

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Семенова В. И. О влиянии соударений на распространение электромагнитных волн в плазме, образованной движущимся источником ионизации . . . . .	1793
Кулагин Е. В., Мишаков Г. А., Пихтелев А. И. О влиянии смещения и упирения линий поглощения рубидия, обусловленных буферным газом, на параметр качества рубидиевого дискриминатора . . . . .	1801
Княшко С. В., Рабинович М. И. О преобразовании спектра волн в активной нелинейной среде . . . . .	1807
Агеев Д. В., Зенькович А. В. Определение частоты и амплитуды внешней силы, вызывающей резонанс в линейной системе с переменными параметрами . . . . .	1815
Осипов Ю. В. Пространственный мультипликатор сигналов . . . . .	1822
Стратонович, Р. Л., Крупеников Н. А. К кубической (четыреиндексной) теории тепловых шумов в нелинейных сопротивлениях . . . . .	1826
Гаврилин А. Т., Горбачев А. А. О подавлении импульсных помех при измерении интенсивности шумовых сигналов модуляционным радиометром . . . . .	1837
Ашкеназы В. О. Некоторые вопросы статистической оценки местоположения источника сигналов в диспергирующей среде . . . . .	1843
Барабаненков Ю. Н., Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Применение теории многократного рассеяния волн к выводу уравнения переноса излучения для статистически неоднородной среды . . . . .	1852
Лукин В. П., Покасов В. В., Хмелевцов С. С. Исследование временных характеристик флуктуаций фаз оптических волн, распространяющихся в приземном слое атмосферы . . . . .	1861
Воробьев В. В. Флуктуации интенсивности светового пучка при распространении в волноводном канале со случайными неоднородностями показателя преломления . . . . .	1867
Безродный В. Г., Фукс И. М. Флуктуации уровня и фазы поля в волноводе со случайной границей . . . . .	1875
Безуглый А. В., Шестопалов В. П. Дифракция плоской электромагнитной волны на решетках из круговых цилиндров со спиральной щелью . . . . .	1885
Забороноква Т. М., Кондратьев И. Г. Применение леммы Лоренца к расчету коэффициентов возбуждения дифракционных мод . . . . .	1894
Чаплин А. Ф., Аксельрод А. М. Обратная задача дифракции для реактансной плоскости . . . . .	1905
Власов С. Н., Орлова И. М., Петелин М. И. Квазиоптическая трансформация собственных волн волноводов кругового сечения посредством аксиально-симметричных рефлекторов . . . . .	1913
Лапта С. И. Распространение электромагнитных волн в круглом волноводе со спирально проводящими вставками . . . . .	1919
Раевский С. Б. О существовании комплексных волн в некоторых двухслойных изотропных структурах . . . . .	1926
Григорьев В. П., Вейнгардт В. Ф. О неустойчивости когерентных бетатронных колебаний сгруппированного пучка в циклических ускорителях при взаимодействии его с резонансными системами . . . . .	1932

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Каневский М. Б. К вопросу о влиянии поглощения на амплитудные флуктуации субмиллиметровых радиоволн в атмосфере . . . . .	1939
Ваганов Р. Б. Преобразование волн фазовым корректором . . . . .	1941
Новиков С. А. Затухание волн в сверхпроводящих эллиптических волноводах . . . . .	1944

### Информация

Содержание т. XV журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1972 г. . . . .	1947
Именной указатель — т. XV журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1972 г. . . . .	1956

УДК 621.371.162

## О ВЛИЯНИИ СОУДАРЕНИЙ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ, ОБРАЗОВАННОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ИОНИЗАЦИИ

В. И. Семенова

В рамках элементарной теории рассмотрено влияние соударений на распространение электромагнитных волн в плазме, образованной движущимся источником ионизации. Получены формулы, характеризующие затухание волн в плазме за фронтом в различных предельных случаях в зависимости от соотношения между ленгмюровской частотой электронов плазмы и эффективной частотой соударений. Найдены поля за фронтом ионизации в предельном случае высоких скоростей фронта, близких к скорости света ( $V_0 \rightarrow c$ ).

