)^2 \left\{ G_{ан}^2(0) \exp \left[- \left(4\pi \frac{\sigma}{\lambda} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} \right)^2 \delta(f - f_0) + \frac{1}{\pi F_{дг}} \int_0^{\pi/2} \frac{G^0(\theta) G_{ан}^2(\theta) \cos \theta \sin 2\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - [(f - f_0)/F_{дг}]^2}} \right\}, \quad (1)$$

где P_t — излучаемая мощность; G_a^0 , $G_{ан}(\theta)$ — коэффициент усиления и нормированная диаграмма направленности антенн (ДНА); H — высота полета; $G^0(\theta) = f(\sigma/\lambda; \beta_{ск}; \rho_0/\lambda; \varepsilon)$ — ДОР поверхности, функционально связанная со среднеквадратичными значениями высоты σ и угла наклона $\beta_{ск}$, радиусом корреляции ρ_0 поверхности, длиной волны λ и диэлектрической проницаемостью ε ; $F_{дг} = 2V_r/\lambda$ — максимальная доплеровская частота при горизонтальном полете со скоростью V_r . Первое слагаемое в (1) — спектр зеркальной компоненты сигнала, второе — рассеянной.

Из анализа формулы (1) следует, что при известных скоростях полета и ДНА, а также при экспериментально полученном доплеровском спектре можно найти ДОР, решив интегральное уравнение. Вводя подходящую аппроксимацию для произведения ДНА и ДОР

$$G_{ан}^2(\theta) G^0(\theta) = \cos^{2m} \theta \cos^n \theta = \cos^p(\theta), \quad (2)$$

из (1) получим

$$G(f) = P_s \delta(f - f_0) + G_{p \max} \left[1 - \left(\frac{f - f_0}{F_{дг}} \right)^2 \right]^{p/2+1}, \quad (3)$$

где P_s — мощность зеркальной компоненты; $G_{p \max}$ — максимальная спектральная плотность рассеянной компоненты, определяемая условием нормировки по мощности $P_p = \int_0^\infty G_p(f) df = G_{p \max} \Delta F_d$; ΔF_d — эф-

фективная ширина спектра. Учитывая, что эффективная ширина ДОР при аппроксимации (2) определяется как

$$\Theta_{ор} = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta \quad (4)$$

и $n = p - 2m$, а $\Delta F_d/F_{дг} = \varphi(p; V_r; f_0)$, можно установить зависимость $\Theta_{ор}$ от относительной ширины доплеровского спектра (рис. 1). В общем случае указанная связь нелинейная, и только при $\Theta_{ор} < 0,2$ имеем $\Theta_{ор} \approx \Delta F_d/F_{дг}$ (рад).

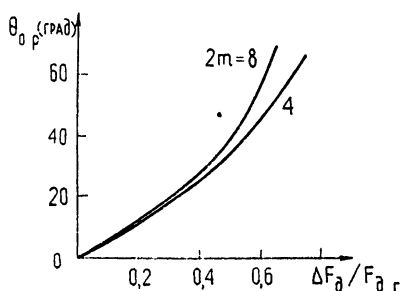


Рис. 1. Связь $\Theta_{ор}$ и эффективной ширины доплеровского спектра при различных ДНА.

дискретные моменты времени, кратные периоду нестационарности, $t_i = t_0 + iT_m$, где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, а t_0 — постоянный временной сдвиг относительно начала отсчета. Тогда вместо процесса (5) получим дискретную синхронную выборку:

$$U_{np}(t_i) = m_2 E(t_i) \cos [\psi_2 + \varphi(t_i)] + A_0 m_1 \cos [\psi_1 + \theta_0] = m_2 \xi(i) + \eta, \quad (6)$$

где $m_2 = m_2(t_0)$; $\psi_2 = \psi_2(t_0)$; $m_1 = m_1(t_0)$; $\psi_1 = \psi_1(t_0)$; η — константа выборки; H и θ_0 — условно фиксированы. Процессы $E(t_0 + iT_m)$, $\varphi(t_0 + iT_m)$ из-за стационарности и эргодичности выбранного участка облучаемой поверхности не зависят (в статистическом смысле) от выбора начала отсчета t_0 . Поэтому $m_2 \xi(i) = m_2 E(i) \cos \varphi(i)$ является стационарной эргодичной выборкой и для нее справедливо $\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) \rightarrow W(x)$, где $P_n(x)$ — измеренная функция процесса по временной выборке с достаточно большим объемом « n », а $W(x)$ — распределение (по ансамблю) выборок. Стационарность по « i » следует понимать как инвариантность статистических характеристик при изменении начала отсчета по « i » (но не по t_0). Очевидно, что распределение η есть $\delta(x - \eta)$, а для последовательности (2) получаем измеренное распределение $P_n(x, t_0) = P_n[x - \eta(t_0)] \rightarrow W[x - \eta(t_0)] = W(x, t_0)$, совпадающее с сечением плотности вероятности $W(x, t)_{t=t_0}$ сигнала биений.

Кроме того, нас интересует отношение $N_3 = P_3/P_p$. Исходя из (6), имеем

$$N_3 = \frac{P_3}{P_p} = \frac{A_0^2}{2\sigma_\xi^2} \frac{[\overline{m_1(t)}]^2}{[\overline{m_2(t)}]^2}, \quad (7)$$

где черта сверху означает усреднение за период нестационарности, σ_ξ^2 — дисперсия процесса $\xi(t)$.

Естественно, было бы удобно определять N_3 из характеристик $W(x, t_0)$, а не проводить специальных измерений согласно (7). Нетрудно заметить, что такую связь можно установить, если выполнить условие $m_2(t) = m_1(t)$ (или $m_2 \approx m_1$), реализуемое при плохой селекции зондирующего сигнала по дальности и широким диаграммам направленности антенн. В эксперименте это выполнялось. Тогда величина N_3 определяется в (7) из закона распределения $W(x, t_0)$ через его характеристики: среднее значение η и дисперсию σ_η^2 , так как A_0 связано с η соотношениями

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A_0 \cos [\psi_1 + \theta_0], \\ \eta_2 &= A_0 \cos [\psi_2 + \theta_0]. \end{aligned}$$

Второе уравнение получается для той же реализации путем сдвига момента t_0 на Δt . При этом Δt лучше выбирать так, чтобы $\psi_1 - \psi_2 = \pi/2$, тогда $A_0 = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ становится известным.

Все вышеизложенное относится к строго горизонтальному полету над стационарной и изотропной поверхностью, когда $\theta(t) = \theta_0$.

В условиях полета из-за внешних возмущений имеются случайные перемещения летательного аппарата по вертикали даже над поверхностью с неизменным средним уровнем, и высокочастотная фаза $\theta(t)$ в (5) изменяется по закону этих перемещений: $\theta(t) = \theta_0 + \Delta\theta(t)$, где $\Delta\theta(t) = (4\pi/\lambda) \Delta H(t)$.

Практика показывает, что $\Delta H(t)$ за время эксперимента можно считать почти стационарным и эргодичным процессом. При этом для рассеянной компоненты одномерная плотность $W(x)$ слабо зависит от $\Delta H(t)$, так как выполняется условие $\Delta H_{\max}/H_0 \ll 1$. Зеркальная компонента из гармонического колебания, преобразуется в процесс со случайной фазовой модуляцией. При условии $\sigma_{\Delta H}/\lambda \gg 1$ процесс $\eta(t) =$

$= A_0 \cos \Phi(i)$ может рассматриваться как процесс с равновероятной фазой $\Phi(i)$ в пределах $\pm \pi$. Сечение закона распределения сигнала биений в этом случае выражается через свертку законов для процессов $\xi(i)$ и $\eta(i)$ и при значительном уровне зеркальной компоненты имеет симметричный двугорбый вид [5]. Из такого закона при условии нормальности процесса $\xi(i)$ легко восстановить N_3 .

Если $\Phi(i)$ нельзя считать равновероятной, распределение будет сильно зависеть от момента t_0 . При этом сечение результирующего закона распределения сигнала биений имеет уже несимметричный двугорбый вид. Путем вариаций по t_0 можно получить ряд сечений закона, пронормировав и усреднив их, выявить требуемое отношение N_3 . Отмеченные вариации можно получить автоматически, если при помощи гетеродинажирования ввести асинхронную фазу $\Delta \Omega t$. В результате усреднения по t получается закон распределения сигнала, совпадающий со случаем распределения суммы нормального шума и косинусоиды с равновероятной фазой.

Экспериментальные исследования проводились на волнах $\lambda_1 = 2$ м, $\lambda_2 = 68$ см, $\lambda_3 = 34$ см, $\lambda_4 = 11,3$ см при $F_m = 2$ кГц, показателе степени ДНА в формуле (2), равном $m = 2$ на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и $m = 4$ на λ_4 , и симметричном пилообразном законе ЧМ. Режим полета—горизонтальный, на высотах от 500 до 2000 м и при скоростях от 200 до 400 км/час.

2. ОСОБЕННОСТИ АППАРАТУРЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛА

Во время эксперимента производилась магнитная запись сигнала биений. Так как точность восстановления Θ_{op} зависит от точности определения ΔF_d , в аппаратуре для обработки сигнала (рис. 3) предусмотрена компенсация паразитной ЧМ (из-за нестабильности лентопротяженного механизма 1). Одновременно с сигналом биений записывался опорный сигнал частоты F_m , который при воспроизведении выделялся фильтром 9. С помощью блока опорных частот 7 формировалась сетка частот kF_m . Система фазовой автоподстройки частоты 8 совместно с балансным смесителем 2 позволяет скомпенсировать паразитную ЧМ и получить на выходе фильтра промежуточной частоты 3 сигнал с доплеровским спектром, регистрируемый анализатором спектра 6 (переключатель Π_1 в положении 2). Данный метод дает ошибки в определении Θ_{op} при наличии зеркальной компоненты (3) вследствие конечного разрешения анализатора спектра 6 и доплеровского смещения из-за случайных эволюций самолета по вертикали. Для устранения влияния этих эффектов применялись метод сдвига доплеровского спектра на нулевую частоту при помощи амплитудного детектора 4 и стробирование сигнала биений через полупериод F_m электронным ключом 5 (переключатель Π_1 в положении 1).

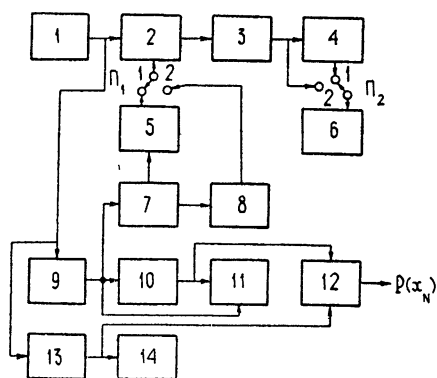


Рис. 3.

При определении эффективной ширины ΔF_d доплеровского спектра на входе амплитудного детектора по эффективной полосе флуктуаций на его выходе ΔF_{ad} необходимо знать $N_3 = P_3/P_p$. Так, при гауссовой аппроксимации имеем связь

$$\Delta F_{ad} = \frac{\Delta F_d}{2} \frac{1 + 2N_3}{1/\sqrt{2} + 2N_3}.$$

В случае экспериментального исследования распределения сигнала биений (рис. 3) с выхода магнитофона 1 сигнал биений подавался на избирательный усилитель низкой частоты 13, а затем на вход прибора 12 (ИДК-3). В качестве опорного напряжения ИДК-3 использовалось записанное на магнитную ленту напряжение с частотой модуляции F_m , фаза которого при синхронной обработке сигнала (или t_0) изменялась в пределах от 0 до 180° фазовращателем 10 и регистрировалась фазометром 11.

Нормировка экспериментальных законов распределения проводилась по суммарной мощности сигнала биений $P_{пр} = P_s + P_p = \text{const}$ при помощи измерителя мощности 14.

Закон распределения мгновенных значений сигнала $P(x_N)$ снижался с помощью синхронных дискретных выборок. Для определения одной точки проводилась дискретная выборка с частотой F_m в течение 10 сек порядка 10^4 отсчетов. Каждая кривая распределения строилась по 19 точкам.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

При определении доплеровских спектров выбирался квазистационарный участок исследуемой поверхности; результаты эксперимента представлены в табл. 1.

Таблица 1

Т. и п. поверхности	λ (м)	ΔF_d (гц)	F_d (гц)	$\theta_{ор}$ (град)	A_0/σ_ξ	
					теор.	экспер.
Море (около 1 балла) $\sigma_h = 0,03$ м	2	10	73	6,5	7,0	7,0
	0,68	28	220	9,5	2,4	1,0
	0,34	98	428	12,5	0,9	0,5
	0,11	332	1250	17	0	0
Море (2 балла)	2	14	65	12	—	—
	0,68	51	195	16	—	—
	0,34	115	390	18	—	—
Море (4 балла) $\sigma_h = 0,32$ м	2	18	73	15	0,19	0
	0,68	60	219	17	0	0
	0,34	193	438	28	0	0
	0,11	530	1310	28	0	0
Пашня $\sigma_h = 0,035$ м	2	10	64	9	6,2	10
	0,68	33	179	13	1,2	0,8
	0,34	98	443	16	0,8	0,5
	0,11	510	1460	23	0	0
Песчано-солончаковая местность с крупными барханами $\sigma_h = 0,15$ м	2	19	65	19	1,4	2,0
	0,68	70	195	23	0,1	0,5
	0,34	300	390	57	0	0
	0,11	700	1170	57	0	0
Редкий лес (лето)	2	19	65	19	—	1,0
	0,68	65	195	21	—	0
	0,34	360	390	57	—	0

Проведем обсуждение результатов на основе теории рассеяния электромагнитных волн от сложных статистически шероховатых поверхностей [4, 10]. В общем случае эффективная ширина ДОР опре-

деляется статистическими характеристиками поверхности и длиной ЭМ волны.

Поверхность моря, пашни и песчано-солончаковой местности с крупными барханами можно характеризовать суперпозицией крупномасштабной (основной) и мелких (вторичных) структур. ДОР от таких поверхностей состоит из двух участков: главного лепестка, формируемого основной структурой (при углах облучения, близких к вертикальным), и бокового лепестка (результат рассеяния от вторичных структур). При используемой в экспериментах горизонтальной поляризации вторичная структура поверхности дает уровень рассеяния в среднем на $20 \div 50$ дБ (для $\Theta \sim 0 \div 80^\circ$) меньше, чем основная. При интегральном методе оценки Θ_{0p} и сравнительно небольшой чувствительности приемной аппаратуры Θ_{0p} для моря, пашни и песчаной местности отражает, в основном, эффективную ширину главного лепестка ДОР.

Отражение от морской поверхности связано с состоянием — увеличение волнения приводит к естественному увеличению Θ_{0p} . Однако при фиксированных λ эта связь нелинейная, что объясняется разрушением гребней морских волн с увеличением волнения более 3 баллов. Сравнивая сопоставимые по высоте шероховатости: море (волнение 1 балл, скорость ветра $V_B \sim 1$ м/сек) и пашню, можно констатировать, что на одинаковых длинах волн Θ_{0p} от пашни больше, чем от моря в среднем в 1,3—1,4 раза. При $V_B \sim 1$ м/сек более 50% площади морской поверхности имеют срединные углы наклона $\beta_{cp} \approx 3,5^\circ$ [7]. В то же время углы наклона неровностей пашни больше из-за меньшего радиуса корреляции. Для обоих типов рассматриваемых поверхностей хорошо видна частотная зависимость, подчиняющаяся в районе главного лепестка ДОР приблизительно следующей закономерности: $\Theta_{0p} \sim \lambda^{-1/3}$. Увеличение волнения до 2-х баллов увеличивает срединные углы наклона β_{cp} до 6° , а следовательно, увеличивается и Θ_{0p} . В то же время частотная зависимость проявляется слабее: $\Theta_{0p} \sim \lambda^{-1/4}$. При 4-балльном волнении ($\beta_{cp} \sim 7,5^\circ$) для диапазонов λ_1, λ_2 еще заметна зависимость от (σ/λ) ($\Theta_{0p}(\lambda_2) > \Theta_{0p}(\lambda_1)$), а для диапазонов (λ_3, λ_4) частотная зависимость Θ_{0p} практически исчезает ($\Theta_{0p} \sim 1/\lambda$), так как в соответствии с теорией единственным определяющим параметром является наклон волн основной структуры.

Песчаная местность с крупными барханами и редкий лес (летом) имеют сравнимые Θ_{0p} на λ_1, λ_2 и $\Theta_{0p} > 57^\circ$ на λ_3, λ_4 . Столь большие значения Θ_{0p} над песчаной местностью объясняются большой крутизной наклонов барханов (основная структура); над песчаной местностью без крупных барханов Θ_{0p} всегда меньше, чем над лесом.

Лесистая местность — типичный вид «разрывной» поверхности, в основном являющейся суперпозицией вторичных дискретных структур — листьев, ветвей и т. п. отражателей. Чем короче волна, тем большее количество «резонансных» (сравнимых с $\lambda/2$) отражателей участвует в рассеянии, которое происходит, в основном, от верхней кроны деревьев. Следствием этого и является близкий к диффузному характер рассеяния на λ_3, λ_4 . В более длинноволновых диапазонах λ_1, λ_2 количество «резонансных» отражателей уменьшается, волна проникает глубже и возможно частичное рассеяние от земли, особенно для вертикальных углов падения волны, что приводит к уменьшению Θ_{0p} .

При сильно шероховатых поверхностях, у которых $\left(2\pi \frac{\sigma}{\lambda} \cos \Theta\right)^2 \gg 1$, теория рассеяния радиоволн [4] в совокупности с экспериментальными значениями Θ_{0p} позволяет оценить среднеквадратичный угол наклона $\beta_{ск}$ исследуемых поверхностей. При углах облучения, близких к верти-

кальным ($\theta \leq 30^\circ$), пологих углах наклона основной структуры поверхности и $\varepsilon \gg 1$ нормированную ДОР можно представить в виде

$$G_n^0(\theta) \approx \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^2}{\beta_{\text{ск}}^2}\right), \quad (8)$$

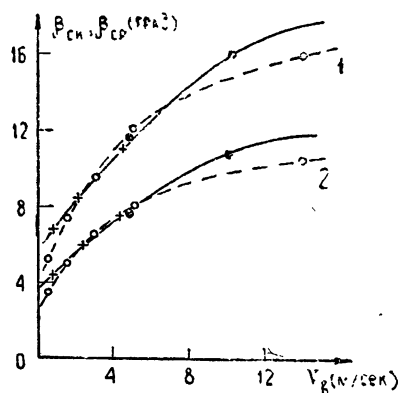
а θ_{0p} и $\beta_{\text{ск}}$ связаны соотношением

$$\theta_{0p} = 2 \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\theta^2}{\beta_{\text{ск}}^2}\right) d\theta = \sqrt{2\pi} \beta_{\text{ск}} (\text{рад}). \quad (9)$$

Экспериментальные исследования распределения высот морских волн [8] показывают, что статистика их—гауссова. Тогда угол $\beta_{\text{ск}}$ связан со срединным углом $\beta_{\text{ср}}$ соотношением $\beta_{\text{ср}} = 0,675 \beta_{\text{ск}}$.

Последнее позволяет воспользоваться результатами прямых измерений характеристик водной поверхности [7]. Результаты расчетов $\beta_{\text{ск}}$ и $\beta_{\text{ср}}$ по формулам (8) и (9) на волне λ_4 для морской поверхности, дополненные для более сильных волнений ($V_B = 5; 10$ м/сек) материалами работы [9], а также прямые измерения [7] представлены на рис. 4. Полученные зависимости хорошо согласуются. В заключение приведем расчетные данные углов $\beta_{\text{ск}}$ для других исследованных поверхностей: пашня— $9,3^\circ$, песчано-солончаковая местность с крупными барханами $> 22^\circ$. Теперь рассмотрим законы распределения сигнала и отношение N_s . При измерениях было удобно пользоваться отношением A_0/σ_ξ , которое определялось путем сравнения полученных экспериментальных законов распределения с теоретическими [5]. Так как эксперимент проводился при условии $P_{\text{пр}} = P_s + P_p = \text{const}$, то известные теоретические законы распределения [5] пересчитывались к новой переменной $x_N = x/\sqrt{P_{\text{пр}}}$. В табл. 1 представлены результаты экспериментальной обработки. При относительно спокойном состоянии моря (волнение 1 балл) в диапазоне λ_1 установлено наличие значительной зеркальной составляющей ($A_0/\sigma_\xi \approx 7$), а на λ_2 зеркальная составляющая существенно уменьшается ($A_0/\sigma_\xi \approx 1$). При тех же условиях в диапазоне λ_4 зеркальная составляющая практически не улавливается.

Рис. 4. Связь скорости ветра и углов наклона морских волн, полученная экспериментально: $\circ \circ \circ$ —Дурстом; $\bullet \bullet \bullet$ —Коксом и Мунком; $\times \times \times$ —авторами;
1 — $\beta_{\text{ск}}$, 2 — $\beta_{\text{ср}}$.



Плотности вероятности, полученные в результате обработки сигналов, отраженных от морской поверхности (1 балл) представлены на рис. 5 а, б, в при различных длинах волн и значениях фазы выборки относительно опорного напряжения. Существенная зависимость закона распределения от фазового сдвига между сигналом и опорным напряжением свидетельствует о наличии зеркальной составляющей. Результирующий закон распределения строился по нескольким значениям фазовых сдвигов, его форма и характеристические параметры сравнивались с теоретическими. Необходимо отметить, что значения $\varphi = 20^\circ, 80^\circ$

и т. д. условны ($\varphi = 20^\circ \pm \Delta\varphi$; $80^\circ \pm \Delta\varphi$, где значение $\Delta\varphi$ зависит от высоты).

Поверхностью типа «пашня» являлось ровное без крупномасштабного рельефа вспаханное поле. Показано, что на волне λ_1 имеется существенная зеркальная составляющая ($A_0/\sigma_\xi \approx 10$), на λ_2 эта составляющая много меньше ($A_0/\sigma_\xi \approx 0,8$), а в диапазоне λ_3, λ_4 практически отсутствует. Теоретический расчет по формуле (10) при $\sigma_h = 5$ см дал достаточно хорошее совпадение с данными эксперимента. Если считать, что зрительно «размах» нормального процесса воспринимается примерно как $\pm 2\sigma_h$, можно установить, что глубина борозд пашни по этому критерию около 20 см, что близко к истине.

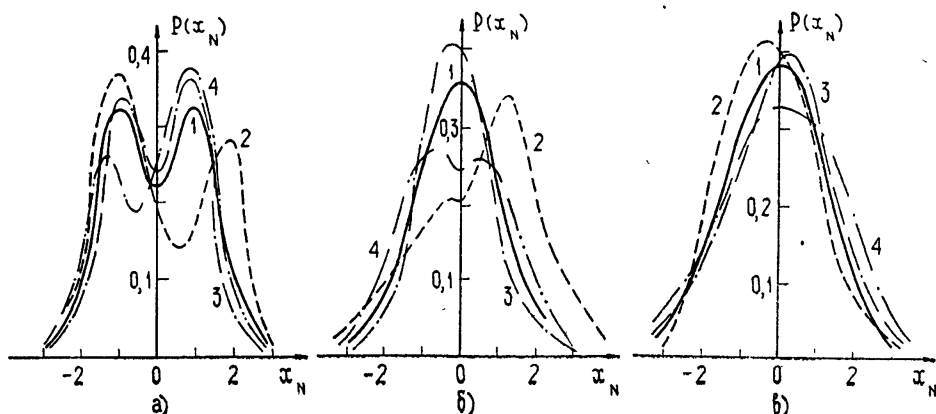


Рис. 5. Сечение законов распределения сигнала биений для волн:

- а) — λ_1 : 1 — $A_0/\sigma_\xi = 7$; 2 — $\varphi = 80^\circ$; 3 — $\varphi = 170^\circ$; 4 — $\varphi = 20^\circ$;
 б) — λ_2 : 1 — $A_0/\sigma_\xi = 1$; 2 — $\varphi = 80^\circ$; 3 — $\varphi = 20^\circ$; 4 — $\varphi = 140^\circ$;
 в) — λ_3 : 1 — $A_0/\sigma_\xi = 0,5$; 2 — $\varphi = 110^\circ$; 3 — $\varphi = 30^\circ$; 4 — $\varphi = 170^\circ$.

Характер отражений от равномерных хвойных массивов на $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ таков, что принимаемый сигнал практически не имеет «зеркальной» составляющей. На волне λ_1 значение $A_0/\sigma_\xi = 1,0—1,2$, причем можно предположить, что зеркальная компонента образуется в результате отражения от подстилающей поверхности.

Сигнал, отраженный от песчано-солончаковой степи с крупными барханами (высотой до $1 \div 1,5$ м), на λ_1 и λ_2 имеет незначительную зеркальную компоненту, а на λ_3 и λ_4 практически только рассеянную компоненту. Статистическая структура сигнала, отраженного от поверхности песчано-солончаковой степи, близка к статистике сигнала от морской поверхности с волнением около 3 баллов.

Помимо экспериментального определения законов распределения мгновенных значений сигналов и восстановления по ним отношения N_s исследовались также распределения огибающей сигнала, которые практически во всех случаях очень близки к обобщенному закону Рэлея. Например, для поверхности типа «пашня» восстановленные по законам распределения огибающей значения N_s на волнах $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ оказались соответственно равными 12; 2,0; 0,5 и 0. Эти результаты хорошо совпадают с данными, полученными при обработке законов распределения мгновенных значений принимаемой смеси. При обработке огибающей по ранее отмеченным причинам требуется также осуществлять дискретную синхронную выборку, а фильтрация огибающей должна быть как можно менее инерционной.

В общем случае при пологих неровностях и широких ДНА теоретический расчет отношения A_0/σ_ξ производился, исходя из формул [10]:

$$N_s = \frac{A_0^2}{2\sigma_\xi^2} = \frac{P_s}{P_p} = \frac{P_s}{1-P_s}, \quad (10)$$

где

$$P_s = \frac{P_s}{P_s + P_p} \approx \exp \left[- \left(\frac{4\pi\sigma_h}{\lambda} \right)^2 \right].$$

Для случая слабого волнения и отношения σ_h к длине волны $\sigma_h/\lambda \ll 1$ из (10) имеем [10]

$$\frac{A_0}{\sigma_\xi} = \sqrt{2N_s} = \frac{\sqrt{2}\lambda}{2,37 H_{в3\%}} \exp \left[- \left(\frac{1,7 H_{в3\%}}{\lambda} \right)^2 \right], \quad (11)$$

где $H_{в3\%}$ — высота волны трехпроцентной обеспеченности. Экспериментальные результаты достаточно хорошо согласуются с теоретическими, подсчитанными по формуле (11). При этом считалось, что для волнения ~ 1 балла $H_{в3\%} \approx 0,25$, а для волнения 4—5 баллов $H_{в3\%} \approx 3$ м.

Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы.

1) Практически возможны экспериментальные определения эффективной ширины ДОР на основе эффекта Доплера с учетом возможной модуляции зондирующего сигнала.

2) Получены экспериментальные значения $\Theta_{ор}$ в широком диапазоне волн и для разных поверхностей.

3) Приведены результаты пересчета $\Theta_{ор}$ в $\beta_{ск}$, которые близки к данным, полученным оптическим методом.

4) Показана характерная нестационарность отраженного сигнала, которая существенным образом влияет на вид экспериментальных распределений. Метод синхронной обработки позволяет учитывать отмеченную особенность.

4) Экспериментально полученные распределения подтвердили теоретические представления о структуре сигнала и позволили определить уровень зеркальной компоненты в зависимости от частоты излучения и типа отражающей поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Graut, B. S. Yapple, Proc. IRE, **45**, № 7, 976 (1957).
2. A. R. Edison, R. K. Moore, B. D. Warner, Trans. IRE, AP-8, № 3, 246 (1960).
3. А. П. Жуковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, **10**, № 3, 217 (1967).
4. А. П. Жуковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 10, 1501 (1970).
5. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1961.
6. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
7. C. S. Durst, J. Inst. Navigation, **11**, № 2, 143 (1958).
8. L. J. Cote, Meteorological Papers, № 2, 57 (1960).
9. C. Cox, W. J. Munk, Marine Res., **13**, 198 (1954).
10. С. Г. Зубкович, Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1968.

EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS OF THE EFFECTIVE BEAMWIDTH OF THE SURFACE BACK SCATTERING PATTERNS AND DISTRIBUTION OF REFLECTED SIGNALS IN METER AND DECIMETER WAVE RANGE

*G. V. Alekseev, S. A. Volkovskii, A. P. Zhukovskii, E. I. Onoprienko,
V. D. Trofimov*

The procedure of determining the surface back scattering patterns using Doppler effect is set forth. The results of experimental investigations over the wave range from 11 cm to 2 m carried out above the surfaces of different kinds (sea, arable land, forest, sandhill) are presented. The results of measuring the ratio of the levels of the mirror and scattered components of the reflected signal are given on the basis of the distribution laws obtained. The possibility of the remote determination of the statistic surface characteristics is pointed out.

УДК 538.573

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СФЕРОЙ

А. В. Мананкова

Рассмотрены электромагнитные поля, создаваемые сторонними токами типа бегущей волны над идеально проводящей расширяющейся сферой. Проводится конкретный расчет и обсуждается форма импульса в зависимости от параметров задачи.

1. Пусть в момент времени $t = 0^+$ в точке $r = 0$ возникает идеально проводящая сферическая область, радиус которой меняется во времени по известному закону $a(\tau)$. Электромагнитное поле вне проводящей сферы подчиняется уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{B}, \quad \tau = ct, \quad r > a(\tau) \quad (1)$$

и создается сторонними токами типа бегущей волны, так же возникающими в момент времени $\tau = 0$. Считаем, что вектор плотности тока направлен по радиусу и не зависит от азимутальной координаты:

$$\mathbf{I} = I(\tau - r, \theta, r) \mathbf{e}_r.$$

Рассматривается задача с нулевыми начальными данными

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

Условие на движущейся границе:

$$E_\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = a(\tau). \quad (2)$$

В задаче только E_r -, E_θ -, B_φ -компоненты электромагнитного поля отличны от нуля. Введем векторный потенциал $\Pi = \Pi \mathbf{e}_r$. Тогда компоненты электромагнитного поля определяются соотношением

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial \tau} \Pi, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Pi + \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial \tau} \Pi. \quad (3)$$

После выделения угловой зависимости по θ из (1) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Pi_n - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Pi_n + \frac{n(n+1)}{r^2} \Pi_n = F_n(r, \tau); \quad (4)$$

$$\Pi_n(r, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \Pi_n = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Pi_n = 0 \quad \text{при} \quad r = a(\tau),$$

где Π_n и F_n — коэффициенты разложения $\Pi(r, \tau, \theta)$ и $F(r, \tau, \theta)$ в ряд по полиномам Лежандра,

$$F(r, \tau, \theta) = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\tau} I(r, \tau', \theta) d\tau'.$$

2. Рассматриваемая задача—идеализированная модель для определения электромагнитных полей, возникающих при поглощении ионизирующего излучения, создаваемого точечным источником. Быстрые электроны, образовавшиеся в результате фотопоглощения или комптоновского рассеяния—сторонний ток задачи. Вторичные электроны, образовавшиеся в результате ионизационных потерь заряженных частиц первоначально высокой энергии,—электроны проводимости. Предполагается, что характерная частота интересующих нас процессов много меньше частоты столкновений вторичных электронов с молекулами нейтральных компонент газа. Плотность поглощенной энергии и, следовательно, плотность стороннего тока пропорциональны фактору $e^{-\mu r}$, где μ —коэффициент поглощения. Экспоненциальный спад плотности поглощенной энергии вместе с временным фактором нарастания проводимости за фронтом ионизации заставляет считать в общем случае скорость движения границы (например, границы фиксированного значения проводимости) отличной от скорости света.

3. Обычная схема решения задач методом разделения переменных хорошо известна. При введении движущихся границ и (или) распределенных источников, когда область, занимаемая ими, меняется по времени, оказывается более удобным* не проводить полного разделения переменных, а, ограничившись выделением угловой зависимости, решать уравнение в частных производных [2–4], что дает возможность представить решение задачи в форме мультипольного разложения непосредственно во временной области. В этом случае математический аппарат оказывается адекватным существенно нестационарному характеру задачи, и необходимые результаты достигаются менее трудоемким путем.

4. Зададим закон движения границы и плотности тока в виде

$$a(\tau) = \beta\tau, \quad \tau \leq \tau_0; \quad a(\tau) = \beta\tau_0, \quad \tau \geq \tau_0; \quad (6)$$

$$I = \frac{c}{4\pi} A r e^{-\mu r} \delta(\tau - r) \cos \theta. \quad (7)$$

Выражение (7) описывает дельтаобразную волну стороннего тока, распространяющуюся от центра со скоростью света c ; A —нормировочный множитель. Зависимость от угла θ такова, что ряд по полиномам Лежандра обрывается на члене $n=1$, соответствующем излучению дипольного типа. Введение вспомогательного потенциала

$$Z_n = r^n \Pi_n(r, \tau) \quad (8)$$

позволяет свести (4) к неоднородному уравнению Дарбу—Эйлера

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Pi_n + \frac{n}{(\xi_2 - \xi_1)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right] Z_n = \frac{1}{4} \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \right)^n F_n(\xi_1, \xi_2) \quad (9)$$

с нулевыми начальными данными и условием на движущейся границе:

* При полном разделении переменных задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма [1], и только в простейших случаях удается получить аналитические результаты.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} Z_n(r, \tau)/r^n = 0 \quad (r = a(\tau)). \quad (10)$$

Общее решение поставленной задачи складывается из частного решения неоднородного уравнения (4) $Y_n(\xi_1, \xi_2)$, которое строится методом функции Римана [5], и решения соответствующего ему однородного уравнения $Y_n^0(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = \tau - r$, $\xi_2 = \tau + r$ — характеристические переменные;

$$P_n = h(\xi_1) Y_n(\xi_1, \xi_2) + \sum_{k=0}^n a_{kn} (\xi_2 - \xi_1)^{-n+k} \frac{d^{(k)}}{d\xi^{(k)}} [h(\xi_1) \Phi_n(\xi_1)], \quad (11)$$

$$a_{k+1,n} = a_{kn} \frac{n-k}{(2kn + 2n - k^2 - k)} \quad (a_{0n} = -2^n).$$

Наличие множителя в виде единичной функции включения $h(\xi_1)$ отражает тот факт, что при нулевых начальных данных электромагнитное поле источника типа бегущей волны тождественно равно нулю, если $\xi < 0$. Возмущенное поле также равно нулю при $\xi < 0$. Естественно предположить, что характер сингулярности возмущенного поля не будет выше, чем в поле источников в свободном пространстве. Опуская промежуточные выкладки, приведем результаты расчета для $Y_1(\xi_1, \xi_2)$ (ток задан выражением (7)):

$$Y_1(r, \xi) = \frac{A}{\mu^3} \left\{ \frac{2}{\mu r} + e^{-\mu r} \left[-\frac{2}{\mu r} - 2 - \mu r \right] + e^{-\mu \xi/2} \left[-\frac{2}{\mu r} + \right. \right. \quad (12)$$

$$\left. \left. + e^{-\mu r} \left(2 + \frac{2}{\mu r} + \mu r \right) \right] + \frac{\mu \xi}{2} e^{-\mu \xi/2} \left[1 - \frac{2}{\mu r} + e^{-\mu r} \left(1 + \frac{2}{\mu r} \right) \right] \right\} \quad (\xi \equiv \xi_1).$$

В дальнейшем выражения для потенциала $Y(r, \xi)$ источника в свободном пространстве, т. е. без учета движущейся границы, и потенциала $\Phi(\xi)$, характеризующего возмущающее действие границы, будут приводиться полностью, что в случае необходимости дает возможность вычислить все компоненты электромагнитного поля (3), (12) при любых значениях r и ξ . Обсуждение же результатов и графики будут, как правило, приведены для E_θ (или E_φ -компоненты в случае излучателя «магнитного типа») в зоне излучения.

Таким образом, в случае тока, заданного выражением (7), используя (3), (11), (12), получаем

$$E_\theta(r, \xi) = -\sin \theta \frac{A}{2\mu^2} \frac{h(\xi)}{r} e^{-\mu r} \left(\frac{\mu \xi}{2} - 1 \right) \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu r} \right) \right]. \quad (13)$$

Как видно из (13), где отброшены члены $O\left(\frac{1}{\mu r}\right)$, сигнал представляет собой двухполярный импульс с амплитудой, пропорциональной A (амплитуде источника), и длительностью, определяемой величиной $1/\mu c$. Учет конечной длительности стороннего тока удобнее всего провести, используя экспоненциальную аппроксимацию временной зависимости. С одной стороны, такая аппроксимация удобнее для аналитических расчетов, с другой, дает возможность в широких масштабах изменять форму импульса стороннего тока. Будем считать, что в (7) вместо $f(\xi) = \delta(\xi)$ используется

$$f(\xi) = h(\xi) m e^{-m\xi} \quad \text{или} \quad f(\xi) = \frac{m m_1}{m_1 - m} (e^{-m\xi} - e^{-m_1 \xi}) h(\xi), \quad (14)$$

где m и m_1 — произвольные константы и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi.$$

Значения $F_n(r, \xi)$ в правой части уравнения (9) будут иметь соответственно вид

$$F_1(r, \xi) = A r e^{-\mu r} h(\xi) (1 - e^{-m\xi}), \quad (15)$$

$$F_1(r, \xi) = A r e^{-\mu r} h(\xi) \left\{ \frac{m_1}{m_1 - m} (1 - e^{-m\xi}) - \frac{m}{m_1 - m} [1 - \exp(-m_1 \xi)] \right\}.$$

Поэтому, если вычислить результат воздействия некоторого «стандартного» сигнала $F_c = A r e^{-\mu r} h(\xi) e^{-\mu \xi}$, то, используя (4), (15), можно получить значение в случае стороннего тока, заданного любым из выражений (14) или (7):

$$Y_c(r, \xi) = \frac{A}{\mu^3 b^2} \left\{ e^{-m\xi} \left[b - 1 + \frac{2}{\mu r} - e^{-\mu r} \left(\mu r b + 1 + b + \frac{2}{\mu r} \right) \right] + e^{-\mu \xi/2} \left[1 - b + b \frac{\mu \xi}{2} - \frac{2 + b \mu \xi}{\mu r} + e^{-\mu r} \left(\mu r b + 1 + b + \frac{b \mu \xi}{2} + \frac{2 + b \mu \xi}{\mu r} \right) \right] \right\}. \quad (16)$$

Значение E_θ — компоненты поля в том же приближении, что и в (13), для $f(\xi) = h(\xi) m e^{-m\xi}$ может быть вычислено по формуле

$$E_\theta(r, \xi, \theta) \approx -\sin \theta \frac{A}{2\mu^2} \frac{h(\xi)}{r} \Omega_0(\xi, b) \quad \left(b = 1 - \frac{2m}{\mu} \right),$$

$$\Omega_0(\xi, b) = \frac{(1-b)^2}{b^2} (e^{-m\xi} - e^{-\mu \xi/2}) - \frac{\mu \xi}{2} \frac{(1-b)}{b} e^{-\mu \xi/2}.$$

Графики функции Ω_0 для различных значений $2m/\mu$ приведены на рис. 1.

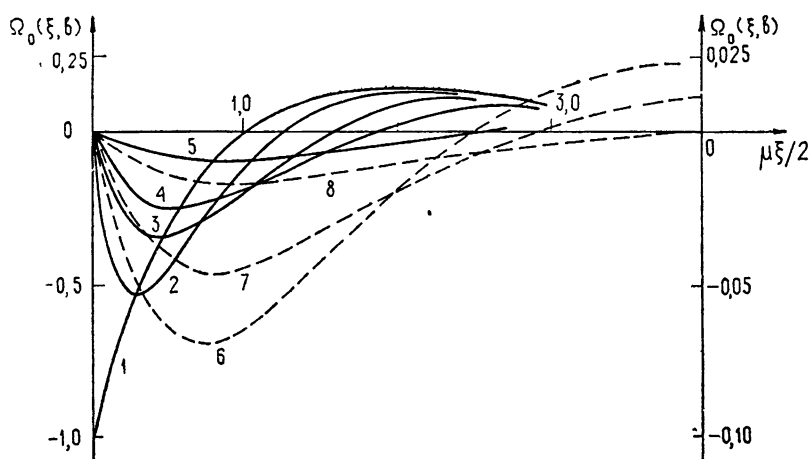


Рис. 1. $f_i = 1 - b_i$; $f_1 = \infty$; $f_2 = 5$; $f_3 = 2$; $f_4 = 1, 2$; $f_5 = 0,8$; $f_6 = 0,5$; $f_7 = 0,3$; $f_8 = 0,1$.

Для пунктирных кривых масштаб по оси амплитуд справа. При малой длительности импульса источника ($2m/\mu \gg 1$) форма сигнала отличается от таковой в случае «дельтаобразного» источника только конечной длительностью фронта первой полуволны $\tau_\phi \approx 1/mc$. Определяющим временным масштабом по-прежнему будет величина $1/\mu c$. При выполнении обратного соотношения $2m/\mu \ll 1$ меняется временной масштаб сигнала и его амплитуда становится пропорциональной малой величине $(2m/\mu)^2$.

Перейдем к рассмотрению граничной задачи (4), (5) и определению потенциала возмущающего поля $\Phi(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Pi_1 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} h(\xi) Y(r, \xi) + \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{d\xi} + \frac{1}{r^2} \right) h(\xi) \Phi(\xi) \right] \Big|_{r=a(\xi)} &\equiv 0, \\ h(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial r} Y + \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{d\xi} + \frac{1}{r^2} \right) \Phi \right] \Big|_{r=a(\xi)} + \\ + \delta(\xi) \left[-Y + \frac{\Phi}{r} + 2 \frac{d}{d\xi} \Phi - \frac{\Phi}{\xi} \right] \Big|_{r=a(\xi)} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю первой скобки приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $\Phi(\xi)$ (соответственно $(n+1)$ -го порядка при вычислении потенциала $\Phi_n(\xi)$). Из условия равенства нулю второй скобки получаем начальные данные для решения этого уравнения, т. е. значения $\Phi(\xi)$ и $\frac{d}{d\xi} \Phi(\xi)$ при $\xi = 0$ (при $n > 1$ аналогично можно получить значения функции $\Phi_n(\xi)$ и ее n первых производных).