Вопросы, связанные с падением электромагнитных волн на движущийся фронт ионизации, исследовались в работах [1-4], где особенности отражения и распространения волн за фронтом рассматривались без учета соударений. Вместе с тем очевидно, что влияние соударений, имеющих место в реальных условиях, в ряде случаев может оказаться существенным. В настоящей работе решена задача о взаимодействии монохроматических плоских волн с движущимся фронтом ионизации с учетом соударений. Из анализа полученных результатов, в частности, найдены условия, при которых соударения слабо влияют на распространение волн за фронтом ионизирующего излучения и для определения коэффициента отражения, а также прошедших полей можно пользоваться данными, полученными в предположении  $\nu_{эфф} = 0$ ; показано, что в случае достаточно сильных соударений становятся несущественными особенности, связанные с рождением частиц на фронте.

Аналогично [3] предположим, что вдоль оси  $x$  с произвольной постоянной скоростью  $-V_0$  движется бесконечно тонкий импульс ионизирующего излучения, под действием которого концентрация заряженных частиц в неподвижном газе изменяется скачком в каждой точке  $\left(\frac{\partial N}{\partial t} = N_0 \delta(x/V_0 + t)\right)$  и становится равной  $N$  в момент прихода излучения в данную точку. Будем считать, что заряженные частицы рождаются с нулевыми начальными скоростями\*, т. е. на движущейся границе неподвижной плазмы выполняется условие

$$v_0 = v|_{x=-V_0 t} = 0. \quad (1)$$

Движение ионов в дальнейшем не учитываем.

Пусть навстречу фронту ионизации перпендикулярно границе раз-

\* Средняя направленная скорость образующихся при ионизации заряженных частиц в принципе может быть отличной от нуля. Мы полагаем ее равной нулю, так как существенным является лишь то обстоятельство, что заряженные частицы начинают движение со скоростями, не зависящими от поля в данной точке в момент ионизации.

дела со стороны  $x = -\infty$  падает монохроматическая плоская волна  $E_{y_{\text{пад}}} \exp[i(\omega_{\text{пад}} t - k_{\text{пад}} x)]$  ( $B_{z_{\text{пад}}} = E_{y_{\text{пад}}}$ ) с частотой  $\omega_{\text{пад}}$  и волновым числом  $k_{\text{пад}}$ . Для простоты при последующих вычислениях полагаем, что диэлектрическая проницаемость нейтрального газа близка к единице, т. е.  $k_{\text{пад}} = \omega_{\text{пад}}/c$ .

При определении полей в плазме ( $x \geq -V_0 t$ ), изменяющихся по закону  $\exp[i(\omega t - kx)]$ , будем исходить из уравнений Максвелла и уравнения движения электронов в виде [5]

$$\frac{dv}{dt} + \nu_{\text{эфф}} v = \frac{e}{m} E, \quad (2)$$

где  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $\nu_{\text{эфф}}$  — эффективная частота соударений, скорость электрона  $v$  удовлетворяет условию (1) при  $x = -V_0 t$ . В результате получим следующее дисперсионное уравнение:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{i\omega}{i\omega + \nu} \quad (3)$$

Здесь  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$  — ленгмюровская частота электронов плазмы.

Используя условие непрерывности тангенциальных компонент поля  $E_y$  и  $B_z$  на движущейся границе раздела двух сред [8], найдем, какие волны, в соответствии с (3), могут существовать в плазме за фронтом ионизации, и определим их амплитуды с учетом (1) и условий  $E_y, B_z \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  в случае  $\nu_{\text{эфф}} \neq 0$ . Из равенства фаз падающей и прошедшей волн при  $x = -V_0 t$ ,

$$\omega_{\text{пад}}(1 + \beta) = \omega + V_0 k, \quad (4)$$

приходим к уравнению для определения частот прошедших волн в виде

$$\omega^3(1 - \beta^2) - [2\omega_{\text{пад}}(1 + \beta) + i\nu_{\text{эфф}}(1 - \beta^2)]\omega^2 + [\omega_{\text{пад}}^2(1 + \beta)^2 + \beta^2\omega_p^2 + 2i\nu_{\text{эфф}}\omega_{\text{пад}}(1 + \beta)]\omega - i\nu_{\text{эфф}}\omega_{\text{пад}}^2(1 + \beta)^2 = 0. \quad (5)$$

1. Рассмотрим прежде всего случай достаточно редких соударений, когда уравнение (5) можно решать методом последовательных приближений, выбирая в качестве нулевого приближения результаты [3], полученные в предположении  $\nu_{\text{эфф}} = 0$  (будем обозначать последние индексом (0)).

В отсутствие соударений ( $\nu_{\text{эфф}} = 0$ ) в плазме за фронтом ионизации распространяется электромагнитная волна  $\exp[i(\omega_1 t - k_1 x)]$ , у которой

$$\omega_1^{(0)} = \frac{\omega_{\text{пад}}}{1 - \beta} (1 - \beta \sqrt{\varepsilon}), \quad k_1^{(0)} = \frac{\omega_{\text{пад}}}{c} \frac{1}{1 - \beta} (\sqrt{\varepsilon} - \beta), \quad (6)$$

где  $\varepsilon = 1 - (\omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2) (1 - \beta) / (1 + \beta)$ , и, кроме того, существует поле с отличным от нуля вектором магнитной индукции  $B_z$  ( $E_{y_2} = 0$ ), связанное с равномерным движением электронов в направлении оси  $y$ , т. е.

$$\omega_2^{(0)} = 0, \quad k_2^{(0)} = \frac{\omega_{\text{пад}}}{V_0} (1 + \beta). \quad (7)$$

Согласно (6) и (7) решение (5) в первом приближении имеет следующий вид:

$$\omega_1 = \frac{\omega_{\text{пад}}}{1 - \beta} (1 - \beta \sqrt{\varepsilon}) - i\nu_{\text{эфф}} \frac{\beta(1 - \varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon}}, \quad (8)$$

$$\omega_2 = i \nu_{эфф} \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2 \varepsilon},$$

соответствующие значения  $k_1$  и  $k_2$  наиболее просто определить, исходя из (4). Найденные выражения для  $\omega_1, k_1; \omega_2, k_2$  являются достаточно хорошим приближением к точному решению, если частота прошедшей волны  $\omega_1^{(0)}$  намного превышает частоту соударений, т. е.

$$\frac{\omega_{пад}}{1 - \beta} \left( 1 - \beta \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_{пад}^2} \frac{1 - \beta}}{1 + \beta}} \right) \gg \nu_{эфф}. \quad (9)$$

Последнее неравенство всегда имеет место при

$$\nu_{эфф} \ll \omega_{пад}; \quad (9a)$$

если  $\nu_{эфф} \gg \omega_{пад}$ , но  $\nu_{эфф}(1 - \beta) \ll \omega_{пад}$ , то для выполнения условия (9) необходимо, чтобы

$$\nu_{эфф} \omega_{пад} \ll \omega_p^2. \quad (9b)$$

Как следует из (8), (9) и (4), при малой частоте соударений электронов по сравнению с  $\omega_1^{(0)}$  в плазме за фронтом ионизации возбуждаются две волны, медленно затухающие во времени и в пространстве по мере распространения в глубь плазмы. Характерные масштабы уменьшения амплитуд значительно превышают соответствующие длины волн и периоды.

Приведем начальные значения амплитуд прошедших волн, а также коэффициент отражения:

$$E_{y_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \left[ 1 - i \frac{\nu_{эфф} (1 - \beta) \beta^2 (1 - \varepsilon)}{\omega_{пад} (1 - \beta \sqrt{\varepsilon}) (1 - \beta^2 \varepsilon)} \right] E_{y_{пад}},$$

$$B_{z_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon} - \beta}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon}} B_{z_{пад}}, \quad (10)$$

$$B_{z_2} = \frac{2\beta (1 - \sqrt{\varepsilon})}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon}} B_{z_{пад}}, \quad E_{y_2} = \frac{i \nu_{эфф}}{\omega_{пад}} \frac{(1 - \beta) \beta^2 (1 - \varepsilon)}{(1 - \beta \sqrt{\varepsilon}) (1 - \beta^2 \varepsilon)}.$$

Из (10) следует, что  $E_{y_2} \ll E_{y_1}, B_{z_2}$ , а коэффициент отражения  $R = |E_{отр}/E_{пад}| = |(1 - \sqrt{\varepsilon})/(1 + \sqrt{\varepsilon})|$ , как и в отсутствие соударений.