В случае источника тока, заданного выражением (7), приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d\xi^2} \Phi + \frac{1}{r} \frac{d}{d\xi} \Phi + \frac{1}{r^2} \Phi \right] \Big|_{r=a(\xi)} &= b + ce^{-\mu\xi/2} + d\mu\xi e^{-\mu\xi/2}, \\ b(r) &= D \left\{ -\frac{4}{r^2} + e^{-\mu r} \left[\frac{4}{r^2} + \frac{4\mu}{r} + 2\mu^2 + 2\mu^3 r \right] \right\}, \\ c(r) &= D \left\{ \frac{4}{r^2} - \mu^2 + e^{-\mu r} \left[-\frac{4}{r^2} - \frac{4\mu}{r} - \mu^2 - \mu^3 r \right] \right\}, \\ d(r) &= D \left\{ \frac{2}{r^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{2} - e^{-\mu r} \left[\frac{2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{2} \right] \right\}, \\ \Phi(\xi) = \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad D = \frac{-A}{2\mu^4}. \end{aligned} \quad (17)$$

При $\beta = 1$ уравнение (17) имеет постоянные коэффициенты $r = r_0$ и легко интегрируется. Становится понятной структура решения, его главные члены. Последнее существенно облегчает анализ случая $\beta \neq 1$, когда расчеты значительно усложняются и решение задачи не выражается через элементарные функции. Выражение для потенциала возмущенного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \frac{a(r_0)}{\delta^2 + \alpha^2} \left\{ 1 - e^{-\delta\xi} \left[\cos \alpha\xi + \frac{\delta}{\alpha} \sin \alpha\xi \right] \right\} + \\ & + \frac{\mu d(r_0)}{\alpha(\delta_1^2 + \alpha^2)} \left\{ e^{-\mu\xi/2} \left[\alpha\xi - \frac{2\delta_1\alpha}{\delta_1^2 + \alpha^2} \right] + e^{-\delta\xi} \left[\frac{\delta_1^2 - \alpha^2}{\delta_1^2 + \alpha^2} \sin \alpha\xi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\alpha\delta_1}{\delta_1^2 + \alpha^2} \cos \alpha\xi \right] \right\} + \frac{c(r_0)}{\delta_1^2 + \alpha^2} \left\{ e^{-\mu\xi/2} - e^{-\delta\xi} \left[\cos \alpha\xi + \frac{\delta_1}{\alpha} \sin \alpha\xi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя общие выражения для функций $\Phi(\xi)$ и $Y(r, \xi)$, рассмотрим случай, когда влияние сферической проводящей области на излучение источника наиболее существенно ($\mu r_0 \gg 1$). Из формул (3), (8), (12), (18) для E_θ -составляющей вектора напряженности электрического поля в дальней зоне получим

$$E_\theta = \frac{-\sin \theta}{r} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} \Phi + \frac{\partial}{\partial r} Y \right) = B\Omega \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad (19)$$

$$B = -\sin \theta \frac{A}{2\mu} \frac{r_0}{r} \exp(-\mu r_0),$$

где $x = \frac{\sqrt{3}}{2r_0} (\tau - r)$ — безразмерное время, $x = \mu r_0 / \sqrt{3}$ — безразмерный параметр, $\delta = 1/2r_0$, $\alpha = \sqrt{3}/2r_0$, $\delta_1 = \delta - \mu/2$, $\xi \geq 0$,

$$\Omega(x, x) = e^{-xx} - \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-x/\sqrt{3}}.$$

График функции $\Omega(x)$ приведен на рис. 2. Из (19) следует, что ампли-

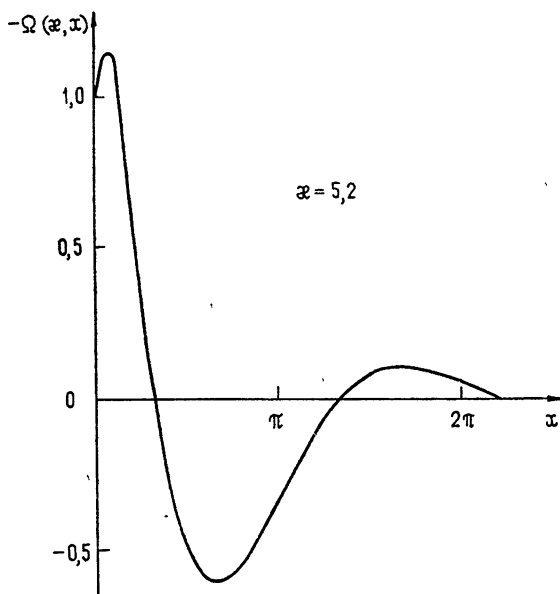


Рис. 2.

туда сигнала пропорциональна величине $A\mu r_0 \exp(-\mu r_0)$, а характерные временные константы определяются размером «остановившейся» проводящей сферы — результат, качественно отличный от полученного

в случае излучения заданного источника (7) в свободном пространстве ($\Phi(\xi) = 0$), когда возникает двухполярный сигнал, а амплитуда пропорциональна A .

В случае сигнала конечной длительности при произвольном соотношении между различными временными константами, которые характеризуют процесс, выражение для потенциала $\Phi(\xi)$ значительно усложняется. Если же ограничиться рассмотрением E_0 -компоненты, как это сделано для «мгновенного» импульса (19), то в трех крайних случаях формулы приобретают легко обозримый аналитический вид.

а) $m \gg \mu$, $mr_0 \gg 1$, т. е. импульс тока «короткий» по сравнению с другими временными масштабами:

$$E_0 \approx B \left[\frac{b-1}{b} e^{-x} - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-x/\sqrt{3}} \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{b+1}{b} e^{-(m/a)x} \right].$$

Так же, как и в случае излучения источника в свободном пространстве, учет конечной длительности импульса тока «снимает» разрыв на фронте. Длительность фронта первой полуволны при этом дается величиной $1/ms$. Изменением амплитуды сигнала по сравнению с амплитудой «дельтаобразного» источника можно пренебречь.

б) $m \ll \mu$, $mr_0 \gg 1$, т. е. длительность действия источника меньше, чем длительность характерного колебательного процесса, описываемого временными константами $1/\delta c$ или $1/ac$:

$$E_0 \approx B \left[2e^{-m\xi} - \frac{4}{\sqrt{3}} e^{-\delta\xi} \sin \left(\alpha\xi + 2\frac{\pi}{3} \right) \right].$$

в) $m \ll \mu$, $mr_0 \ll 1$:

$$E_0 \approx B mr_0 e^{-\delta\xi} \frac{(-4)}{\sqrt{3}} \sin \alpha\xi. \quad (20)$$

Из последней формулы видно, что в случае длительно действующего источника характерные временные константы сигнала (в его высокочастотной части) остаются прежними ($1/\delta c$ или $1/ac$), но амплитуда уменьшается на малую величину $mr_0 \ll 1$. Низкочастотная часть («хвост»)* сигнала описывается экспоненциальным членом $e^{-m\xi}$ с амплитудным множителем более высокого порядка малости $O(m^2 r_0^2)$, этот член в формуле (20) опущен.

В более общем случае $\beta \neq 1$ для значений $\xi \leq \xi_0$, где $\xi_0 = \gamma a(\tau)$ и $\gamma = (1 - \beta)/\beta$, уравнение (17) имеет переменные коэффициенты $r = a(\tau) = \xi/\gamma$. Для сравнения с предыдущими результатами приведем выражение для E_0 -компоненты с точностью до слагаемого $O(e^{-\mu r})$:

$$E_0 = -\sin \theta \frac{\mu^2 D}{r} \left\{ \eta(y) + \frac{\gamma}{(\alpha_2 - \alpha_1)y^2} [\alpha_1 y^{\alpha_1 - \gamma} I(\alpha_2, y) - \alpha_2 y^{\alpha_2 - \gamma} I(\alpha_1, y)] \right\}. \quad (21)$$

Функция $\eta(y)$ может быть получена из правой части (17) путем замены $\mu r = \mu\xi/\gamma = y$;

$$c = (-1) e^{-y} \left[y + 1 + \frac{4}{y} + \frac{4}{y^2} \right], \quad d = (-1) e^{-y} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} \right],$$

* Что же касается физической ситуации, описанной в п. 2, то для полного описания «хвоста» сигнала необходимо учитывать, что расширяется неидеально проводящая область, т. е. $\sigma \neq \infty$. В рамках представленной модели ($\sigma = \infty$) не предполагается полное рассмотрение этих вопросов.

$$b = e^{-\nu} \left[2y + 2 + \frac{4}{y} + \frac{4}{y^2} \right], \quad \alpha_{1,2} = \frac{1+\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4} \gamma^2},$$

$$I(\alpha, \gamma) = \frac{4\alpha}{\alpha-1} \Gamma(\alpha, y) + 2\Gamma(\alpha+1, y) + 2\Gamma(\alpha+2, y) - \\ - \frac{4\alpha(1+\gamma/2)^{\alpha+1}}{\alpha-1} \Gamma(\alpha, z) - (1+\gamma) \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha+1, z) - \\ - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^{-\alpha-1} \Gamma(\alpha+2, z), \quad z = \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) y.$$

Здесь $\Gamma(\alpha, y)$ — неполная гамма-функция [6]. Предельный переход $\gamma \rightarrow 0$ или $\beta \rightarrow 1$ в формулах (21) приводит к полученному ранее выражению на фронте для E_θ -составляющей вектора напряженности электрического поля.

5. Рассмотрим электромагнитные поля, которые в аналогичной ситуации (1), (6) создаются источниками магнитного типа. Вектор плотности тока I направлен по азимутальной координате $I = I(\tau - r, \theta, r) e_\varphi$. Поля E и B при $\tau = 0$ равны нулю. На движущейся границе выполняется условие $E_\varphi(r, \tau)|_{r=a(\tau)} = 0$. Обычным путем от системы уравнений Максвелла переходим к уравнению для однокомпонентного магнитного потенциала:

$$\Pi = \Pi(r, \tau, \theta) e_r, \quad \Pi = \sum_0^\infty \Pi_n(r, \tau) P_n(\cos \theta), \quad (22) \\ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Pi_n - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Pi_n + \frac{n(n+1)}{r^2} \Pi_n = \frac{4\pi}{c} r I_n(r, \tau),$$

где $I_n(r, \tau)$ — коэффициент разложения $I(\tau - r, r, \theta)$ в ряд по присоединенным функциям Лежандра 1-го рода. Компоненты электромагнитного поля определяются соотношениями

$$E = \text{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau}, \quad B = - \text{rot} \Pi.$$

Начальные данные — нулевые, условие на движущейся границе сводится к уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \tau} \Pi_n(r, \tau) |_{r=a(\tau)} = 0. \quad (23)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда ряд по полиномам Лежандра (22) обрывается при $n = 1$. Определение следующих членов разложения при заданной угловой зависимости плотности тока проводится по аналогичной схеме. Пусть

$$I_1 = - \frac{c \mu A m m_1}{4\pi(m_1 - m)} e^{-\mu r} h(\xi) (e^{-m\xi} - e^{-m_1\xi}). \quad (24)$$

В дальнейшем все формулы приведены для случая $m_1 = \infty$. Общий результат может быть получен добавлением тех же слагаемых со знаком (—) и заменой m на m_1 . Выражение для потенциала $Y(r, \xi)$ источника в свободном пространстве можно выписать сразу, используя приведенные выше результаты (4), (16), (22), (23) при $m_1 = \infty$:

$$Y(r, \xi) = -m\mu Y_{\text{ст}}(r, \xi).$$

Для определения $\frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) = W(\xi)$ из граничного условия (23), аналогично тому, как это сделано в п. 4, получим уравнение и начальные данные для определения постоянных интегрирования:

$$\frac{dW}{d\xi} + \frac{1}{r_0} W = \frac{\partial}{\partial \tau} Y(r_0, \xi) \quad (\xi > 0, W(0) = 0).$$

Отметим, что в рассматриваемом случае в отличие от задачи излучения источников электрического типа граничное условие приводит к уравнению первого порядка, что дает возможность при необходимости получить выражение $W(\xi)$ в квадратурах для произвольного закона движения границы $r = a(\xi)$. Приведем полученные результаты для $E_\varphi(r, \xi)$:

$$\begin{aligned} E_\varphi(r, \xi) &\approx -\sin \theta B [ae^{-m\xi} + (b - c + c\mu\xi/2) e^{-\mu\xi/2} + de^{-\xi/r_0}], \\ a &= D \left[1 - mr_0 - \frac{\mu^2 r_0^2}{4} + \frac{3}{4} \mu^2 mr_0^3 - \frac{\mu^3 r_0^3}{4} + \frac{\mu^4 r_0^4}{8} - \frac{\mu^2 mr_0^4}{4} \right], \\ b &= -\frac{\mu}{2m} D \left[1 - mr_0 - \frac{\mu^2 r_0^2}{4} + \frac{\mu^2 mr_0^3}{4} + \frac{\mu^3 r_0^3}{4} - \frac{\mu^4 r_0^3}{8m} + \frac{\mu^4 r_0^4}{8} - \frac{\mu^3 mr_0^4}{4} \right], \\ c &= \frac{\mu}{2m} D (1 - mr_0) \left(1 - \frac{\mu^2 r_0^2}{4} \right) \left(1 - \frac{\mu}{2m} \right), \quad B = \frac{mA}{2} \frac{r_0}{r} e^{-\mu r_0}, \\ d &= -\frac{\mu^2 r_0^2}{2} D \left(1 - \frac{\mu}{2m} \right)^2, \quad \frac{1}{D} = \mu r_0 \left(1 - \frac{\mu r_0}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{\mu}{2m} \right)^2 (1 - mr_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Поле источника в свободном пространстве также с точностью до членов $O(e^{-\mu r})$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} E_\varphi^0(r, \xi) &\approx -\sin \theta \frac{mA}{2\mu r (1 - 2m/\mu)^2} \left[\frac{4m^2}{\mu^2} e^{-m\xi} + \left(1 - \frac{4m}{\mu} \right) e^{-\mu\xi/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m}{\mu} - 1 \right) \frac{\mu\xi}{2} e^{-\mu\xi/2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из формул (25) следует, что даже для значений $\mu r_0 \gg 1$ временная форма сигнала не меняется существенно, а именно, характерные временные константы остаются теми же самыми, что и при излучении источника в свободном пространстве. Электромагнитный сигнал с рассматриваемой точностью $1/\mu r_0 \ll 1$ — однополярный импульс с резким скачком на фронте. Уменьшение амплитуды определяется наиболее быстро спадающей экспонентой ($e^{-m\xi}$ или $e^{-\mu\xi/2}$ соответственно)

$$E_\varphi(r, \xi) \approx -\sin \theta B \begin{cases} [e^{-m\xi} + O(1/\mu r_0)] & (2m \gg \mu) \\ [e^{-\mu\xi/2} + O(1/\mu r_0)] & (mr_0 \ll 1). \\ [(1 + \mu\xi/2) e^{-\mu\xi/2} + O(1/\mu r_0)] & (2m = \mu) \end{cases}$$

Таким образом, при расчете в дипольном приближении здесь не возникает режима осцилляции, имеющего место в задаче об излучении над

идеально проводящей расширяющейся сферой источников электрического типа.

Автор благодарен В. Н. Красильникову за предложенную задачу, А. А. Андронову, В. И. Семенову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Katz, J. Mathem. Phys., 2, № 1, 149 (1961).
2. K. D. Granzow, J. Mathem. Phys., 7, № 4, 634 (1966).
3. В. Н. Красильников, Проблемы дифракции и распространения радиоволн, вып. 7, 77 (1968).
4. Roger E. Glarr, H. Tunq Li, Luc Huang, J. Mathem. Phys., 11, № 1, 1 (1970).
5. СМБ, Линейные уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1964.
6. В. Г. Пагурова, Таблицы неполной гамма-функции, изд. ВЦ АН СССР, М., 1963.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
31 декабря 1969 г.,
после объединения и доработки
7 августа 1971 г.

ELECTROMAGNETIC RADIATION FROM SOURCES ABOVE A PERFECTLY CONDUCTING EXTENDING SPHERE

A. V. Manankova

The electromagnetic fields creating by external currents of a traveling-wave type above a perfectly conducting extending sphere have been considered. A concrete calculation is made and the pulse shape depending on the problem parameters is discussed.

УДК 621.373 : 530.145.6

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ СИНХРОНИЗАЦИИ МОД В ЛАЗЕРЕ С НАСЫЩАЕМЫМ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

Г. Л. Гуревич, В. М. Пасхин

Показано, что существует простое соответствие между формой излучения в установившемся режиме синхронизации мод и хорошо известным решением одномодовой задачи. Определена зависимость амплитуды и формы импульсов от количества поглотителя.

Известно, что стационарная генерация в лазере может стать неустойчивой при внесении в его резонатор насыщаемого поглотителя. В [1, 2] было показано, что неустойчивость на частотах межмодовых биений обычно возникает при меньших количествах поглотителя, чем необходимо для неустойчивости медленных модуляций (т. е. модуляций с характерным временем, много большим времени пробега по резонатору). Естественно ожидать, что развитие неустойчивости на частотах межмодовых биений приведет к установлению периодического режима с характерным временем модуляции, меньшим или порядка L/c (L — длина резонатора, c — скорость света); который можно интерпретировать как режим синхронизации мод*.

Целью настоящей работы является теоретическое определение основных характеристик такого периодического режима.

Рассмотрим одномерный резонатор бегущей волны (рис. 1); в него помещены активное вещество 1 и насыщаемый поглотитель 2, который будем считать безынерционным.

Обычно изменение сигнала за один проход в генераторах, работающих в квазинепрерывном режиме, мало. Будем искать решение в виде квазисинусоидальной бегущей волны с частотой, равной частоте рабочего перехода активного вещества, и с постоянной во времени фазой. При этом уравнения в частных производных для амплитуд поля E_0 , недиагонального элемента матрицы плотности σ и для разности населенностей рабочего уровня активного вещества n можно, с учетом граничных условий, преобразовать к системе дифференциально-разностных уравнений в обыкновенных производных:

$$E_0 \left(t + \frac{L}{c} \right) - E_0(t) = -(1-r) E_0(t) + \frac{2\pi r \omega \mu_1 \Delta_1}{c} \sigma(t) +$$

* В [3], например, в резонатор лазера, работающего в непрерывном режиме, вводился насыщаемый поглотитель. При этом наблюдались периодические импульсы, длительность которых много меньше L/c .

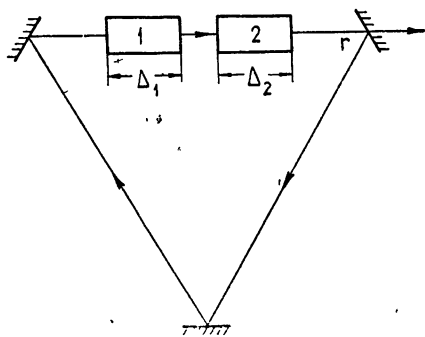


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\pi \hbar \omega r \Delta_2 \beta}{2 c T_{12}} \frac{n_{02} E_0(t)}{1 + \beta E_0^2(t)}, \\
 \frac{dn}{dt} + \frac{n - n_{01}}{T_{11}} &= - \frac{4 \mu_1}{\hbar} \sigma E_0, \\
 \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T_{21}} &= \frac{\mu_1}{\hbar} n E_0.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, r — коэффициент отражения зеркал, ω — частота света, $\beta = 4 \mu_2^2 T_{12} T_{22} / \hbar^2$, T_{11} и T_{12} — времена релаксации разностей населенностей, T_{21} и T_{22} — времена релаксации недиагональных элементов матрицы плотности, n_{01} и n_{02} — плотности полного числа рабочих молекул, μ_1 и μ_2 — дипольные моменты, Δ_1 и Δ_2 — длины образцов активного вещества и насыщаемого поглотителя соответственно. Последнее слагаемое в правой части первого уравнения системы описывает влияние нелинейного поглотителя.

Анализ системы (1) в общем виде представляет значительные трудности. Однако в тех случаях, когда длительность импульсов излучения $T_{\text{имп}} \gg T_{21}$, эту систему можно упростить. А именно, выражая из третьего уравнения σ через E_0 с точностью до членов порядка $T_{21}^2 / T_{\text{имп}}^2$ включительно* и подставляя это выражение в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned}
 E\left(t + \frac{\hbar}{c}\right) - E(t) &= \left[\frac{B_1 \Delta_1}{c} n(t) - \frac{B_2 \Delta_2}{c} \frac{n_{02}}{1 + B_2 T_{12} E^2(t) / \hbar \omega} - (1-r) \right] E(t) - \\
 &- \tau \left(\frac{dE(t)}{dt} - T_{21} \frac{d^2 E(t)}{dt^2} \right), \\
 \frac{dn}{dt} + \frac{n - n_{01}}{T_{11}} &= - B_1 n \frac{E^2}{\hbar \omega}.
 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$E^2 = \frac{2}{\pi r} E_0^2, \quad \tau = \frac{B_1 \Delta_1 \bar{n} T_{21}}{c}, \quad B_{1,2} = \frac{2\pi r \omega \mu_{1,2}^2 T_{21,22}}{\hbar};$$

$$\bar{n} = \frac{n_{01}}{1 + B_1 T_{11} \bar{E}^2 / \hbar \omega}, \quad \bar{n}_2 = \frac{n_{02}}{1 + B_2 T_{12} \bar{E}^2 / \hbar \omega}, \quad \bar{E}^2 = \frac{2}{\pi r} \bar{E}_0^2$$

— стационарные значения разностей населенностей и интенсивности поля.

Хотя целью нашего исследования являются «быстрые» (по сравнению с L/c) решения системы (2), мы рассмотрим сначала «медленные» решения, т. е. решения, медленно меняющиеся за время L/c . Тогда

$$E\left(t + \frac{\hbar}{c}\right) \approx E(t) + \frac{L}{c} \frac{dE(t)}{dt}. \text{ Учитывая, что } \frac{L}{c} \gg \tau, T_{21}, \text{ уравнения (2) для этого случая можно записать в виде}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2}{L/c} \left[\frac{B_1 \Delta_1}{c} n - \frac{B_2 \Delta_2}{c} \frac{n_{02}}{1 + B_2 T_{12} m} - (1-r) \right] m, \quad (3)$$

* При этом опущены слагаемые с множителем порядка $(n - \bar{n})/\bar{n}$. Как будет показано ниже, эта величина много меньше единицы.

$$\frac{dn}{dt} + \frac{n - n_{01}}{T_{11}} = -B_1 n m,$$

где $m = E^2/\hbar\omega$ — плотность числа фотонов.

Уравнения (3) совпадают с уравнениями баланса, описывающими одномодовый ОКГ с насыщаемым поглотителем. В [4] были исследованы такие уравнения при $n_{02} = 0$ (т. е. в отсутствие поглотителя). Там было показано, что решения могут быть найдены в квазиконсервативном приближении, т. е. решения такой системы близки к решениям системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \frac{\alpha}{L/c} (n - \bar{n}) m, \\ \frac{dn}{dt} &= B_1 \bar{n} (\bar{m} - m),\end{aligned}\tag{4}$$

где $\alpha = 2B_1\Delta_1/c$, $\bar{m} = \bar{E}^2/\hbar\omega$.

Эта система имеет периодические решения. Переходные процессы в системе (3) при $n_{02} = 0$ можно рассматривать как медленное затухание решений системы (4).

Поскольку неустойчивость стационарной генерации достигается при достаточно малых количествах поглотителя, то можно ожидать, что и при $n_{02} \neq 0$ решения (3) будут близки к решениям (4).

Обратимся теперь к системе (2). Будем искать периодические решения с периодом, близким к L/c . Было бы очень удобно, если бы удалось найти достаточно простую систему уравнений, решения которой известны и в то же время близки к решениям (2). Мы покажем, что при определенных условиях в качестве такой «порождающей» системы можно использовать те же уравнения (4) в несколько измененном виде. Из последнего утверждения, в частности, следует, что периодические многомодовые и одномодовые решения в определенном смысле близки друг к другу.

Итак, пусть период решений системы (2) равен T . Тогда можно записать $E\left(t + \frac{L}{c}\right) = E(t + \varepsilon)$, где $\varepsilon = \frac{L}{c} - T$. Если длительность импульсов излучения много больше, чем ε , то $E(t + \varepsilon)$ мало отличается от $E(t) + \varepsilon \frac{dE(t)}{dt}$. Основываясь на этом соображении, применим следующий формальный прием: прибавляя и отнимая в левой части первого уравнения системы (2) $\varepsilon \frac{dE(t)}{dt}$, преобразуем это уравнение к виду

$$\begin{aligned}(\varepsilon + \tau) \frac{dE(t)}{dt} + \left\{ [E(t + \varepsilon) - E(t)] - \varepsilon \frac{dE(t)}{dt} - \tau T_{21} \frac{d^2E(t)}{dt^2} \right\} = \\ = \left[\frac{B_1 \Delta_1}{c} n(t) - \frac{B_2 \Delta_2}{c} \frac{n_{02}}{1 + B_2 T_{12} E^2(t)/\hbar\omega} - (1 - r) \right] E(t).\end{aligned}\tag{5}$$

Нетрудно показать, что условие малости величины в фигурных скобках сводится к неравенству

$$\varepsilon + \tau \gg \frac{\varepsilon^2}{T_{\text{имп}}}, \quad \frac{\tau T_{21}}{T_{\text{имп}}}.\tag{6}$$

Если условие (6) выполняется, то решения (2) близки к решениям

системы, в которой величина в фигурных скобках отброшена. Полученные таким образом приближенные уравнения совпадают с уравнениями (3), описывающими одномодовый ОКГ, если в последних произвести замену

$$\frac{L}{c} \rightarrow \varepsilon + \tau. \quad (7)$$

Как уже указывалось, решения такой системы близки к соответствующим решениям (4). Следовательно, систему (4) с учетом (6), (7) можно использовать как порождающую для отыскания периодических решений системы (2).

Таким образом, периодические решения системы (2) можно искать в следующей последовательности.

1) Возьмем в качестве порождающего решение системы (4) (см. [4]), произведя в ней предварительно замену (7). Это решение зависит от двух постоянных интегрирования и неизвестной пока величины ε .

2) Считая константы интегрирования зависящими от времени, подставим решения системы (4) в (2). Получим уравнения для этих «констант». Поскольку порождающая и исходная системы близки друг к другу, для решения полученных уравнений можно использовать метод усреднения. Найдем значения указанных «констант» в установившемся режиме.

3) Полученные решения и, в частности, их период зависят от неизвестной величины ε . По определению, $\varepsilon = L/c - T(\varepsilon)$, откуда и находится ε .

Сделаем важное замечание. Близость решений системы (4) и (2) позволяет сразу, не решая полностью задачи, определить зависимость всех характеристик излучения от амплитуды импульсов, которую можно взять в качестве одной из констант интегрирования системы (4). Вторая константа входит в сумму с t и описывает произвольность выбора начала отсчета времени. Можно показать, что учет изменения этой величины при определении ε дает малую поправку. Это означает, что величину ε можно находить сразу из порождающей системы, при этом амплитуда импульсов входит произвольным параметром. Полное же исследование необходимо для определения зависимости амплитуды импульсов от количества насыщаемого поглотителя.

Опуская промежуточные выкладки, приведем основные результаты для случая достаточно глубокой модуляции:

$$\bar{m} \ll m_2 \quad (8)$$

(m_2 — максимальное значение $m(t)$ на периоде). Форма импульсов излучения в этом случае имеет вид

$$m(t) \approx m_2 \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{2m_2 c}{\bar{m} L} t \right) \right] \quad \text{при } m(t) > \bar{m}, \quad (9)$$

откуда можно найти связь m_2 с длительностью импульсов на уровне $0,5 m_2$:

$$T_{\text{имп}} \approx \frac{L}{c} \frac{\bar{m}}{m_2}, \quad (10)$$

при этом $\varepsilon + \tau \approx \frac{1}{4} (1 - r) B_1 \frac{\bar{m}^2}{m_2} \left(\frac{L}{c} \right)^2$.

Минимальная интенсивность излучения, достигаемая в промежутках между импульсами,

$$m_1 \approx m_2 \exp(-m_2/\bar{m}). \quad (11)$$

Значение $m_2/\bar{m}$, в свою очередь, находится из следующего уравнения:

$$n_{02} = - \left(\frac{1}{B_2 T_{12} \bar{m}} + 1 \right) \left[\frac{4(1-r)c^3 T_{21}^2 m_2}{B_2 \Delta_2 L^2 \bar{m}} + \frac{B_1^2 \Delta_1 n_{01} \bar{m}^2 L^2}{8 B_2 T_{11} \Delta_2 m_2 c^2} \right]. \quad (12)$$

Выражение (12) для концентрации нелинейного поглотителя справедливо лишь для импульсов большой амплитуды, описываемых существенно нелинейными уравнениями. Интересно отметить, что значение пороговой концентрации, найденное из системы (2) в линейном приближении, получается из (12) при $m_2 = (\pi^2/2) \bar{m}$.

Отклонение разности населенностей n от стационарного значения $\bar{n}$ мало: $(n_{\max} - \bar{n})/\bar{n} \approx B_1 \bar{m} L / 2c$. Как и предполагалось, эта величина много меньше единицы.

Оценка области применимости полученных результатов (т. е. области, в которой решения системы (2) близки к решениям порождающей системы) показывает, что параметры системы должны удовлетворять следующему соотношению (при $1/B_2 T_{12} \gg m_2 \gg \bar{m}$):

$$\frac{\pi^2 (1-r) c^3 T_{21}^2 T_{11}}{B_1 \Delta_1 n_{01} L^3} \left(1 + \frac{1}{B_1 T_{11} \bar{m}} \right) \left(\frac{m_2}{\bar{m}} \right)^2 \ll 1, \quad (13)$$

которое совпадает с условием (6).

Сделаем численные оценки. Из условия (13) при реальных значениях параметров ($T_{11} \sim 10^{-4}$ сек, $T_{12} \sim 10^{-11}$ сек, $T_{21} \sim 10^{-12}$ сек, $B_1 \sim 10^{-9}$ см³/сек, $B_2 \sim 10^{-5}$ см³/сек, $n_{01} \sim 10^{18}$ см⁻³, $\Delta_1 \sim 10$ см, $\Delta_2 \sim 1$ см, $(1-r) \sim 10^{-1}$, $m_2/\bar{m} \sim 10$) можно найти минимальное значение оптического пути $L_{\min}$, при котором еще справедливы (8)–(12):

$$L^3 \gg 1 \text{ м}^3, L \gg L_{\min} \approx 2 \text{ м}. \quad (14)$$

При этом $T \gg 10^{-8}$ сек, $T_{\text{имп}} \gg 10^{-9}$ сек, $m_2/m_1 \approx 10^4$.

В заключение заметим следующее. Утверждение о соответствии форм одномодовых и многомодовых решений справедливо и для насыщаемого поглотителя, для которого существенна инерция. Действительно, форма импульсов излучения определяется порождающим решением, которое, в свою очередь, зависит от произвольной константы—амплитуды импульсов. Характеристики поглотителя влияют лишь на эту амплитуду. Поэтому при одинаковой амплитуде импульсы в лазере как с инерционным, так и с безинерционным поглотителем имеют одинаковую длительность. Инерционность насыщаемого поглотителя сказывается лишь на количестве поглотителя, необходимого для получения импульсов заданной амплитуды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1019 (1970).
2. Г. Л. Гуревич, Я. И. Ханнин, ЖТФ, 40, № 12, 1566 (1970).
3. John H. Mc Coy, Appl. Phys. Lett., 15, 353 (1969).
4. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 70 (1965).

Поступила в редакцию
16 июня 1971 г.

A STEADY-STATE REGIME OF MODE LOCKING IN A LASER WITH A SATURABLE ABSORBER

G. L. Curevich, V. M. Paskhin

It is shown that there exists a simple conformity between the radiation form in a steady-state regime of the mode locking and the well-known solution of the single-mode problem. The dependence of the amplitude and the pulse shape from the absorber quantity is determined.

УДК 621.378.3

ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА МНОГОФОТОННЫХ ПРОЦЕССАХ ВО ВСТРЕЧНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКАХ

Т. И. Кузнецова

Обсуждается связь временных характеристик лазерного излучения с характеристиками трека многофотонной люминесценции при наличии ошибок в измерении трека. Получены оценки точности измерений, необходимой для регистрации сверхкоротких импульсов. Рассматриваются преимущества схемы с двумя кюветами; эти преимущества оказываются тем значительнее, чем выше показатель фотонности.

Для измерения временных характеристик излучения лазеров с самосинхронизацией мод часто применяются косвенные методы. Особенно широко распространен метод, основанный на люминесценции при двухфотонном поглощении [1]. В последнее время в литературе обсуждаются возможности использования нелинейных эффектов более высокого порядка (см. [2]), имеется также сообщение об эксперименте по применению трехфотонной люминесценции [3].

В настоящей работе получены оценки точности измерений временных характеристик при использовании n -фотонной люминесценции во встречных пучках. Рассмотрена также схема с двумя кюветами [4, 5], позволяющая получить с помощью люминесцентной методики более надежную информацию об излучении.

Предположим, что в люминесцирующей среде распространяются навстречу друг другу две волны, полученные расщеплением исследуемого светового пучка:

$$\mathcal{E}(t - x/c) \exp[-i\omega(t - x/c)] + \mathcal{E}(t + x/c) \exp[-i\omega(t + x/c)] = \tilde{\mathcal{E}}(x, t). \quad (1)$$

Интенсивность возбуждения люминесцирующего вещества при n -фотонном поглощении пропорциональна $|\tilde{\mathcal{E}}(x, t)|^{2n}$. Экспериментально регистрируется люминесцентное свечение от лазерного излучения длительности T , усредненное по отрезку Δx , содержащему несколько длин световых волн. Для величины этого свечения из (1) можно получить

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt |\tilde{\mathcal{E}}(x, t)|^{2n} \equiv \Psi(\tau) = \sum_{s=0}^n \left[\frac{n!}{s!(n-s)!} \right]^2 \int_{-|\tau|}^{T+|\tau|} [I(t)]^s \times \quad (2)$$

$$\times [I(t + \tau)]^{n-s} dt,$$

где $I(t) = |\mathcal{E}(t)|^2$, $\tau = 2x/c$. Для сокращения выкладок будем в дальнейшем считать, что T не превосходит период резонатора лазера. Величина T либо принимается равной периоду, если отсутствуют данные осциллографа, либо заменяется на ту длительность, которая устанавливается с помощью осциллографа.

В работах по многофотонной люминесценции для регистрации коротких импульсов используется то обстоятельство, что в точке $\tau = 0$,

где встречные волны имеют нулевую разность хода, интенсивность люминесценции имеет резкий максимум. Действительно, пусть излучение состоит из единственного импульса длительности $\sim t_{\text{имп}}$. Тогда ширина центрального максимума оказывается $\sim t_{\text{имп}}$, а для отношения $R = \Psi(0)/\Psi(\infty)$, называемого обычно контрастом, из (2) получаем* (ср. [2])

$$R_n = \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{n! n!}. \quad (3)$$

Величина контраста быстро возрастает с ростом n : $R_2 = 3$, $R_3 = 10$, $R_4 = 35$, $R_5 = 126$ и т. д. Именно это возрастание рассматривалось в [3], как преимущество методов с высоким значением n . Однако ниже будет показано, что трудности, имеющиеся в обычном варианте метода двухфотонной люминесценции (см. [6, 7]), не устраняются при увеличении показателя фотонности n .

Эти трудности связаны с тем, что во многих случаях излучение лазера с самосинхронизацией мод содержит не один импульс на периоде, а несколько коротких импульсов [8, 9], возможно, сгруппированных вместе [10]. Поэтому при изучении временных характеристик лазера требуется не просто измерить длительность импульса, но и установить, что этот импульс является единственным на периоде. В то же время трек люминесценции, создаваемый группой импульсов, мало отличается от трека одиночного импульса; в реальных условиях эти отличия трудно выявить на фоне шумов регистрирующей аппаратуры.

Рассмотрим упрощенный пример, когда во временном ходе излучения имеется m одинаковых прямоугольных импульсов длительности $t_{\text{имп}}$. Предположим, что расстояния между разными парами импульсов t_{ij} различны и отличаются друг от друга больше, чем на $t_{\text{имп}}$. В таком случае в треке люминесценции кроме центрального максимума будет присутствовать ряд одинаковых дополнительных максимумов в точках $\tau = \pm t_{ij}$. Как следует из (2), отношение дополнительных максимумов к центральному составляет

$$\Psi(t_{ij})/\Psi(0) = \frac{1}{R_n} \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m}. \quad (4)$$

Для отношения минимального значения $\Psi(\tau)$ к максимальному имеем по-прежнему (как и для излучения, состоящего из единственного импульса)

$$\Psi_{\min}/\Psi_{\max} = 2 \frac{n! n!}{(2n)!} \equiv \frac{1}{R_n}.$$

Информация о временном ходе излучения содержится именно в дополнительных максимумах. Важно, что при большом числе m дополнительные максимумы выражены значительно слабее, чем центральный. На рисунке приведены треки четырехфотонной люминесценции для случая одного импульса и шести прямоугольных импульсов. Из рис. 1 видно, что дополнительные максимумы (на кривой рис. 1 г) являются слабыми. Выявление дополнительных максимумов возможно лишь при тщательных измерениях функции $\Psi(\tau)$ вне области центрального максимума.

Чтобы оценить, с какой точностью требуется измерять $\Psi(\tau)$, рассмотрим следующую величину:

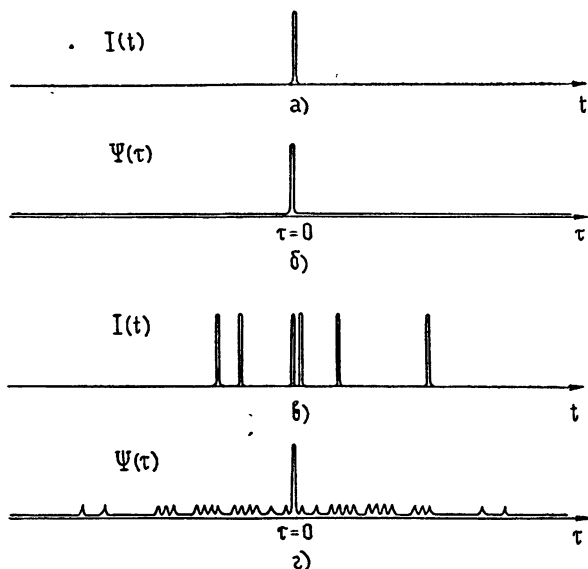
* Приведем для справок отношение усредненных по ансамблю величин $\langle \Psi(0) \rangle$ и $\langle \Psi(\infty) \rangle$ для гауссова случайного процесса, отвечающего, в частности, излучению лазера с несинхронизованными модами:

$$R_n(\text{гаусс}) = [(2n)!/n! n!] (1/2^n).$$

$$\left\{ \frac{\sum_{s=0}^n \left[\frac{n!}{s!(n-s)!} \right]^2 \int_0^T [I(t)]^s dt \int_0^T [I(t)]^{n-s} dt}{\sum_{s=0}^n \left[\frac{n!}{s!(n-s)!} \right]^2 \int_0^T [I(t)]^n dt} - T \cdot 2 \frac{n!n!}{(2n)!} \left\{ 1 - 2 \frac{n!n!}{(2n)!} \right\}^{-1} = \right. \\ \left. = \left\{ \frac{\int_{-T}^T \Psi(\tau) d\tau}{\Psi(0)} - T \cdot 2 \frac{n!n!}{(2n)!} \right\} \left\{ 1 - 2 \frac{n!n!}{(2n)!} \right\}^{-1} \equiv t_{эфф}. \right. \quad (5)$$

Рис. 1. Треки четырехфотонной люминесценции:

- а) временной ход излучения, содержащего один импульс на периоде;
 б) соответствующая а) форма трека люминесценции;
 в) временной ход излучения, содержащего шесть импульсов на периоде;
 г) соответствующая в) форма трека люминесценции.



Эта величина была введена ранее [7] для $n = 2$ в связи с обсуждением двухфотонной методики и была названа эффективной длительностью излучения. Смысл этой величины становится особенно наглядным, если предположить, что излучение состоит из m прямоугольных импульсов длительности $t_{имп}$ одинаковой амплитуды. При этом из (5) следует, что эффективная длительность непосредственно связана с числом импульсов:

$$t_{эфф} = m t_{имп}.$$

Для произвольной функции $I(t)$ величина $t_{эфф}$ также дает представление о том, насколько неравномерным является временной ход излучения и какие в нем достигаются значения мгновенной мощности (отношение $T/t_{эфф}$). Очевидно, что в общем случае величина $t_{эфф}$ зависит от n — показателя фотонности. В частности, для излучения, состоящего из m одинаковых слабо перекрывающихся импульсов гауссовой формы, зависимость $t_{эфф}$ от n имеет вид

$$t_{эфф} = m t_{имп} \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} \left[\frac{n!}{s!(n-s)!} \right]^2 \sqrt{s(n-s)} \right\} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{(2n)!}{n!n!} - 2 \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Из (6) можно получить

$$mt_{\text{имп}} \left(\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{10} \right) < t_{\text{эфф}} \leq mt_{\text{имп}} \frac{\sqrt{n}}{2}. \quad (7)$$

Таким образом, зависимость эффективной длительности от n весьма слабая: множитель $\sqrt{n}/2$ изменяется вдвое при переходе от двухфотонного к восьмифотонному процессу.