Таким образом, при достаточно малой частоте соударений поле за фронтом, медленно затухающее по мере удаления фронта, имеет такую же структуру, как и при  $\nu_{эфф} = 0$ . Существенным отличием от поля в движущейся стационарной плазме, как и в бесстолкновительном случае, является равномерное движение электронов в направлении, перпендикулярном границе, и связанное с ним электрическое и магнитное поля, изменяющиеся по закону  $\exp[-i(\omega_{пад}/V_0)(1 + \beta)x] \exp[-\nu_{эфф}/V_0] \times \times (1 - \beta^2)(x + V_0 t)/(1 - \beta^2 \varepsilon)$ . Отметим, что эти особенности поля за фронтом ионизации нельзя пропустить, если считать, что в рассматриваемой нестационарной задаче процессы в плазме за фронтом ионизации можно полностью описать с помощью таких макроскопических параметров, как диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  и проводимость  $\sigma$ .

2. При достаточно сильных соударениях и высоких концентрациях заряженных частиц за фронтом ионизации может иметь место следующее неравенство:

$$\omega_p \gg v_{эфф} \sqrt{1-\beta^2} \gg \omega_{пад} \sqrt{\frac{1+\beta^*}{1-\beta}} \quad (11)$$

Из уравнения (5) при условии (11) следует, что

$$\omega_1 = \frac{i\omega_p}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k_1 = -\frac{i\omega_p}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (12)$$

$$\omega_2 = i v_{эфф} \frac{(1-\beta^2)\omega_{пад}^2}{\beta^2\omega_p^2}, \quad k_2 = \frac{\omega_{пад}(1+\beta)}{V_0} - i \frac{v_{эфф}}{V_0} \frac{(1-\beta^2)\omega_{пад}^2}{\beta^2\omega_p^2}, \quad (13)$$

т. е. электромагнитная волна затухает очень быстро, в то же время формулы (13) характеризуют затухание поля  $\omega_2$ ,  $k_2$ , начальные амплитуды которого равны

$$B_{z_2} \approx 2B_{z_{пад}}, \quad (14)$$

$$E_{y_2} \approx \frac{\omega_{пад} v_{эфф}}{\omega_p^2 \beta} (1+\beta) B_{z_2}.$$

В силу (11)  $E_{y_2} \ll B_{z_2}$ ,  $E_{y_2} \approx 0$ , а амплитуда «статического» магнитного поля, проникающего в плазму при падении электромагнитной волны с частотой  $\omega_{пад}$ , равна удвоенной амплитуде падающего поля. Коэффициент отражения равен  $R=1$  с точностью до членов порядка  $[\omega_{пад} v_{эфф} (1+\beta)^2/\omega_p^2 \beta]^2$ .

3. Рассмотрим другой предельный случай, когда частота соударений велика по сравнению с частотой падающей волны, а также с ленгмюровской частотой электронов плазмы, причем выполняются следующие условия:

$$v_{эфф}(1-\beta) \gg \omega_{пад}, \quad \omega_{пад} v_{эфф} \gg \omega_p^2. \quad (15)$$

Приближенное решение (5) при условии (15) дает

$$\omega_1 = \omega_{пад} + i\beta \frac{\omega_{пад}^2(1-\varepsilon)}{2(1-\beta^2)v_{эфф}}, \quad (16)$$

$$\omega_2 = i\nu.$$

Из сравнения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с учетом (4) видно, что характер распространения волн «1» и «2» в плазме за фронтом ионизации различен: вторая волна ( $\omega_2$ ,  $k_2$ ), существование которой за фронтом связано с равномерным движением частиц, определяемым фазой поля в каждой точке в момент ионизации, затухает значительно быстрее по сравнению с «обычной» электромагнитной волной ( $\omega_1$ ,  $k_1$ ). Волна ( $\omega_2$ ,  $k_2$ ) затухает за время порядка одного соударения  $1/v_{эфф}$ ; амплитуда ее убывает в  $\varepsilon$  раз на расстоянии  $V_0/v_{эфф}$ , которое при условии  $v_{эфф}(1-\beta) \gg \omega_{пад}$  много меньше длины волны. В то же время характерный масштаб изменения  $E_{y_1}$ ,  $B_{z_1}$  превышает соответствующую длину волны во много раз.

\* Если перейти в систему координат, движущуюся с фронтом ионизации, где граница раздела неподвижна, а плазма как целое движется со скоростью  $V_0$ , неравенство (11) соответствует условию  $\omega'_p \gg v_{эфф} \gg \omega'$ . Здесь  $\omega'_p = \omega_p$ ,  $v_{эфф} = v_{эфф} \sqrt{1-\beta^2}$  [6],  $\omega' = \omega_{пад} \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$  — соответственно ленгмюровская частота, частота соударений электронов и частота падающей волны, совпадающая с частотой прошедшей, в движущейся системе отсчета.

Из соотношений (16), (1) и (2) следует, что  $E_{y_2} \approx (1/2) [\beta^2 \omega_p^2 / \nu_{эфф}^2 (1 - \beta^2)] E_{y_1}$ , т. е. начальная амплитуда волны «2» мала по сравнению с амплитудой волны «1» в силу (15). Следовательно, при достаточно сильных соударениях за фронтом ионизации распространяется одна электромагнитная волна, как и в случае движущейся стационарной плазмы, медленно затухающая по мере удаления от фронта. Коэффициент отражения равен

$$R \approx \frac{1}{4} \frac{\omega_p^2}{\nu_{эфф} \omega_{пад}} \frac{1}{1-\beta}, \quad (17)$$

причем  $R \ll 1$  в силу написанных выше условий (15). Таким образом, сильные соударения в плазме за фронтом ионизации приводят к тому, что особенности, связанные с рождением заряженных частиц на фронте, становятся несущественными и поле за фронтом, как и при движении стационарной среды, можно находить, зная  $\varepsilon$  и  $\sigma$  образующейся плазмы.

4. Случай высоких скоростей ионизирующего излучения  $V_0$ , близких к скорости света, можно рассмотреть, выполняя предельный переход  $\beta \rightarrow 1$  в уравнении (5). При  $V_0 \rightarrow c$   $\varepsilon = 1$  и вместо (5) получаем уравнение второго порядка

$$\omega^2 - \left[ \omega_{пад} + \frac{\omega_p^2}{4 \omega_{пад}} + i \nu_{эфф} \right] \omega + i \nu_{эфф} \omega_{пад} = 0, \quad (18)$$

которое, как и (5), проще исследовать в различных предельных случаях.

Допустим сначала, что

$$\nu_{эфф} \ll \omega_{пад} + \frac{\omega_p^2}{4 \omega_{пад}^2} \quad (19)$$

(приведенные ниже результаты, справедливые при условии (19), можно получить из формул (8) и (10) в пределе  $\beta \rightarrow 1$ , так как (19) соответствует (9) при  $\beta \rightarrow 1$ ).

За фронтом ионизации в плазме, во-первых, распространяется электромагнитная волна с компонентами поля

$$\begin{aligned} E_{y_1 \beta \rightarrow 1} &\approx E_{y_{пад}}, \\ B_{z_1 \beta \rightarrow 1} &= \frac{1 - \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{пад}^2}{1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{пад}^2} B_{z_{пад}}, \end{aligned} \quad (20)$$

изменяющимися в зависимости от  $x$  и  $t$  по закону  $\exp[i(\omega_1 t - k_1 x)]$ , где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{пад} \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{4 \omega_{пад}^2} \right) + i \nu_{эфф} \frac{\frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{пад}^2}{1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{пад}^2}, \\ k_1 &= \frac{\omega_{пад}}{c} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{4 \omega_{пад}^2} \right) - i \frac{\nu_{эфф}}{c} \frac{\frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{пад}^2}{1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{пад}^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Фазовая скорость проходящей волны «1» меняет знак при  $\omega_{\text{пад}} = \frac{1}{2}\omega_p$ , групповая скорость при  $\omega_p/\omega_{\text{пад}} > 2$  направлена в сторону движущейся границы, но меньше  $c$  (ср. со случаем движущейся стационарной плазмы [8]).