В случае, когда основная часть энергии исследуемого излучения заключена в одном коротком импульсе, эффективная длительность приблизительно равна $t_{\text{имп}}$, т. е. ширине центрального максимума трека. Кроме того, из приведенных выше рассуждений ясно, что если эффективная длительность значительно превосходит эту ширину, то энергия распределена по многим импульсам. Поэтому для доказательства существования единственного импульса необходимо установить равенство $t_{\text{эфф}} = t_{\text{имп}}$. Для этого необходимо, чтобы погрешность в измерении $t_{\text{эфф}}$ не превышала $t_{\text{имп}}$. Величина $\delta(t_{\text{эфф}})$ выражается с помощью (5) через погрешность в измерении трека:

$$\delta(t_{\text{эфф}}) = T \frac{\delta\Psi}{\Psi(0)} \left\{ 1 - 2 \frac{n!n!}{(2n)!} \right\}^{-1} \approx T \frac{\delta\Psi}{\Psi(0)} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n-1}} \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Из требования $\delta(t_{\text{эфф}}) \leq t_{\text{имп}}$ получаем условие, налагаемое на точность измерения трека:

$$\frac{\delta\Psi}{\Psi(0)} \leq \frac{t_{\text{имп}}}{T} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n-1}} \right\}. \quad (9)$$

Это условие означает, что в наиболее интересных случаях, когда $t_{\text{имп}} \ll T$, требуется очень высокая точность измерения трека. Если данные осциллографа отсутствуют, то в (8) и (9) величина T равняется периоду, и требования к точности наиболее высокие. Если же установлено, что излучаемая за период энергия сосредоточена на интервале, составляющем время разрешения осциллографической системы $t_{\text{разр}}$, то величина T в (8) и (9) заменяется на $t_{\text{разр}}$, т. е. требования к точности снижаются. В типичных условиях $t_{\text{имп}}/t_{\text{разр}} \sim 10^{-2}$, т. е. даже при наличии информации от осциллографа трек должен промеряться очень точно. Такой результат для двухфотонной методики был получен ранее [7]. Здесь же мы хотим подчеркнуть, что требования к точности (см. (9)) практически не зависят от показателя фотонности n .

В работе [5] была предложена схема, в которой используются две одинаковых кюветы с люминесцирующей жидкостью. Длина кювет должна выбираться равной $ct_{\text{разр}}$ (или больше $ct_{\text{разр}}$), где $t_{\text{разр}}$ — время разрешения осциллографической системы. Рассматриваются только те случаи, для которых с помощью осциллографа установлено, что излучение сосредоточено на временном интервале, не превышающем $t_{\text{разр}}$. Достоинство схемы состоит в том, что в ней не требуется промерять форму трека, а достаточно лишь измерить интегральное свечение обеих кювет, что представляется более удобным с технической точки зрения.

Рассмотрим ту же схему применительно к случаю n -фотонной люминесценции. Пусть в первой кювете n -фотонная люминесценция создается под действием двух встречных волн и форма трека описывается формулой (2), причем $T = t_{\text{разр}}$. Во второй кювете распространяется одна волна вида $\mathcal{E}(t-x/c) \exp[-i\omega(t-x/c)]$. При этом свечение люминесценции одинаково по всей длине дополнительной кюветы и выражается следующим образом:

$$\Phi = \int_0^{t_{\text{разр}}} |I(t)|^n dt \equiv \frac{n!n!}{(2n)!} \Psi(0). \quad (10)$$

Используя (10), можно выразить эффективную длительность через одни только интегральные характеристики треклов:

$$t_{\text{эфф}} = 2t_{\text{разр}} \left\{ \left(\int_{-t_{\text{разр}}}^{t_{\text{разр}}} \Psi(\tau) d\tau \right) / \left(\int_{-t_{\text{разр}}}^{t_{\text{разр}}} \Phi d\tau \right) - 1 \right\} \left\{ \frac{(2n)!}{n!n!} - 2 \right\}^{-1}. \quad (11)$$

Для ошибки в определении эффективной длительности из (11) находим

$$\delta(t_{\text{эфф}}) = 4t_{\text{разр}} \eta \left\{ \frac{(2n)!}{n!n!} - 2 \right\} \approx t_{\text{разр}} \eta \left\{ \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi n}} - \frac{1}{2} \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где η — относительная ошибка, с которой измеряется полная энергия люминесцентного свечения в каждой из кювет. Как и в обычной люминесцентной методике, здесь точность измерения величины $t_{\text{эфф}}$ определяется точностью измерения люминесцентного свечения. Различие состоит в том, что здесь исключаются ошибки, обусловленные аппаратной функцией системы фоторегистрации, поскольку измеряются интегральные по длине кюветы величины. При этом имеется реальная возможность точных измерений (во всяком случае с $\eta \leq 10^{-1}$). Другое важное отличие рассматриваемой схемы от обычной люминесцентной методики — это резкая зависимость точности измерений от n . Так, полагая $n = 2$, получаем из (12) $\delta(t_{\text{эфф}}) = t_{\text{разр}} \eta$; т. е. использование двухфотонной люминесценции повышает временное разрешение исходной системы на порядок (при $\eta = 10^{-1}$). Если же положить в (12) $n = 4$, то получим $\delta(t_{\text{эфф}}) = t_{\text{разр}} \eta/17$, т. е. использование четырехфотонных эффектов (при $\eta = 10^{-1}$) повышает временное разрешение исходной системы в 170 раз.

В заключение еще раз подчеркнем, что в обычной люминесцентной методике переход от двухфотонной люминесценции к многофотонной не дает значительных преимуществ. Преимущества использования многофотонных эффектов должны выявиться при работе по описанной выше схеме с двумя кюветами. В таком варианте люминесцентной методики требуемая точность измерений существенно уменьшается при переходе к многофотонным эффектам.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Giordmaine, P. M. Rentzepis, S. L. Shapiro, K. W. Wecht, Appl. Phys. Lett., 11, № 7, 216 (1967).
2. K. H. Drexhage, Appl. Phys. Lett., 14, № 10, 318 (1969).
3. P. M. Rentzepis, C. J. Mitschele, A. C. Saxman, Appl. Phys. Lett., 17, № 3, 122 (1970).
4. J. R. Klauder, M. A. Duguay, J. A. Giordmaine, S. L. Shapiro, Appl. Phys. Lett., 13, № 5, 174 (1968).
5. Т. И. Кузнецова, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 7, 31 (1970).
6. Т. И. Кузнецова, Препринт ФИАН № 47, 1968; ЖЭТФ, 55, № 6, 2453 (1968).
7. Т. И. Кузнецова, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 6, 66 (1970).
8. В. В. Коробкин, А. А. Малютин, М. Я. Щелев, Письма в ЖЭТФ, 11, № 3, 168 (1970).
9. Н. Г. Басов, С. Д. Захаров, О. Н. Крохин, П. Г. Крюков, Ю. В. Сенатский, С. В. Чекалин, А. И. Федосимов, М. Я. Щелев, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 8, 48 (1970).
10. D. J. Bradley, G. H. C. New, S. L. Caughey, Opt. Comm., 2, № 1, 41 (1970).

MEASUREMENTS OF TIME RADIATION CHARACTERISTICS BASED
ON MULTIPHOTON PROCESSES IN OPPOSITE LIGHT BEAMS*T. I. Kuznetsova*

The connection of the time characteristics of laser radiation with the characteristics of the multiphoton fluorescence track in the presence of errors in the measurement of the track is discussed. The estimations of the measurement accuracy necessary for registration ultrashort pulses are obtained. The advantages of the scheme with two cells are considered. The advantages grow with the increase of photon factor.

УДК 535.36

ВЫНУЖДЕННОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОЛНОМ ФРЕНЕЛЕВСКОМ ОТРАЖЕНИИ

А. И. Божков

Рассмотрено вынужденное рассеяние света на свободной поверхности жидкости в случае полного френелевского отражения. При направлении рассеяния, близких к направлению зеркально отраженного луча, получены простые аналитические выражения для пороговой интенсивности и спектра рассеянного излучения.

1. Эффекту вынужденного рассеяния света на поверхности жидкости, предсказанному в работе [1], посвящено уже довольно много теоретических работ [2-5], и в то же время экспериментальное наблюдение эффекта, насколько нам известно, до сих пор отсутствует. Основная причина такой ситуации, по-видимому, заключается в довольно высоких значениях пороговой интенсивности света I_0 , при которой наступает рассматриваемый эффект. Хотя, как показано в последних работах [4,5], при оптимальных условиях порог вынужденного рассеяния (параметрической неустойчивости капиллярных волн) на поверхности слабвязких жидкостей может быть снижен до нескольких Мвт/см^2 и, таким образом, по интенсивности оказывается более низким по сравнению, например, с порогоми наблюдаемых ВКР и ВРМБ, он все же остается высоким в отношении необходимого энерговклада. Дело в том, что такие низкие значения порога I_0 соответствуют возбуждению капиллярных волн с минимальными значениями волновых чисел $q \sim 10^3 \text{ см}^{-1}$ (что соответствует направлениям рассеянного излучения под углом порядка 10^{-2} рад по отношению к направлению зеркального отражения), а следовательно, с минимальными частотами $\Omega_0 = \sqrt{(\alpha/\rho)} q^3 \sim 10^5 \text{ сек}^{-1}$ (ρ — плотность жидкости, α — коэффициент ее поверхностного натяжения). Это обстоятельство, в свою очередь, налагает очевидное требование на длительность светового импульса $\tau \gg \Omega_0^{-1} \sim 10^{-5} \text{ сек}$. Таким образом, для наблюдения ВПР (вынужденного поверхностного рассеяния) необходимы потоки энергии $W_0 = I_0 \tau \sim 1 \text{ кдж/см}^2$ (в то время как для наблюдения ВКР или ВРМБ пороговые потоки энергии порядка 1 дж/см^2 при длительностях импульсов порядка нескольких десятков наносекунд). Заметим также, что, как это следует из цитированных теоретических работ, отношение I_0/Ω_0 в широком интервале значений q не зависит от q , (а следовательно, и от направления рассеяния). Поэтому для возбуждения более высокочастотных капиллярных волн, когда можно использовать более короткие световые импульсы, пороговые потоки энергии ($I_0 \tau$) остаются теми же.

Данное обстоятельство указывает на то, что успех наблюдения ВПР лежит на пути, во-первых, использования слабвязких жидкостей, максимально прозрачных для рассеиваемого излучения, и, во-вторых, дальнейших теоретических поисков более оптимальных условий наблюдения эффекта, снижающих его энергетический порог. Настоящая статья посвящена именно второму вопросу. В ней приводится решение задачи о ВПР для случая полного френелевского отражения световой волны

от границы «жидкость—свободное пространство». Оказывается, что в такой ситуации пороговые интенсивности I_0 (а следовательно, и энергии) могут быть снижены в несколько (4—5) раз по сравнению со случаем обычного преломления волны. Кроме этой основной задачи, статья преследует еще некоторые методические цели, касающиеся различных методов решения граничной задачи электродинамики для неровных поверхностей применительно к рассмотренному вопросу.

2. Гидродинамические уравнения вязкой несжимаемой жидкости с учетом пондеромоторных сил имеют следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \Delta V - \frac{1}{\rho} \nabla p', \quad \operatorname{div} V = 0, \quad (1)$$

а граничные условия к ним при $z = \zeta(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} -p' n_i + \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) n_k + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon - 1)}{8\pi} [(\varepsilon - 1)(E_2 n)^2 + E_2^2] n_i + \\ + \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) n_i = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $p' = p - \frac{1}{8\pi} \rho \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho} E_1^2$; ρ, p, V, ν и α — соответственно плотность, давление, скорость, кинематическая вязкость и коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $\eta = \rho \nu, \varepsilon_1$ — диэлектрическая проницаемость жидкости ($z > \zeta$) и $\varepsilon = 1/\varepsilon_1$ — относительная диэлектрическая проницаемость вакуума по отношению к жидкости; n_k — нормаль к граничной поверхности $\zeta(x, y, t)$; «электромагнитная часть» граничных условий записана через поле в свободном пространстве ($z < \zeta$).

В (1) пренебрегается нелинейным членом $(V \nabla) V$, так как предполагается, что пологость смещений граничной поверхности $|\nabla \zeta| \ll 1$, а действие поля на среду учитывается в «квазистационарном» приближении, т. е. релятивистские поправки и быстроосциллирующие (с частотой света) составляющие опускаются.

Явный вид граничных условий первого порядка по ζ с учетом соотношений нулевого порядка следующий:

$$\begin{aligned} -p'_\zeta + f_\zeta + 2\eta \frac{\partial V_z}{\partial z} + \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь p'_ζ и f_ζ — линейные по ζ члены разложения по степеням смещений граничной поверхности величин p' и

$$f = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon - 1)}{8\pi} [(\varepsilon - 1)(E_2 n)^2 + E_2^2].$$

Если ограничиться монохроматической волной излучения, падающего на границу раздела «жидкость—свободное пространство», то зависимость величины f_ζ от времени будет полностью определяться через $\zeta(x, y, t)$, поскольку должна учитываться только низкочастотная часть f . Будем искать решение уравнений (1), описывающее волны на поверхности жидкости, как и в случае обычной задачи капиллярных волн [6], в виде

$$\begin{aligned}\zeta(r, t) &= \int dq \exp[i(qr - \Omega t)] \zeta(q), \\ v'_\zeta(R, t) &= \int dq \exp[i(qr - \Omega t)] \tilde{p}'_\zeta, \\ V(R, t) &= \int dq \exp[i(qr - \Omega t)] \tilde{V},\end{aligned}\quad (4)$$

где Ω — комплексная частота, зависящая от волнового вектора $q = \{q_x, q_y\}$, $R = \{x, y, z\}$, $r = \{x, y\}$. В соответствии с этим граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned}-\tilde{p}'_\zeta - i\zeta(q) \frac{2BI}{q} + 2\eta \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} - \alpha q^2 \zeta(q) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial z} + iq_y \tilde{V}_z &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial z} + iq_x \tilde{V}_z = 0, \quad \tilde{V}_z|_{z=0} = -i\Omega \zeta(q);\end{aligned}\quad (5)$$

здесь $q = |q|$, I — интенсивность падающей плоской волны света, а величина B определяется соотношением

$$-i\zeta(q) e^{-i\Omega t} \frac{2BI}{q} = (2\pi)^{-2} \int dr \exp(-iqr) f_\zeta.$$

Таким образом, в общем случае величина B — сложная комплексная функция волновых векторов падающего света k_0 , капиллярной волны q , поляризации падающего излучения и диэлектрических постоянных ϵ_1, ϵ_2 (в нашем случае $\epsilon_2 = 1$), но не зависящая от времени в силу сделанного выше замечания относительно f_ζ . Зависимость $\tilde{V}$ и $\tilde{p}'_\zeta$ от z определяется из объемных уравнений (1)

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{x,y} &= A_{x,y} e^{-mz} + \frac{q_{x,y}}{q} A_p e^{-qz}, \\ \tilde{V}_z &= \frac{i}{m} (q_x A_x + q_y A_y) e^{-mz} + i A_p e^{-qz}, \\ \tilde{p}'_\zeta &= \frac{\rho \Omega}{q} A_p e^{-qz}, \quad m = \sqrt{q^2 - i\Omega/\nu},\end{aligned}$$

причем для постоянных A_x, A_y, A_p из (5) получается однородная система уравнений. Приравняв нулю определитель этой системы, получаем дисперсионное уравнение капиллярных волн с учетом поперемоторного влияния поля интенсивной световой волны на поверхность жидкости с произвольной вязкостью:

$$\begin{aligned}\Omega_0^2 + (2\nu q^2 - i\Omega)^2 + i \frac{2B}{\rho} I &= (2\nu q^2)^2 \sqrt{1 - i\Omega/(\nu q^2)}, \\ \Omega_0^2 &= \frac{\alpha}{\rho} q^3.\end{aligned}\quad (6)$$

От обычного характеристического уравнения для капиллярных волн [7] оно отличается лишь наличием члена, зависящего от интенсивности I падающего на границу раздела света. Для случая маловязкой жидкости ($\nu q^2 \ll \Omega_0$) уравнение (6) имеет решения (см. также [2])

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega_0 - i(\gamma_1 - \gamma_2), & \Omega_2 &= -\Omega_0 - i(\gamma_1 + \gamma_2), \\ \gamma_1 &= 2\nu q^2, & \gamma_2 &= BI/\rho\Omega_0.\end{aligned}\quad (7)$$

Таким образом, при заданной интенсивности света I величина $\text{Re } B$ определяет поправку к затуханию капиллярных волн. При определенном значении γ_2 затухание может изменить знак, что соответствует нарастающим во времени решениям, т. е. параметрическому возбуждению капиллярных волн. Как показано в работах [1, 2], такая зависимость $\Omega_{1,2}(I)$ приводит к изменению формы спектра рассеянного света, причем при заданном направлении наблюдения ширины смещенных компонент определяются величинами $\gamma_1 \mp \text{Re } \gamma_2$, а их сдвиги относительно центральной частоты ω_0 величинами $\pm (\Omega_0 - \text{Im } \gamma_2)$. Конкретное выражение для спектральной интенсивности рассеянного света можно найти в работах [2, 4].

Условие возбуждения капиллярной волны, а следовательно, и условие существенных изменений в спектре рассеянного в данном направлении света, имеет вид $|\text{Re } B|I > 2\eta\Omega_0 q^2$, а пороговая интенсивность излучения определяется равенством

$$I_0 = \frac{2\eta\Omega_0 q^2}{|\text{Re } B|}. \quad (8)$$

В настоящей работе рассматривается случай, когда интенсивность падающего света меньше пороговой ($I < I_0$).

Для сильновязкой жидкости ($\nu q^2 \gg \Omega_0$) решение уравнения (6) имеет вид*

$$\Omega_1 = \frac{BI}{\rho\nu q^2} - i \left[\frac{\Omega_0^2}{2\nu q^2} - \frac{9}{4\nu q^2} \left(\frac{BI}{\rho\nu q^2} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Пороговое значение интенсивности, соответствующее условию $\text{Im } \Omega_1 = 0$, в этом случае дается формулой

$$I_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta\Omega_0 q^2}{|B|} \quad (10)$$

(как будет показано в дальнейшем, при некоторых ограничениях $\text{Im } B = 0$). Для сильновязкой жидкости существует еще одна характерная интенсивность $I_1 = \rho\Omega_0^2/2|B|$, при которой рассеянная компонента света смещается от частоты падающего света ω_0 на свою ширину, равную $\Omega_0^2/2\nu q^2$.

Таким образом, задача ВПР на жидкости свелась к нахождению величины B , для чего необходимо решение граничной электродинамической задачи при заданной форме поверхности жидкости $z = \zeta(x, y, t)$.

3. Задача рассеяния поля неровной поверхностью обсуждается в значительном количестве работ. Однако все способы ее решения фактически сводятся к различным модификациям двух основных методов: метода Кирхгофа (плавные неровности) и метода возмущений (малые неровности) [8]. Наиболее адекватным задаче рассеяния света на флуктуациях поверхности является метод возмущений по параметрам $|k_0 \zeta| \ll 1$, $|\nabla \zeta| \ll 1$ (k_0 — модуль волнового вектора падающей электромагнитной волны). В задаче спонтанного рассеяния света [9, 10]

* Второй корень уравнения (6) в этом случае соответствует гораздо более сильному затуханию и поэтому не рассматривается. Подробнее об этом случае см. работу [3].

этот метод с успехом применялся, причем рассеянное поле представлялось в виде суперпозиции однородных и неоднородных плоских волн. Однако если ограничиться направлениями рассеяния, близкими к зеркально отраженному лучу, что соответствует рассеянию плавных неровностей в масштабе длины волны падающего излучения, то, как известно, результаты обоих методов совпадают. Отметим, что метод Кирхгофа не налагает никакого ограничения сверху на частоту падающего излучения и, кроме того, значительно упрощает задачу нахождения поля непосредственно вблизи поверхности $z = \zeta(x, y, t)$. Заметим, что для определения функции B и порога неустойчивости капиллярных волн требуется знание поля именно вблизи поверхности.

Пусть на границу раздела двух сред $z = \zeta(x, y, t)$ с диэлектрическими постоянными $\epsilon_1 (z > \zeta)$ и $\epsilon_2 (z < \zeta)$ со стороны первой среды падает плоская электромагнитная волна с частотой ω_0 :

$$E_1 = \text{Re} (E_0 \exp [i(k_0 R - \omega_0 t)]),$$

$$R = \{x, y, z\}, \quad k_0 = \{-k_{0x}, 0, -k_{0z}\}, \quad k_{0z} = \sqrt{\epsilon_1 k_0^2 - k_{0x}^2},$$

$$|k_0| = \sqrt{\epsilon_1} k_0, \quad k_0 = \omega_0/c,$$

c — скорость света в свободном пространстве. Граница раздела без возмущений — плоскость $z = 0$, координатная плоскость (x, z) совпадает с плоскостью падения света.

Направление распространения падающего на границу раздела света было несущественным при выводе дисперсионного соотношения (6). Следовательно, в дальнейшем, чтобы прийти к рассмотренному ранее случаю «жидкость — свободное пространство», достаточно будет положить $\epsilon_2 = 1$; при этом световая волна будет падать на границу раздела со стороны жидкости, что обеспечит возможность реализации случая полного френелевского отражения.

Введем локальную систему координат, единичные векторы которой i_1, i_2 и i_3 определяются через нормаль к поверхности $\zeta(x, y, t)$,

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}} \left\{ -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, -\frac{\partial \zeta}{\partial y}, 1 \right\}$$

и волновой вектор падающей волны света k_0 по формулам

$$i_1 = \frac{(k_0 n) n - k_0}{|(k_0 n) n - k_0|}, \quad i_2 = \frac{[k_0 n]}{|[k_0 n]|}, \quad i_3 = n. \quad (11)$$

Применение принципа Кирхгофа требует плавности рассеивающих неровностей в масштабе длины волны падающего излучения, т. е. $2\rho \sin \chi \gg \lambda$, где ρ — меньший из 2-х главных радиусов кривизны поверхности ζ , а χ — локальный угол скольжения (подробнее об ограничениях см. [11]). Поле в среде с ϵ_2 вблизи границы $z = \zeta(x, y, t)$ в таком случае определяется по формулам Френеля в локальной системе координат (11):

$$\begin{aligned} E_2|_{z=\zeta(x, y, t)} &= \text{Re} \{ [(k'_{2z}/k'_{0z}) T_{\parallel} (E_0 i_1) i_1 + T_{\perp} (E_0 i_2) i_2 + \\ &+ T_{\parallel} (E_0 n) n] \exp [i(-k_{0x} x - k_{0z} \zeta(x, y, t) - \omega_0 t)] \}, \\ T_{\parallel} &= \frac{2k'_{0z}}{k'_{2z} + \epsilon k'_{0z}}, \quad T_{\perp} = \frac{2k'_{0z}}{k'_{2z} + k'_{0z}}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \\ k'_{2z} &= \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1) k_0^2 + (k_0 n)^2}, \quad k'_{0z} = -(k_0 n) > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь и в дальнейшем штрих обозначает компоненты вектора в локальной системе координат. Подстановка (12) в граничные условия (3) и решает, фактически, задачу о возбуждении капиллярных волн на поверхности жидкости плоской электромагнитной волной. Для f , таким образом, имеем

$$f = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{16\pi} \left[|T_{\perp}|^2 E_0^2 + (E_0 n)^2 \left(|T_{\parallel}|^2 \frac{\varepsilon(k'_{0x})^2 + |k'_{2z}|^2}{(k'_{0x})^2} - |T_{\perp}|^2 \frac{\varepsilon_1 k_0^2}{(k'_{0x})^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем сразу результат для функции B :

$$\begin{aligned} B = & \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{32\pi I} \left\{ E_{0y}^2 \frac{8k_{0z}k_{0x}}{|k_{2z} + k_{0z}|^2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_{2z} - k_{0z}}{k_{2z}} \right) q_x + \right. \\ & + E_{0z} E_{0y} \frac{8k_{0z}^2}{k_{0x}^2} \left(\frac{\varepsilon k_{0x}^2 + |k_{2z}|^2}{|k_{2z} + \varepsilon k_{0z}|^2} - \frac{\varepsilon_1 k_0^2}{|k_{2z} + k_{0z}|^2} \right) q_y + \\ & + E_{0z}^2 \frac{8k_{0z}k_{0x}}{|k_{2z} + \varepsilon k_{0z}|^2} \left[\frac{k_{0z}^2}{k_{0x}^2} \frac{\operatorname{Re}(k_{2z}^2) + \varepsilon |k_{2z}|^2}{|k_{2z}|^2} + \frac{\varepsilon k_{0x}^2 + |k_{2z}|^2}{k_{0x}^2} \times \right. \\ & \left. \left. \times \operatorname{Re} \left(\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) k_0^2}{k_{2z}(k_{2z} + \varepsilon k_{0z})} \right) \right] q_x \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) справедлива, если выполняются условия

$$\frac{k_{0z}k_{0x}}{|k_{2z}|^2} |\nabla\zeta| \ll 1 \quad \text{и} \quad |\nabla\zeta| \ll 1,$$

возникающие при разложении f в ряд по степеням $\nabla\zeta$. При k_{2z} мнимом (случай полного френелевского отражения) в формуле (14) исчезает коэффициент при $E_{0z} E_{0y}$, учитывающий, главным образом, поляризацию падающего излучения. В этом случае выражение для B существенно упрощается:

$$B = - \frac{2}{c\sqrt{\varepsilon_1}} \frac{k_{0z}k_{0x}}{k_0^2} qq_x,$$

или, выражая через угол падения света ($\cos\theta = k_{0z}/\sqrt{\varepsilon_1}k_0$), найдем

$$B = - \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \sin 2\theta qq_x. \quad (15)$$

Подстановка полученного выражения для B в соответствующие формулы (7) и (9) для частот тепловых капиллярных волн решает задачу ВПР на поверхности жидкости для случая полного френелевского отражения. Пороговые интенсивности даются выражениями

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{2c\eta\Omega_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \sin 2\theta |\cos\varphi|} \quad (\nu q^2 \ll \Omega_0), \\ I_{0c} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{c\eta\Omega_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \sin 2\theta |\cos\varphi|} \quad (\nu q^2 \gg \Omega_0), \\ I_1 &= \frac{c\rho\Omega_0^2}{2\sqrt{\varepsilon_1} q^2 \sin 2\theta |\cos\varphi|} = \frac{caq}{2\sqrt{\varepsilon_1} \sin 2\theta |\cos\varphi|}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\cos \varphi = q_x/q$ определяет направление вектора капиллярной волны ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Отметим, что формула (15) справедлива при углах падения $\theta > \theta_{кр}$ и не слишком близких к критическому углу $\theta_{кр} (\sin^2 \theta_{кр} = \varepsilon = 1/\varepsilon_1)$. Выражение (15) для B не зависит от ε_2 и от поляризации падающего излучения, а зависимость от частоты света входит только через $\varepsilon_1(\omega)$. Следует заметить также, что подобные результаты можно получить и из теории возмущений по малым параметрам $|k_0 \zeta| \ll 1$, $|\nabla \zeta| \ll 1$ (метод Рэлея). Опуская достаточно громоздкие выкладки, вполне аналогичные расчетам работы [4], но с учетом возможности полного френелевского отражения, запишем результат для функции B , который получается из теории возмущений:

$$B = \frac{q(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}{32\pi\varepsilon_1 I} \{ |E_{2y}|^2 [L_y(k_{0x} + q) - L_y^*(k_{0x} - q)] + \\ + \operatorname{Im}(E_{2z} E_{2y}^*) [L_l(k_{0x} + q) - L_l^*(k_{0x} - q)] + \operatorname{Re}(k_{2z} E_{2z} E_{2y}^*) [L_r(k_{0x} + q) - \\ - L_r^*(k_{0x} - q)] + |E_{2z}|^2 [L_z(k_{0x} + q) - L_z^*(k_{0x} - q)] \}, \quad (17)$$

где

$$L_y(k) = \frac{k_x^2 - k_z^{(1)} k_z^{(2)}}{k_z^{(2)} - k_z^{(1)} \varepsilon} + \frac{\operatorname{Im}(k_{2z})}{\varepsilon - 1}, \\ L_l(k) = -ik_y \frac{k_z^{(2)} + k_z^{(1)} \varepsilon}{k_z^{(2)} - k_z^{(1)} \varepsilon}, \quad L_r(k) = \frac{2k_y k_x}{k_{0x} (k_z^{(2)} - k_z^{(1)} \varepsilon)}, \\ L_z(k) = i \operatorname{Im}(k_{2z}) \frac{\varepsilon k_{0x}^2 + |k_{2z}|^2}{k_{0x}^2 (\varepsilon - 1)} - i \operatorname{Im}(k_{2z}) \frac{k_x (k_z^{(2)} + k_z^{(1)} \varepsilon)}{k_{0x} (k_z^{(2)} - k_z^{(1)} \varepsilon)} + \\ + \frac{|k_{2z}|^2}{k_{0x}^2} \frac{k_y^2 - k_z^{(1)} k_z^{(2)}}{k_z^{(2)} - k_z^{(1)} \varepsilon} + \frac{\varepsilon |k|^2}{k_z^{(2)} - k_z^{(1)} \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \\ k = \{k_x, k_y\}, \quad k_{0x} = \{-k_{0x}, 0\}, \quad k_z^{(2)} = -\sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - |k|^2},$$

$k_z^{(1)} = \sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - |k|^2}$; E_{2z} , E_{2y} — френелевские амплитуды прошедшей волны для невозмущенной границы $z = 0$. Это выражение является более общим, нежели (14), в том смысле, что описывает возмущение капиллярных волн и с волновыми векторами $|q| \gg |k_{0,2z}|$ ($|q\zeta| \ll 1$). Как известно, поле, рассеянное на таких q , представляет собой поверхностные неоднородные плоские волны, так как волновые векторы таких волн имеют мнимую компоненту $k_{\pm}^{(1,2)}$:

$$k_{\pm}^{(1)} = \{-k_{0x} \pm q_x, \pm q_y, \sqrt{k_{0z}^2 \pm 2k_{0x} q_x - q^2}\} \quad (z > 0), \\ k_{\pm}^{(2)} = \{-k_{0x} \pm q_x, \pm q_y, -\sqrt{k_{2z}^2 \pm 2k_{0x} q_x - q^2}\} \quad (z < 0).$$

Если в (17) перейти к малым волновым векторам капиллярных волн $|q| \ll |k_{0,2z}|^2/2k_{0x}$; $|k_{0,2z}|$, то, как и следовало ожидать, получается выражение (14). Интересно, что в случае полного френелевского отражения, для тех q , при которых выражение (15) справедливо, рассеянное поле в жидкости представляет собой обычные плоские волны с направлениями распространения, близкими к направлению зеркального отра-

жения от плоскости $z = 0$, а в свободном пространстве — неоднородные плоские (т. е. поверхностные) волны.

Отметим один важный результат, вытекающий из формулы (17). Если интересоваться только рассеянным излучением в виде однородных плоских волн (что в оптике и называется рассеянным светом), то $k_{z\pm}^{(1,2)}$ будут действительными и, следовательно, величина B также действительной. Следует обратить внимание и на случай, когда в формуле (17) какая-либо из компонент $k_{z\pm}^{(1,2)}$ становится мнимой; тогда, в принципе, возможно комплексное значение для B , что, в свою очередь, согласно формулам (7), приведет к действительным смещениям частот стоксовой и антистоксовой компонент в спектре рассеянного излучения. Особый интерес при этом представляет сильновязкая жидкость, для которой возможны существенные изменения пороговой интенсивности (см. формулу (9)).

Однако подробный анализ случая полного френелевского отражения при малых q , когда и $k_{z\pm}$ и $k_{z\pm}^{(2)}$ являются мнимыми, показал, что и в этом случае величина B также остается действительной.

В заключение приведем численные значения оптимальных пороговых интенсивностей для двух маловязких (жидкий азот, эфир) и сильновязкой (глицерин) жидкостей. При падении света на поверхность жидкости со стороны свободного пространства оптимальные условия для малых $|q|$ достигаются при угле падения $\theta_0 \sim 80^\circ$, поляризации в плоскости падения и для q в плоскости падения. Причем направления q , для которых выполняется $(qk_0) < 0$, соответствуют возбуждающимся капиллярным волнам [2]. В случае полного френелевского отражения минимум пороговой интенсивности также соответствует волновым векторам q в плоскости падения света, но возбуждаются капиллярные волны, для которых $(qk_0) > 0$. В дальнейшем знак * относится к характерным интенсивностям падающего со стороны свободного пространства на поверхность жидкости излучения. Все данные соответствуют длине волны света $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ и $|q| = 10^3 \text{ см}^{-1}$, что означает наблюдение рассеяния под углом $\sim 10^{-2} \text{ рад}$ к направлению зеркально отраженного от плоскости $z = 0$ луча. В скобках приводятся углы падения для случая полного отражения.

Глицерин: $\theta_k \sim 42^\circ$, $\eta = 14,95 \text{ пуаз}$, $\Omega_0 = 2,25 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$; $I_{0c}^* = 1,9 \cdot 10^4 \text{ Мвт/см}^2$, $I_{0c} = 5,6 \cdot 10^3 \text{ Мвт/см}^2$ ($\theta = 45^\circ$), $I_1^* = 142,5 \text{ Мвт/см}^2$, $I_1 = 41,8 \text{ Мвт/см}^2$.

Жидкий азот: $\theta_k \sim 56^\circ$, $\eta = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ пуаз}$, $\Omega_0 = 8,7 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $I_0^* = 3,7 \text{ Мвт/см}^2$, $I_0 = 0,7 \text{ Мвт/см}^2$ ($\theta = 59^\circ$).

Эфир этиловый: $\theta_k \sim 47^\circ$, $\eta = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ пуаз}$, $\Omega_0 = 15,4 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $I_0^* = 6,5 \text{ Мвт/см}^2$, $I_0 = 1,6 \text{ Мвт/см}^2$ ($\theta = 50^\circ$).

Как видно из приведенных данных, пороговые интенсивности при полном френелевском отражении в несколько раз меньше, чем оптимальные пороговые интенсивности при падении света со стороны свободного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Бункин, А. А. Самохин, М. В. Федоров, Письма в ЖЭТФ, 7, 431 (1968).
2. Ф. В. Бункин, А. А. Самохин, М. В. Федоров, ЖЭТФ, 56, 1057 (1969).
3. А. И. Божков, Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 56, 1976 (1969).
4. А. И. Божков, Ф. В. Бункин, М. В. Федоров, Препринт-9, ФИАН, М., 1969.
5. В. К. Гавриков, А. В. Кац, В. М. Конторович, ДАН СССР, 186, 1052 (1969); ЖЭТФ, 58, 1318 (1970).

6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, М., 1953.
7. В. Г. Левич, *Физико-химическая гидродинамика*, Физматгиз, М., 1959.
8. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, изд. Наука, М., 1966.
9. Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, т. 1, изд. АН СССР, М., 1948.
10. А. А. Андронов, М. А. Леонтович, *Собрание трудов*, А. А. Андронов, изд. АН СССР, М., 1956.
11. Л. М. Бреховских, *ЖЭТФ*, 23, 275 (1952).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
4 июня 1971 г.

STIMULATED LIGHT SCATTERING ON LIQUID SURFACE AT THE FULL FRESNEL'S REFLECTION

A. I. Bozhkov

The stimulated light scattering on a free liquid surface in the case of the full Fresnel's reflection has been considered. Simple analytical expressions are obtained for the threshold intensity and the scattered radiation spectrum at the scattering direction close to that of the mirror reflected beam.

УДК 621.371 · 621.391.814 2

«САМОМОДУЛЯЦИЯ» ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

Л. А. Островский, Л. В. Соустов

Приводятся результаты экспериментального исследования эффектов, связанных с неустойчивостью бегущих и стоячих электромагнитных волн в линиях с полупроводниковыми диодами.

Как известно [1, 2], монохроматическая волна в диспергирующей среде с реактивной нелинейностью может быть неустойчивой по отношению к возмущениям, модулирующим ее амплитуду и фазу. Такая самомодуляция (связанная с четырехфотонным взаимодействием между основной волной и ее малыми боковыми компонентами) экспериментально наблюдалась впервые для гравитационных волн на поверхности воды [2]. Для электромагнитных волн аналогичные эффекты были получены в линии передачи с ферритом [3]. Однако ввиду сильной нелинейной диссипации в феррите величина эффекта была невелика, а возможность сопоставления с теорией практически отсутствовала.

В настоящей работе приводятся результаты исследования нелинейных явлений, обусловленных эффектом самомодуляции, в линиях с нелинейными емкостями полупроводниковых диодов*. В таких системах оказалось возможным получить весьма значительное (до 13 раз) нарастание глубины модуляции бегущей волны, а также проследить за эволюцией волн с глубокой модуляцией, в результате которой волна распадается на короткие волновые пакеты. Существенно также то, что использование ограниченной системы—резонатора позволяет наблюдать самомодуляцию стоячей монохроматической волны, причем модуляция возникает лишь за счет собственных флуктуаций поля. Наконец, определенный интерес может представлять специфика используемой в эксперименте системы, связанная с релаксационным характером нелинейности.

1. О НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНИИ

Эффекты нелинейного самовоздействия в линиях с дисперсией обусловлены зависимостью скорости волны от ее амплитуды A , поэтому средняя за период емкость $\bar{C}$ должна зависеть от A . Вклад в изменение $\bar{C}$ дают (без учета взаимодействия с высшими гармониками) только нечетные члены разложения заряда Q в степенной ряд по напряжению V , поэтому целесообразно использовать емкость с симметричной относительно рабочей точки зависимостью $C(V)$. В качестве нелинейных емкостей в эксперименте применялись диоды Д-811, включенные попарно в каждое звено линии навстречу друг другу без смещения. При

* Краткая информация о некоторых из излагаемых ниже результатов приводилась на Международном симпозиуме URSI по электромагнитным волнам в 1968 г. [4].

таком включении на каждом полупериоде переменного напряжения один из диодов проводит ток, заряжающий емкость другого диода. В результате средняя за период емкость пары диодов зависит от амплитуды переменного напряжения почти столь же сильно, как и дифференциальная емкость одного диода от постоянного напряжения смещения*. Эта зависимость приведена на рис. 1. Там же показано изменение

нелинейного параметра $g(A) = \frac{A}{2C} \frac{d\bar{C}}{dA}$, от которого зависит инкремент

неустойчивости. Отметим особенность данного нелинейного элемента: при $A \gtrsim 1$ в $g(A) \approx -0,2$ и практически не зависит от амплитуды.

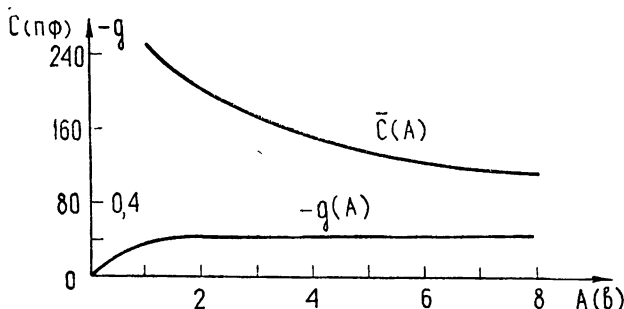


Рис. 1. Зависимость средней емкости $\bar{C}$ и нелинейного параметра g от амплитуды переменного напряжения.

Легко видеть также, что емкость $\bar{C}$ ведет себя как инерционный элемент с временем релаксации τ порядка времени разряда емкостей диодов (в данном случае $\tau \sim 10^{-3}$ сек). Для эффективного использования нелинейных свойств системы, очевидно, необходимо, чтобы время τ было мало по сравнению с характерным периодом модуляции T_m . Для этого параллельно диодам включены шунтирующие сопротивления $R = 75$ ком. При такой величине R выполняются неравенства $T \ll \tau \sim RC(A) \ll T_m$, где T — период несущего колебания, и инерционность емкости в масштабе T_m сказывается мало, а потери еще относительно невелики (волна к концу линии затухает в два раза); во всяком случае, их увеличение с избытком компенсируется увеличением нелинейности.

Для исследования самомодуляции использовалась линия из 20 — 35 звеньев с описанными здесь нелинейными емкостями, схема

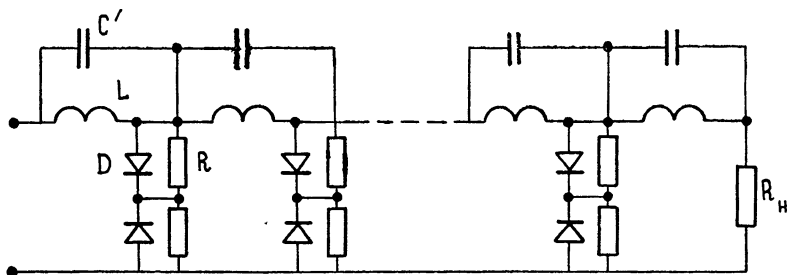


Рис. 2. Схема линии задержки.

* В схемах попарного включения диодов с запирающим смещением зависимость средней емкости от A много слабее и эффекты самовоздействия малы.

которой изображена на рис. 2. Остальные параметры линии таковы: $L = 300 \cdot 10^{-6}$ гн, $C' = 150$ пф. Такая система представляет собой фильтр, пропускающий колебания в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_{кр}(A)$, где $\omega_{кр}(A) = 2/\sqrt{L[4C' + C(A)]}$.

2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ С МАЛЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ МОДУЛЯЦИИ

Величину эффекта нарастания модуляции в бегущей волне можно оценить с помощью следующей формулы для инкремента K' возмущений амплитуды и фазы волны [5]*:

$$K' = \frac{\Omega}{v} \left[\frac{\sqrt{\xi^2 + (g\Omega\tau D)^2} - \xi}{2(1 + \Omega^2\tau^2)} \right]^{1/2}, \quad (1)$$

где $\xi = gD + D^2(\Omega/2\omega)^2(1 + \Omega^2\tau^2)$; $v(\omega)$ — групповая скорость волны, вычисляемая в общем случае с учетом дискретности параметров линии;

τ — время релаксации нелинейности; $D = -\frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}$ — дисперсионный параметр; $\Omega/2\pi$ — частота модуляции.

Приведем результаты эксперимента. Распространение модулированных волн в линии с числом звеньев $n = 20 \div 35$ исследовалось в диапазоне несущих частот $100 \text{ кГц} < f < 600 \text{ кГц}$; частота модуляции F изменялась от 1 до 100 кГц . Если колебания на входе линии промодулированы по амплитуде или частоте с малым коэффициентом модуляции ($m_{вх} \sim 5 \cdot 10^{-2}$), то при распространении волны вдоль линии происходит увеличение коэффициента модуляции до десятков процентов.

Коэффициент усиления огибающей $k = m_n/m_{вх}$ зависит от длины линии, частот f и F и амплитуды волны A .

Развитие самомодуляции показано на рис. 3, где приведены фотографии осциллограмм напряжения на различных звеньях линии. Результат обработки этих осциллограмм показан на рис. 4, где построена зависимость $k(n)$. Очевидно, что максимальное увеличение глубины модуляции ограничивается эффектом насыщения, когда величина m_n становится сравнимой с единицей. Закон нарастания модуляции зависит от граничных условий. При амплитудной модуляции на входе начальный

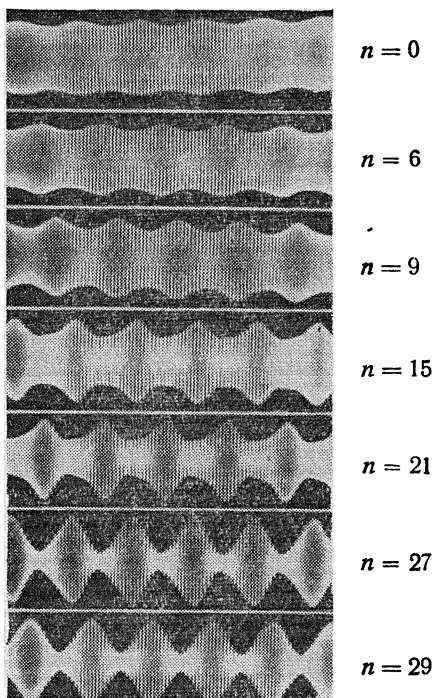


Рис. 3. Осциллограммы слабomodулированной волны, распространяющейся вдоль линии (n — номер звена).

* Формула (1) была получена для кубичной нелинейности ($g \sim A^2$), но обобщение на случай произвольной малой нелинейности не представляет труда. Правда, как видно из дальнейшего, для данного эксперимента эта формула имеет ограниченную применимость.

участок кривой $k(n)$ (рис. 4) достаточно хорошо описывается функцией $\text{sh } K'n$, где K' определяется из (1); при этом в линии возникает фазовая модуляция. При частотной модуляции входных колебаний глубина возникающей в линии амплитудной модуляции изменяется быстрее — как $\text{sh } K'n$, что также согласуется с теоретическими результатами.

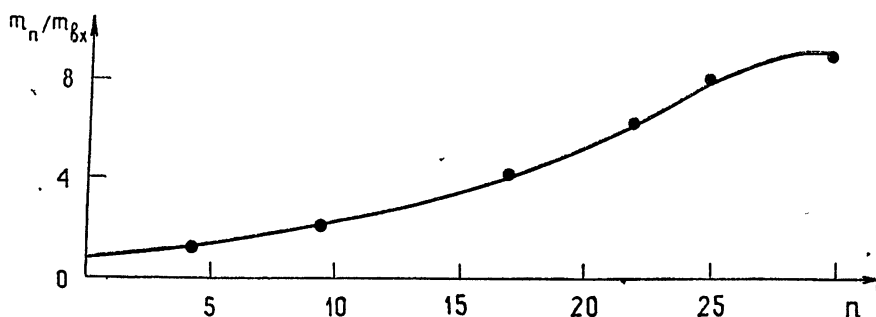
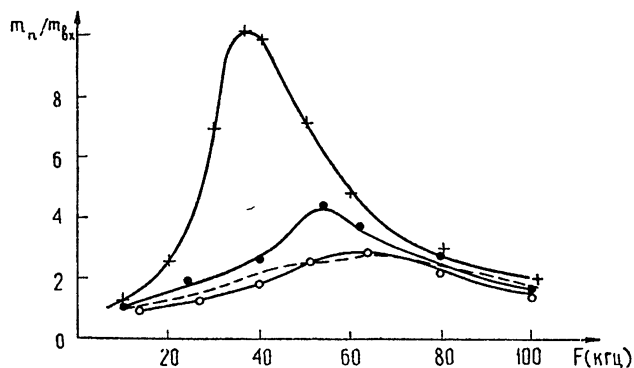


Рис. 4. Изменение коэффициента усиления огибающей по длине линии.

ми. На рис. 5 приведены зависимости коэффициента усиления огибающей от частоты модуляции F при различных значениях f . Вид кривых свидетельствует о существенном влиянии процессов релаксации в области больших значений F . На том же рисунке построена теоретическая

Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления огибающей от частоты модуляции при $n = 25$;
 + + + — $f = 595$ кГц;
 ● ● ● — $f = 525$ кГц;
 ○ ○ ○ — $f = 460$ кГц;
 --- — теоретическая кривая, рассчитанная для $f = 460$ кГц.



кривая по (1) для $f = 460$ кГц, которая хорошо совпадает с соответствующей экспериментальной. Для других кривых совпадение было существенно хуже ввиду близости f к $f_{кр} = \omega_{кр}/2\pi$, при этом дисперсия столь велика, что изменение групповой скорости в пределах спектра модуляции не может считаться малым.

Была измерена также зависимость коэффициента усиления огибающей от амплитуды волны, приведенная на рис. 6. При малых

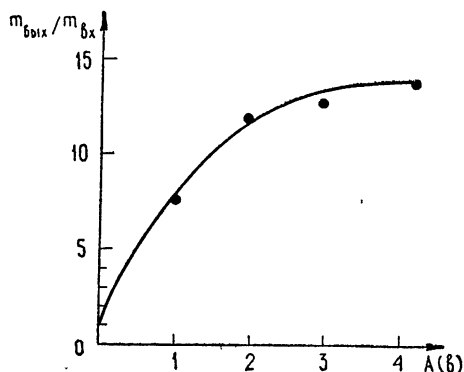


Рис. 6. Зависимость коэффициента усиления огибающей от амплитуды волны.

входных амплитудах ($A_{вх} < 1\theta$) $k \sim 1$, что согласуется с приведенной на рис. 2 зависимостью $g(A)$.

Следует отметить, что максимальное усиление развивалось на расстоянии всего 6—8 длин волны несущей.

3. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ С ГЛУБОКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

В той же линии наблюдались своеобразные нелинейные эффекты при распространении волны с относительно глубокой, но медленной амплитудной модуляцией. На рис. 7 показана эволюция такой волны в линии при $f = 600$ кГц, $A = 5$ в и $F = 14$ кГц. На первом этапе ($n \sim 10$ звеньев) огибающая волны остается симметричной относительно максимума, но заметно обостряется. Это, по-видимому, можно рассматривать как экспериментальное подтверждение теории Лайтхилла [6, 7], где такое обострение получено для достаточно медленных и гладких изменений амплитуды. Далее симметрия нарушается, огибающая приобретает осциллирующий характер и на каждом периоде модуляции волна разбивается на отдельные пакеты. Число пакетов пропорционально периоду модуляции (рис. 8). Этот процесс имеет тот же характер, что и распад волнового импульса на поверхности глубокой воды, описанный в [8] (где, однако, наблюдалось не более двух пакетов). Длительность пакетов в нашем случае больше, чем длительность стационарных уединенных волн огибающих [1] из-за влияния инерционности нелинейности.

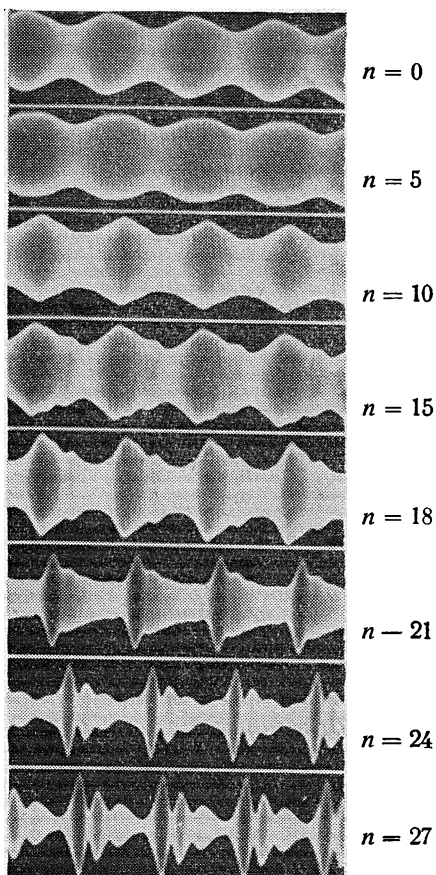


Рис. 7. Осциллограммы волны с глубокой модуляцией, распространяющейся вдоль линии.

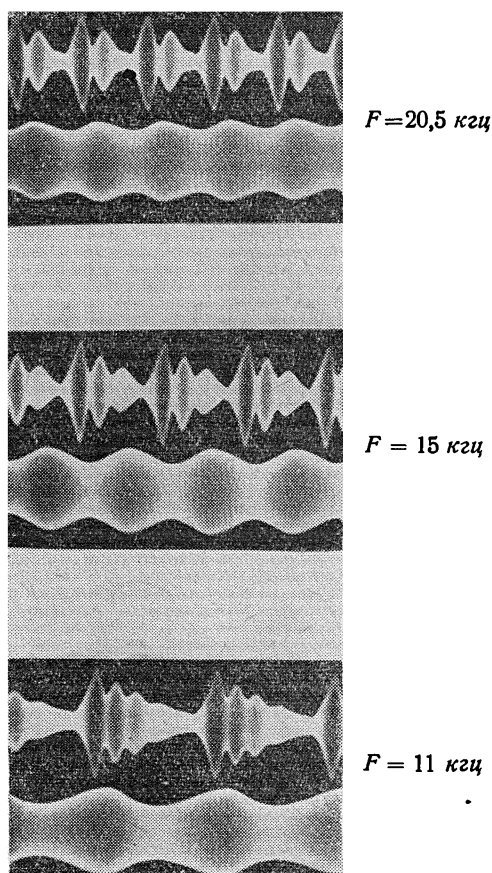


Рис. 8. Осциллограммы волн при различных частотах модуляции (верхние на $n=27$, нижние на $n=0$).

4. САМОМОДУЛЯЦИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Теоретическое исследование устойчивости свободных и вынужденных колебаний нелинейного резонатора проводилось в работах [9, 10], где показано, что колебания в резонаторе достаточно большой длины неустойчивы по отношению к возмущениям на соседних модах. Для вынужденных колебаний инкремент неустойчивости снова можно оценивать по формуле (1), но с добавлением в правой части члена $-(2v\tau)^{-1}$, где $\tau = RC$, описывающего затухание в резонаторе; при этом Ω может принимать дискретный ряд значений $\Omega = \lambda\pi v/L$, где λ — целое число, L — длина резонатора. Если амплитуда вынужденных колебаний A превышает некоторое пороговое значение, то возникает самомодуляция.

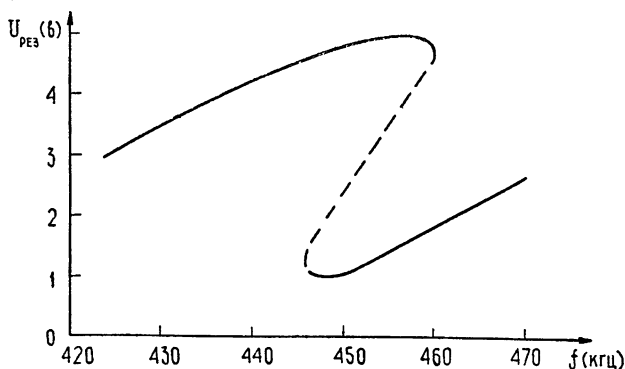


Рис. 9. Часть резонансной кривой резонатора, образованного отрезком линии из 26 звеньев, разомкнутым на концах.

В эксперименте резонатор представлял собой отрезок из звеньев описанной выше линии, замкнутой или разомкнутой на концах, и возбуждался от генератора гармонических колебаний через сопротивление $R = 20$ ком. Резонансная кривая системы при $A \geq 1$ в имеет ряд максимумов, соответствующих различным модам, причем из-за нелинейности образуются гистерезисные участки (рис. 9). При некоторых значениях частоты возбуждения в диапазоне $f = (350 \div 600)$ кГц в резонаторе устанавливаются модулированные колебания, вид которых приведен на рис. 10. С изменением f от 380 до 600 кГц частота возникающей модуляции F уменьшается от 45 до 5 кГц (рис. 11), причем происходят последовательные срывы модуляции при переходе на соседнюю моду. Как и для случая бегущих волн (разд. 2), совпадение эксперимен-

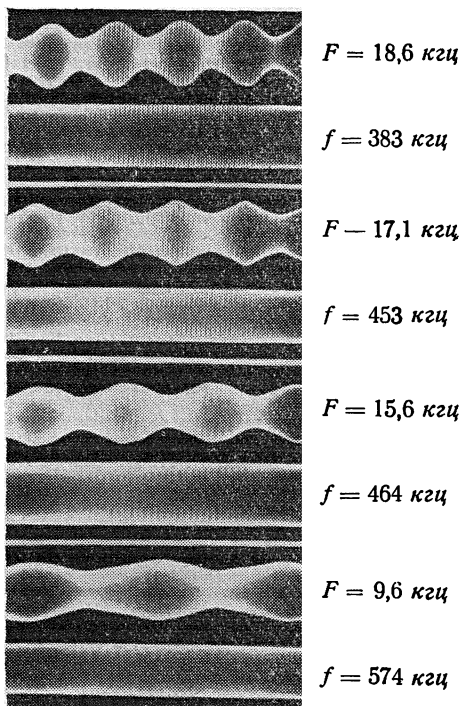


Рис. 10. Осциллограммы колебаний в резонаторе и гармонической накачки.

тальных и теоретических значений частоты самомодуляции ухудшается с приближением f к $f_{кр}$.

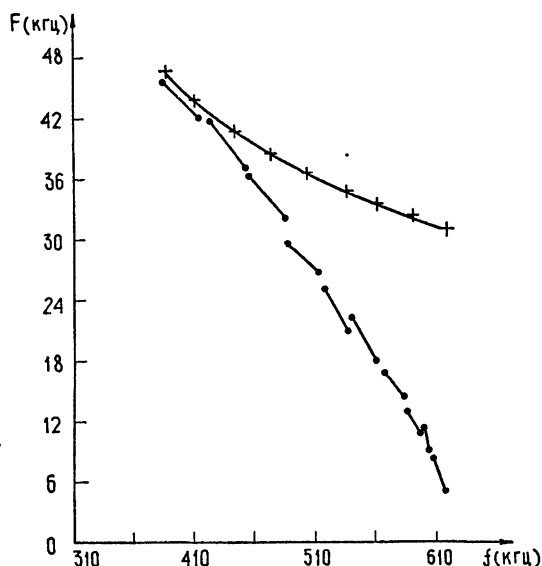


Рис. 11. Зависимость частоты возникающей в резонаторе модуляции от частоты накачки;
+ + + — теоретическая кривая, рассчитанная по (1);
• • • — эксперимент.

Отметим в заключение, что исследованные здесь эффекты, по-видимому, могут найти практическое применение в связи с возможностью усиления и генерации электромагнитных сигналов [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 51, 1189 (1966).
2. T. V. Benjamin, J. E. Feir, J. Fluid. Mech., 27, 417 (1967).
3. Л. И. Загрядская, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 948 (1968).
4. L. A. Ostrovskii, Alta Frequenza, 38, No. Speciale (URSI Symposium on el. -mag. Waves, 1968), 4—3, 207 (1969).
5. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 54, 1236 (1968).
6. M. J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl., 1, 269 (1965).
7. М. Дж. Лайтхилл, Нелинейная теория распространения волн, сб. статей под ред. Г. И. Баренблатта, изд. Мир, М., 1970.
8. Дж. Фейр, Нелинейная теория распространения волн, сб. статей под ред. Г. И. Баренблатта, изд. Мир, М., 1970.
9. Л. А. Островский, сб. Нелинейная оптика (Тр. 2-го Всесоюзного симпозиума, 1966), Новосибирск, 1968, стр. 301.
10. L. A. Ostrovskii, Laser und ihre Anwendungen (Intern. Tagung, Dresden, 1970), Teil 14, S. 875.
11. Л. А. Островский, Л. В. Соустов, Авт. св. № 302801, Бюлл. изобр. № 15, 1971.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 июля 1971 г.

„SELF-MODULATION“ OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONLINEAR TRANSMISSION LINES

L. A. Ostrovskii, L. V. Soustov

The results of experimental investigation of the effects connected with the instability of traveling and standing electromagnetic waves in the lines with semiconductor diodes are given.

УДК 538.574.4

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман

Рассматривается распространение электромагнитных волн в недиспергирующих средах с пространственно-временными флуктуациями диэлектрической проницаемости. В рамках метода малых возмущений вычислен тензор эффективной диэлектрической проницаемости и спектр рассеянного поля. Показано, что наличие временных флуктуаций оказывает влияние на энергетические соотношения для распространяющейся волны. В частности, при достаточно быстрых флуктуациях среднее поле волны нарастает, несмотря на рассеяние.

Проблемам электродинамики случайно неоднородных сред посвящено значительное число работ. В большинстве из них рассматриваются вопросы распространения волн в средах, где диэлектрическая проницаемость является случайной функцией координат. Между тем, для реальных сред характерны также и временные случайные изменения ϵ , которые приводят к качественно новым явлениям. В первую очередь временные флуктуации ведут к уширению спектра рассеянного поля, это наблюдалось экспериментально и исследовано в ряде работ (см., например, [1] и цитированную там литературу). Пространственно-временные случайные изменения диэлектрической проницаемости приводят также к параметрическому взаимодействию распространяющейся волны со средой [2-4]. Однако до сих пор при теоретическом рассмотрении изменения диэлектрической проницаемости во времени предполагались медленными по сравнению с характерным временем изменения электрического поля. В то же время можно указать случаи, когда флуктуации нельзя считать медленными. Такая ситуация реализуется, например, при рассеянии достаточно длинных волн в средах, где из-за нелинейных эффектов диэлектрическая проницаемость быстро меняется под действием мощного высокочастотного поля накачки.

В настоящей работе рассмотрено распространение волн в недиспергирующих средах со слабыми пространственно-временными флуктуациями, причем скорость изменения ϵ во времени может быть произвольна.

Работа состоит из двух частей. В первой части методом возмущений получены выражения для эффективной диэлектрической проницаемости и обсуждаются энергетические соотношения в средах с пространственно-временными флуктуациями.

Во второй части рассматривается влияние быстрых флуктуаций на спектр рассеянного поля.

1. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Известно, что средняя электрическая индукция в хаотически неоднородной среде является линейной функцией электрического поля:

$$\langle D_i \rangle = \epsilon_{ij}^{\text{эф}} \langle E_j \rangle.$$

Имеется много работ, в которых вычислена эффективная диэлектрическая проницаемость в различных приближениях. Содержание наи-

более существенных из них отражено в обзоре [5]. Однако влияние временных случайных изменений диэлектрической проницаемости не учитывалось при вычислении $\varepsilon^{\text{эфф}}$ среды.

В настоящем разделе мы вычислим $\varepsilon^{\text{эфф}}$ недиспергирующей среды с пространственно-временными флуктуациями.

Рассмотрим распространение волн в среде с $\mu = 1$ и $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ — случайной функцией координат и времени. Волновое уравнение для электрического поля в этом случае имеет вид

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{\langle \varepsilon \rangle}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \frac{\varepsilon_1(\mathbf{r}, t)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} \mathbf{E}. \quad (1)$$

При получении (1) мы полагали $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$; $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$.

Обычно последние два члена в правой части уравнения (1) отбрасывают и считают, что ε зависит от времени как от параметра. Такое приближение соответствует медленному изменению ε во времени по сравнению с характерным временем изменения электрического поля [1].

Будем решать уравнение (1) методом возмущений. Воспользуемся известным способом получения $\varepsilon^{\text{эфф}}$ [6], представляя электрическое поле в виде

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{e}, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}$ — рассеянное поле, $|\mathbf{e}| \ll |\langle \mathbf{E} \rangle|$ и $\langle \mathbf{e} \rangle = 0$. Подставляя (2) в (1), легко получить уравнения для среднего и рассеянного полей:

$$\text{rot rot } \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{\langle \varepsilon \rangle}{c^2} \frac{\partial^2 \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t^2} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{e} \rangle; \quad (3)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{e} + \frac{\langle \varepsilon \rangle}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\varepsilon_1(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{E} \rangle]. \quad (4)$$

Уравнение (4) легко решается методом Фурье:

$$e_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{ij} - \frac{c^2}{\langle \varepsilon \rangle \omega^2} k_i k_j}{\langle \varepsilon \rangle \omega^2 / c^2 - k^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \{ \varepsilon_1(\mathbf{r}', t') \langle E_j(\mathbf{r}', t') \rangle \} \times \\ \times \exp [i\omega(t - t') - i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\omega d\mathbf{k} dt' d\mathbf{r}'. \quad (5)$$

Будем считать, что флуктуации ε однородны и стационарны. Подставим (5) в (3) и запишем (3) для одной спектральной компоненты $E_0(\omega_0, \mathbf{k}_0) \exp [i\omega_0 t - i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r})]$:

$$\{ k_0^2 \delta_{ij} - k_i^0 k_j^0 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) \} E_{0j}(\omega_0, \mathbf{k}_0) = 0. \quad (6)$$

В (6) $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0)$ — тензор эффективной диэлектрической проницаемости среды со слабыми пространственно-временными флуктуациями. Он равен

$$\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) = \langle \varepsilon \rangle \delta_{ij} - \\ - \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\delta_{ij} - \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} k_i k_j}{\omega^2 / c^2 - k^2} B_\varepsilon(\tau, \mathbf{p}) \exp [i(\omega_0 - \omega)\tau - i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{p}] d\omega d\mathbf{k} d\tau d\mathbf{p}. \quad (7)$$

В (7) $B_\varepsilon(\tau, \rho)$ — функция корреляции флуктуаций ε_i , $\tau = t' - t$, $\rho = r' - r$. В дальнейшем мы будем считать флуктуации изотропными. Тогда $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i^0 k_j^0}{k_0^2} \right) \varepsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) + \frac{k_i^0 k_j^0}{k_0^2} \varepsilon_l^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0).$$

Будем также рассматривать распространение только поперечных волн, так как продольные волны, связанные с пространственной дисперсией, появляющейся из-за рассеяния [7], в случае малых флуктуаций не возникают.

Из (7) после некоторых преобразований можно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) = \langle \varepsilon \rangle - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [B_\varepsilon(\tau, \rho) e^{i\omega_0 \tau}] - \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \frac{\partial B_\varepsilon(\tau, \rho)}{\partial \rho} \right\} \times \\ \times \exp \left[-i \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \rho \right] J_{1/2}(k_0 \rho) (k_0 \rho)^{-1/2} d\rho + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\langle \varepsilon \rangle} \int_0^\infty \left[\frac{\partial^2 B_\varepsilon}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varepsilon}{\partial \rho} \right] \exp \left[-i \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \rho \right] J_{3/2}(k_0 \rho) (k_0 \rho)^{-3/2} d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) $B_\varepsilon(\tau, \rho)$ берется в точке $\tau = \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \rho / c$, $J_{n/2}$ — функция Бесселя с полуцелым индексом.

Рассмотрим сначала случай чисто временных флуктуаций, полагая $B_\varepsilon(\tau, \rho) \doteq B_\varepsilon(\tau)$. Тогда непосредственно из (7) можно получить

$$\varepsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} = \langle \varepsilon \rangle + i \frac{a}{4 \langle \varepsilon \rangle} \left\{ \int_{-\infty}^\infty B_\varepsilon(\tau) e^{i(\omega_0 - a)\tau} d\tau - \int_{-\infty}^\infty B_\varepsilon(\tau) e^{i(\omega_0 + a)\tau} d\tau \right\}. \quad (9)$$

В (9) $a = k_0 c / \sqrt{\langle \varepsilon \rangle}$. Из дисперсионного соотношения для поперечных волн $k_0 = (\omega_0 / c) \sqrt{\varepsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}}}$ следует, что $\omega_0 \approx a$ с точностью до малых членов $\sim \langle \varepsilon^2 \rangle$. Тогда первый интеграл в (9) $\sim \langle \varepsilon_1^2 \rangle T$, где T — характерное время флуктуаций. Второй интеграл в (9) всегда меньше, чем первый и, следовательно, $\text{Im} \varepsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} > 0$, т. е. среднее поле волны увеличивается по мере распространения в такой среде. Это явление аналогично параметрическому усилению колебаний в RLC -контуре со случайно изменяющейся емкостью [8].

Исследование выражения (8) в общем виде затруднительно, поэтому мы его рассмотрим в некоторых предельных случаях с функцией корреляции вида

$$B_\varepsilon(\tau, \rho) = \langle \varepsilon_1^2 \rangle \exp \left(-\frac{\rho^2}{l^2} - \frac{\tau^2}{T^2} \right), \quad (10)$$

где l — характерный масштаб флуктуаций, T — характерное время изменения флуктуаций. Выбор функции корреляции в виде произведения пространственной и временной частей соответствует пренебрежению явлениями переноса. Так как в (8) $B_\varepsilon(\tau, \rho)$ берется в точке $\tau = \sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \rho / c$, то функция корреляции имеет вид

$$B_{\epsilon}(\tau, \rho) \Big|_{\tau = \frac{\sqrt{\langle \epsilon \rangle} \rho}{c}} = \langle \epsilon_1^2 \rangle \exp\left(-\frac{\rho^2}{l_1^2}\right), \quad l_1^2 = \frac{l^2}{1 + \epsilon l^2 / c^2 T^2}. \quad (11)$$

Здесь l_1 — новый «эффективный» масштаб корреляции. Легко видеть, что при $l \ll cT$ $l_1 \approx l$, а при $l \gg cT$ $l_1 \approx cT$. Рассмотрим случай мелкомасштабных флуктуаций. Отметим, что разложение ведется теперь по параметру $k_0 l_1$, но $k_0 l_1 \ll 1$ при $k_0 l \ll 1$ для любых сколь угодно быстрых флуктуаций, так как фактически $l_1 \approx \min\{l, cT\}$, и из (8) получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} = \langle \epsilon \rangle - \frac{\langle \epsilon_1^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \left[\frac{l_1^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{l_1^4}{l^4} + 2 \frac{k_0^4 l_1^4}{T^4 \omega_0^4} - \frac{k_0^2 l_1^2}{T^2 \omega_0^2} \right] + \\ + i \frac{\sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle}{\langle \epsilon \rangle} \left\{ \frac{T^2 \omega_0^2 + 2k_0^2 l^2}{T^2 \omega_0^2 + k_0^2 l^2} (k_0 l)^3 k_0 l_1 - k_0^3 l_1^3 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{l_1^2}{l^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{l_1^4}{3l^4} + \frac{3k_0^2 l_1^2}{T^2 \omega_0^2} + \frac{5k_0^4 l_1^4}{T^4 \omega_0^4} \right] \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

В (12) $\text{Im } \epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}}$ содержит положительные и отрицательные члены и при достаточно быстрых флуктуациях $\text{Im } \epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} > 0$. В частности, при $T\omega_0$ порядка 1, $l_1 \approx l$,

$$\text{Im } \epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} \approx \langle \epsilon_1^2 \rangle (k_0 l)^3 \left(\frac{1}{T^2 \omega_0^2} - \frac{1}{6} \right), \quad (13)$$

и $\text{Im } \epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} > 0$ при $T\omega_0 < \sqrt{6}$. Из (12) видно, что при $T \rightarrow \infty$ (чисто пространственные флуктуации) получаются известные выражения для $\epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}} [6]$.

Из формул (12) и (13) следует, что в зависимости от параметра $T\omega_0$ мнимая часть $\epsilon_{\text{tr}}^{\text{эфф}}$ может существенно менять свою величину и даже знак. Это означает, что наличие временных флуктуаций уменьшает затухание среднего поля, а в случае достаточно быстрых изменений ϵ может привести к нарастанию его. Этот эффект можно объяснить параметрическим взаимодействием электромагнитной волны с флуктуациями ϵ .

Параметрическое взаимодействие электромагнитных волн с регулярной волной параметра исследовано достаточно подробно [2–4]. Известно, в частности, что при выполнении «резонансного» условия происходит эффективная перекачка энергии от среды к волне. Из этого условия следует, что частота и скорость распространения волны накачки должны быть больше, чем у электромагнитной волны.

Хаотические изменения диэлектрической проницаемости можно разложить в пространственно-временной спектр, содержащий гармоники с различными частотами и скоростями распространения. Электромагнитная волна будет эффективно взаимодействовать только с гармониками, близкими к резонансной. Это взаимодействие и приводит к росту энергии электромагнитного поля за счет работы внешних сил, изменяющих диэлектрическую проницаемость. Заметим, что параметрическое взаимодействие волны со средой имеет место и при вынужденном комбинационном рассеянии [9].

Вычисления показывают, что для длин волн порядка и меньше масштаба корреляции усиление среднего поля возможно только при очень быстрых флуктуациях ($T\omega_0 \ll 1$). Но так как при этом $k_0 l_1 \approx T\omega_0$, то можно

воспользоваться для этого случая формулой (12), заменив в ней $k_0 l_1$ на $T\omega_0$. Отсутствие усиления среднего поля при $T\omega_0 \approx 1$ можно объяснить тем, что при $k_0 l > 1$ рассеяние становится довольно сильным, и затухание среднего поля преобладает над параметрическим нарастанием его.

Однако из-за параметрического взаимодействия волны со средой энергия полного поля (среднее поле плюс рассеянное) увеличивается и в случае медленного изменения ϵ в пространстве и времени.

Для доказательства этого утверждения решим уравнение (1) методом плавных возмущений (МПВ). Известно, что в отсутствие временных флуктуаций средняя энергия полного поля с учетом второго приближения МПВ сохраняется [1]. Применяя к (1) МПВ, можно получить связанные с временными флуктуациями добавки к действительной части комплексной фазы:

$$\begin{aligned}\langle (\text{Re} \Phi_1)^2 \rangle &= -\frac{2L}{c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 B_e(\rho, \tau=0)}{\partial \tau^2} d\rho, \\ \text{Re} \langle \Phi_2 \rangle &= \frac{3L}{4c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 B_e(\rho, \tau=0)}{\partial \tau^2} d\rho, \\ \langle EE^* \rangle &= E_0^2 \exp \left[-\frac{5L}{2c^2} \int_0^L \frac{\partial^2 B_e(\rho, \tau=0)}{\partial \tau^2} d\rho \right],\end{aligned}\quad (14)$$

где L — длина трассы. При выводе (14) флуктуации ϵ считались достаточно плавными во времени, так что были отброшены члены порядка $1/(cT)^3$ и выше. Кроме того, при вычислении интегралов считалось выполненным условие $\lambda L/l^2 \ll 1$. Если $B_e(\rho, \tau)$ имеет при $\tau=0$ максимум, то $\frac{\partial^2 B_e(\rho, \tau=0)}{\partial \tau^2} < 0$ и энергия волны увеличивается по мере распространения.

Для функции корреляции вида (10) интегралы в (14) легко вычисляются и

$$\langle EE^* \rangle = E_0^2 \exp \left(\frac{5}{2} \sqrt{\pi} \langle \epsilon_1^2 \rangle \frac{LL}{c^2 T^2} \right).$$

2. ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим рассеяние плоской монохроматической волны на некотором объеме V , заполненном средой с пространственно-временными флуктуациями диэлектрической проницаемости. Рассеивающий объем будем считать помещенным в однородную безграничную среду с $\epsilon = \langle \epsilon \rangle$. Как и выше, будем считать флуктуации слабыми и ограничимся приближением однократного рассеяния. При этом можно воспользоваться выражением (5) для рассеянного поля, полагая $\langle E \rangle = E_0 \exp[i\omega_0 t - i(k_0 r)]$ и учитывая, что интегрирование по r' проводится в пределах объема V . Далее, проинтегрировав по ω и k , получим для точки наблюдения, находящейся вне рассеивающего объема,

$$e(r, t) = -\frac{1}{4\pi c^2} \int_V \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial t'^2} + 2i\omega_0 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t'} - \omega_0^2 \epsilon_1 \right\} \bigg|_{r'=t-\frac{V\langle \epsilon \rangle}{c}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\delta_{ij} - \frac{(r-r')_i (r-r')_j}{|r-r'|^2} \right] \frac{\exp[-i(k_0 r')]}{|r-r'|} E_j^0 dr' + \\
& + \frac{1}{4\pi c \sqrt{\langle \varepsilon \rangle}} \int_{t-\frac{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}}{c}}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t'^2} + 2i\omega_0 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t'} - \omega_0^2 \varepsilon_1 \right] \exp(i\omega_0 t') dt' \times \\
& \times \int_V \left[\delta_{ij} - \frac{(r-r')_i (r-r')_j}{|r-r'|^2} \right] \frac{\exp[-i(k_0 r')]}{|r-r'|^2} E_j^0 dr' - \quad (15) \\
& - \frac{1}{4\pi \langle \varepsilon \rangle} \int_{t-\frac{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}}{c}}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t'^2} + 2i\omega_0 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t'} - \omega_0^2 \varepsilon_1 \right] \times \\
& \times \left[\frac{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}}{c} |r-r'| - (t-t') \right] \exp(i\omega_0 t') dt' \int_V \left[\delta_{ij} - \right. \\
& \left. - \frac{(r-r')_i (r-r')_j}{|r-r'|^2} \right] \frac{\exp[-i(k_0 r')]}{|r-r'|^3} E_j^0 dr'.
\end{aligned}$$

Заметим, что выражение (15) можно получить несколько иным способом, используя пространственно-временную функцию Грина уравнения (3) (см., например, [10]). Второй и третий интегралы в (15) соответствуют квазистатическим полям, которые быстро спадают с ростом r' (мы предполагаем, что начало координат находится внутри рассеивающего объема). В дальнейшем нас будет интересовать рассеянное поле в зоне Фраунгофера, и поэтому квазистатическими полями можно пренебречь*. Рассмотрим временную функцию корреляции рассеянного поля. При выполнении условий**

$$\frac{l^2}{\lambda r} \ll 1, \quad \frac{l^2}{cTr} \ll 1, \quad \frac{l^2}{cTr} \frac{l}{cT} \ll 1, \quad \frac{l^2}{cTr} \frac{\tau_0}{T} \ll 1 \quad (16)$$

рассеянное поле оказывается стационарным, а его функция корреляции может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
\langle e_i(r, t) e_q^*(r, t_1) \rangle &= \frac{V}{(2\pi)^2 c^4} E_i^0 E_p^0 (\delta_{ij} - m_i m_j) (\delta_{qp} - m_q m_p) \times \\
&\times \frac{e^{i\omega_0 \tau}}{r^2} \int_V \chi(\tau, \rho) \exp\left(-i(k_0 \rho) + i \frac{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle} \omega_0}{c} (m\rho)\right) d\rho. \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \chi(\tau, \rho) = \frac{\partial^4 B_\varepsilon}{\partial \tau^4} + 4i\omega_0 \frac{\partial^3 B_\varepsilon}{\partial \tau^3} - 6\omega_0^2 \frac{\partial^2 B_\varepsilon}{\partial \tau^2} - 4i\omega_0^3 \frac{\partial B_\varepsilon}{\partial \tau} + \omega_0^4 B_\varepsilon.$$

и χ берется в точке $\tau = \tau_0 + \frac{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}}{c} (\rho m)$, d — характерный размер объ-

* Отметим, что для отбрасывания квазистатических членов необходимо выполнение гораздо более слабого условия $r \gg \min\{cT, \lambda_0\}$.

** Эти неравенства означают выполнение условия зоны Фраунгофера для наиболее существенных длин волн в спектре флуктуаций.

ема V, l, T — пространственный и временной масштабы B_e , $\tau_0 = t - t_1$, $m = r/r$.

Легко видеть, что в пределе медленных флуктуаций выражение (10) дает известную [1] корреляционную функцию.

Если теперь (17) проинтегрировать по τ_0 с весом $\exp(-i\Omega\tau_0)$, то получим частотный спектр мощности рассеянного поля. После некоторых преобразований его можно представить в виде

$$\Phi_{iq}^e(\Omega) = \frac{2\pi V}{c^4} E_i^0 E_p^0 (\delta_{ij} - m_i m_j) (\delta_{qp} - m_q m_p) \times \\ \times \Omega^4 \Phi^* \left[(\Omega - \omega_0), \left(k_0 - \frac{\Omega \sqrt{\langle \epsilon \rangle}}{c} m \right) \right], \quad (18)$$

где Φ^* — пространственно-временной спектр мощности флуктуаций диэлектрической проницаемости. Отличие (4) от известных формул для медленных флуктуаций [1] заключается в замене множителя ω_0^4 на Ω^4 и изменении выражения для вектора рассеяния. Это различие мало при достаточно больших T , но оказывается весьма существенным для быстрых флуктуаций, когда $T\omega_0 \leq 1$. При этом спектр рассеянного поля оказывается не только значительно уширенным, но и сдвинутым в сторону высоких частот. Для частной модели корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости (10) выражение для спектра мощности рассеянного поля принимает вид

$$\Phi_{iq}^e(\Omega) = \frac{V}{8\pi c^4} E_i^0 E_p^0 (\delta_{ij} - m_i m_j) (\delta_{qp} - m_q m_p) \frac{\langle \epsilon_i^2 \rangle T l^3 \Omega^4}{r^2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{(\Omega - \omega_0)^2 T^2}{4} - \frac{\left(k_0 - \frac{\Omega \sqrt{\langle \epsilon \rangle}}{c} m \right)^2 l^2}{4} \right]. \quad (19)$$

В заключение сделаем некоторые выводы.

1) Временные флуктуации оказывают существенное влияние на среднее поле, когда их характерная частота порядка частоты распространяющейся волны. При этом возможно параметрическое усиление среднего поля.

2) Энергия полного поля (среднее поле плюс рассеянное поле) возрастает даже при медленных флуктуациях за счет работы внешних сил, изменяющих диэлектрическую проницаемость.

3) Ширина спектра рассеянного поля определяется характерным временем изменения ϵ . При быстрых флуктуациях спектр не только расширяется, но и существенно деформируется.

Авторы выражают благодарность Н. Г. Денисову, Н. С. Степанову, Ю. А. Рыжову и В. В. Тамойкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 656 (1961).
3. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 4, 672 (1960).
4. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 461 (1963).
5. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 356 (1970).
6. Э. А. Кянер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 5, 827 (1959).

7. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).
8. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, 5, 863 (1960).
9. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, ЖЭТФ, 58, 309 (1970).
10. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, ГТТИ, М., 1933.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
27 апреля 1971 г.

THE THEORY OF SCATTERING IN MEDIA WITH SPATIAL-TIME FLUCTUATIONS

V. G. Gavrilenko, Ya. M. Dorfman

The propagation of electromagnetic waves in nondispersing media with spatial-time fluctuations of the dielectric permittivity is considered. The effective dielectric tensor and the spectrum of the scattered field are calculated in the frames of the small perturbation method. It is shown that the presence of time fluctuations has effect on the energetic relations for a propagating wave. In particular, at sufficiently rapid fluctuations the average wave field increases despite the scattering.

УДК 621.372.826

О ПОВЕДЕНИИ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ ВОЛН ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ ЗА КРИТИЧЕСКИМ ЗНАЧЕНИЕМ (СРЕДЫ С ПОТЕРЯМИ)

В. В. Шевченко

Исследуются решения дисперсионных уравнений для волн плоского и круглого (симметричные волны) диэлектрических волноводов. Учитываются тепловые потери во внутренней и внешней средах. Особое внимание уделяется анализу расположения решений в комплексной плоскости поперечных волновых чисел по отношению к разрезу плоскости, который разделяет области физических и нефизических решений. Показано, что для обоих волноводов решения, соответствующие обратным несобственным волнам, находятся на нефизическом листе комплексной плоскости. Отмечаются основные различия для плоского и круглого волноводов в поведении волновых чисел при изменении частоты поля или параметров волновода.

В связи с исследованием вытекающих волн в открытых волноводах в работах [1-10] был затронут вопрос о поведении волновых чисел волн диэлектрических волноводов за критическим значением. Однако, несмотря на достаточно большое число отмеченных работ, ряд вопросов, особенно для случая сред с потерями, все же остается неясным. Необходимо отметить также, что в нашей статье [10] несправедливо была подвергнута критике работа Арнбака [8], в которой получены правильные результаты относительно поведения волновых чисел волн круглого диэлектрического волновода вблизи критического значения. Результаты же работы [10] являются верными для плоского волновода (с некоторыми уточнениями и дополнениями, данными ниже в данной статье) и неверными для круглого волновода. Учитывая сказанное, мы снова возвращаемся к данному вопросу и ниже подробно рассмотрим с учетом потерь в средах (внутренней и внешней) сначала плоский, а затем круглый диэлектрические волноводы.

При изложении материала мы будем пользоваться терминологией и классификацией волн, данными в работе [5], причем комплексные величины будем обозначать в виде $x = x' + ix''$, $h = h' + ih''$, $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ и т. д. При зависимости поля от времени $\exp(i\omega t)$ мнимая часть диэлектрической проницаемости для пассивных сред отрицательна ($\epsilon'' < 0$).

1. ПЛОСКИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Дисперсионное уравнение для плоского волновода из однородного диэлектрика имеет вид [3]

$$ix\alpha = \frac{1}{\tau} ga \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} ga \\ -\operatorname{ctg} ga \end{array} \right\} \quad (1)$$

соответственно для четных и нечетных волн, где a — полутолщина волновода, x и g — поперечные волновые числа для поля вне и внутри волновода,

$$\tau = \begin{cases} \varepsilon_2/\varepsilon_1 & \text{для ТМ-волн} \\ 1 & \text{для ТЕ-волн} \end{cases} \quad (2)$$

ε_1 и ε_2 — относительные (по отношению к вакууму) диэлектрические проницаемости внешней и внутренней сред. В дальнейшем будем считать, что

$$\varepsilon'_2 > \varepsilon'_1, \quad \varepsilon'_{1,2} \gg |\varepsilon''_{1,2}|.$$

Кроме уравнения (1) поперечные волновые числа связаны также соотношением

$$(i \kappa a)^2 + (ga)^2 = (ka)^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$, ω — круговая частота поля, ε_0, μ_0 — параметры вакуума.

Продольное волновое число h связано с поперечными числами соотношением

$$h^2 = k^2\varepsilon_1 - \kappa^2 = k^2\varepsilon_2 - g^2. \quad (4)$$

Графическое решение системы уравнений (1), (3) при $\varepsilon''_{1,2} = 0$ дано на рис. 1, где введены обозначения

$$u = ga, \quad v = i \kappa a, \quad r = ka(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{1/2}. \quad (5)$$

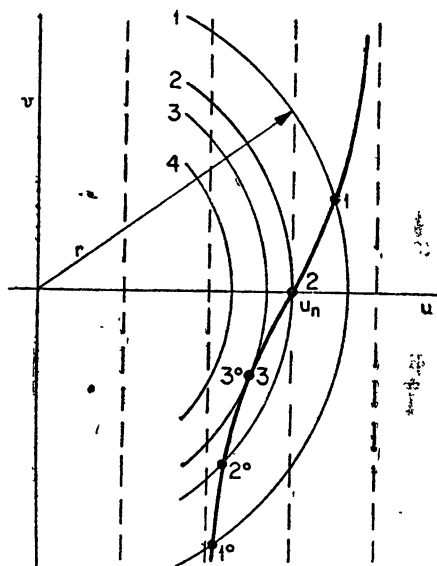


Рис. 1.

Из рис. 1 видно, что система уравнений (1), (3) имеет по два решения 1, 1° и 2, 2° при положениях 1, 2 окружности (3). В положении 3 окружности оба решения 3, 3° сливаются в одно, а затем при дальнейшем уменьшении параметра r система (1), (3) имеет только комплексные решения.

Рассмотрение сред без потерь не дает возможности однозначно определить расположение корней системы (1), (3) относительно разреза $h'' = 0$ в комплексной плоскости $\kappa = \kappa' + i \kappa''$ [5], поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $\varepsilon''_{1,2} \neq 0$, $\varepsilon'_{1,2} < 0$.

Введем обозначение $u_n = n\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, и будем рассматривать решение системы (1), (3) вблизи $u = u_n$ для $n \gg 1$. В этом случае системе уравнений (1), (3) можно приближенно переписать в виде

$$v = \frac{1}{\tau} u_n(u - u_n), \quad v^2 = 2r(r - u), \quad (6)$$

где $|u_n - u| \ll u_n$, $|r - u| \ll |r|$, $|r - u_n| \ll |r| \approx u_n$. Из системы (6) нетрудно получить уравнение

$$v^2 + 2pv - 2r(r - u_n) = 0, \quad (7)$$

где $p = \tau r/u_n$, решение которого имеет вид

$$v = -p \mp \sqrt{p^2 + 2r(r - u_n)}, \quad (8)$$

или в случае $|\varepsilon''_{1,2}| \ll \varepsilon_{1,2}$

$$v = -p' - ip'' \mp \sqrt{2q' + i2q''}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} p' &= \tau', \quad p'' = \tau'' + \tau' r'' / r', \quad 2q' = p'^2 + 2u_n(r' - u_n), \\ q'' &= p'p'' + r'r'', \quad r' = ka(\epsilon_2' - \epsilon_1')^{1/2}, \quad r'' = r'(\epsilon_2'' - \epsilon_1'')/2(\epsilon_2' - \epsilon_1'), \\ \tau' &= \epsilon_2'/\epsilon_1', \quad \tau'' = (1/\epsilon_1'')(\epsilon_2'' - \tau'\epsilon_1'') \text{ для ТМ-волн,} \\ \tau' &= 1, \quad \tau'' = 0 \text{ для ТЕ-волн.} \end{aligned} \quad (10)$$

В плоскости $x = -iv/a$ двойное решение (9) дает две ветви дисперсионной кривой (дисперсионной кривой для электрического волновода мы называем линию движения корня дисперсионного уравнения при изменении параметров ka от ∞ до 0 или ϵ_2' от ∞ до ϵ_1'). Одна из ветвей (нижняя) пересекает действительную ось x' при $r' = u_n$. Из (9), (10) получим для точки пересечения

$$x_- = x'_- = -\frac{iv}{a} = \frac{r'r''}{p'a} = \frac{u_n}{\tau'} \frac{r''}{a}. \quad (11)$$

Встреча и расхождение ветвей будут иметь место при $2q' = p'^2 - 2u_n(u_n - r) = 0$. Ближайшие точки ветвей в месте встречи получают-ся в виде

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= (1/a)[(ip' - p'') \pm (i-1)\sqrt{q''}] \quad (q'' > 0), \\ x_{\pm} &= (1/a)[(ip' - p'') \pm (i+1)\sqrt{|q''|}] \quad (q'' < 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Если к решениям (9)–(12) добавить еще асимптотическое значение

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{a} (ir' - r'') \quad (13)$$

при $r' \rightarrow \infty$ (так как на основании (1), (3) в этом случае $|g|/|x| \rightarrow 0$), то нетрудно восстановить обе ветви дисперсионной кривой при различных значениях $\epsilon_{1,2}'$.

а) $|\epsilon_2''| < |\epsilon_1''|$.

В этом случае $\epsilon_2'' - \epsilon_1'' > 0$, $r'' > 0$ и $\epsilon_2'' - \tau'\epsilon_1'' > 0$, $q'' > 0$. На основании (11)–(13) имеем картину расположения ветвей дисперсионной кривой, показанную на рис. 2а.

б) $|\epsilon_2''| > |\tau'\epsilon_1''|$.

В этом случае $\epsilon_2'' - \epsilon_1'' < 0$, $r'' < 0$ и $\epsilon_2'' - \tau'\epsilon_1'' < 0$, $q'' < 0$. Картина расположения ветвей дисперсионной кривой такая, как на рис. 2б.

в) $|\epsilon_2''| > |\epsilon_1''|$, $|\epsilon_2''| < |\tau'\epsilon_1''|$ для ТМ-волн.

В этом случае $r'' < 0$, но здесь возможен вариант, когда $q'' = p'p'' + r'r'' > 0$. Картина расположения ветвей имеет смешанный характер: картина встречи и расхождения ветвей такая, как на рис. 2а, а асимптотическое поведение при больших $|x''|$ и пересечение действительной оси нижней ветвью такие, как на рис. 2б.

г) $|\epsilon_2''| = |\epsilon_1''|$.

В этом случае $\epsilon_2'' - \epsilon_1'' = 0$, $r'' = 0$, а $\epsilon_2'' - \tau'\epsilon_1'' > 0$, $q'' > 0$ для ТМ-волн и $q'' = 0$ для ТЕ-волн. Ветви расположены на мнимой оси, при этом для ТМ-волн картина встречи и расхождения ветвей такая, как на рис. 2а, а для ТЕ-волн картина встречи и расхождения ветвей оказывается неопределенной, как в случае $\epsilon_{1,2}' = 0$.

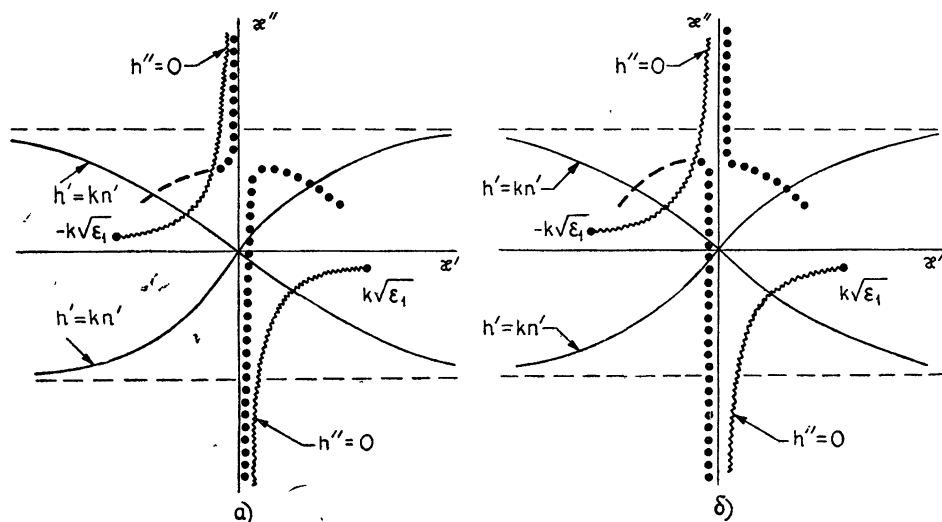


Рис. 2.

Заметим, что для случая, когда внешняя среда имеет потери ($\epsilon_1'' \neq 0$), границы ($h' = kn'$) разделения областей волновых чисел медленных ($h' > kn'$) и быстрых ($h' < kn'$) волн задаются выражением

$$k^2 n'^2 (x'^2 + x''^2) = x' x'' (x' x'' - k^2 \epsilon_1''), \quad (14)$$

где $n'^2 = (\epsilon_1' + \sqrt{\epsilon_1'^2 + \epsilon_1''^2}) \approx \epsilon_1'$.

При $|x'| \rightarrow \infty$ эти границы имеют асимптоты

$$x'' \rightarrow \pm kn'. \quad (15)$$

Из данного рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1) Подтвердился сделанный ранее [5-7, 10] вывод о том, что для плоского волновода существует промежуточная область изменения параметров волновода или частоты поля, когда волна данного типа не является ни поверхностной, ни вытекающей, а существует в виде так называемой медленной несобственной волны, физическая интерпретация которой в настоящее время не ясна. При этом, однако, в случае $\epsilon_1'' \neq 0$ нижняя ветвь на части своего пути проходит через область быстрых собственных ($x'' < 0$) и несобственных ($x'' > 0$) волн. В этом случае при уменьшении параметра r' волна из поверхностной превращается сначала в вытекающую (быструю несобственную), затем в медленную несобственную и далее снова в вытекающую волну.

2) Картина расположения ветвей дисперсионной кривой, данная в [5-7, 10], соответствует рассмотренным выше случаям а), в), г), для которых $q'' > 0$, с одной существенной поправкой: верхняя ветвь при больших r' располагается справа от разреза, а не слева, как в [6, 7, 10]. Эта ветвь дает прямую несобственную волну. Она пересекает в нижней своей части разрез и уходит на нижний (не дающий физического решения для пассивных сред) лист плоскости x с $h'' > 0$. Таким образом, для плоского диэлектрического волновода (как увидим ниже, также для круглого волновода) не существует обратных несобственных (в частности, вытекающих) волн.

3) В случае б) (рис. 2б) на нижний лист с $h'' > 0$ уходит нижняя ветвь, а вытекающая волна (прямая) образуется из верхней ветви дисперсионной кривой. Этот случай наиболее часто встречается в теории

передающих линий, так как соответствует условию $\operatorname{tg} \delta_2 > \operatorname{tg} \delta_1$, т. е. когда тангенс угла потерь внутренней среды превышает тангенс угла потерь внешней среды.

В дополнение к сказанному отметим, что полученные результаты позволяют сделать также некоторые выводы и для случая активных сред. Например, если внутренняя среда активная ($\epsilon_2'' > 0$), то $\epsilon_2'' - \epsilon_1'' > 0$, $r'' > 0$, $q' > 0$, т. е. годятся результаты, полученные в а). При этом возможен вариант, когда нижняя ветвь в нижней своей части оказывается смещенной вправо за разрез на нижний лист плоскости x с $h'' > 0$. В этом случае поверхностная волна, оставаясь прямой волной, является возрастающей в направлении распространения.

2. КРУГЛЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

Мы ограничимся рассмотрением симметричных волн. Дисперсионное уравнение для симметричных волн круглого волновода из однородного диэлектрика имеет вид [3]

$$x a \frac{H_0^{(2)}(x a)}{H_1^{(2)}(x a)} = \frac{1}{\tau} g a \frac{J_0(g a)}{J_1(g a)}, \quad (16)$$

где a — радиус волновода. Остальные обозначения те же, что в (1), (2). Для круглого волновода имеют место те же соотношения (3), (4).

Перепишем уравнения (16) и (3) в обозначениях $v = i x a$, $u = g a$, $r = ka(\epsilon_2 - \epsilon_1)^{1/2}$:

$$v \frac{K_0(v)}{K_1(v)} = -\frac{1}{\tau} u \frac{J_0(u)}{J_1(u)}, \quad (17)$$

$$v^2 + u^2 = r^2. \quad (18)$$

Графическое решение системы (17), (18) для $\epsilon_{1,2}'' = 0$ дано на рис. 3. При этом оказывается, что в уравнении (17) обе величины v и u могут быть одновременно действительными только для $v' > 0$. Кроме того, при $v \rightarrow 0$ производная $\frac{dv}{du} \rightarrow \infty$. По этим причинам система уравнений (17),

(18) только при $v' > 0$ имеет действительные решения для v , u .

Рассмотрим решение системы (17), (18) при $\epsilon_{1,2}'' \neq 0$, $\epsilon_{1,2}'' < 0$, $|\epsilon_{1,2}''| \ll \epsilon_{1,2}'$ сначала для малых значений $|v|$, а затем для больших.

Введем обозначения $u = u_n$, где u_n есть решение уравнения $J_0(u) = 0$. Систему уравнений (17), (18) при $n \gg 1$ и $|v|^2 \ll 1$ можно представить в виде

$$v^2 \ln \frac{2}{\gamma v} = \frac{1}{\tau} u_n (u - u_n), \quad (19)$$

$$v^2 = 2r(r - u),$$

где $|r - u| \ll |r|$, $|u - u_n| \ll u_n$, $|r| \approx u_n$, $\gamma = 1,781$.

Из системы (19) непрудно получить уравнение

$$v^2 \left(p \ln \frac{1}{\gamma v} + \frac{1}{2} \right) = r(r - u_n), \quad (20)$$

где $p = \tau r / u_n$. Представим v в виде

$$v = \rho \exp(i\varphi)$$

и выделим в (20) отдельно действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi) = r'(r' - u_n), \\ \rho^2(A \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi) &= r'r'', \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$A = p' \ln \frac{2}{\gamma\rho} + \frac{1}{2} + p''\varphi; \quad B = p'' \ln \frac{2}{\gamma\rho} - p'\varphi.$$

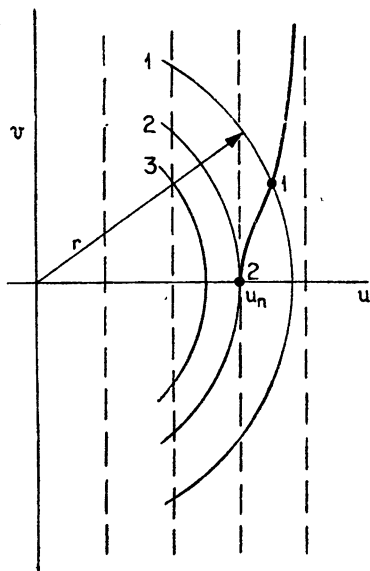


Рис. 3.

Рассмотрим пересечение дисперсионной кривой в плоскости $x = -iv/a$ с действительной и мнимой осями, предварительно выделив главное значение функций Ханкеля в уравнении (18) путем проведения в плоскости x разреза по отрицательной действительной оси. Учитывая положение разреза, получим, что для точек на осях $\varphi = -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$. Для этих значений φ из второго уравнения в (21) имеем

$$\rho^2 = \frac{r'r''}{\cos 2\varphi(p' \ln(2/\gamma\rho) - p'\varphi)}. \quad (22)$$

Не нарушая общности, можно считать, что для достаточно малых p'' выполняется условие

$$p'' \ln \frac{2}{\gamma\rho} \ll 1.$$

При $\varphi = 0$ пересечение оси не может иметь места, так как в этом случае, как нетрудно проверить, не выполняется условие $\rho^2 \ll 1$, во всяком случае для не слишком больших τ' (см. (10)). Рассмотрим теперь отдельно:

а) $|\epsilon_2''| < |\epsilon_1''|$.

В этом случае $\epsilon_2'' - \epsilon_1'' > 0$, $r'' > 0$, и правая часть в (22) может быть положительной только при $\varphi = \pi/2$. Следовательно, пересечение будет иметь место с положительной действительной полуосью в точке

$$x_- = -\frac{iv}{a} = \frac{\rho}{a} = \frac{r'}{a} \left(\frac{2r''}{\pi r' p'} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

б) $|\epsilon_2''| > |\epsilon_1''|$.

В этом случае $\epsilon_2'' - \epsilon_1'' < 0$, $r'' < 0$, и правая часть может быть положительной только при $\varphi = -\pi/2$ и $\varphi = \pi$. Следовательно, пересечения будут иметь место с отрицательной действительной полуосью в точке

$$x_- = -\frac{\rho}{a} = -\frac{r'}{a} \left(\frac{2|r''|}{\pi r' p'} \right)^{1/2} \quad (24)$$

и положительной мнимой полуосью в точке

$$x_+ = \frac{ip}{a} = i \frac{r'}{a} \left(\frac{|r''|}{\pi r' p'} \right)^{1/2}, \quad (25)$$

где $r' \approx u_n$. Значения для x_- , x_+ можно вычислить более точно, подставляя из решений (23)–(25) в правую часть уравнения (22).

Более подробное поведение дисперсионных кривых вблизи нуля в плоскости κ можно получить путем численного решения системы уравнений (21) методом итераций, беря в качестве исходных решения (23) — (25).

Теперь проанализируем асимптотическое поведение ветвей дисперсионной кривой при $|v'| \gg 1$.

Для $v' > 0$ воспользуемся асимптотическим (при $v' \rightarrow \infty$) представлением уравнения (17)

$$v \left(1 - \frac{1}{2v} + \frac{3}{8v^2} + \dots \right) = -\frac{u}{\tau} \frac{J_0(u)}{J_1(u)}. \quad (26)$$

Из (26) видно, что при $v' \rightarrow \infty$ модуль $|u| \rightarrow u_\mu$, где u_μ есть четные ($\mu = 2m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $u \neq 0$) решения уравнения $J_1(u) = 0$. При $v' \gg u_\mu$ из (18) имеем

$$\kappa_- = -\frac{1}{a} (ir' - r''). \quad (27)$$

Для $v' < 0$ введем обозначение $w = -v = i\kappa a$ и представим уравнение (16) в виде

$$w \frac{K_0(w) - i\pi J_0(w)}{K_1(w) + i\pi J_1(w)} = -\frac{u}{\tau} \frac{J_0(u)}{J_1(u)}. \quad (28)$$

Асимптотическое представление (28) при $w' \gg 1$ имеет вид

$$w \left(1 + \frac{1}{2w} + \frac{3}{8w^2} + \dots + 2ie^{-2w} \right) = \frac{u}{\tau} \frac{J_0(u)}{J_1(u)}. \quad (29)$$

Учитывая, что при $w' \rightarrow \infty$ модуль $|u| \approx u_\mu$, где u_μ есть нечетные ($\mu = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$) решения уравнения $J_1(u) = 0$, получим из (29) приближенное уравнение

$$(u - u_\mu)\tau w(1 + 2ie^{-2w}) = u. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь систему из (30) и уравнения

$$w^2 + u^2 = r^2, \quad (31)$$

считая, что $|w''| \ll w'$, $|u''| \ll u'$, $|\tau''| \ll \tau'$, $|r''| \ll r'$. Выделим из (30), (31) действительные и мнимые части, сохраняя в каждом уравнении только старшие порядки малости:

$$\begin{aligned} w' \tau' (u' - u_\mu) &= u_\mu, \\ (u' - u_\mu)(\tau'' + 2\tau' e^{-2w}) + \tau' u'' &= 0, \\ w' &= r', \\ u'' u_\mu + w' w'' &= r' r''. \end{aligned} \quad (32)$$

Из этих четырех уравнений нетрудно получить

$$\begin{aligned} w' &= r', \\ w'' &= r'' + (u_\mu/r'\tau')^2 [\tau'' + 2\tau' \exp(-2r')]. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда для верхней ветви дисперсионной кривой имеем

$$\kappa_+ = \frac{1}{a} \left\{ ir' - r'' - \left(\frac{u_\mu}{r'\tau'} \right)^2 [\tau'' + 2\tau' \exp(-2r')] \right\}. \quad (34)$$

Из (34) видно, что при $r'' < 0$ эта ветвь пересекает мнимую ось в точке

$$x_+ = i \frac{r'}{a}, \quad (35)$$

где r' удовлетворяет уравнению

$$(\tau' r')^3 |r''| = u_{\mu}^2 [\tau'' + 2\tau' \exp(-2r')]. \quad (36)$$

На основании полученных выше результатов (23), (25), (27), (34) — (36), а также на основании численных результатов работы [8] для волновода без потерь можно восстановить ход ветвей дисперсионной кривой в плоскости x для случаев

а) $|\varepsilon_2''| < |\varepsilon_1''|$ ($r'' > 0$) (см. рис. 4а),

б) $|\varepsilon_2''| > |\varepsilon_1''|$ ($r'' < 0$). (см. рис. 4б).

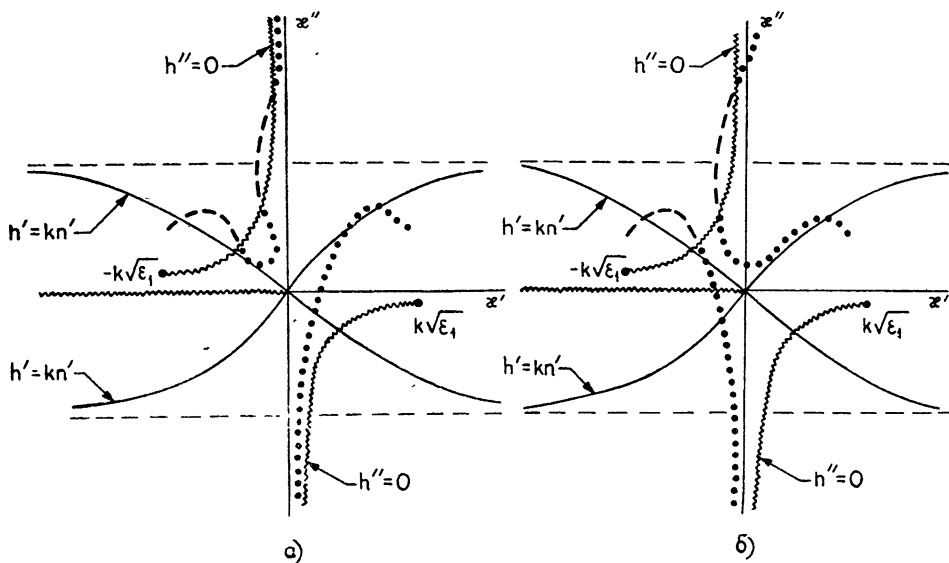


Рис. 4.

Из данного рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1) Поведение дисперсионных кривых круглого волновода несколько отличается от поведения дисперсионных кривых плоского волновода. Главное отличие заключается в том, что область встречи и расхождения ветвей для круглого волновода оказывается вблизи нуля в плоскости x (в случае среды без потерь [8] в нуле). При этом, однако, наличие потерь в средах в некоторой степени снимает качественное различие в поведении кривых вблизи нуля для плоского и круглого волноводов. Как уже отмечалось, при наличии потерь во внешней среде в случае плоского волновода появляется возможность прямого перехода поверхностной волны в вытекающую. Напротив, в случае круглого волновода при наличии потерь во внутренней среде возникает промежуточная область изменения параметров, для которой волна данного типа не является ни поверхностной, ни вытекающей волной, и формальное решение дает медленную несобственную волну.

2) Имеется также качественное различие в поведении верхней ветви дисперсионной кривой в случае б), которое непосредственно связано с различием в поведении вблизи нуля. Верхняя ветвь на нижнем своем участке переходит во 2-й квадрант, пересекает разрез и частично оказывается на нижнем ($h'' > 0$), не физическом для пассивных систем листе плоскости x и лишь потом только возвращается в 1-й квадрант.

3) Для круглого волновода, как и для плоского волновода, отсутствуют обратные несобственные волны, так как ветви оказываются во 2-м квадранте на нижнем листе с $h'' > 0$. При этом в случае б) нижняя ветвь пересекает сразу два разреза, один из которых имеет место из-за двужначности функции $h = h(x)$, другой—из-за многозначности функций Ханкеля.

Отметим, что из нашего рассмотрения следует также, что в плоском и круглом волноводах из однородного диэлектрика отсутствуют обратные собственные (поверхностные) волны. Поскольку для круглого волновода мы рассмотрели только симметричные волны, то вывод сделан пока только для них.

Данная работа выполнена в Бруклинском политехническом институте (США). Автор выражает благодарность проф. Л. Б. Фелсену за его интерес к этой работе и всем участникам Семинара по теории электромагнитных волн электрофизического факультета Бруклинского политехнического института за обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Barone, Leaky wave contribution to the field of a line source above a dielectric slab, MRI, Res. Rept. R-532-56, Polytechnic Inst. of Brooklyn, N. Y., 1956.
2. S. Barone, A. Hessel, Leaky wave contribution to the field of a line source above a dielectric slab, MRI, Res. Rept. R-698-58, Polytechnic Inst. of Brooklyn, N. Y., 1958.
3. R. E. Collin, Field theory of guided waves, Mc Graw Hill, N. Y., 1960.
4. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
5. В. В. Шевченко, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1768 (1969).
6. В. П. Мальцев, Е. И. Нефедов, В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 12, 1855 (1969).
7. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
8. J. Arnbak, Electronics Lett., 5, № 3, 41 (1969).
9. J. R. James, Electronics Lett., 5, № 11, 952 (1969).
10. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1528 (1970).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
2 сентября 1971 г..

THE BEHAVIOUR OF WAVE NUMBERS OF DIELECTRIC WAVEGUIDES BEHIND THE CUTOFF VALUE (MEDIA WITH LOSSES)

V. V. Shevchenko

The solutions of the dispersion equations for the waves of plane and circular (symmetric waves) dielectric waveguides are investigated. The thermal losses in inner and outer media are taken into account. Main attention is paid to the analysis of the disposition of the solutions in a complex plane of the transverse wave numbers with respect to the branchcut which separates the regions of physical and nonphysical solutions. It is shown that for both waveguides the solutions corresponding to backward improper waves are on a nonphysical sheet of the complex plane. The main differences in the behaviour of wave numbers for plane and circular waveguides with respect to the field frequency or waveguide parameters are pointed out.

УДК 538.56 : 519.25 → 621.3.032.21

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ КАТОДА

А. Ф. Голубенцев, А. С. Шаповалов

В работе исследуется влияние неоднородности эмиттирующей поверхности термокатодов на величину среднего значения и дисперсию тока эмиссии. Для проведения соответствующих расчетов предложена статистическая модель неоднородного катода, согласно которой испускание электронов производится круглыми перекрывающимися «зернами», центры которых распределены вдоль поверхности катода по закону Пуассона. Параметр d этого распределения имеет смысл плотности заполнения площади катода центрами «зерен». Эмиссия с участков катода, не покрытых «зернами», полностью отсутствует. Вычисления проведены для случая произвольного закона распределения эмиттирующих «зерен» по величине их радиусов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для производства электронных приборов СВЧ колебаний, приемно-усилительных ламп и т. д. существенный практический интерес представляет проблема однородности электрических параметров и выяснения причин их разброса. Значительное влияние на большинство эксплуатационных параметров электронных приборов, использующих термокатоды, оказывает ток эмиссии.

В данной работе определяется разброс значений тока эмиссии термокатодов, вызванный неоднородностью эмиттирующей поверхности, что позволяет в принципе учесть влияние указанного фактора на разброс выходных параметров электровакуумных приборов.

У поликристаллических катодов неоднородность эмиттирующей поверхности возникает от того, что различным граням кристаллов, выходящим на поверхность катода, соответствуют различные значения работы выхода [1, 2]. На катоде из торированного вольфрама аналогичная ситуация возникает вследствие того, что атомы тория не распределяются вдоль его поверхности равномерно, а сосредоточиваются в «пятна». Также неоднородными являются поверхности ряда других эффективных термокатодов: оксидного, L -катода, импрегнированного [3]. Одной из причин, вызывающих неоднородность оксидного катода, является, по-видимому, неравномерная концентрация доноров [4].

Для расчета влияния статистических неоднородностей поверхности эмиттеров на их эмиссию предложим следующую модель неоднородного катода. Будем считать, что электроны эмиттируются не всей поверхностью катода, а только круглыми перекрывающимися «зернами» (см. рис. 1). Центры «зерен» располагаются вдоль поверхности катода совершенно случайно и независимо друг от друга. Это означает, что число центров «зерен», попадающих на некоторую площадку Δs , распределено по закону Пуассона [5], т. е.

$$P_n(\Delta s) = \frac{(d\Delta s)^n}{n!} \exp(-d\Delta s), \quad (1)$$

здесь $P_n(\Delta s)$ — вероятность того, что на площадке Δs находится n центров «зерен». Параметр d , входящий в соотношение (1), имеет смысл плотности заполнения площади центрами «зерен», так как $M\{n\} = d\Delta s$ (здесь M — символ математического ожидания). Размеры эмиттирующих «зерен» случайны. Интегральный закон распределения радиуса R «зерна» обозначим $F(r) = P\{R < r\}$ ($P\{R < r\}$ — вероятность события, символ которого заключен в фигурные скобки). Для простоты будем предполагать, что плотность тока эмиссии в пределах эмиттирующего «зерна» остается постоянной и равной j .

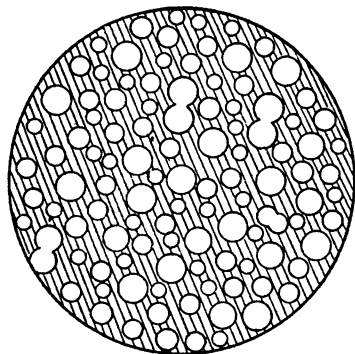


Рис. 1. Модель неоднородного катода.

РАСЧЕТ СРЕДНЕГО ТОКА ЭМИССИИ

Для нахождения активной площади катода (или его коэффициента использования) введем в рассмотрение случайное поле $E(x, y)$. Функция $E(x, y)$ принимает значение, равное единице, если точка с координатами (x, y) попадает на какое-либо эмиттирующее «зерно». В противном случае функция $E(x, y)$ равна нулю. Коэффициент использования k , очевидно, равен

$$k = \frac{1}{S} \iint_{(S)} E(x, y) dx dy,$$

где S — геометрическая площадь катода. Интеграл здесь берется по поверхности катода (S). Математическое ожидание коэффициента использования $\bar{k}$ совпадает с математическим ожиданием функции $E(x, y)$.

Найдем одномерный закон распределения функции $E(x, y)$. Рассмотрим площадку Δs , настолько малую, что вероятность попадания на нее более чем одного центра «зерна» пренебрежимо мала. Вероятность попадания на Δs одного центра эмиттирующего «зерна», согласно (1), равна $d\Delta s$. Вероятность того, что на Δs не попадает ни одного центра «зерна», очевидно, равна $1 - d\Delta s$. Припишем элементу площади Δs свойство A , если он не содержит центр «зерна», охватывающего точку (x, y) . Если r — расстояние между точкой (x, y) и указанным элементом площади, то вероятность $P\{A\}$ наличия у Δs свойства A равна

$$P\{A\} = 1 - d\Delta s + d\Delta s F(r) \approx \exp\{-d[1 - F(r)]\Delta s\}.$$

Представим, что вокруг точки (x, y) простирается бесконечная «зернистая» плоскость, из которой впоследствии «вырезаются» отдельные катоды. Вся плоскость будет обладать свойством A относительно точки (x, y) , если этим свойством обладает каждый из непересекающихся элементов Δs , на которые она может быть разбита. Записывая Δs в полярной системе координат как $rdrd\varphi$, получим

$$P\{E(x, y) = 0\} = \exp\left\{-d \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [1 - F(r)] r dr d\varphi\right\} = \exp(-d\pi\bar{r}^2),$$

$$P\{E(x, y) = 1\} = 1 - \exp(-d\pi\bar{r}^2).$$

Здесь $\sqrt{r^2}$ — среднеквадратичное значение радиуса «зерна». Средний ток эмиссии $\bar{I}$ неоднородного катода выразится соотношением

$$\bar{I} = jS\bar{k} = jSP\{E(x, y) = 1\} = jS[1 - \exp(-d\pi\bar{r}^2)]. \quad (2)$$

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИИ ТОКА ЭМИССИИ

Дисперсия тока эмиссии неоднородного катода $D\{I\}$ определяется через интеграл от автокорреляционной функции $R_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ скалярного поля $E(\mathbf{r})$ (здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки поля с координатами (x, y)):

$$D\{I\} = j^2 \iint_{(s)} \iint_{(s)} R_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) ds_1 ds_2,$$

где

$$R_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = M\{\dot{E}(\mathbf{r}_1) \dot{E}(\mathbf{r}_2)\}, \quad \dot{E}(\mathbf{r}_i) = E(\mathbf{r}_i) - \overline{E(\mathbf{r})},$$

$$ds_i = dx_i dy_i, \quad i = 1, 2.$$

Для выбранной статистической схемы катода случайная функция $E(\mathbf{r})$ является однородной и изотропной, поэтому $\overline{E(\mathbf{r})}$ не зависит от $\mathbf{r}$, а автокорреляционная функция поля $E(\mathbf{r})$ обладает круговой симметрией и зависит только от расстояния $l = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ между точками с радиус-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. С помощью простых рассуждений можно показать, что автокорреляционная функция равна

$$R_E(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = P(0, 0) - \{P(0)\}^2,$$

где

$$P(0, 0) = P\{E(\mathbf{r}_1) = 0, E(\mathbf{r}_2) = 0\}, \quad P(0) = P\{E(\mathbf{r}) = 0\}.$$

Найдем вероятность события A , состоящего теперь в том, что две выделенные точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$ не будут покрыты эмиттирующими «зернами». В качестве точек M_1 и M_2 удобно взять точки оси x с координатами $(l/2, 0)$ и $(-l/2, 0)$ (см. рис. 2). Очевидно, вероятность $P(A)$

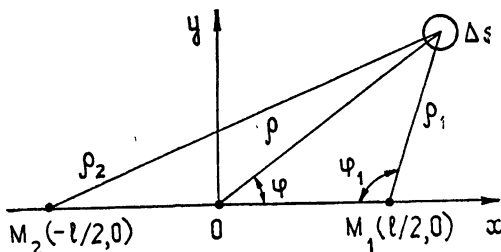


Рис. 2. Взаимное положение точек M_1 и M_2 и геометрический смысл основных обозначений.

равна $P(0, 0)$. Для расчета $P(0, 0)$ разделим плоскость на непересекающиеся подобласти S_i , в совокупности покрывающие всю плоскость. Рассмотрим событие A_i , состоящее в том, что эмиттирующие круги, имеющие центры в i -й подобласти, не покроют две выделенные точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$. Тогда интересующее нас событие A представляет произведение событий A_i , т. е.

$$A = \prod_i A_i.$$

Так как события A_i независимы, то

$$P(A) = P(0, 0) = \prod_i P(A_i).$$

Для наших целей удобно рассмотреть бесконечно малые элементы S_i , площадь Δs которых в полярной системе координат (см. рис. 2) можно

записать как $\rho d\rho d\varphi$. Событие A_i является случайным следствием двух несовместимых событий H_1 и H_0 . Событие H_1 состоит в попадании на Δs одного центра эмиттирующего «зерна». Событие H_0 состоит в том, что на площадку Δs не попадает ни одного центра «зерна». По формуле полной вероятности [5]

$$P(A_i) = P(A_i/H_0) P(H_0) + P(A_i/H_1) P(H_1).$$

Так как

$$P(H_1) = d\Delta s, \quad P(H_0) = 1 - d\Delta s,$$

$$P(A_i/H_0) = 1, \quad P(A_i/H_1) = F(\min \rho_1, \rho_2),$$

где ρ_1, ρ_2 — расстояния от точки с полярными координатами (ρ, φ) до точек $M_1(r_1)$ и $M_2(r_2)$ (см. рис. 2), $F(\min \rho_1, \rho_2)$ — значение интегральной функции распределения радиусов «зерен» от аргумента, представляющего собой наименьшую величину из ρ_1 и ρ_2 , то

$$P(A_i) = 1 - d\Delta s [1 - F(\min(\rho_1, \rho_2))] \approx \exp \{-d\Delta s (1 - F(\min(\rho_1, \rho_2)))\},$$

$$P(0, 0) = \exp \left\{ -d \iint_{(s)} [1 - F(\min \rho_1, \rho_2)] ds \right\}.$$

Непосредственно из рис. 2 следует, что

$$\exp \left\{ -d \iint_{(s)} [1 - F(\min \rho_1, \rho_2)] ds \right\} = \exp \left\{ -2d \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - F(\rho_1)] \rho d\rho d\varphi \right\}, \quad (3)$$

так как интегралы по левой ($x < 0$) и правой ($x > 0$) полуплоскостям равны. Для простоты используем теперь новую полярную систему координат (ρ_1, φ_1) с началом в точке $M_1(l/2, 0)$ и разобьем правую полуплоскость на две области интегрирования I и II так, как показано на рис. 3. Тогда интеграл в показателе степени соотношения (3) можно представить суммой

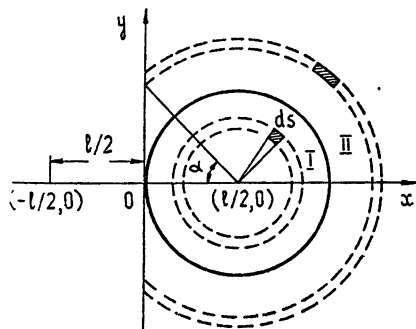


Рис. 3. Схема областей интегрирования при вычислении автокорреляционной функции.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - F(\rho_1)] \rho d\rho d\varphi &= \int_0^{l/2} \int_0^{2\pi} [1 - F(\rho_1)] \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1 + \\ &+ 2 \int_{l/2}^{\infty} \int_{\alpha}^{\pi} [1 - F(\rho_1)] \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \arccos(l/2\rho_1).$$

Производя соответствующие вычисления и обозначая ρ_1 через r , найдем вероятность $P(0, 0)$, автокорреляционную функцию

$$R_E(|r_1 - r_2|) = \exp(-2d\pi\bar{r}^2) \left\{ \exp \left\{ 4d \int_{l/2}^{\infty} \arccos \frac{l}{2r} [1 - F(r)] r dr \right\} - 1 \right\}$$

и дисперсию тока эмиссии неоднородного катода

$$D\{I\} = j^2 \exp(-2d\pi\bar{r}^2) \int_{(s)} \int_{(s)} \int_{(s)} \left\{ \exp \left\{ 4d \int_{l/2}^{\infty} \arccos \frac{l}{2r} [1-F(r)] r dr \right\} - 1 \right\} ds_1 ds_2. \quad (4)$$

Здесь

$$l = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}.$$

Для частного случая, когда радиусы всех «зерен» одинаковы и равны R , выражение для автокорреляционной функции существенно упрощается:

$$R_E(|r_1 - r_2|) = \exp(-2d\pi R^2) \{ \exp[\pi R^2 d\Psi(l/2R)] - 1 \}, \quad (5)$$

где

$$\Psi(l/2R) = \frac{2}{\pi} \left[\arccos \frac{l}{2R} - \frac{l}{2R} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2R}\right)^2} \right]. \quad (6)$$

Из выражений (5) и (6) следует, что при $R < l/2$ функция $R_E(|r_1 - r_2|)$ обращается в нуль, т. е. площадь области корреляции поля $E(r)$ ограничивается учетверенной площадью «зерна» $\pi(2R)^2$. Зависимость Ψ от $l/2R$ представлена на рис. 4 а. На рис. 4 б показаны кривые зависимости автокорреляционной функции $R_E(|r_1 - r_2|)$ от $l/2R$ при $\bar{k} = 1 - \exp(-d\pi R^2) = 0,25; 0,5; 0,75$.

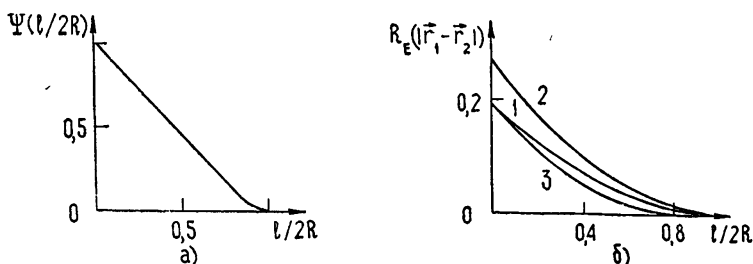


Рис. 4. а) Кривая зависимости функции $\Psi(l/2R)$ от $l/2R$.
б) Кривые зависимости автокорреляционной функции $R_E(|r_1 - r_2|)$ от $l/2R$: 1 — $\bar{k} = 0,25$; 2 — $\bar{k} = 0,5$; 3 — $\bar{k} = 0,75$.