Наряду с медленно затухающей электромагнитной волной в плазме за фронтом существует поле с отличным от нуля вектором магнитной индукции, начальное значение амплитуды которого при  $x = -ct$  равно

$$B_{z_2 \beta \rightarrow 1} = \frac{\frac{1}{2} \omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2}{1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2} B_{z_{\text{пад}}}, \quad (22)$$

$$\omega_2 = i \nu_{\text{эфф}} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2}, \quad k_2 = \frac{\omega_{\text{пад}}}{c/2} - i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2}.$$

$$E_{y_2} \approx 0 \text{ с точностью до членов порядка } \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega_{\text{пад}}} \frac{\frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2}{\left(1 + \frac{1}{4} \omega_p^2 / \omega_{\text{пад}}^2\right)^2};$$

$R = |E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}| = 0$  — отраженная волна отсутствует.

Полученные формулы (20) — (22) позволяют рассмотреть, в частности, случай

$$\omega_p \gg \nu_{\text{эфф}} \gg \omega_{\text{пад}}, \quad (23)$$

когда за фронтом ионизации, движущимся со скоростью  $V_0 \rightarrow c$ , образуется достаточно плотная плазма.

При условии (23) в плазме за фронтом имеется высокочастотная электромагнитная волна, групповая скорость которой направлена в сторону границы, т. е. волна распространяется в  $-x$ , а затухает в  $+x$ -направлении; характерный масштаб изменения поля (пространственный и временной) значительно превышает длину волны и период колебаний в соответствии с тем, что

$$\omega_1 = \frac{\omega_p^2}{4\omega_{\text{пад}}} + i \nu_{\text{эфф}}, \quad ck_1 = -\frac{\omega_p^2}{4\omega_{\text{пад}}} - i \nu_{\text{эфф}}, \quad (24)$$

начальные амплитуды поля равны

$$E_{y_1} = E_{y_{\text{пад}}}, \quad B_{z_1} = -B_{z_{\text{пад}}}.$$

Сравнивая полученные результаты (24) с формулами (12), справедливыми, как и (24), при высоких плотностях плазмы, но в отличие от (24), при  $\beta = 1$ , можно видеть существенную разницу в поведении электромагнитной волны за фронтом в обоих случаях. Последнее обстоятельство связано с тем, что при  $\beta \rightarrow 1$   $\epsilon \rightarrow 1$  при любых сколь угодно высоких плотностях плазмы, т. е. плазма любой концентрации при  $\beta \rightarrow 1$  становится прозрачной для электромагнитных волн.

Кроме волны (24), в плазму проникает «статическое» магнитное поле, у которого

$$\omega_2 = 4i \nu_{\text{эфф}} \frac{\omega_{\text{пад}}^2}{\omega_p^2}, \quad k_2 = \frac{\omega_{\text{пад}}}{c/2} - 4i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{c} \frac{\omega_{\text{пад}}^2}{\omega_p^2}. \quad (25)$$

Это поле затухает гораздо медленнее по сравнению с электромагнитной волной, и амплитуда его равна удвоенной амплитуде падающей волны:

$$B_{z_2} = 2B_{z_{\text{пад}}} \quad (E_{y_2} \approx 4 (\nu_{\text{эфф}} \omega_{\text{пад}} / \omega_p^2) E_{y_{\text{пад}}}).$$

В предельном случае

$$\nu_{\text{эфф}} \gg \omega_{\text{пад}}, \quad \frac{\omega_p^2}{4\omega_{\text{пад}}} \quad (26)$$

находим

$$\omega_1 = \omega_{\text{пад}} \left( 1 + i \frac{\omega_p^2}{4 \nu_{\text{эфф}} \omega_{\text{пад}}} \right), \quad (27)$$

$$\omega_2 = i \nu_{\text{эфф}}.$$

Из сравнения (27) и (16) видно, что в обоих случаях, (15) и (26), характер поведения поля за фронтом приблизительно одинаков.