Для иллюстрации полученных результатов приведем приближенное выражение для дисперсии тока эмиссии круглого неоднородного катода радиуса a , справедливое с точностью до членов, содержащих $(R/a)^3$:

$$\frac{D\{I\}}{(\bar{I})^2} = \left(2 \frac{1 - \bar{k}}{\bar{k}} \frac{R}{a} \right)^2 \left[\frac{2}{(d\pi R^2)^2} \frac{\bar{k}}{1 - \bar{k}} - \frac{2}{d\pi R^2} - 1 \right].$$

Таким образом, если экспериментально или теоретически определены такие характеристики поверхности катода, как плотность заполнения площади центрами эмиттирующих «зерен» d и закон распределения «зерен» по величине их радиусов, то среднее значение и дисперсия тока эмиссии могут быть вычислены с помощью соотношений (2) и (4).

Указанные соотношения, по-видимому, можно применить и для решения обратной задачи—экспериментального определения характеристик d и R эмиттирующих поверхностей из известных $\bar{I}$ и $D\{I\}$.

В заключение отметим, что на основе рассмотренной статистической схемы нетрудно ввести более сложные модели эмиттера. Например, можно предположить, что элементы поверхности, не покрытые «зернами», также обладают эмиссионной способностью, но отличной от эмиссионной способности «зерен». Сами «зерна» можно разделить на любое конечное число типов по величине тока эмиссии.

Исследованную модель и те, которые можно ввести на ее основе, можно использовать не только для описания и анализа неоднородности катода по плотности тока эмиссии. Если ввести, например, различие в распределении скоростей электронов, эмиттированных отдельными видами «зерен» или элементами поверхности, покрытыми и не покрытыми «зернами», то модель найдет применение при расчете спектральной плотности кинетического потенциала на неоднородном катоде и оценке шумовых свойств эмиттера. Для одной (нестатистической) модели неоднородного катода (катод представлялся состоящим из двух частей с разными функциями распределения скоростей электронов) подобные расчеты были проведены Бимом [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Херринг, М. Никольс, Термоэлектронная эмиссия, ИЛ, М., 1950.
2. Л. Н. Добрецов, М. В. Гомоюнова, Эмиссионная электроника, изд. Наука, М., 1966.
3. Г. В. Спивак, Б. Б. Шишкин, Радиотехника и электроника, 11, № 10, 1826 (1966).
4. Д. Г. Булыгинский, Л. Н. Добрецов, ЖТФ, 26, № 6, 1141 (1956).
5. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, изд. Наука, М., 1966.
6. W. R. Veam, Trans. IRE, ED-4, № 3, 226 (1957).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
21 июля 1970 г.,
после доработки
20 сентября 1971 г.

ON ONE METHOD OF TAKING INTO ACCOUNT STATISTICAL CATHODE INHOMOGENEITIES

A. F. Golubentsev, A. S. Shapovalov

The paper investigates the influence of the emitting surface inhomogeneity of thermocathodes on the mean value and the dispersion of the emission current. To make the appropriate calculations a statistical model of the inhomogeneous cathode is proposed. The electron emission of this cathode is made by circular intersecting „grains“ the centers of which are distributed along the cathode surface according to Poisson's law. The parameter of this distribution d represents the density of the cathode area filling by the grain centers. Parts of the surface not covered by „grains“ give no emission. Calculations are made for the case of the arbitrary „grain“ distribution over their radii.

УДК 621.372.8

РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ
КОЛЕЦ В ВОЛНОВОДЕ

И. Л. Корнев, Л. А. Юдин

Рассмотрена устойчивость колебаний электронного кольца внутри металлической трубы с идеально проводящими стенками. Получены выражения для инкрементов неустойчивых гармоник. Исследована неустойчивость в окрестности волноводных резонансов. Приведены результаты численных расчетов инкрементов.

1. В работе [1] было получено дисперсионное уравнение для частот колебаний релятивистского электронного кольца, находящегося в азимутально симметричном поле, и найдены его решения в случае свободного пространства. Анализ показал, что инкременты поперечных (аксиальных и радиальных) колебаний определяются активной составляющей электромагнитной силы возмущения и в первом приближении не зависят от размеров поперечного сечения кольца, если длина волны возмущения много больше этих размеров. Инкременты азимутальных колебаний определяются как активной, так и реактивной составляющими поля возмущения и не зависят от размеров поперечного сечения только в ультрарелятивистском случае при $\gamma_0^2 \gg \ln \frac{8r_0}{a}$, где $\gamma_0^2 = \frac{1}{1-\beta_0^2}$, $\beta_0 = \frac{\omega_0 r_0}{c}$

— скорость частиц в кольце, отнесенная к скорости света, r_0 и a — большой и малый радиусы кольца. Практический интерес представляет именно ультрарелятивистский случай, и мы в дальнейшем уделим ему основное внимание. Независимость инкрементов от размеров поперечного сечения позволяет считать кольцо бесконечно тонким, что значительно упрощает расчеты.

В данной работе мы рассмотрим устойчивость кольца в цилиндрическом волноводе, образующая которого параллельна оси кольца. Заметим здесь, что вопрос об устойчивости азимутальных колебаний в волноводе круглого сечения рассматривался в работах [2,3], однако в них имеются некоторые неточности, на которых мы остановимся в п. 4.

2. Для связности изложения напомним некоторые результаты работы [1]. Если выполнено условие

$$\frac{\nu}{\gamma_0} \ln \frac{8r_0}{a} \ll 1, \quad (1)$$

где $\nu = \frac{N}{2\pi r_0} \frac{e^2}{mc^2}$ — погонный электрон, N — полное число частиц в кольце, e и m — заряд и масса покоя электрона, то решение дисперсионного уравнения можно представить в виде

$$p_0 = \pm \left[\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) a_{0\eta} \right]^{1/2}; \quad (2a)$$

$$p_r = \pm Q_r \mp \frac{1}{2Q_r} \left[a_{r\epsilon} \mp \frac{i}{Q_r} (a_{r\eta} - a_{\theta\epsilon}) + \frac{1}{Q_r^2} a_{\theta\eta} \right]; \quad (26)$$

$$p_z = \pm Q_z \mp \frac{1}{2Q_z} a_{z\epsilon}, \quad (2в)$$

где $p = (\omega - n\omega_0)/\omega_0$, индексы r, θ, z относятся к радиальным, азимутальным и аксиальным колебаниям кольца, $Q_r \omega_0$ и $Q_z \omega_0$ — частоты бетатронных колебаний, обусловленные внешней фокусировкой. Коэффициенты $a_{i\mu}$ связаны с полями возмущения E и B равенством

$$\omega_0^2 a_{i\mu} \Delta_\mu = \frac{e}{m\gamma_0} F_i, \quad (3)$$

где $F = E + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{B}]$, $\mathbf{v}_0 = \omega_0 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}_\theta$. Вектор $\Delta = \xi \mathbf{e}_r + \eta \mathbf{e}_\theta + \zeta \mathbf{e}_z \sim \exp[i(n\theta - \omega t)]$ ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ — орты цилиндрической системы координат с осью z , совпадающей с осью симметрии кольца) описывает колебания частиц вокруг равновесной орбиты. При этом, если частота далека от резонансов, в правых частях равенств (2) можно положить: $\omega = n\omega_0$ — в (2а), $\omega = (n \pm Q_r) \omega_0$ — в (2б), $\omega = (n \pm Q_z) \omega_0$ — в (2в). Вблизи резонансов равенства (2) следует рассматривать как уравнения относительно ω .

Отметим, что эти результаты были получены в предположении наличия азимутальной симметрии невозмущенной системы. Нетрудно показать, однако, что равенства (2) останутся справедливыми с точностью до квадрата малого параметра (1) и при отсутствии такой симметрии, если в определении (3) заменить F на $F_n = e^{in\theta} \int_0^{2\pi} F e^{-in\theta} d\theta$.

При этом мы считаем, что внешняя фокусировка кольца остается азимутально-симметричной. Тем самым дальнейшее рассмотрение волновода произвольного сечения относится к парциальным модам, а не к нормальным колебаниям кольца.

Возмущения плотностей заряда и тока, которые необходимо задать для нахождения полей возмущения, представляются в виде

$$\begin{aligned} \rho &= -\operatorname{div}(\rho_0 \Delta), \\ j &= \rho \mathbf{v}_0 - i(\omega - n\omega_0) \rho_0 \Delta, \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность заряда, которую мы, интересуясь лишь инкрементами колебаний, положим равной

$$\rho_0 = \frac{Ne}{2\pi r} \delta(r - r_0) \delta(z). \quad (5)$$

Решение уравнений Максвелла с источниками (4) находятся методом разложения полей по собственным полям волновода [4]. Выделяя n -ю гармонику, получим следующие выражения для полей на кольце:

$$\begin{aligned} E_{rn} &= 2\pi Ne \sum_s \left\{ \frac{h_s^{(e)}}{(\alpha_s^{(e)})^2} \left[i\xi \frac{d\varphi_{sn}}{dr} + n \frac{\eta}{r_0} \varphi_{sn} \right] \frac{d\varphi_{sn}^*}{dr} + \right. \\ &+ \left. \frac{nk^2}{h_s^{(h)} (\alpha_s^{(h)})^2 r_0} \left[i \xi \left(n - \frac{\beta_0 r_0}{k} (\alpha_s^{(h)})^2 \right) \psi_{sn} + \eta \frac{d\psi_{sn}}{dr} \right] \psi_{sn}^* \right\}, \end{aligned}$$

$$E_{\theta n} = 2\pi i N e \sum_s \left\{ \frac{n h_s^{(e)}}{(\alpha_s^{(e)})^2 r_0} \left[i \xi \frac{d\varphi_{sn}}{dr} + n \frac{\eta}{r_0} \varphi_{sn} \right] \varphi_{sn}^* + \right. \\ \left. + \frac{k^2}{h_s^{(h)} (\alpha_s^{(h)})^2} \left[i \frac{\xi}{r_0} \left(n - (\alpha_s^{(h)})^2 \frac{\beta_0 r_0}{k} \right) \psi_{sn} + \eta \frac{d\psi_{sn}}{dr} \right] \frac{d\psi_{sn}^*}{dr} \right\}, \quad (6)$$

$$E_{zn} = 2\pi i N e \frac{\zeta}{r_0} \sum_s \frac{(\alpha_s^{(e)})^2 r_0 - n \beta_0 k}{h_s^{(e)}} |\varphi_{sn}|^2,$$

$$B_{rn} = 2\pi i N e \frac{\zeta}{r_0} \sum_s \left\{ \frac{n k}{h_s^{(e)}} \left[1 - \frac{n k \beta_0}{(\alpha_s^{(e)})^2 r_0} \right] |\varphi_{sn}|^2 - \beta_0 \frac{h_s^{(h)} r_0}{(\alpha_s^{(h)})^2} \left| \frac{d\psi_{sn}}{dr} \right|^2 \right\},$$

$$B_{zn} = -2\pi N e \sum_s \frac{k}{h_s^{(h)}} \left\{ i \frac{\xi}{r_0} \left[n - (\alpha_s^{(h)})^2 \frac{\beta_0 r_0}{k} \right] \psi_{sn} + \eta \frac{d\psi_{sn}}{dr} \right\} \psi_{sn}^*,$$

где φ_{sn} и ψ_{sn} — n -е азимутальные гармоники Фурье мембранных функций φ_s и ψ_s , нормированных на единицу и удовлетворяющих условиям $\varphi_s = 0$ и $\frac{\partial \psi_s}{\partial N} = 0$ на контуре L поперечного сечения волновода, причем N — нормаль к контуру L , h_s и α_s — продольные и поперечные волновые числа, связанные соотношением $\alpha_s^2 + h_s^2 = k^2 = \omega^2/c^2$. Кроме того, $\pi > \arg h_s \geq 0$ для $\operatorname{Re} k > 0$ и $-\pi \leq \arg h_s < 0$ для $\operatorname{Re} k < 0$. Индексы (e) и (h) относятся соответственно к E - и H -волнам. В формулах (6) функции φ_{sn} , ψ_{sn} и их производные взяты при $r = r_0$. Выражение для $B_{\theta n}$ мы не приводим, так как эта компонента в рассматриваемом приближении не оказывает влияния на устойчивость кольца.

3. Рассмотрим вначале азимутальные колебания кольца. Как и в [1], удобнее переписать уравнение (2 а) в виде

$$p_0^2 = i \frac{c}{2\pi} \frac{\nu}{\beta_0 \gamma_0} n Z_n \left(\frac{1}{Q_r^2} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right), \quad (7)$$

где

$$Z_n = \frac{8\pi^3}{\omega_0} n \sum_s \left\{ h_s^{(e)} \frac{|\varphi_{sn}|^2}{(\alpha_s^{(e)})^2} + \frac{\beta_0^2}{h_s^{(h)} (\alpha_s^{(h)})^2} \left| \frac{d\psi_{sn}}{dr} \right|^2 \right\} \quad (8)$$

— импеданс пучка в волноводе, определяемый соотношением

$$2\pi r_0 E_{\theta n}(\eta) = -Z_n I_n(\eta), \quad (9)$$

где $E_{\theta n}(\eta)$ и $I_n(\eta)$ — возмущения поля и тока, производимые азимутальными колебаниями кольца. Ряд (8) расходится, что связано со статической особенностью поля на бесконечно тонком кольце. Характер этой особенности можно выявить следующим образом. Представим электрическое поле в виде $E = E^{(I)} + E^{(II)}$, где $E^{(I)}$ — поле кольца в свободном пространстве, $E^{(II)}$ — поле, связанное с наличием металлического экрана, или отраженное поле. Поскольку отраженное поле не может иметь особенностей на кольце, то расходимость поля E_{θ} , как и в свободном пространстве, имеет логарифмический характер. Таким образом, учет конечной толщины кольца приведет к появлению в импедансе слагаемого, пропорционального $\frac{1}{\gamma_0} \ln a$, которое, как это следует из результатов работы [1], должно иметь емкостный характер. При

$\beta_0 = 1$ бесконечный ряд в (8) сходится, что является отражением указанного факта. Выделяя логарифмическую особенность и сравнивая с выражением импеданса кольца в свободном пространстве, можно представить импеданс (8) в виде

$$Z_n = \frac{4\pi n}{\beta_0 c} \left\{ \frac{i}{\gamma_0^2} \ln \frac{L_0}{a} + 2\pi^2 r_0 \sum_s \left[h_s^{(e)} \left| \frac{\varphi_{sn}}{\alpha_s^{(e)}} \right|^2 + \frac{1}{h_s^{(h)}} \left| \frac{1}{\alpha_s^{(h)}} \frac{d\psi_{sn}}{dr} \right|^2 \right] \right\}, \quad (10)$$

где L_0 — некоторая характерная длина, причем $L_0 \gg a$.

Если частота возмущения далека от частот волноводных H -резонансов, так что

$$|\operatorname{Im} \omega| \ll |\operatorname{Re}(\omega - \omega_s^{(h)})|, \quad (11)$$

где $\omega_s^{(h)} = \alpha_s^{(h)} a$, то в формуле (10) можно пренебречь наличием $\operatorname{Im} \omega$. Отметим здесь, что, как следует из свойств собственных значений мембранных функций (см., например, [5]), $\min \alpha_s^{(h)} < \min \alpha_s^{(e)}$. Поэтому критическая частота волновода всегда будет резонансной для азимутальных колебаний. Если ω ниже критической частоты волновода и выполняется условие (11), то импеданс чисто мнимый, излучение отсутствует, и колебания устойчивы при $\operatorname{Im} Z_n < 0^*$. Как видно из выражения (10), при приближении к критической частоте преобладающий вклад H -волн всегда делает импеданс индуктивным. С другой стороны, при не слишком больших γ_0 для частот, далеких от резонансной, основную роль играет первое слагаемое в фигурных скобках выражения (10), имеющее емкостный характер, в результате чего $\operatorname{Im} Z_n > 0$. Таким образом, при малых частотах возможно наличие области неустойчивости азимутальных колебаний (неустойчивость «отрицательной массы»), которая по мере приближения к критической частоте сменяется областью устойчивости. Эта область устойчивости является единственной для данного n , так как при частотах выше критической появляются излучаемые волны, импеданс становится комплексным и азимутальные колебания — неустойчивыми.

Если сечение волновода — круг радиуса b , центр которого совпадает с центром кольца**, то

$$\varphi_{sn} = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{J_n(\nu_s(r/b))}{J'_n(\nu_s)}, \quad \psi_{sn} = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \frac{\mu_s}{(\mu_s^2 - n^2)^{1/2}} \frac{J_n(\mu_s(r/b))}{J_n(\mu_s)}, \quad (12)$$

где ν_s и μ_s — корни уравнений $J_n(x) = 0$ и $J'_n(x) = \frac{d}{dx} J_n(x) = 0$ соответственно ($J_n(x)$ — функция Бесселя). Подставив эти выражения в (10), получим известную формулу импеданса бесконечно тонкого кольца [2].

4. Докритическая область частот, в которой отсутствует излучение и имеется область устойчивости кольца, требует более детального рассмотрения. Поскольку анализ для волновода произвольного сечения затруднителен, приведем результаты расчета для волновода круглого сечения. Поступая так же, как в работе [2], разобьем входящую в (10) бесконечную сумму на две части: $1 < s < s_{\max}$ и $s > s_{\max}$. В первой используем разложение функций по $(b - r_0)/r_0$, во второй — асимптоти-

* Мы ограничиваемся случаем $\gamma_0 > Q_r$.

** В этом случае моды $e^{in\theta}$ являются нормальными модами колебаний кольца, и область устойчивости определяется частотой отсечки H -волны n -й моды, а не критической частотой волновода.

ческие представления функций Бесселя и их корней. В результате получим для $(b - r_0)/\lambda \ll 1$ ($\lambda = r_0/n$ — длина волны возмущения)

$$Z_n = \frac{4\pi i}{c} \left\{ \frac{n}{\gamma_0^2} \ln \frac{L_0}{a} - A_1 \left(\frac{b - r_0}{\lambda} \right)^2 + A_2 \left(\frac{b - r_0}{\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{b - r_0} \right\}, \quad (13)$$

где A_1 и A_2 — коэффициенты порядка единицы, и как показывают численные расчеты, слабо зависящие от n . Из формулы (13) видно, что при не слишком больших γ_0 и малых $(b - r_0)/\lambda$ существенную роль может играть логарифмический член. Учет конечной толщины кольца осуществляется методом разбиения поля на отраженное и поле в свободном пространстве, что дает для L_0 значение $2(b - r_0)$. Как и следовало ожидать, первое слагаемое в (13) при этом соответствует статическому полю прямого цилиндра вблизи металлической плоскости. Появление волновых добавок в членах порядка $[(b - r_0)/\lambda]^2$ тоже понятно. Действительно, для гармонического процесса, происходящего на расстоянии $(b - r_0)$ от плоскости, поле на больших расстояниях $\sim (b - r_0)/\lambda$, а импеданс пропорционален квадрату этого поля. В связи с этим отметим, что аналогичное выражение работы [2], содержащее слагаемое, пропорциональное $(b - r_0)/\lambda$, является неверным, что связано с отбрасыванием существенных членов разложения, уничтожающих это слагаемое.

Анализ выражения (13) показывает, что с ростом b/r_0 при фиксированных γ_0 и a всегда имеется точка δ_n , такая, что при $\delta_n < b/r_0$ колебания устойчивы, а при $\delta_n > b/r_0$ — неустойчивы. Область устойчивости $\delta_n < b/r_0 < \mu_1/n$ расширяется с ростом γ_0 и увеличением толщины кольца. При достаточно больших γ_0 и a/r_0 вся пристеночная область будет областью устойчивости, т. е. $\delta_n \leq 1 + a/r_0$. Так для $a/r_0 = 0,05$ и $\gamma_0 = 10$ неустойчивыми в пристеночной области оказываются лишь гармоники $n = 1$ и $n = 2$. Соответствующее поведение $\text{Im } Z_n$ представлено на рис. 1 а. На рис. 1 б приведены графики $\text{Im } Z_n$ для случая, когда квазистатическим логарифмическим членом в (13) можно пренебречь. Если при этом $a/r_0 > 0,04$, то вся пристеночная область является областью устойчивости.

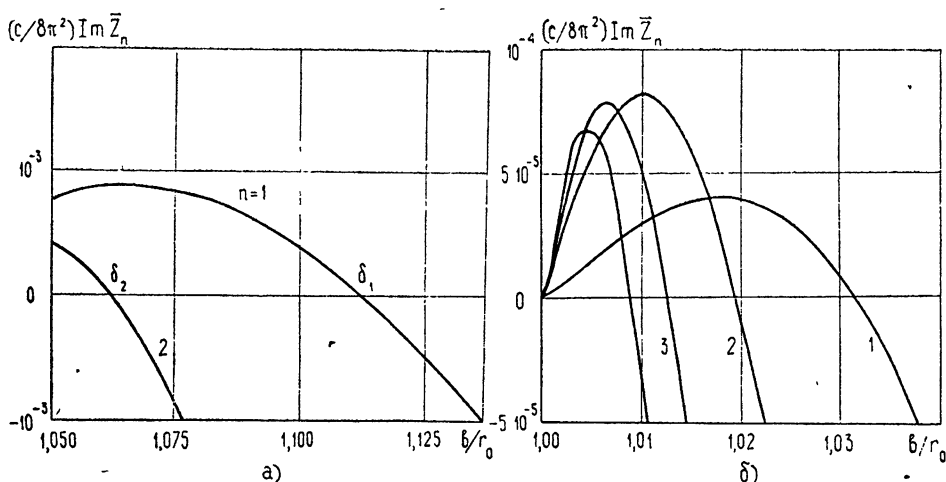


Рис. 1. а) Поведение $\text{Im } Z_n$ в зависимости от b/r_0 в пристеночной области для $\gamma_0 = 10$ и $a/r_0 = 0,05$. Положительные значения $\text{Im } Z_n$ соответствуют неустойчивости. При $n > 2$ для всех допустимых b/r_0 $\text{Im } Z_n < 0$.

б) Поведение $\text{Im } Z_n$ в зависимости от b/r_0 в пристеночной области при $1/\gamma_0^2 \ln [2(b - r_0)/a] \rightarrow 0$.

На рис. 2 для $n = 1$ показаны зависимости $\text{Im } Z_n$ и $\text{Re } Z_n$ от b/r_0 в закритической области $b/r_0 > \mu_1/n$. При приближении к резонансным частотам $\omega_l = \mu_l c/b$ мнимая и действительная части импеданса испытывают бесконечные разрывы, что связано с пренебрежением $\text{Im } \omega$. Характерные изломы на графиках соответствуют возникновению нерезонансных E -волн. Ввиду наличия в этой области отличной от нуля действительной части импеданса азимутальные колебания не будут устойчивыми, хотя $\text{Im } Z_n$ в промежутках между резонансами меняет знак, как это отмечалось в работе [2]. Однако качественные выводы об устойчивости, основанные на рассмотрении E -слоя, не могут быть перенесены на случай кольца, как это сделано в [2]. Дело в том, что E -слой в волноводе по сути представляет собой двумерное кольцо в двумерном резонаторе. Отсутствие излучения в такой системе ($\text{Re } Z_n = 0$) объясняет появление бесконечного ряда областей устойчивости, что не имеет места в случае кольца.

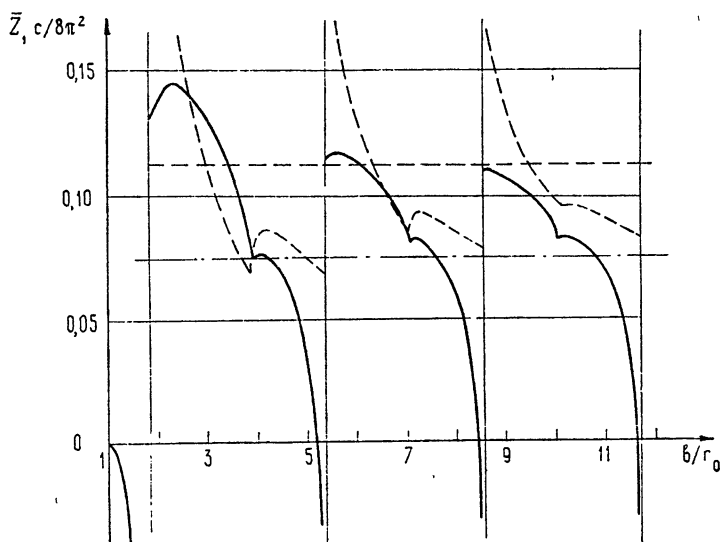


Рис. 2. Зависимость импеданса от b/r_0 в закритической области для $n = 1$. Сплошной линией показана $\text{Im } Z_1$, пунктирной — $\text{Re } Z_1$. Горизонтальные линии — значения соответствующих величин в свободном пространстве ($b/r_0 \rightarrow \infty$).

При больших b/r_0 основной вклад в (10) дают слагаемые с большими ν_s и μ_s . Используя асимптотические представления функций Бесселя и их корней, перейдем от суммирования к интегрированию. Тогда

$$Z_n = \frac{4\pi^2}{c} n \left\{ \int_0^n [(n^2 - x^2) J_n^2(x) + x^2 J_n'^2(x)] \frac{dx}{x \sqrt{n^2 - x^2}} + \right. \\ \left. + i \int_n^\infty [(x^2 - n^2) J_n^2(x) - x^2 J_n'^2(x)] \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - n^2}} \right\}. \quad (14a)$$

Громоздкие, но несложные преобразования приводят к результату

$$Z_n = \frac{4\pi^2}{c} n [J_{2n}'(2n) + iE_{2n}'(2n)], \quad (14б)$$

где $E_{2n}(x)$ — функция Вебера, штрих означает производную по аргументу. Формула (14 б) совпадает с соответствующим выражением для импеданса кольца в свободном пространстве, полученным в работе [1] в ультрарелятивистском случае. Хотя данный результат получен для волновода круглого сечения, следует ожидать, что он останется в силе и для волновода произвольного сечения, так как поле на кольце слабо чувствительно к форме границы, если кольцо находится далеко от нее.

5. Инкременты азимутальных колебаний в случае, когда справедливо неравенство (11), определяются формулой (7). Неравенство (11) нарушается в окрестности волноводных резонансов, в связи с чем необходимо провести специальное исследование. Имея в виду ультрарелятивистский случай, введем следующие величины (для круглого волновода):

$$\Phi_l = \frac{4\pi n^2}{\gamma_0 Q_r^2} \left\{ \sum_{s=l+1}^{\infty} \frac{1}{|h_s^{(h)} r_0| (\mu_s^2 - n^2)} \left[\frac{y_s J'_n(y_s)}{J_n(\mu_s)} \right]^2 - \sum_{s=l}^{\infty} \frac{|h_s^{(e)} r_0|}{\nu_s^2} \left[\frac{J_n(x_s)}{J'_n(\nu_s)} \right]^2 \right\},$$

$$\Psi_l = \frac{4\pi n^2}{\gamma_0 Q_r^2} \sum_{s=l}^{l-1} \left\{ \frac{1}{h_s^{(h)} r_0 (\mu_s^2 - n^2)} \left[\frac{y_s J'_n(y_s)}{J_n(\mu_s)} \right]^2 + \frac{h_s^{(e)} r_0}{\nu_s^2} \left[\frac{J_n(x_s)}{J'_n(\nu_s)} \right]^2 \right\},$$

$$F_l = \frac{4\pi n^2}{\gamma_0 Q_r^2} \frac{1}{\sqrt{2y_l} (\mu_l^2 - n^2)} \left[\frac{y_l J'_n(y_l)}{J_n(\mu_l)} \right]^2,$$

где $x_s = \nu_s r_0 / b$, $y_s = \mu_s r_0 / b$. Тогда дисперсионное уравнение в окрестности резонанса может быть представлено в виде

$$p^2 = \nu \left(\Phi_l + i\Psi_l + \frac{iF_l}{\sqrt{p} + n - \chi_l} \right),$$

где $\chi_l \omega_0 = \mu_l c / b$ — частота отсечки H -волны. Если выполнено условие

$$\nu^{1/5} (\Phi_l^2 + \Psi_l^2)^{1/2} \ll F_l^{4/5}, \quad (15)$$

то

$$\text{Im } p = (\nu F_l)^{2/5} \sin \frac{2\pi}{5} \left[1 - \frac{(n - \mu_l r_0 / b)^2}{25 (\nu F_l)^{4/5}} \right]. \quad (16)$$

Заметим, что условие (15) выполняется лишь для первых резонансов и пучков весьма малой плотности, ибо параметр ν входит в него в степени $1/5$. Для реальных пучков это условие не выполняется, и соотношение (16) следует рассматривать скорее как качественное. Анализ дисперсионного уравнения в окрестности первых резонансов, когда условие (15) не выполняется, связан с применением трудоемких численных расчетов и в данной работе не производился.

Если пучок находится достаточно далеко от стенки, то условие (15) меняется на противоположное, так как нетрудно видеть, что в этом случае $\Phi_l \rightarrow \text{const}$, $\Psi_l \rightarrow \text{const}$, $F_l \sim 1/l$. Тогда

$$\text{Im } p = \text{Im } p_0 \left[1 + \frac{F_l}{\nu^{1/4} (\Phi_l^2 + \Psi_l^2)^{5/8}} \right], \quad (17)$$

где $\text{Im } p_0$ — инкремент азимутальных колебаний в свободном пространстве. Эти результаты остаются качественно верными и для кольца в волноводе произвольного сечения.

На рис. 3 для $n = 1$ показана зависимость от b/r_0 функции F_0 , связанной соотношением

$$\operatorname{Im} p_0 = \left[\frac{2\nu}{\beta_0^2 \gamma_0} \left(\frac{1}{Q_r^2} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \right]^{1/2} n F_0$$

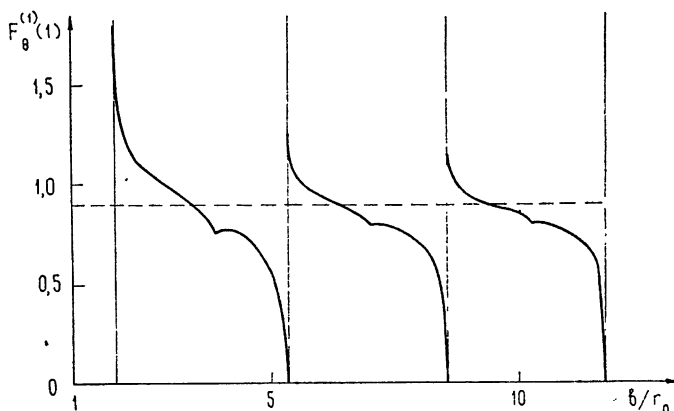


Рис. 3. Зависимость F_0 от b/r_0 для $n = 1$ в ультрарелятивистском случае ($\beta_0 = 1$). Горизонтальная пунктирная линия — значение F_0 в свободном пространстве ($b/r_0 \rightarrow \infty$).

с инкрементом азимутальных колебаний, в закритической области. Для больших b/r_0 значение инкремента асимптотически стремится к его значению в свободном пространстве.

6. Рассмотрим теперь поперечные колебания кольца. Из формул (2б), (2в) с учетом (3) и (6) получим

$$\operatorname{Im} p_r = \mp \frac{2\pi^2 \nu}{\beta_0^2 \gamma_0 Q_r} \sum_s \left\{ \frac{h_s^{(e)} r_0}{(\alpha_s^{(e)})^2} \left| r_0 \frac{d\varphi_{sn}(r_0)}{dr} \mp \frac{n}{Q_r} \varphi_{sn}(r_0) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{r_0}{h_s^{(h)}} \left| \left(\frac{nk}{\alpha_s^{(h)}} - \alpha_s^{(h)} r_0 \beta_0 \right) \psi_{sn}(r_0) \mp \frac{kr_0}{Q_r \alpha_s^{(h)}} \frac{d\psi_{sn}(r_0)}{dr} \right|^2 \right\}; \quad (18)$$

$$\operatorname{Im} p_z = \mp \frac{2\pi^2 \nu}{\beta_0^2 \gamma_0 Q_z} \sum_s \left\{ \frac{r_0}{h_s^{(e)}} \left(\frac{nk\beta_0}{\alpha_s^{(e)}} - \alpha_s^{(e)} r_0 \right)^2 |\varphi_{sn}(r_0)|^2 + \right. \\ \left. + \beta_0^2 \frac{h_s^{(h)} r_0^3}{(\alpha_s^{(h)})^2} \left| \frac{d\psi_{sn}(r_0)}{dr} \right|^2 \right\}. \quad (19)$$

Из этих выражений видно, что резонансными частотами для радиальных колебаний являются, так же как и для азимутальных, $\omega_s^{(h)} = \alpha_s^{(h)} c$, а для аксиальных — $\omega_s^{(e)} = \alpha_s^{(e)} c$. Если выполнено условие (11) для радиальных колебаний и аналогичное для аксиальных, то в формуле (18) можно положить $kr_0 = (n \pm Q_r) \beta_0$ и $kr_0 = (n \pm Q_z) \beta_0$ в формуле (19). Тогда суммирование по s распространено лишь на те слабые, для которых $(h_s^{(e, h)})^2 > 0$. Как легко видеть, неустойчивыми ($\operatorname{Im} p > 0$) являются лишь моды $\omega = (n - Q_{r, z}) \omega_0$ при $n > Q$, т. е. волны возмущения, фазовая скорость которых $v_\phi = (1 - Q_{r, z}/n) v_0$ направлена в сторону v_0 и меньше скорости частиц, — медленные волны,

Если $n < -Q$, то $\operatorname{Re} \omega < 0$ и в формулах (18), (19) надо изменить знаки у h_s , что приводит к неустойчивости мод $\omega = (n + Q_{r,z}) \omega_0$, т. е. опять-таки медленных волн, бегущих в ту же сторону, что и пучок. Следуя работе [6], где исследовалась резистивная неустойчивость кольцевого пучка, можно интерпретировать результат о неустойчивости таких волн, как проявление аномального эффекта Допплера.

Как и следовало ожидать, если кольцо достаточно близко к стенкам волновода, так что отсутствует излучение, т. е.

$$(n - Q_r) \beta_0 < \alpha_{\min} r_0 \quad \text{и} \quad (n - Q_z) \beta_0 < \alpha_{\min} r_0, \quad (20)$$

то радиальные и аксиальные колебания кольца устойчивы. Этот результат можно сформулировать иначе. При данном положении кольца устойчивы лишь те колебания, для которых

$$n < \frac{\alpha_{\min} r_0}{\beta_0} + Q_{r,z},$$

где величина $\alpha_{\min} c$ есть критическая частота волновода. Отсюда видно, что неустойчивости, по крайней мере низших мод, могут быть подавлены за счет увеличения жесткости фокусировки Q .

7. Поведение инкрементов неустойчивых гармоник вблизи волноводных резонансов рассмотрим тем же методом, что и выше при изучении азимутальных колебаний. Будем обозначать через $\nu \Psi_l$ правую часть формул (18), (19), в которых выбран нижний знак и суммирование распространено на все s , для которых $\alpha_s^{(e,h)} < \alpha_l^{(h)}$ в формуле (18) и $\alpha_s^{(e,h)} < \alpha_l^{(e)}$ в формуле (19). Введем также величину F_l , которая для радиальных колебаний равна

$$F_l = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{\gamma_0 Q_r} \frac{r_0^2}{V \alpha_l^{(h)} r_0} \left| \left[\frac{n(n - Q_r)}{\alpha_l^{(h)} r_0} - \alpha_l^{(h)} r_0 \right] \psi_{ln}(r_0) + \frac{n - Q_r}{Q_r \alpha_l^{(h)}} \frac{d\psi_{ln}(r_0)}{dr} \right|^2$$

и для аксиальных колебаний

$$F_l = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{\gamma_0 Q_z} \frac{r_0^2}{V \alpha_l^{(e)} r_0} \left[\frac{n(n - Q_z) \beta_0}{\alpha_l^{(e)} r_0} - \frac{\alpha_l^{(e)} r_0}{\beta_0} \right]^2 |\varphi_{ln}(r_0)|^2.$$

Тогда дисперсионное уравнение в окрестности l -го резонанса можно представить в виде

$$p + Q = \nu \left(\Phi_l + i \Psi_l + \frac{i F_l}{\sqrt{p + n - \alpha_l \frac{c}{\omega_0}}} \right). \quad (21)$$

Выражение для Φ_l мы не выписываем, так как его учет приводит лишь к малому сдвигу положения резонанса. Для первых резонансов, когда выполнено условие

$$\nu^{1/3} \Psi_l \ll F_l^{2/3}, \quad (22)$$

нетрудно получить

$$\operatorname{Im} p = \frac{\sqrt{3}}{2} (\nu F_l)^{2/3} \left[1 - \frac{(n - Q - \alpha_l c / \omega_0)^2}{9 (\nu F_l)^{4/3}} \right] + \nu \Psi_l. \quad (23)$$

При выполнении условия, обратного (22), инкременты определяются выражением

$$\operatorname{Im} p = v \Psi_l \left(1 + \frac{F_l}{\sqrt{2} v \Psi_l^{3/2}} \right), \quad (24)$$

т. е. резонансы практически перестают играть роль, и кольцо ведет себя как в пустом пространстве.

На рис. 4 и 5 приведены зависимости от b/r_0 инкрементов радиаль-

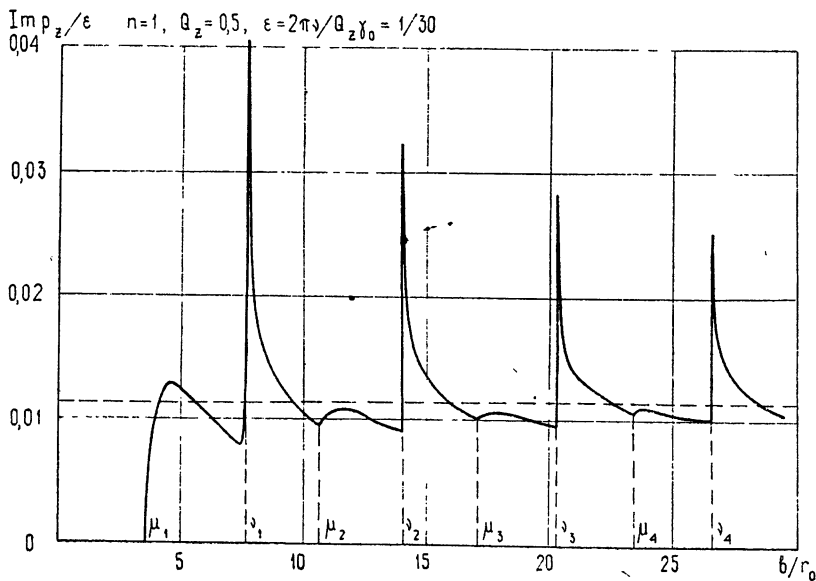


Рис. 4. Зависимость инкремента аксиальных колебаний от b/r_0 . Горизонтальная пунктирная линия — значение инкремента в свободном пространстве ($b/r_0 \rightarrow \infty$).

ных и аксиальных колебаний кольца в круглом волноводе для $n=1$ и $Q_r = Q_z = 0,5$ в ультрарелятивистском случае. На графиках видны пики, возникающие из-за резонансного взаимодействия радиальных колебаний с H -волнами и аксиальных с E -волнами. Характерные изломы соответствуют зарождению нерезонансных E -волн (для радиальных колебаний) и H -волн (для аксиальных колебаний). Величина $\varepsilon = 2\pi v / Q \gamma_0$ принималась равной $1/30$, что примерно соответствует реальным параметрам колец. При изменении ε меняется лишь высота и ширина резонансных пиков, причем последняя в масштабе b/r_0 всегда остается малой. При изменении n и Q качественная картина сохраняется. Для радиальных колебаний резонансу соответствует $\frac{b}{r_0} = \frac{\mu_l}{n-Q}$, излому $\frac{b}{r_0} = \frac{\gamma_l}{n-Q}$. Для аксиальных колебаний эти значения меняются ролями.

Отметим, что для круглого волновода можно показать, так же как и в п. 4, что при $b/r_0 \rightarrow \infty$ выражения (18), (19) переходят в выражения для инкрементов в свободном пространстве, полученные в работе [1]. Очевидно, это останется справедливым и для волновода произвольного сечения.

Анализ показывает, что радиационные инкременты азимутальных колебаний всегда существенно превосходят инкременты поперечных колебаний, так как $\operatorname{Im} p_\theta \sim (v/\gamma_0)^{1/2}$, а $\operatorname{Im} p_{r,z} \sim v/\gamma_0$. Так для пучка

с $N = 10^{14}$, $r_0 = 10$ см, $\gamma_0 = 40$, расположенного в круглом волноводе радиуса $b = 60$ см, при $Q_{r,z} = 0,5$ получим для моды $n = 1$ $\text{Im } p_\theta \approx 0,2$, $\text{Im } p_r \approx 0,02$, $\text{Im } p_z \approx 0,001$, что соответствует временам нарастания (в системе, связанной с кольцом) $\tau_\theta = 10^{-8}$ сек, $\tau_r = 10^{-7}$ сек, $\tau_z = 2 \cdot 10^{-6}$ сек. Если же $b = 20$ см, то $\text{Im } p_\theta \approx 0,3$, а поперечные колебания устойчивы.

$\text{Im } p_r / \epsilon \approx n=1$, $Q_r = 0,5$, $\epsilon = 2\pi\gamma/Q_r\gamma_0 = 1/50$

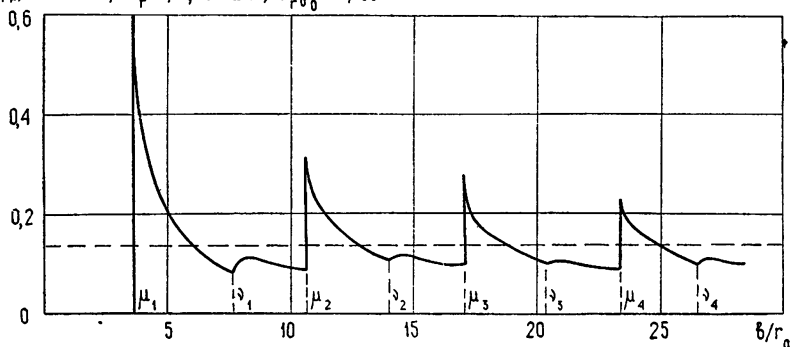


Рис. 5. Зависимость инкремента радиальных колебаний от b/r_0 . Горизонтальная пунктирная линия — значение инкремента в свободном пространстве ($b/r_0 \rightarrow \infty$).