В заключение отметим, что рассматриваемая нестационарная задача о взаимодействии монохроматических плоских волн с движущимся фронтом ионизации не эквивалентна задаче о падении электромагнитных волн на границу движущейся стационарной плазмы как в бесстолкновительном случае, так и с учетом соударений. Поэтому в общем случае такие макроскопические параметры плазмы, как  $\epsilon$  и  $\sigma$ , в отличие от движущейся стационарной среды, являются недостаточными характеристиками для описания полей за фронтом ионизации, возникающих при падении монохроматических волн на границу раздела.

Особенности, связанные с рождением заряженных частиц на фронте ионизации и выражающиеся в появлении «статического» магнитного поля наряду с «обычной» электромагнитной волной, становятся несущественными только при достаточно сильных ((15) и (20)) соударениях.

Как показывает расчет, при распространении ионизирующего излучения в неподвижном газе со скоростями, близкими к скорости света ( $\beta \rightarrow 1$ ), плазма за фронтом становится прозрачной для электромагнитных волн и затухание их определяется соударениями.

При  $V_0 \rightarrow c$  интересен случай высоких концентраций  $N$  за фронтом ионизации, когда  $\omega_p \gg \nu_{\text{эфф}} \gg \omega_{\text{пад}}$  (см. (23)). В этом случае, кроме электромагнитной волны, затухающей за время порядка одного соударения  $\sim 1/\nu_{\text{эфф}}$ , в плазме существует магнитное поле, амплитуда которого уменьшается в  $\epsilon$  раз за время  $\tau = (1/\nu_{\text{эфф}}) \omega_{\text{пад}}^2 / \omega_p^2$ , значительно превышающее время существования высокочастотной волны.

Автор благодарит А. А. Андронову и В. В. Железнякову за интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, № 1, 226 (1961).
2. В. И. Семенова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1077 (1967).
3. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 9, 1376 (1970).
4. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 686 (1971).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
7. В. И. Семенова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 665 (1972).
8. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).



---

THE INFLUENCE OF COLLISIONS ON ELECTROMAGNETIC WAVE  
PROPAGATION IN A PLASMA FORMED BY MOVING IONIZATION SOURCE

*V. I. Semenova*

The influence of collisions on electromagnetic wave propagation in plasma formed by a moving ionization source has been considered in the frames of the elementary theory. The formulas have been obtained which characterize the wave attenuation in plasma behind the front in different limit cases depending on the relations between the Langmuir frequency of plasma electrons and the effective collision frequency. The fields behind the ionization front in the limit case of the higher front velocities close to the velocity of light ( $v_0 \rightarrow c$ ) are found.

---

УДК 538.56 : 530.145

## О ВЛИЯНИИ СМЕЩЕНИЯ И УШИРЕНИЯ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ РУБИДИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ БУФЕРНЫМ ГАЗОМ, НА ПАРАМЕТР КАЧЕСТВА РУБИДИЕВОГО ДИСКРИМИНАТОРА

*Е. В. Кулагин, Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев*

Исследовано влияние буферного газа на эффективность оптической накачки в парах рубидия. Показано, что оптимальные параметры элементов квантового дискриминатора зависят от типа газа и его давления.

В квантовых стандартах частоты нашел широкое применение метод оптической накачки и индикации атомного резонанса в парах щелочных металлов [1]. В ряде работ [2, 3] приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований процесса оптической накачки, относящиеся в основном к сигналу атомного резонанса. Однако одна из основных характеристик данного типа стандартов — кратковременная стабильность частоты его выходного сигнала — непосредственно связана с параметром качества квантового дискриминатора [4]. В работе [5] были исследованы зависимости параметра качества от температуры рабочей ячейки, коэффициента фильтрации и интенсивности света накачки, но допущения, сделанные при этом, не позволили исследовать влияния на него буферного газа — наполнителя рабочей ячейки и ячейки-фильтра.