Если фокусировка создается градиентом внешнего магнитного поля, то $0 < Q_{r,z} < 1$. Простые оценки показывают, что для случая, когда фокусировка определяется ионами, захваченными в кольцо, $Q_{r,z} \sim 1$. При изменении $Q_{r,z}$ в таком диапазоне инкременты меняются слабо, если только одна из величин Q не близка к нулю. Так, при $Q_z = 0$ $\text{Im } p_z \sim (\nu/\gamma_0)^{1/2}$, т. е. следует ожидать, что инкременты аксиальных колебаний будут порядка азимутальных. Однако в данной работе мы не будем останавливаться на этом вопросе. Укажем только, что особенностью аксиальных колебаний в этом случае является отсутствие резонансов, так как аксиальная компонента тока j_z обращается в нуль.

Авторы глубоко признательны М. Л. Левину за полезные обсуждения и большое внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Корнев, Л. А. Юдин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1268 (1971).
2. А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1080 (1970).
3. А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1089 (1970).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
6. В. И. Балбеков, Диссертация, Серпухов, 1969.

Поступила в редакцию
27 апреля 1971 г.

RADIATION INSTABILITY OF ELECTRON RINGS IN A WAVEGUIDE .

I. L. Korenev, L. A. Yudin

The stability of the electron ring oscillations inside a metal tube with a perfectly conducting wall is considered. The expressions are obtained for the increments of unstable harmonics. The instability in the vicinity of waveguide resonances has been investigated. The results of numerical calculations of the increments are given;

УДК 621.385.64

ПРЕДОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОНЕ

М. И. Кузнецов, В. А. Бербасов, И. Н. Железцова

На основании представлений о природе диффузионного движения электронов в магнетроне, изложенных в предыдущих работах авторов применительно к плоскому магнетрону, получено диффузионное уравнение для цилиндрического магнетрона. Путем решения этого уравнения выяснено, что по крайней мере при $H > 1,5 H_{кр}$ подавляющая часть электронного облака находится в режиме, близком к статическому синхронному.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования и их теоретическая обработка показывают, что в предосцилляционном режиме электронное облако в магнетроне разделяется на две части. В первой из них, прилегающей к катоду, радиальное движение электрона имеет регулярный характер и в основном определяется средними по времени значениями полей. Распределение заряда в этой области, которую естественно называть регулярной, детально изучено в [1]. Во второй, нерегулярной части электронного облака, которая занимает все пространство между границей регулярной части и анодом, радиальное движение электронов носит диффузионный характер. Оно вызывается флуктуационными полями типа вращающихся волн низших номеров, которые обусловлены собственными колебаниями электронного облака [2]. Распределение заряда в нерегулярной части электронного облака может быть найдено путем решения соответствующего диффузионного уравнения. Для плоского магнетрона оно было составлено и решено при различных упрощающих предположениях (см., например, [3, 4]). Но в цилиндрическом магнетроне возможны качественно иные решения диффузионного уравнения, потому что соотношения между величиной диффузионного тока и степенью синхронности движения электронов и шумовых волн, т. е. между диффузионным током и коэффициентом диффузии в цилиндрическом магнетроне, имеют совершенно иной характер, чем в плоском. Действительно, как в плоском, так и в цилиндрическом магнетронах увеличение диффузионного тока при постоянном анодном напряжении вызывает увеличение заряда, постоянного электрического поля, скорости азимутального (тангенциального) дрейфа электронов в нерегулярной части электронного облака и некоторое уменьшение этих величин в регулярной. Уменьшается и скорость шумовых волн, потому что она несколько меньше скорости дрейфа электронов на границе регулярной части электронного облака [5]. Следовательно, в плоском магнетроне при увеличении диффузионного тока разность между скоростью дрейфа электронов в нерегулярной части электронного облака и скоростью шумовых волн увеличивается и коэффициент диффузии уменьшается (см. [3, 4]). Но в цилиндрическом магнетроне при небольшой плотности заряда в нерегулярной части электронного облака угловая скорость дрейфа подавляющей части находящихся в ней электронов меньше угловой скорости шумовых волн. Поэтому при увеличении диффузион-

ного тока в цилиндрическом магнетроне угловая скорость дрейфа этих электронов приближается к угловой скорости шумовых волн и, следовательно, коэффициент их диффузии возрастает. Можно предполагать, что в некотором интервале значений диффузионного тока режим нерегулярной части электронного облака в цилиндрическом магнетроне должен быть близок к так называемому статическому синхронному (см., например, [6]), при котором все электроны имеют одинаковую угловую скорость. Этот режим наиболее благоприятен для «мягкого» возбуждения рабочих колебаний в магнетроне, и, следовательно, выяснение условий его существования имеет большой практический интерес. Таким образом, составление и решение диффузионного уравнения, описывающего режим нерегулярной части электронного облака в цилиндрическом магнетроне, представляется актуальной задачей. Эта задача выполнена в рамках настоящей работы.

1. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ЗАРЯДА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОННОМ ДИОДЕ

Флуктуационные поля, вызывающие радиальные перемещения электронов в нерегулярной части электронного облака, создают как перемещение ведущих центров их траекторий, так и изменение радиусов их циклотронного вращения. Согласно [4], изменение радиуса циклотронного вращения ΔR и радиальное смещение ведущего центра Δr за промежутки времени Δt , малые по сравнению со средним временем пребывания электрона в магнетроне, но превышающие время корреляции флуктуаций поля, являются двумя независимыми стационарными марковскими процессами. Следовательно, распределение электронов в нерегулярной части электронного облака должно описываться диффузионным уравнением

$$-\frac{d}{dr}(rA\rho) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2}(rB\rho) = 0, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{\overline{\Delta r}}{\Delta t}, \quad B = \frac{\overline{\Delta r^2} + \overline{\Delta R^2}}{\Delta t}.$$

Пренебрегая усредненными радиальными ускорениями электронов и полагая, что угловая скорость ведущих центров электронных траекторий значительно меньше циклотронной частоты ω_H , можно получить следующие уравнения для возмущенного движения ведущего центра траектории электрона (с точностью до членов порядка $r_1^2, \varphi_1^2, (r_1 \cdot \varphi_1)$):

$$\begin{aligned} \omega_H^2 r_1 &= \frac{e}{m} \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial r_1^2} r_1 - \frac{\omega_H}{r_0} \int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} dt + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right], \\ \omega_H r_1 + \frac{e}{r_0 m} \int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} dt &= r_0 \dot{\varphi}_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r_1 = r - r_0$, $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$, r и φ — радиальная и азимутальная координаты ведущего центра траектории электрона в момент t , r_0 и φ_0 — те же координаты при невозмущенном движении, электрический потенциал — $U = \tilde{U} + \bar{U}$;

$$\omega_H^2 r_1 = -\frac{e}{m} \left[\frac{\omega_H}{r_0} \int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} dt - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r} \right] \approx -\frac{e}{m} \frac{\omega_H}{r_0} \int_{t_0}^t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} dt. \quad (3)$$

Уравнение (3) аналогично уравнению движения ведущего центра траектории электрона в плоском магнетроне, за исключением того, что вместо $\omega_{H\rho}^2 r = (\omega_H^2 - \omega_p^2) r$ в левой части уравнения стоит

$$\omega_1^2 r = \left[\omega_H^2 - \omega_p^2 + \frac{e}{m} \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}}{dr} \right] r.$$

Поэтому для расчета B можно воспользоваться методикой, изложенной в [7]. Однако необходимо иметь в виду, что при небольшой несинхронности движения электронов и волны нельзя считать, что

$$\rho_n \ll |\omega_n(1 - \bar{\dot{\varphi}}/\dot{\varphi}_n)|,$$

где ω_n — центральная частота n -й полосы спектра, $\rho_n = \omega_n/Q_n = \tau_n^{-1}$, Q_n — добротность n -го вида собственных колебаний электронного облака, $\dot{\varphi}_n$ — фазовая скорость шумовой волны с частотой ω_n , $\bar{\varphi}$ — усредненная угловая скорость ведущих центров электронных траекторий. С учетом этого

$$\frac{\Delta r^2}{\Delta t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e/m)^2 \bar{E}_{\varphi n}^2 \omega_H^2}{\omega_1^4 \tau_n (\omega_{en}^2 + p_n^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e/m)^2 \bar{E}_{r_n}^2 f_n^2 \omega_H^2}{4 \omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2) \tau_n}, \quad (4)$$

где $\bar{E}_{\varphi n}^2$ — среднеквадратичная величина азимутальной компоненты флуктуационного поля в n -й полосе спектра в точке наблюдения, $\bar{E}_{r_n}^2$ — средний квадрат радиальной компоненты того же поля у анода, $\omega_{en} = \omega_n(1 - \bar{\dot{\varphi}}/\dot{\varphi}_n)$, $f_n = (r_a/r)^{n+1} - (r_a/r)^{-n+1}$, r_a — радиус анода.

Величина A в предыдущих работах в явном виде не учитывалась*. Как известно, при ее расчете необходимо учесть в выражении для r_1

члены порядка $\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial r}\right)^2$. Как и в [7], представим азимутальное переменное поле случайной последовательностью элементарных импульсов вида $E_{in} \exp[j\omega(t - t_i) - jn(\varphi - \varphi_i) - p(t - t_i)] \mathcal{E}(t_i)$, где $\mathcal{E}(t_i)$ — функция единичного скачка. Методом последовательных приближений можно показать, что член второго порядка относительно E_{in} в выражении для смещения ведущего центра траектории равен

$$r_2^{(n)} = (e/m)^2 \omega_H^2 \omega_1^{-4} E_{in}^2 \int_0^{\infty} \frac{df_n}{dr} f_n \Psi_n(\omega, \tau) \int_0^{\tau} \Psi_n(\omega, \xi) d\xi d\tau,$$

где $\Psi_n(\omega, \tau) = \exp(j\omega_{en}\tau - p\tau)$, или

$$r_2^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{(e/m)^2 E_{in}^2 \omega_H^2}{\omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2)} f_n \frac{df_n}{dr} \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega_{en}, t) dt, \quad (5)$$

где $\Phi(\omega_{en}, t) = \omega_{en} \int_0^t \Psi_n(\omega, \xi) d\xi$. Используя (5) и применяя метод сум-

* В [3] диффузионное уравнение путем перехода к новым переменным было приведено к такому виду, при котором $A = 0$ с точностью до членов третьего порядка по отношению к переменному полю. В [4] член диффузионного уравнения, содержащий A , для упрощения расчетов был отброшен, так как в рассмотренном там случае плоского магнетрона с большими градиентами плотности заряда он оказался сравнительно малым.

мирования и усреднения случайных смещений ведущих центров, аналогичный описанному в [7], можно показать, что

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \frac{(e/m)^2 \overline{E_{r_a n}^2} \omega_H^2}{\omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2) \tau_n} f_n \frac{df_n}{dr}. \quad (6)$$

Кроме того, способом, изложенным в [4], можно показать, что

$$\frac{\overline{\Delta R^2}}{\Delta t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(e/m)^2 \overline{E_{r_a n}^2}}{\omega_1^4 \tau_n} \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1} \right]^2. \quad (7)$$

Подстановка (4), (6), (7) в (1) дает искомое уравнение диффузии:

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r \rho f_n \frac{df_n}{dr} \overline{E_{r_a n}^2}}{4 \omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dr} \left\{ \rho r \left[\frac{f_n^2}{4 \omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^{n+1} + \left(\frac{r_a}{r} \right)^{-n+1} \right]^2}{2 \omega_1^4 \omega_H^2} \right] \right\} \overline{E_{r_a n}^2} = C, \end{aligned} \quad (8)$$

где $C = -\frac{I \tau_n}{\pi (e/m)^2}$, I — ток на единицу длины лампы. По экспериментальным данным обычно интенсивность шумов в первой или второй полосе спектра ($n = 1$ или $n = 2$) значительно больше, чем в остальных полосах. Кроме того, $(\omega_{en}^2 + p_n^2) \sim n^2$. Это позволяет пользоваться одноволновым приближением, в котором уравнение диффузии имеет вид

$$\begin{aligned} - \frac{\epsilon_0}{4 \omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{U}}{dr} \right) f_n \frac{df_n}{dr} \overline{E_{r_a n}^2} + \frac{d}{dr} \left\{ \epsilon_0 \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{U}}{dr} \right) \left[\frac{f_n^2}{4 \omega_1^4 (\omega_{en}^2 + p_n^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[(r_a/r)^{n+1} + (r_a/r)^{-n+1}]^2}{2 \omega_1^4 \omega_H^2} \right] \right\} \overline{E_{r_a n}^2} = C. \end{aligned} \quad (9)$$

Для определения входящей в выражения для A и B фазовой скорости волны необходимо прежде всего учесть данные о структуре регулярной части электронного облака, полученные в [1]. Согласно этим данным, в большинстве практически интересных случаев, когда верхняя граница регулярной части электронного облака располагается на таком расстоянии от поверхности катода, которое значительно меньше его радиуса, единственным возможным состоянием пространственного заряда в регулярной части электронного облака является простейшее двухпоточное состояние. Постоянные распространения медленной волны в таком двухпоточном электронном облаке при условии $\omega_n \ll \omega_H$ были рассчитаны в [5]. Оказалось, что фазовая скорость волны при указанном условии близка к средней азимутальной скорости электронов в области вершин траекторий. Используя данные о структуре этой области из [1], можно показать, что эта средняя скорость примерно на 10% меньше, чем $\omega_H (r_{гр} - r_k)$, где $r_{гр}$ — радиус границы регулярной части электроно-

го облака, r_k — радиус катода. В соответствии с вышеизложенным мы будем полагать, что фазовая скорость волны равна $\gamma \omega_H (r_{rp} - r_k)$, $\omega_n = \frac{\gamma \omega_H (r_{rp} - r_k)}{r_k + \gamma (r_{rp} - r_k)} n \approx \frac{\gamma \omega_H (r_{rp} - r_k)}{r_k} n$, где $\gamma \approx 0,9^*$, откуда

$$\omega_{en} = \frac{\gamma \omega_H (r_{rp} - r_k)}{r_k} \left(1 - \frac{\frac{e}{m} \frac{d\bar{U}}{dr} \frac{1}{\omega_H} [\gamma r_{rp} + (1 - \gamma) r_k]}{r \gamma \omega_H (r_{rp} - r_k)} \right),$$

поскольку $\bar{\varphi} = \frac{e}{m} \frac{d\bar{U}}{dr} \frac{1}{\omega_H r}$. Таким образом, ω_1 и ω_{en} являются функциями

$\frac{d\bar{U}}{dr}$. Следовательно, уравнение (9), определяющее функцию $\bar{U}(r)$ — распределение потенциала в нерегулярной части электронного облака, является дифференциальным уравнением третьего порядка. При определении начальных условий учтем, что $r_{rp} - r_k \ll r_k$, и, следовательно, для расчета потенциала и поля на границе нерегулярной части электронного облака можно применять формулу плоского магнетрона:

$$\bar{U}(r_{rp}) = \frac{\omega_H (r_{rp} - r_k)^2}{2 e/m}, \quad \left(\frac{d\bar{U}}{dr} \right)_{r=r_{rp}+0} = \frac{\omega_H^2 (r_{rp} - r_k)}{e/m}.$$

Кроме того, будем считать, что $\varepsilon_0 \left(\frac{d^3 \bar{U}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{U}}{dr} \right)_{r=r_{rp}+0} = \Omega_0 \rho_{6p}$, где $\rho_{6p} = \omega_H^2 \varepsilon_0 / (e/m)$. По оценкам, выполненным в [7], $\Omega_0 \approx 0,03 \div 0,1$. Перейдем к безразмерным переменным $v = (e/m) \bar{U} / \omega_H^2 r_a^2$, $x = r/r_a$, $\Omega = \rho / \rho_{6p} = \rho (e/m) / \omega_H^2 \varepsilon_0$. В этих переменных из уравнения (9) и уравнения Пуассона можно получить уравнение для безразмерного потенциала:

$$\begin{aligned} & x \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} \right) \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{-n+1}} \right) \left[(n+1) \frac{1}{x^{n+2}} - (n-1) \frac{1}{x^{-n+2}} \right] + \\ & \frac{\left(1 - \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 4 \gamma^2 n^2 (x_{rp} - x_k)^2 \left\{ \left[1 - \frac{dv}{dx} \frac{\gamma x_{rp} + (1 - \gamma) x_k}{\gamma x (x_{rp} - x_k)} \right]^2 + \frac{1}{Q_n^2} \right\}}{x_k^2} + \\ & + \frac{d}{dx} \left\{ \left\{ \frac{x \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} \right) \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{-n+1}} \right)^2}{\left(1 - \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{4 \gamma^2 n^2 (x_{rp} - x_k)^2 \left\{ \left[1 - \frac{dv}{dx} \frac{\gamma x_{rp} + (1 - \gamma) x_k}{\gamma x (x_{rp} - x_k)} \right]^2 + \frac{1}{Q_n^2} \right\}}}{\right.} \right. \\ & \left. \left. + \frac{x \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} \right) \left(\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{1}{x^{-n+1}} \right)^2}{2 \left(1 - \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2} \right\} \right\} = -C_2, \end{aligned} \quad (10)$$

* Интегрирование уравнения диффузии при различных значениях величины γ показывает, что изменение ее от 0,95 до 0,85, т. е. в пределах точности указанного выше способа определения фазовой скорости, практически не сказывается на основных результатах настоящей работы.

где $C_2 = \frac{I \tau_n \omega_H^2 n^2}{2\pi \varepsilon_0 (e/m) E_{r,n}^2}$. (По экспериментальным данным $C_2 \sim 10^3$).

Это уравнение должно решаться при следующих начальных условиях:

$$v(x_{\text{гр}}) = \left(\frac{x_{\text{гр}} - x_{\text{к}}}{2} \right)^2, \quad v'(x_{\text{гр}}) = x_{\text{гр}} - x_{\text{к}}, \quad v'' + \frac{1}{x} v' = \Omega_0.$$

Кроме того, решение должно быть таким, чтобы

$$\Omega(r_a) = \frac{\rho(r_a)}{\rho_{\text{бр}}} = \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} \right)_{x=1} = 0,$$

так как поверхность анода является поглощающей границей для электронов. Последнее условие определяет величину Ω_0 как функцию параметра C_2 (при заданной величине $x_{\text{гр}}$ и $x_{\text{к}}$).

2. ПРЕДОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА В МАГНЕТРОНЕ

Расчет предосцилляционных распределений заряда и потенциала в нерегулярной части электронного облака магнетрона, т. е. решение уравнения (10) при указанных выше начальных условиях и подбор таких пар Ω_0 и C_2 , при которых $\Omega(1) = 0$, выполнялся с помощью ЭВМ. Были выполнены вычисления для целого ряда значений $x_{\text{к}}$ из интервала $0,35 \leq x_{\text{к}} \leq 0,55$, типичного для импульсных магнетронов, и таких значений $x_{\text{гр}}$, при которых $1,5 H_{\text{кр}} < H < 3 H_{\text{кр}}$. Расчеты показали, что распределения заряда и потенциала очень мало зависят от величины параметра C_2 в широком интервале, включающем экспериментальные значения $50 < C_2 < 1000 \div 2000$. Типичные результаты расчетов приведены на рис. 1, 2. Наиболее интересная особенность рассчитанных

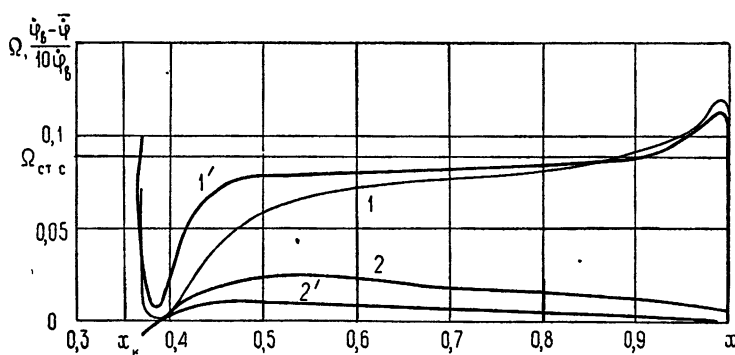


Рис. 1. Распределение заряда (I, I') и угловой скорости дрейфа электронов ($2, 2'$) в нерегулярной части электронного облака в цилиндрическом магнетроне при отношении радиуса катода к радиусу анода $x_{\text{к}} = 0,35$, $H/H_{\text{кр}} = 2,4$ и двух различных значениях безразмерной величины диффузионного тока: $1, 2$ при $C_2 = 100$; $1', 2'$ при $C_2 = 607$. В обоих случаях $n = 1$.

распределений пространственного заряда заключается в том, что в подавляющей части рассматриваемой области плотность заряда близка к плотности $\rho_{\text{стс}}$, соответствующей статическому синхронному режиму. (В рамках принятых здесь ограничений $\rho_{\text{стс}} = 2\rho_{\text{бр}}(x_{\text{гр}} - x_{\text{к}})/x_{\text{гр}}$ и $\Omega_{\text{стс}} = 2(x_{\text{гр}} - x_{\text{к}})/x_{\text{гр}}$). Она заметно отличается от $\rho_{\text{стс}}$ только в небольшой области вблизи границы регулярной части электронного облака, где кривая плотности заряда проходит через минимум, в котором $\rho \ll \rho_{\text{стс}}$ (см. рис. 1 и 2). Эта особенность распределения плотности

заряда в нерегулярной части электронного облака может быть объяснена на основе соображений, изложенных во Введении. Если $\rho(r_{\text{гр}} + 0) < \rho_{\text{ст с}}$, то при увеличении r от $r = r_{\text{гр}}$ угловая скорость φ падает и в некоторой точке $r = r_{\text{мин}}$ становится равной $\dot{\varphi}_в$. Очевидно, что при этом

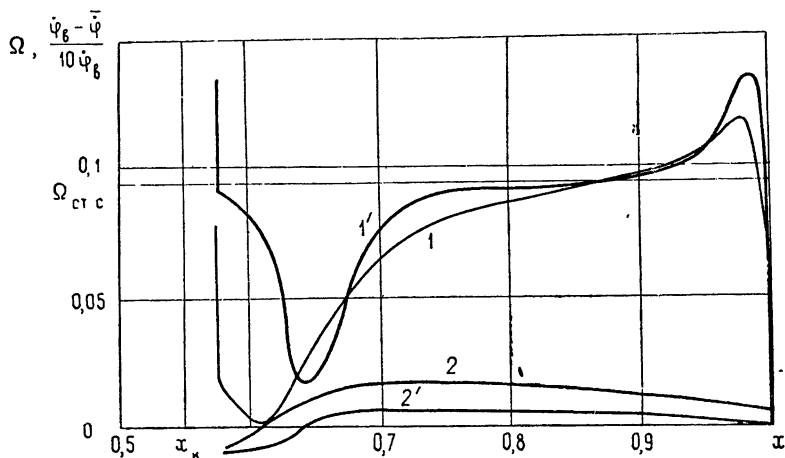


Рис. 2. Распределение заряда (I, I') и угловой скорости дрейфа электронов ($2, 2'$) в нерегулярной части электронного облака в цилиндрическом магнетроне при отношении радиуса катода к радиусу анода $x_k = 0,55$, $H/H_{\text{кр}} = 2,1$ и двух различных значениях безразмерной величины диффузионного тока: $1, 2$ при $C_2 = 104$; $1', 2'$ при $C_2 = 674$. В обоих случаях $n = 1$.

диффузия электронов сильно растет, точнее, коэффициенты диффузионного уравнения A и B возрастают и становятся максимальными, а плотность заряда соответственно убывает и приближается к минимальной величине. При дальнейшем увеличении r угловая скорость дрейфа электронов продолжает уменьшаться, так как по-прежнему $\rho \ll \rho_{\text{ст с}}$.

Это приводит к быстрому уменьшению A и B и к столь же быстрому росту плотности заряда до величины, близкой к $\rho_{\text{ст с}}$. Поскольку это достигается при $0 < \Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_в - \dot{\varphi} \ll \dot{\varphi}_в$, создаются условия для эффективного «автоматического» регулирования плотности заряда на уровне, близком к $\rho_{\text{ст с}}$. Действительно, пусть, например, из-за каких-то факторов на отрезке Δr плотность заряда возрастает. Это приводит к уменьшению $\Delta\dot{\varphi}$ и, в силу того, что A и $B \sim 1/(\Delta\dot{\varphi})^2 + p^2$, к их значительному увеличению. Поэтому исходное увеличение плотности заряда при дальнейшем увеличении r в значительной степени компенсируется.

Повторяя аналогичные рассуждения при $\rho(r_{\text{гр}} + 0) > \rho_{\text{ст с}}$, легко убедиться, что при этом условии плотность заряда с ростом радиуса может только быстро возрастать. Этот вывод подтверждается результатами расчетов. Оказывается, что при $\Omega_0 > \rho_{\text{ст с}}/\rho_{\text{бр}}$ величина ρ быстро возрастает, и по порядку величины приближается к $\rho_{\text{бр}}$. Вследствие этого решения уравнения (10), удовлетворяющие требованию $\Omega(1) = 0$, становятся возможными только при магнитной индукции, близкой к критической, т. е. в случаях, не имеющих большого практического значения.

Таким образом, в практически важных случаях предгенерационное состояние пространственного заряда в цилиндрическом магнетроне близко к статическому синхронному режиму. Этот основной результат настоящей работы подтверждается зондовыми измерениями в магнетронах с тонкими катодами [8]. Недавно он был подтвержден и измере-

ниями распределения потенциала в магнетроне с толстым катодом, выполненными на кафедре электроники Горьковского государственного университета, результаты которых будут опубликованы в ближайшее время. Кроме того, его косвенным экспериментальным подтверждением является «мягкое» возбуждение рабочих колебаний в магнетронных генераторах, так как необходимым условием такого возбуждения колебаний в магнетроне является наличие статического синхронного режима в нерегулярной части его электронного облака [9, 10]. Это подчеркивает значение результатов настоящей работы для построения теории возбуждения магнетронного генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Л. С. Родыгина, А. Д. Юнаковский, Тезисы докладов на VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ, Минск, 1969, стр. 124.
2. В. А. Бербасов, С. В. Степанов, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1423 (1968).
3. Л. М. Грошков, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 11, 18 (1969).
4. М. И. Кузнецов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, № 12, 83 (1970).
5. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 2, 340 (1962).
6. С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения приборов магнетронного типа, изд. Сов. радио, М., 1967.
7. М. И. Кузнецов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 11, 28 (1969).
8. O. Dochler, Ann. de Radioel., 3, 27 (1948).
9. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, 1, изд. АН СССР, М., 1962.
10. Г. Ф. Филимонов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 11, 78 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
26 февраля 1971 г.

PRE-OSCILLATION CHARGE DISTRIBUTION IN A CYLINDRICAL MAGNETRON

M. I. Kuznetsov, V. A. Berbasov, I. N. Zheleztsova

The diffusion equation is obtained for a cylindrical magnetron on the basis of assumptions on the nature of the diffusion electron motion in a magnetron discussed in the previous papers by the authors in application to a plane magnetron. By solving this equation it is clarified that at least, at $H > 1,5 H_{cr}$ the major part of the electron cloud is in the regime close to the static synchronous one.

УДК 621.375.126

ВОПРОСЫ СОЗДАНИЯ УЗКОПОЛОСНОГО ПЕРЕСТРАИВАЕМОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

В. А. Ванке, А. А. Зайцев, С. П. Крюков, В. М. Лопухин

Проанализирована возможность создания узкополосного перестраиваемого усилителя-фильтра на основе дифтрона. Показана целесообразность использования однорядной гребенки в качестве входного и выходного устройств связи усилителя. Проведен численный расчет параметров.

Рассмотрены физические процессы при комбинированном взаимодействии электронного потока с замедляющей системой и электростатическим полем накачки. Показана возможность частичного или полного объединения отдельных секций усилителя в единую систему. Приведены численные оценки.

В ряде технических приложений возникает необходимость использования на входе радиоприемной системы узкополосного электрически перестраиваемого усилителя-фильтра, обладающего, с одной стороны, достаточно низким уровнем собственных шумов, с другой, — высокой электрической прочностью в сочетании с широким динамическим диапазоном.

Используемые в настоящее время для этих целей ЛОВ-усилители не решают в полной мере этой задачи. Появление двухкаскадных ЛОВ заметно повысило стабильность усиления по отношению к пульсациям питающих напряжений, токов и т. д. [1], но не исключило регенеративного принципа усиления, приводящего к неустойчивости фильтрационной характеристики, к ее деформации под действием мощной помехи.

Параметрические и электростатические электронно-лучевые усилители [2, 3] обладают весьма низким уровнем собственных шумов, высокой электрической прочностью, широким динамическим диапазоном. Усиление в таких приборах широкополосно, а полоса определяется только пассивными устройствами связи, которые, однако, являются резонансными и не позволяют осуществлять перестройку по частоте.

Возникает естественный вопрос о возможности замены резонансных элементов связи в таких приборах распределенными с сохранением пассивного характера энергообмена с электронным потоком и обеспечением столь же высокой степени селективности взаимодействия лишь с рабочей (быстрой циклотронной) волной электронного потока. С этой точки зрения, например, синфазно возбуждаемая двухзаходная спираль, предложенная ранее [4] и обладающая существенно неоднородными по поперечному сечению полями, вряд ли пригодна для этих целей.

1. УСИЛИТЕЛЬ-ФИЛЬТР НА ОСНОВЕ ДИФТРОНА

Схема перестраиваемого дифтрона показана на рис. 1 а. Электронный поток взаимодействует с поперечными полями входного 3 и выходного 5 элементов связи, каждый из которых представляет собой замедляющую систему с бегущей электромагнитной волной. В первом из них при определенных условиях внешний сигнал полностью перекачивается в быструю циклотронную волну электронного потока, а затем после прохождения зоны усиления 4 извлекается из него во втором.

Механизм формирования низкого уровня собственных шумов (высокое значение напряженности магнитного поля на поверхности катода с последующим его адиабатическим снижением) и принцип усиления (в периодическом электростатическом поле) зоны 4—те же, что и в обычном дифтроне [2,3].

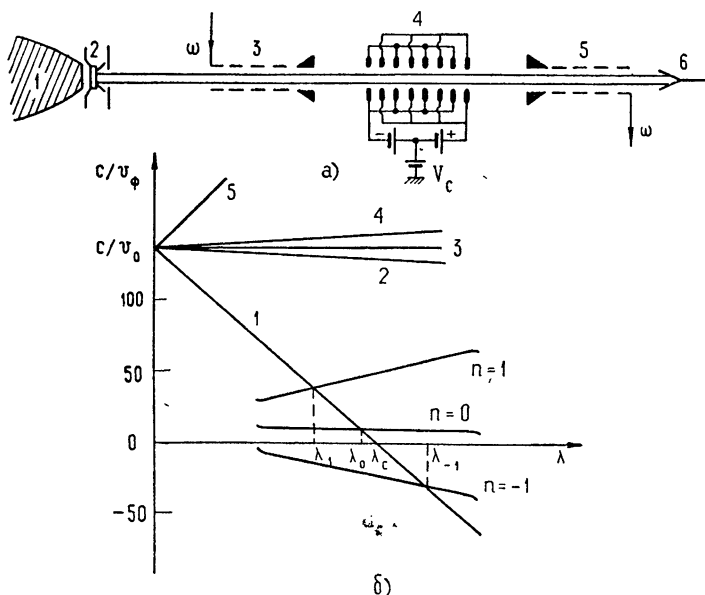


Рис. 1. а) Схема перестраиваемого усилителя-фильтра на основе дифтрона:

1—ферромагнитный наконечник, 2—электронная пушка, 3—входное распределенное устройство связи, 4—зона усиления, 5—выходное распределенное устройство связи, 6—коллектор.

б) Дисперсионные характеристики волн электронного потока и замедляющей системы:

1—быстрая циклотронная волна, 2—быстрая волна пространственного заряда, 3—синхронные волны, 4—медленная волна пространственного заряда, 5—медленная циклотронная волна; $n=1$, $n=0$, $n=-1$ —соответственно первая, нулевая и минус первая пространственные гармоники замедляющей системы; λ_1 , λ_0 , λ_{-1} —рабочие длины волн для соответствующих пространственных гармоник; $\lambda_c = (c/2\pi)\omega_c$ —циклотронная длина волн.

Дисперсионные зависимости фазовых скоростей волн замедляющей системы и электронного потока представлены на рис. 1 б. Если продольную скорость потока выбрать достаточно низкой (10—20 σ), то фазовые скорости синхронных 3, медленной циклотронной 5 и волн пространственного заряда 2, 4 резко отличны от фазовой скорости волны в замедляющей системе и возможно селективное взаимодействие с быстрой циклотронной волной потока. Синхронизм фазовых скоростей взаимодействующих волн достигается лишь в одной точке, т. е. взаимодействие узкополосно, но средняя частота может перестраиваться электрически в широких пределах путем изменения напряженности магнитного поля (т. е. λ_c на рис. 1 б).

Взаимодействие быстрой циклотронной волны возможно с различными пространственными гармониками (рис. 1 б), в том числе и с обратными. В последнем случае энергообмен остается пассивным (отсутствует регенерация), так как циклотронная частота при этом выше рабочей ($\lambda_c < \lambda_{-1}$) и групповые скорости волн в потоке и системе на-

правлены в одну и ту же сторону, а взаимодействие осуществляется только с быстрой волной потока.

Математический анализ энергообмена электронного потока с полем распределенного устройства связи сводится к совместному решению уравнений пучка и структуры. Используя аппарат связанных волн и отбрасывая невзаимодействующие волны (рис. 1 б), можно получить известную систему уравнений, описывающих типичный пассивный энергообмен быстрой циклотронной волны потока с волной замедляющей системы (см., например, [5]). В случае точного синхронизма фазовых скоростей взаимодействующих волн на длине

$$L_{\text{dip}} = \pi/2 |k| \quad (1)$$

(где $|k|$ — коэффициент пассивной связи волн [6]) осуществляется полный энергообмен, т. е. вся энергия быстрой циклотронной волны переходит в замедляющую систему и наоборот. В более общем случае коэффициент передачи мощности (см. [5])

$$F_P(\omega) = \frac{|k|^2 \sin^2 [V(\beta_0 - \beta_1)^2/4 + |k|^2 L_{\text{dip}}]}{(\beta_0 - \beta_1)^2/4 + |k|^2} \quad (2)$$

(β_0 и β_1 — постоянные распространения волны в замедляющей системе и быстрой циклотронной волны) зависит от частоты и определяет фильтрационную характеристику распределенного устройства связи. Ширина полосы пропускания зависит от степени связи пучка с системой, т. е. от величины коэффициента $|k|$. С ростом $|k|$ уменьшается длина системы, но полоса расширяется, и наоборот.

При выборе конкретной замедляющей структуры для устройства связи перестраиваемого усилителя-фильтра важно, чтобы поперечное поле рабочей пространственной гармоники было интенсивно и однородно по сечению канала взаимодействия и, наоборот, продольные поля в этой области должны быть сравнительно невелики. Такая ситуация имеет место, например, для ± 1 пространственных гармоник при противофазном возбуждении двухзаходной спирали и двойных встречных штырей. Расчеты, основанные на использовании известных выражений для полей (см., например, [7, 8]), показывают, однако, что, наиболее перспективно применение однородной плоской гребенки*, поперечное поле нулевой пространственной гармоники в которой наиболее интенсивно и однородно.

Именно для нулевой пространственной гармоники крутизна изменения набег фазы в усилителе при его перестройке по диапазону оказывается наиболее низкой ($c/v_\phi \approx \text{const}$ для $n = 0$), что также является весьма желательным для многих практических приложений.

Дисперсионная характеристика нулевой пространственной гармоники для конкретного варианта гребенки и распределение продольного и поперечного полей в зазоре представлены на рис. 2 а и б. При этом нижняя и верхняя границы полосы пропускания равны соответственно $\lambda_{\text{min}} \approx 3$ см и $\lambda_{\text{max}} > 10$ см. Реальный диапазон перестройки, таким образом, будет определяться, в основном, областью согласования коаксиальной (или волноводной) линии с гребенкой.

При токе электронного луча $I_0 = 150$ мка и продольном потенциале потока $V_0 \approx 13$ в для длины волны $\lambda = 6$ см гребенка, изображенная на рис. 2 а, имеет сопротивление связи $Z_0 \approx 42 \Omega$ и длину $L_{\text{dip}} \approx 50$ мм. Относительно потери мощности из-за невыполнения dip-условия (1) в пределах всего диапазона перестройки незначительны и составляют на

* В этом случае целесообразно использование в усилителе ленточного электронного потока.

нижней границе ($\lambda = 3$ см) не более 4%, на верхней ($\lambda = 10$ см)—менее 2%.

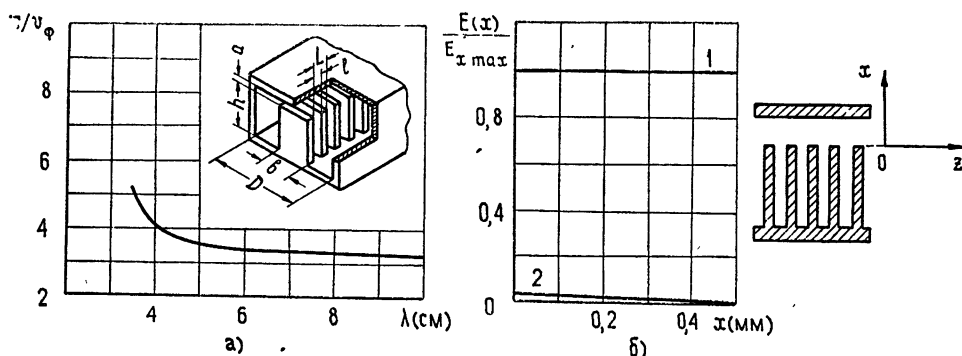


Рис. 2. Дисперсионная характеристика нулевой пространственной гармоники (а) и распределение ВЧ электрических полей (б) однорядной плоской гребенки:

1—поперечное поле, 2—продольное поле; $h=7$ мм; $a=0,5$ мм; $b=4$ мм; $L=1,6$ мм; $l=1,0$ мм.

Фильтрационная характеристика усилителя с такого рода устройствами связи приведена на рис. 3 (сплошная кривая).

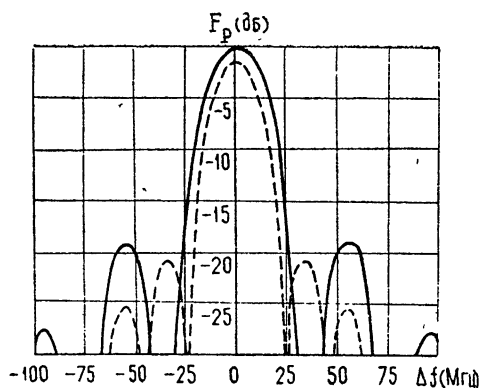


Рис. 3. Фильтрационные характеристики усилителя-филтра на основе дифтрона. Сплошная кривая соответствует нулевой расстройке между входным и выходным устройствами связи ($\delta f = 0$), пунктирная—расстройке $\delta f = 20$ МГц.

Можно получить дополнительное подавление боковых максимумов, если тем или иным способом ввести небольшую расстройку между входным и выходным устройствами связи, так чтобы минимумы фильтрационной характеристики одного из них приходились на боковые максимумы характеристики другого (пунктирная кривая на рис. 3).

Перестройка усилителя по диапазону осуществляется изменением двух параметров—величины магнитного поля и потенциала синхронизма в зоне усиления. Возможно, однако, использование комбинированного соленоида, позволяющего перестраивать поле во входном и выходном устройствах связи при неизменной величине магнитного поля в зоне усиления. В этом случае необходимость изменения потенциала синхронизма отпадает.

2. УСИЛИТЕЛЬ-ФИЛЬТР С КОМБИНИРОВАННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Физически интересной представляется возможность объединения в усилителе, изображенном на рис. 1 а, входного и выходного устройств связи с зоной усиления, т. е. использование единой комбинированной замедляющей системы (рис. 4 а).

Такая система должна, очевидно, представлять собой не монолитную замедляющую структуру, а иметь более сложную конструкцию, например, состоять из двух изолированных по постоянному току «подсистем», вставленных друг в друга и находящихся под разными потенциалами. Для СВЧ составляющей комбинированная замедляющая система должна быть эквивалентна обычному распределенному устройству связи, а электрическое разделение подсистем по постоянному току позволяет одновременно наложить на поток плоское периодическое поле электростатической накачки. Один из вариантов такой системы в случае использования двухрядной плоской гребенки изображен на рис. 4 б.

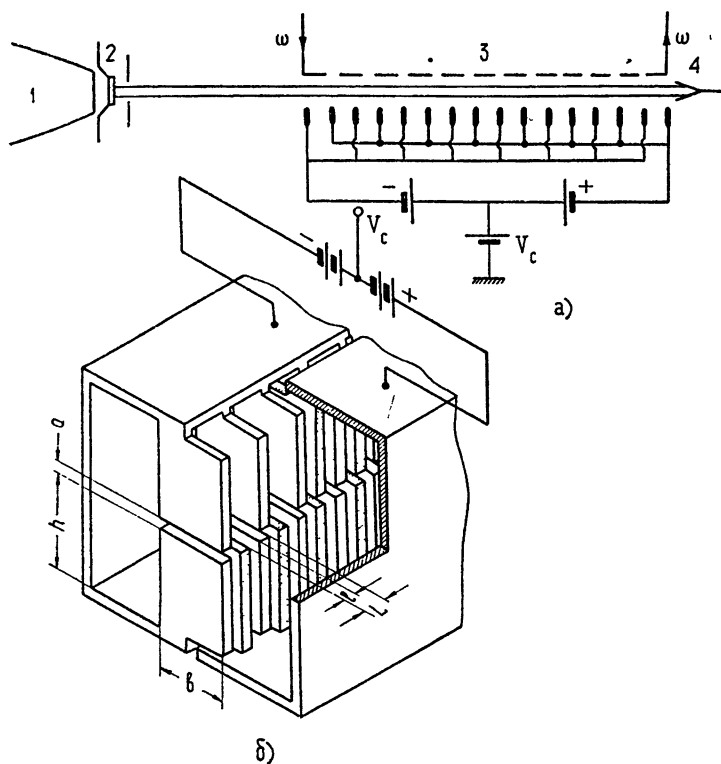


Рис. 4. Схема перестраиваемого усилителя-фильтра с комбинированной замедляющей системой (а) и один из вариантов такой системы (б):

1—ферромагнитный наконечник, 2—электронная пушка, 3—комбинированная замедляющая система, 4—коллектор.

Присутствие поля накачки усложняет физическую картину взаимодействия электронного потока с устройством связи, которая требует для своего описания уже учета трех волн: волны замедляющей системы и двух активно связанных циклотронных волн электронного потока. Благодаря активной связи, возникающей за счет электростатического поля накачки, происходит нарастание амплитуд циклотронных волн

одна из которых (быстрая) пассивно связана с волной замедляющей системы*.

Для эффективного взаимодействия волн необходимы, во-первых, синхронизм быстрой циклотронной волны с рабочей гармоникой замедляющей системы (рис. 1 б) и, во-вторых, выполнение условия активной связи быстрой и медленной циклотронных волн потока (условия усиления)

$$\beta_t = 2\beta_c, \quad (3)$$

где $\beta_t = 2\pi/\Lambda$, Λ — период квадрупольной компоненты поля накачки, β_c — циклотронная постоянная распространения.

Поскольку $\beta_c = \omega_c/v_0$ (v_0 — постоянная скорость потока, ω_c — циклотронная частота), то для перестройки усилителя по диапазону необходимо менять одновременно магнитное поле и потенциал луча (при этом прямая 1 на рис. 1 б будет перемещаться параллельно самой себе).

Используя обычное представление для потенциала квадрупольной компоненты поля накачки

$$V_n(x, y, z) = \frac{V_{0n}}{b^2} (x^2 - y^2) \cos \beta_t z, \quad (4)$$

где V_{0n} — эффективная амплитуда потенциала накачки, а b — эффективный размер зоны накачки, можно получить следующую систему уравнений, описывающих процессы энергообмена волн электронного потока с комбинированным устройством связи:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\beta_0 \right) a_0 &= k a_1, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\beta_1 \right) a_1 &= -k^* a_0 + c \exp(j\beta_t z) a_2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} + j\beta_2 \right) a_2 &= c^* \exp(-j\beta_t z) a_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь a_0 , a_1 и a_2 — соответственно волна в замедляющей системе, быстрая и медленная циклотронные волны, β_0 , β_1 , β_2 — их постоянные распространения, $c = j \frac{\eta V_{0n}}{b^2 \omega_c v_0}$, η — удельный заряд электрона.

При отсутствии накачки ($c = 0$) (5) переходит в обычную систему уравнений, описывающих пассивный энергообмен двух волн (см., например, [5, 6]).

Решение уравнений (5) с учетом соответствующих граничных условий позволяет рассчитать усилительные, шумовые и фильтрационные характеристики прибора.

Для коэффициента усиления по мощности G соответствующий расчет дает

$$G = \frac{P_0(z)}{P_0(0)} = \left(1 + \frac{|k|^2}{\alpha^2} - \frac{|k|^2}{\alpha^2} \operatorname{ch} \alpha z \right)^2, \quad (6)$$

где $P_0 = |a_0|^2$ — мощность, переносимая волной системы, z — длина зоны взаимодействия, $\alpha = \sqrt{|c|^2 - |k|^2}$.

* Этот механизм взаимодействия существенно отличается от принципа действия ЛБВ на поперечных волнах [9], где волна системы связана непосредственно с медленной циклотронной волной потока, что требует, как правило, высоких потенциалов луча. Комбинированное взаимодействие позволяет заметно снизить потенциал потока (рис. 1б) и обеспечить надежную развязку с синхронными волнами и волнами пространственного заряда в электронном потоке.

При $|c| = 0$ (рис. 5 а) происходит обычная пассивная перекачка энергии без усиления. При увеличении коэффициента накачки $|c|$ появляется усиление, но энергообмен остается периодическим, так как преобладает пассивная связь. При критическом значении накачки $|c| = |k|$ характер связи меняется и при $|c| > |k|$ полностью превалирует активная связь.

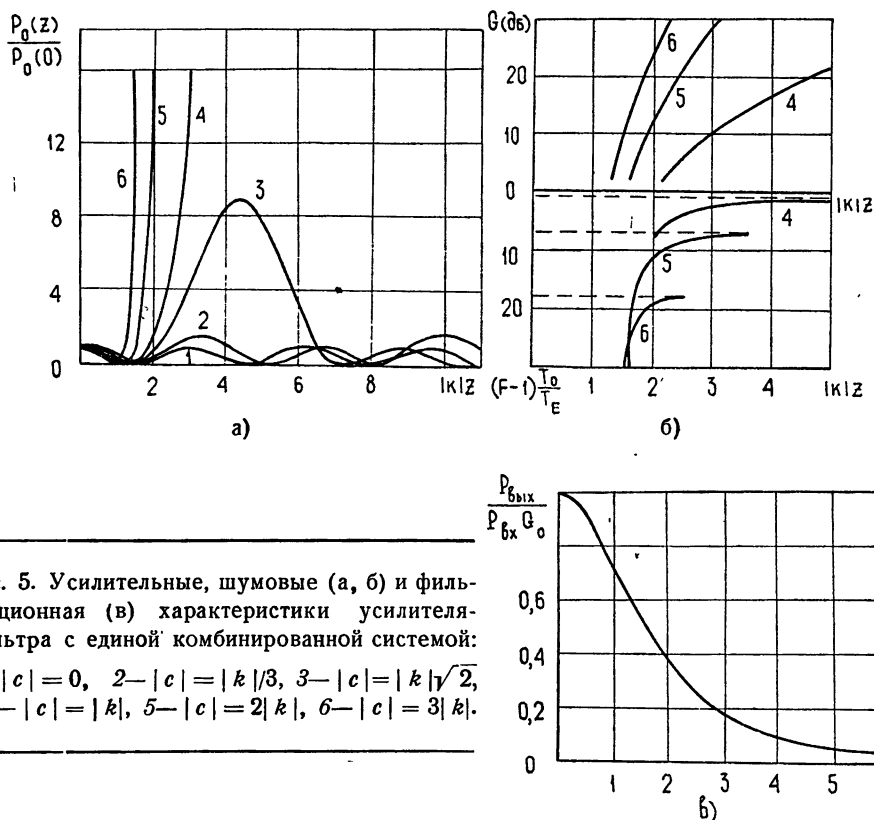


Рис. 5. Усилительные, шумовые (а, б) и фильтрующая (в) характеристики усилителя-фильтра с единой комбинированной системой:

1 — $|c| = 0$, 2 — $|c| = |k|/3$, 3 — $|c| = |k|/\sqrt{2}$, 4 — $|c| = |k|$, 5 — $|c| = 2|k|$, 6 — $|c| = 3|k|$.

Зависимость G от $|k|z$ в децибелах приведена на рис. 5 б.

Коэффициент шума усилителя F с единой комбинированной системой определяется выражением

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0} \frac{|c|^2 |k|^2 (\text{ch } \alpha z - 1)^2 + |a|^2 |k|^2 \text{sh}^2 \alpha z}{\alpha^4 [1 + (|k|^2 / \alpha^2) (1 - \text{ch } \alpha z)]^2} \quad (7)$$

(T_e — эквивалентная температура шумов циклотронной волны на входе в область взаимодействия, $T_0 = 290^\circ\text{K}$) и графически представлен на рис. 5 б в зависимости от $|k|z$ для трех значений коэффициента накачки. Увеличение $\lim_{|k|z \rightarrow \infty} (F-1) \frac{T_0}{T_e}$ при возрастании накачки

объясняется тем, что сигнал в рассматриваемом усилителе начинает усиливаться позднее, чем шумы. К тому моменту, когда сигнал начинает возрастать (рис. 5 а), шумовые мощности волн a_1 и a_2 уже имеют некоторое усиление, тем больше, чем больше величина накачки, а это и приводит к уменьшению отношения сигнал/шум на выходе системы. С уменьшением $|c|$ коэффициент шума прибора уменьшается, но возрастает его длина.

Фильтрационная характеристика комбинированного устройства связи $P_{\text{вхх}}(\xi)/P_{\text{вх}} G_0$ ($\xi = (\beta_1 - \beta_0)/|k|$, $G_0 = G|_{\xi=0}$) изображена на рис. 5 в для $|c|=|k|$ и $|k|z=4,5$ (при этом (рис. 5 б) усилитель имеет низкий коэффициент шума и обладает усилением ~ 20 дб). Полоса усилителя приблизительно в три раза шире, чем у фильтра на базе дифтрона, что объясняется присутствием накачки, действие которой до некоторой степени эквивалентно увеличению коэффициента пассивной связи.

При использовании в усилителе комбинированного взаимодействия возможны и такие варианты прибора, когда с зоной усиления объединены не оба устройства связи, а лишь одно из них.

При объединении области накачки с выходным устройством входной сигнал в комбинированную структуру поступает на быстрой циклотронной волне, и, наоборот, если усилитель имеет комбинированное входное устройство, то в качестве выходного сигнала используется сигнал, переносимый быстрой циклотронной волной потока.

Усилительные, шумовые и фильтрационные характеристики этих вариантов могут быть получены также из (5) при учете соответствующих граничных условий. Качественно поведение коэффициента усиления и фильтрационной характеристики этих приборов не отличается от поведения соответствующих кривых усилителя с единой замедляющей системой. Коэффициент шума усилителя с отдельным входным устройством связи

$$F=1+\frac{T_e}{T_0} \frac{|c|^2}{|a|^2} \frac{(\operatorname{ch} \alpha z - 1)^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha z} \quad (8)$$

ведет себя существенно иначе, уменьшаясь с увеличением накачки. Это объясняется тем, что при малой накачке более интенсивно усиливается медленная циклотронная волна, содержащая на входе только шумовую мощность, в то время как усиление сигнала на волне a_1 довольно мало. При увеличении накачки усиление волн a_1 и a_2 выравнивается и

$$F \approx 1 + T_e/T_0. \quad (9)$$

Для усилителя с отдельным выходным устройством связи коэффициент шума

$$F=1+\frac{T_e}{T_0} \left(\frac{|a|^2}{|k|^2} \operatorname{cth}^2 \alpha z + \frac{|c|^2}{|k|^2} \right) \quad (10)$$

подобно (7) возрастает с увеличением накачки. При $|c|=|k|$ и достаточном усилении F определяется формулой (9).

Практически комбинированная система может быть реализована, например, на базе двухрядной плоской гребенки (рис. 4 б), обладающей при противозонном возбуждении значительным сопротивлением связи, однородным поперечным и слабым продольным ВЧ полями.

При размерах гребенки $h=10$ мм, $L=1,5$ мм, $a=l=0,5$ мм, $b=4$ мм, токе луча $I_0=1$ ма и $\lambda=8$ см для усилителя с единой замедляющей структурой при $|k|z=4,5$ и $|c|=|k|$ (см. рис. 5 б) длина комбинированного устройства связи L_0 оказывается равной 39 см, для $\lambda=16$ см $L_0=20$ см. Усилитель с комбинированным выходным устройством обладает малыми шумами при больших значениях параметра накачки (рис. 5 б), и это значительно сокращает длину комбинированной системы: при $|k|z=1,5$ и $|c|=3|k|$ для $\lambda=8$ см $L_0=13$ см, для $\lambda=16$ см $L_0=7$ см.

Полоса пропускания рассматриваемого усилителя с единой комбинированной системой при $\lambda = 8$ см $\Delta f \approx 120$ МГц, с отдельным входным устройством связи — 60 МГц. Обычный усилитель-фильтр на основе ЭСУ с отдельными входным и выходным устройствами связи имеет полосу $\Delta f \approx 40$ МГц.

По-видимому, нет принципиальных причин, затрудняющих реализацию электрически перестраиваемого электростатического усилителя-фильтра, обладающего стабильной фильтрационной характеристикой в сочетании с низким уровнем собственных шумов и широким динамическим диапазоном.

Уже существующие замедляющие системы обладают достаточной однородностью и интенсивностью поперечных электрических полей и могут быть с успехом использованы для узкополосного взаимодействия с циклотронными волнами электронного потока. Работы по созданию специальных замедляющих систем, вероятно, могли бы привести к дальнейшему улучшению параметров фильтра.

Использование комбинированного взаимодействия позволяет частично и полностью объединить узлы прибора в единую систему, сохраняя стабильность фильтрационной характеристики и низкий уровень собственных шумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. R. Currie, J. R. Whinnery, Proc. IRE, 43, № 11, 1617 (1955).
2. В. М. Лопухин, А. С. Рашаль, Электроннолучевые параметрические усилители, изд. Сов. радио, М., 1968.
3. В. А. Ванке, В. М. Лопухин, В. Л. Саввин, УФН, 99, № 12, 546 (1969).
4. S. Mao, Tubes pour hyperfrequencies, Proc. of 5th Intern. Congress on Microwave Tubes (Paris, 1964), N. Y.—London, Acad. Press., 1965, p. 109.
5. У. Люиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИЛ, М., 1963.
6. C. C. Johnson, IRE Trans., ED-9, № 3, 288 (1962).
7. Ю. Г. Альтшулер, А. С. Татаренко, Лампы малой мощности с обратной волной, изд. Сов. радио, М., 1963.
8. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
9. J. E. Carroll, Tubes pour hyperfrequencies, Proc. of 5th Intern. Congress on Microwave Tubes (Paris, 1964), N. Y.—London, Acad. Press, 1965, p. 68.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
26 апреля 1971 г.

THE PROBLEMS OF DESIGNING A NARROW-BAND RETUNED DC-PUMPED AMPLIFIER

V. A. Vanke, A. A. Zaitsev, S. P. Kryukov, V. M. Lopukhin

The possibility of designing a narrow-band retuned amplifier-filter on the basis of diffron has been analysed. It is shown that a single-row comb is expedient to be used as the input and output couplers of the amplifier. The parameters are numerically calculated.

The physical processes at the combined interaction between the electron beam with a slow-wave circuit and the dc-pumped field have been considered. The possibility of partial or full combination of separated sections into the whole system is shown. The numerical estimations are given.

УДК 621.3.055

ОБ УМНОЖЕНИИ ЧАСТОТЫ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В n —InSb

В. А. Козлов, В. И. Пискарев

Экспериментально исследована генерация третьей гармоники в n —InSb при температуре 77°K в миллиметровом диапазоне длин волн. Результаты сравниваются с теоретическим расчетом в предположении, что нелинейная восприимчивость обусловлена непараболичностью зоны проводимости.

Вопросам преобразования частоты электромагнитного излучения в объемных полупроводниках уделяется в настоящее время большое внимание. В частности, в ряде работ [1–5] описано умножение частоты на «горячих» электронах в сантиметровом диапазоне длин волн. Умножение частоты может быть связано не только с разогревом, но и с особенностями закона дисперсии носителей в зоне. С увеличением частоты роль разогрева в умножении, естественно, должна падать, и при достаточно высоких частотах основной вклад в нелинейность могут давать механизмы, связанные с непараболичностью зоны. Так, в работе [6] показано, что умножение частоты в чистом n —InSb при температуре жидкого азота в миллиметровом диапазоне длин волн происходит, в основном, за счет непараболичности зоны проводимости. К этому выводу авторы [6] пришли косвенным путем, анализируя результаты эксперимента по самовоздействию электромагнитной волны в полупроводниковой плазме. В настоящей работе эффект утроения частоты электромагнитного поля в полупроводнике n —InSb в миллиметровом диапазоне длин волн исследован более подробно. Проведено сопоставление экспериментальных результатов с расчетами, выполненными в предположении, что нелинейная восприимчивость для утроения обусловлена непараболичностью зоны проводимости; при этом учитывалось влияние сильного поля накачки на условия излучения третьей гармоники. Изменение условий излучения происходит потому, что в сильных полях параметры полупроводника (эффективная масса электронов m^* и частота столкновений ν), а следовательно, и комплексная диэлектрическая проницаемость заметно меняются с изменением поля накачки E (см., например, [6]). Строгий расчет мощности третьей гармоники предполагает решение уравнений Максвелла совместно с нелинейными материальными уравнениями и представляет собой весьма сложную задачу. Ее можно существенно упростить, если воспользоваться условием малости поля на частоте 3ω по сравнению с полем накачки и заменить в материальных уравнениях $\nu(E)$ и $m^*(E)$ средними по объему значениями, зависящими лишь от мощности накачки. Эти средние по объему значения могут быть найдены из экспериментов по самовоздействию.

Для пояснения сделанных при расчете предположений рассмотрим поведение электронов проводимости в дрейфовом приближении [7]. Уравнение движения электрона в поле E имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = -eE + g. \quad (1)$$

Здесь p — квазиимпульс электрона, $-e$ — заряд электрона, g — сила трения, испытываемая электроном со стороны других частиц. Силу трения электронов g можно приближенно описать выражением $g = -\nu(p^2, T)p$, где ν представляет из себя частоту столкновений, а T — электронную температуру, которая может отличаться от температуры решетки T_p . Для учета непараболичности зоны проводимости InSb воспользуемся кейновским законом дисперсии, который хорошо описывает зону проводимости InSb [8]:

$$\varepsilon(p) = \frac{\varepsilon_g}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2p^2}{m^* \varepsilon_g}} - 1 \right). \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon(p)$ — энергия электрона с квазиимпульсом p , ε_g — ширина запрещенной зоны, m^* — эффективная масса на дне зоны проводимости. Представляя правую часть (2) в виде ряда по малому параметру $p^2/m^* \varepsilon_g$ и ограничиваясь первыми членами разложения, получим, что плотность тока электронов проводимости имеет вид

$$j = -en \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = -\frac{en}{m^*} p \left(1 - \frac{p^2}{m^* \varepsilon_g} \right), \quad (3)$$

где n — концентрация электронов.

Запишем величины E , p , j , T в виде*

$$\begin{aligned} E &= E_1 e^{i\omega t} + E_1^* e^{-i\omega t} + E_3 e^{i3\omega t} + E_3^* e^{-i3\omega t}, \\ p &= p_1 e^{i\omega t} + p_1^* e^{-i\omega t} + p_3 e^{i3\omega t} + p_3^* e^{-i3\omega t}, \\ j &= j_1 e^{i\omega t} + j_1^* e^{-i\omega t} + j_3 e^{i3\omega t} + j_3^* e^{-i3\omega t}, \\ T &= T_- + T_2 e^{i2\omega t} + T_2^* e^{-i2\omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

полагая, что в рассматриваемом интервале полей

$$|E_3| \ll |E_1|, \quad |p_3| \ll |p_1|, \quad |j_3| \ll |j_1|, \quad |T_2| \ll |T_-|.$$

Следует отметить, что постоянная составляющая электронной температуры T_- зависит от поля накачки и в сильных полях существенно отличается от температуры решетки T_p . Подставим выражения (4) в уравнение (3) и выделим члены нулевого и первого порядков малости по $|E_3/E_1|^2$, изменяющиеся с частотой ω и 3ω . Считая поле E линейно поляризованным, получим

$$j_1 = -\frac{en}{m^*} p_1 + \frac{en}{(m^*)^2} \frac{3|p_1|^2 p_1}{\varepsilon_g}, \quad (5)$$

$$j_3 = -\frac{en}{m^*} p_3 + \frac{en6|p_1|^2 p_3}{(m^*)^2 \varepsilon_g} + \frac{en}{(m^*)^2 \varepsilon_g} p_1^3. \quad (6)$$

Для того, чтобы совершить аналогичный переход от уравнения (1) к уравнениям для комплексных амплитуд, необходимо детальное знание функции $\nu(p^2, T)$. Однако, не конкретизируя вида функции $\nu(p^2, T)$, предположим**, что разогрев не дает вклада в нелинейную восприимчивость, а лишь меняет условия излучения третьей гармоники, что проявляется через зависимость $\nu(T_-)$. Тогда при выделении из

* Комплексные амплитуды в этих выражениях зависят от координат.

** Из результатов работы [9] следует, что такое предположение является вполне оправданным.

уравнения (1) членов, изменяющихся с частотой ω и 3ω , можно отбросить члены, дающие вклад в изменение ν через переменную составляющую температуры T_2 и квадрат импульса. Таким образом, дальше будет учитываться самовоздействие и влияние накачки на проводимость на частоте 3ω лишь через постоянную составляющую электронной температуры и непараболичность зоны проводимости. При этом предположении из уравнения (1) получим

$$i\omega p_1 + \nu(T_{=})p_1 = -eE_1; \quad (7)$$

$$i3\omega p_3 + \nu(T_{=})p_3 = -eE_3. \quad (8)$$

Уравнения (5) — (8) позволяют найти проводимость на частоте ω , а также проводимость и нелинейный сторонний ток на частоте 3ω :

$$\sigma_1 = -\frac{ie^2 n}{m^*[\omega - i\nu(T_{=})]} \left\{ 1 - \frac{3|p_1|^2}{m^* \epsilon_g} \right\}; \quad (9)$$

$$\sigma_3 = -\frac{ie^2 n}{m^*[3\omega - i\nu(T_{=})]} \left\{ 1 - \frac{6|p_1|^2}{m^* \epsilon_g} \right\}; \quad (10)$$

$$(j_3)_{\text{стор}} = \frac{en p_1^3}{(m^*)^3 \epsilon_g}. \quad (11)$$

В работе [6] описана методика, позволяющая экспериментально определить величины $\nu(T_{=})$ и $|p_1|^2/m^* \epsilon_g$, входящие в уравнение (9), из измерений по самовоздействию и таким образом рассчитать излучение третьей гармоники из полупроводника*. Заметим также, что возможность экспериментального измерения величин $\nu(T_{=})$ и p_1 позволяет найти из уравнения баланса энергии электронного газа электронную температуру, если воспользоваться измерениями времени релаксации энергии электронов $\tau_3 (\sim 5 \cdot 10^{-12} \text{ сек})$, выполненными в работе [10].

Экспериментальная схема, применяемая в настоящей работе (рис. 1), позволила однозначно связать результаты измерений на частоте $\omega \approx 4,6 \cdot 10^{11} \text{ рад/сек}$ (самовоздействие) и 3ω (умножение). Исследуемый образец представлял собой пластинку $n\text{-InSb}$ ($n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $\nu = 1,7 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$) толщиной $7 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$, полностью перекрывавшую поперечное сечение прямоугольного волновода $3,6 \times 1,8 \text{ мм}^2$. Температура решетки T_p была равна 77°K и в процессе эксперимента оставалась постоянной, поскольку измерения проводились в режиме коротких импульсов с большой скважностью.

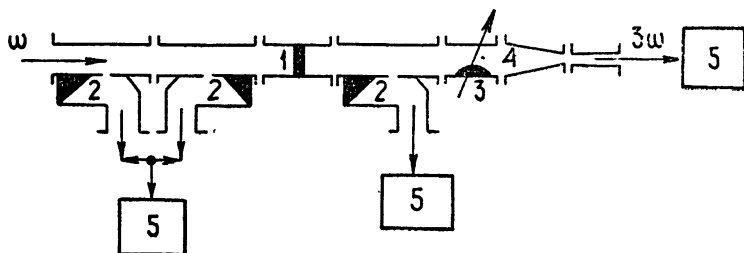


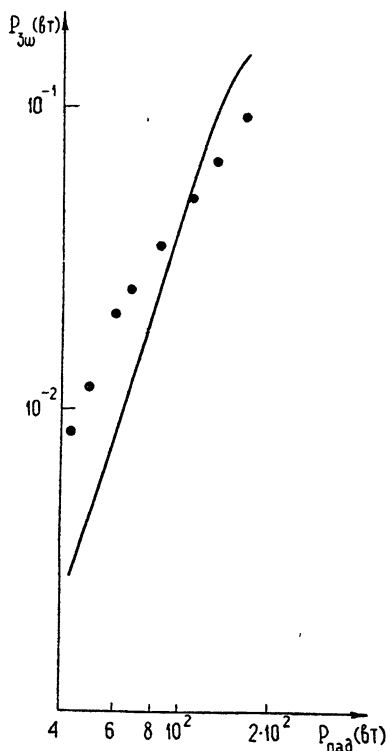
Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1—образец InSb, 2—направленный ответвитель диапазона частоты ω , 3—развязывающий аттенюатор, 4—плавный переход, 5—измеритель мощности.

* Следует отметить, что величины $\nu(T_{=})$ и $|p_1|^2/m^* \epsilon_g$ зависят от координат, однако, при расчете излучения третьей гармоники они заменялись на средние по объему образца значения.

Эксперимент заключался, во-первых, в исследовании самовоздействия (определение величин $\nu(T=)$ и $|p_1|^2/m^* \epsilon_g$) и, во-вторых, в непосредственном измерении мощности третьей гармоники в зависимости от падающей мощности. Из симметрии пространственного распределения стороннего тока (11) следует, что на частоте 3ω в волноводе, содержащем образец, должны возбуждаться моды TE_{10} и TE_{30} . Отсечка моды TE_{30} , а также волны накачки, прошедшей через образец, осуществлялась с помощью плавного перехода с волновода сечением $3,6 \times 1,8 \text{ мм}^2$ к волноводу сечением $1,1 \times 0,55 \text{ мм}^2$. В соответствии с этим производился расчет излучения третьей гармоники в моду TE_{10} с помощью леммы Лорентца [11], что позволяло учитывать интерференцию волн в пластинке. Диэлектрическая проницаемость решетки взята равной 17,78 [12]. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными на рис. 2. Полученное согласие подтверждает сделанный авторами [6] вывод о том, что генерация третьей гармоники в $n = \text{InSb}$ в миллиметровом диапазоне длин волн обусловлена непараболичностью зоны проводимости, а также справедливость сделанных при расчете предположений. Заметим, что при мощности накачки $P_\omega > 150 \text{ вт}$ в образце развивается межзонный пробой, т. е. наряду с изменением ν и m^* начинает меняться и концентрация электронов n . Длительность импульса СВЧ в нашем случае ($\tau \sim 40 \text{ нсек}$) по порядку величины совпадала с эффективным временем развития пробоя, т. е. параметры образца непрерывно менялись в течение импульса, поэтому в условиях пробоя описанный выше метод расчета становится неприменимым.

Рис. 2. Зависимость мощности излучения на частоте 3ω от мощности волны на частоте ω , падающей на образец. Сплошная кривая рассчитана теоретически для случая непараболической зоны.



В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А. М. Белянцеву и В. Н. Генкину за обсуждение результатов работы и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Seeger, J. Appl. Phys., 34, 1607 (1963).
2. S. Kobajashi, S. Yabuki, M. Aoki, Japan J. Appl. Phys., 2, 127 (1963).
3. I. Maurer, A. Libchaber, J. Bok, Proc. of 7th Int. Conf. Phys. Semicond., 2, Dunod, Paris, 1964, p. 50.
4. Н. Котера, Р. Ито, К. Ф. Комацубара, Тр. Международной конференции по физике полупроводников, 2, изд. Наука, Л., 1969, стр. 817.

5. M. Yoshio, IEEE Trans. Microwave Theory and Techn., 17, 333 (1969).
6. А. М. Белянцев, В. Н. Генкин, В. А. Козлов, В. И. Пискарев, ЖЭТФ, 59, 654 (1970).
7. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970 г.
8. E. O. Kane, J. Phys. Chem. Solids, 1, 249 (1957).
9. A. M. Belyantsev, V. A. Kozlov, B. A. Trifonov, Phys. Stat. Sol. (b), 48, 581 (1971).
10. C. Dattatreya, H. Hartnagel, Phys. Stat. Sol., 32, K45 (1969).
11. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
12. G. H. Glover, K. S. Champlin, J. Appl. Phys., 40, 2315 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 марта 1971 г.

ON FREQUENCY MULTIPLICATION IN MILLIMETER RANGE IN n -InSb

V. A. Kozlov, V. I. Piskarev

The third harmonic generation in n -InSb at the temperature of 77°K at millimeter wavelengths is experimentally investigated. The results are compared with the theoretical calculations under the assumption that the nonlinear susceptibility is due to the conduction band nonparabolicity.

УДК 533.9.01

О ФОТОН-ПЛАЗМОННОМ ПЕРЕХОДЕ $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ В ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМАХ

С. А. Каплан, Е. Б. Клейман

Вычислены вероятности двухквантового индуцированного (по числу плазмонов) фотон-плазмонного перехода $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ для водородоподобных атомов. В турбулентной плазменной среде этот процесс может быть более эффективным, чем обычное двухфотонное излучение и столкновения.

В ряде работ [1-4] нами рассматривались двухквантовые процессы излучения атома в плазменной среде, в которых один из излучаемых квантов является электромагнитной волной (фотоном), а второй — плазменной волной (плазмоном).

Ввиду того, что плазменная среда часто может находиться в турбулентном состоянии (с большой плотностью плазмонов), то в этих условиях необходим учет индуцированных процессов излучения, и это может привести к значительному увеличению вероятностей указанных переходов.

Ниже рассматривается двухквантовый индуцированный фотон-плазмонный переход $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ в водородоподобных атомах, идущий с излучением:

- а) поперечной (t) и ленгмюровской (l) волн,
- б) поперечной (t) и ионноплазменной (i) волн.

Следуя результатам [3, 4], нетрудно получить выражения для искоемых вероятностей. Оставляя в общей формуле для дифференциальной вероятности tl -излучения dA_{tl} [4] члены, отвечающие промежуточным состояниям $2P_{1/2}$ и $2P_{3/2}$ (вклад остальных состояний пренебрежимо мал), имеем

$$dA_{tl} = \frac{2c^2 r_0^2 \omega_t^2 \omega_l^2}{\pi v_{Te}^2 v_\phi^l} \left[\frac{2f_1 f_2}{(\omega_* + \omega_l)^2 + (1/4)\Gamma_1^2} + \frac{f_3 f_4}{(\omega_{**} - \omega_l)^2 + (1/4)\Gamma_2^2} \right] N_{kl}^l dk_l. \quad (1)$$

Здесь r_0 — классический радиус электрона, v_{Te} — тепловая скорость электронов, v_ϕ^l — фазовая скорость ленгмюровских волн, ω_t и ω_l — частоты фотона и плазмона соответственно, ω_* — частота тонкой структуры второго уровня, а ω_{**} — частота лэмбовского сдвига. Далее, f_1 и f_3 — силы осцилляторов переходов $2P_{3/2} - 1S_{1/2}$ и $2P_{1/2} - 1S_{1/2}$, $f_2^l = f_2 \omega_l / \omega_*$ и $f_4^l = f_4 \omega_l / \omega_{**}$ (f_2 и f_4 — силы осцилляторов переходов $2S_{1/2} - 2P_{3/2}$ и $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ соответственно).

В (1) N_{kl}^l — безразмерное число плазмонов в единице объема фазового пространства, $\Gamma_1 = \Gamma_{2S_{1/2}} + \Gamma_{2P_{3/2}}$ и $\Gamma_2 = \Gamma_{2S_{1/2}} + \Gamma_{2P_{1/2}}$, где Γ — ширины соответствующих уровней. Для tl -процесса, очевидно, должно выполняться условие

$$\omega_{21} = \omega_l(k_l) + \omega_l(k_l), \quad (2)$$

где ω_{21} — частота перехода $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$, а k_t и k_l — волновые числа фотона и плазмона. Выражая в (1) dk_t через dk_l с помощью (2) и используя соотношение

$$W^l = \frac{1}{2\pi^2} \int \hbar \omega_l N_l^l k_l^2 dk_l, \quad (3)$$

где W^l — плотность энергии ленгмюровских волн, представим (1) в виде

$$A_{ll} = \frac{24\pi c r_0^2 \omega_{21}^2 f_1 f_2}{(\omega_* + \omega_{0e})^2 + (1/4)\Gamma_1^2} \frac{W^l}{\hbar \omega_*} + \\ + \frac{12\pi c r_0^2 \omega_{21}^2 f_3 f_4}{(\omega_{**} - \omega_{0e})^2 + (1/4)\Gamma_2^2} \frac{W^l}{\hbar \omega_{**}}. \quad (4)$$

При получении (4) было учтено, что $\omega_t \approx \omega_{21}$, $\omega_l \approx \omega_{0e}$ (ω_{0e} — ленгмюровская частота), а также $\Delta \omega_l \gg \Gamma_{2S_{1/2}}$, где $\Delta \omega_l$ — ширина спектра плазмонов. Таким образом, (4) определяет вероятность перехода (в единицу времени) $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ с одновременным излучением фотона и ленгмюровского кванта. Аналогичным образом можно получить вероятность процесса с излучением фотона и ионноплазменного кванта:

$$A_{ll} = \frac{24\pi c r_0^2 \omega_{21}^2 f_1 f_2}{(\omega_* + \omega_{0l})^2 + (1/4)\Gamma_1^2} \frac{W^l}{\hbar \omega_*} + \\ + \frac{12\pi c r_0^2 \omega_{21}^2 f_3 f_4}{(\omega_{**} - \omega_{0l})^2 + (1/4)\Gamma_2^2} \frac{W^l}{\hbar \omega_{**}}. \quad (5)$$

Здесь ω_{0l} — плазменная частота ионов, $W^l = \frac{1}{2\pi^2} \int \hbar \omega_l N_l^l k_l^2 dk_l$ — плотность энергии ионноплазменных волн. Рассмотрим tl -процесс. Положим выполненными условия $|\omega_* + \omega_{0e}| \gg (1/2)\Gamma_1$, $|\omega_{**} - \omega_{0e}| \gg (1/2)\Gamma_2$. Тогда в случае $\omega_{0e} \ll \omega_{**}$ можно пренебречь первым членом в (4):

$$A_{ll} \approx 12\pi \frac{c r_0^2 \omega_{21}^2 f_3 f_4}{\omega_{**}^2} \frac{W^l}{\hbar \omega_{**}}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) числовые значения величин, имеем

$$A_{ll} \approx 2 \cdot 10^{10} Z^{-6} W^l \text{ (сек}^{-1}\text{)}, \quad (7)$$

где Z — заряд ядра, а W^l — плотность энергии ленгмюровских волн, выраженная в эрг/см^3 . В случае $\omega_{0e} \gg \omega_*$ оба слагаемых в (4) имеют одинаковый порядок:

$$A_{ll} \approx 6 \cdot 10^8 (\omega_*^{(H)}/\omega_{0e})^2 Z^3 W^l \text{ (сек}^{-1}\text{)}, \quad (8)$$

где $\omega_*^{(H)}$ — частота тонкой структуры атома водорода. Аналогичные выражения можно получить также и для ti -процесса. Сравнение полученных формул с вероятностью обычного двухфотонного излучения $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$, которая, как известно [5], имеет вид

$$A_{ti} \approx 8,226 Z^6 \text{ (сек}^{-1}\text{)},$$

показывает, что в плазменной среде фотон-плазмонный переход $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ может быть значительно эффективней двухфотонного. Если

водородоподобный атом находится в среде с развитой плазменной турбулентностью, то фотон-плазмонное излучение может оказаться более эффективным механизмом гашения уровня $2S_{1/2}$, чем столкновения.

Авторы благодарны Л. А. Вайнштейну и Ю. П. Никитину за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Каплан, Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, Исследования по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца, 15, 176 (1970).
2. Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, Исследования по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца, 15, 180 (1970).
3. С. А. Каплан, Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, *Астрономический журнал* 49, № 3, 1972.
4. Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, Исследования по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца, 18, 142 (1971).
5. G. Breit, J. Shapiro, *Phys. Rev.*, 113, 179 (1959).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
21 июля 1971 г.

ON PHOTON-PLASMA TRANSITION $2S_{1/2}-1S_{1/2}$ IN HYDROGEN-LIKE ATOMS

S. A. Kaplan, E. B. Kleiman

The probabilities of the two-quantum induced (according to the plasmon number) photon-plasmon transition $2S_{1/2}-1S_{1/2}$ are calculated for hydrogen-like atoms. In a turbulent plasma medium this process may be more effective than the ordinary two-photon radiation and collisions.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 538.56 : 535

ДИСПЕРСИЯ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ В КРИСТАЛЛАХ ИОДАТА ЛИТИЯ

М. А. Новиков, С. С. Фридман, И. Г. Яворовский

В последнее время кристаллы LiIO_3 стали использоваться в нелинейной оптике для удвоения частоты оптических квантовых генераторов (ОКГ) [1]. Перспективным является также их применение в параметрических генераторах света и в электрооптических модуляторах.

Кристаллы LiIO_3 относятся к группе симметрии 6 и обладают оптической активностью [2]. В работе [1] приведена величина оптической активности лишь для длины волны 1,08 мк. Поэтому представляло интерес определить дисперсию оптической активности в видимом диапазоне. Кристаллы LiIO_3 выращивались нами из кислого водного раствора статическим методом. Необходимое пересыщение создавалось за счет испарения воды. Рост происходил при постоянной температуре ($35 \div 40^\circ\text{C}$) со средней скоростью около 0,3 мм/сутки, считая по оси C . Для приготовления раствора использовался йодат лития марки «ХЧ» и дистиллированная вода, полученная методом, указанным в [3]. В качестве затравок применялись пластины толщиной 2—3 мм, вырезанные из кристаллов LiIO_3 (C —срезу), имеющие в центре отверстие диаметром 2—3 мм для крепления. Затравка помещалась в верхней части столба раствора таким образом, чтобы рост шел только вниз. Охлаждение выросших кристаллов до комнатной температуры производилось вместе с раствором непосредственно в кристаллизаторах. Выращенные кристаллы достигали в поперечнике 21×25 мм. Часть из них были бесцветными, а часть имели желтую окраску, интенсивность которой уменьшалась по направлению от затравки к вершине.

Для измерения дисперсии оптической активности в качестве источника света использовалась в зависимости от диапазона ртутная лампа ПРК-4 или лампочка накаливания. Система линз, диафрагма и поляризатор (призма Глана) позволяли получить параллельный линейно поляризованный пучок света. Вторая призма Глана, установленная на вращающемся лимбе, позволяла определять угол вращения с точностью до $0,1^\circ$. В качестве монохроматора использовался спектрограф ДФС-6 с дисперсией $6(\text{\AA}/\text{мм})$, на выходе которого устанавливался ФЭУ-53 (ФЭУ-22) со щелью $d = 1$ мм. Отсчет угла вращения производился по минимальному сигналу ФЭУ, в цепь которого включался чувствительный гальванометр.

В качестве образца применялись плоскопараллельные пластинки, вырезанные перпендикулярно оптической оси кристалла. Для исключения целых оборотов оптического вращения использовались две пластинки с $d_1 = 3$ мм и $d_2 = 1,2$ мм.

Данные дисперсии оптической активности, приведенные на рис. 1, показывают, что величина оптического вращения в видимой области исключительно велика. Можно для примера указать, что у кварца, являющегося одним из кристаллических веществ с большой оптической активностью, $\varphi = 30$ град/мм при $\lambda = 0,5$ мк, в то время, как для LiIO_3 на этой длине волны соответствующее удельное вращение $\varphi \approx 150$ град/мм. На других длинах волн величина оптической активности LiIO_3 также превосходит оптическую активность кварца примерно в 5 раз. Можно предположить, что по мере увеличения длины волн величина удельной оптической активности будет продолжаться уменьшаться. Так, измерения на $\lambda = 3,35$ мк дали $\varphi \approx 6$ град/мм. Интересно отметить, что у кристалла $\alpha\text{—NiO}_3$ также замечена большая оптическая активность [2]. Полученные данные позволяют надеяться, что кристаллы LiIO_3 могут найти широкое применение для тех целей, где необходима большая оптическая активность, например, для специальных фильтров.

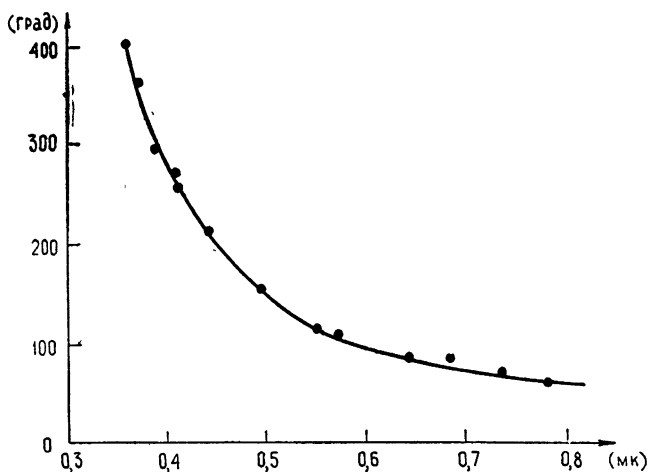


Рис. 1. Зависимость величины оптической активности от длины волны кристаллов LiIO_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. F. R. Nash, J. G. Bergman, G. D. Boyd and E. H. Turner, J. Appl. Phys., **40**, 5201 (1969).
2. S. K. Kurtz and T. T. Perry, J. G. Bergman, Appl. Phys. Letters, **12**, 186 (1968).
3. Г. Я. Ринькис, Методы ускоренного колориметрического определения микроэлементов в биологических объектах, изд. АН Латв. ССР, Рига, 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
23 марта 1971 г.