В настоящей работе принято доплеровское распределение линий в спектре излучения спектральной лампы накачки, а линии поглощения паров рубидия в присутствии газа аппроксимированы интегралами Фойхта [6]. Это позволило исследовать влияние смещения и уширения линий поглощения в присутствии буферного газа на параметр качества квантового дискриминатора.

Параметр качества квантового дискриминатора на парах  $Rb^{87}$ , принципиальная схема которого представлена в работе [1], определяется выражением [4, 5]

$$F = \frac{S}{U_{ш} \Delta f_0}, \quad (1)$$

где  $S/U_{ш}$  — отношение сигнала к шуму при оптической индикации атомного резонанса в полосе  $0,25 \mu$ ,  $\Delta f_0$  — ширина линии атомного резонанса.

В том случае, когда накачка осуществляется естественным неполяризованным светом, в спектре которого присутствуют все четыре компоненты ( $5S_{1/2} F = 1,2 \leftrightarrow 5P_{1/2, 3/2}$ ) с доплеровским распределением интенсивности, для напряжения сигнала атомного резонанса на нагрузочном сопротивлении фотоприемника будем иметь

$$S = \frac{\sigma k R}{2 (\ln 2)^{1/2}} \sum_{i=1}^4 a_i \int_{-\infty}^{\infty} [I_i^H(\lambda_{\alpha}, \omega_i) - I_i^P(\lambda_{\alpha}, \omega_i)] d\omega_i, \quad (2)$$

где  $\sigma$  — поверхность рабочей ячейки, с которой собирается свет для индикации атомного резонанса,  $k, R$  — чувствительность и сопротивление нагрузки фотоприемника,  $I_i^H(l_y, \omega_i)$  — спектральная интенсивность  $i$ -й сверхтонкой компоненты света накачки на выходе рабочей ячейки в отсутствие резонанса (частота внешнего СВЧ сигнала не совпадает с частотой атомного перехода),  $I_i^P(l_y, \omega_i)$  — спектральная интенсивность  $i$ -й СТ компоненты света накачки на выходе рабочей ячейки в момент резонанса (частота внешнего СВЧ сигнала совпадает с частотой атомного резонанса),  $I_i^H(0, \omega_i) = I_i^P(0, \omega_i) = I_i(0) \exp(-\omega_i^2)$ ,  $\omega_i = \frac{2\sqrt{\ln 2}(\nu - \nu_{0i})}{a_i}$ ,  $I_i(0)$  и  $a_i$  — значение  $i$ -й СТ компоненты в центре линии и ее полуширина,  $l_y$  — длина рабочей ячейки.

При этих условиях, если считать, что шумы на входе фотоприемника обусловлены флуктуацией света и носят дробовой характер, шумовое напряжение в полосе 0,25 гц можно определить выражением

$$U_{ш} = \left( \frac{0,25 \sigma k^2 R^2}{(\ln 2)^{1/2}} \sum_{i=1}^4 a_i \int_{-\infty}^{\infty} I_i^P(l_y, \omega_i) d\omega_i \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Ширина линии атомного перехода определяется различными процессами: эффектом Доплера, взаимодействием атомов рубидия со светом накачки и атомами буферного газа, спин-обменным взаимодействием атомов рубидия. Буферный газ используется в рабочей ячейке для ослабления эффекта Доплера, но он также смещает и уширяет линии поглощения головного дублета рубидия. В присутствии газа контуры линий поглощения могут быть записаны в виде интегралов Фойхта [6].

Учитывая указанные выше процессы и проведя усреднение по длине рабочей ячейки, ширину линии атомного перехода можно представить в виде

$$\Delta f_0 = \left[ \left( \frac{1}{\pi T} + \frac{r_0 c}{\pi^{3/2} l} \sum_{i=1}^4 f_i \gamma_i g_i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_i \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_i^2 + \gamma_i^2 (\omega_i - y + \beta_i P_{\pi})^2} \int_0^{\pi} I_i^P(x, \omega_i) \delta_{\frac{1}{2}}^P(x) dx \right)^2 + (\Delta f_D)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где  $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{Rb-Rb}} + \frac{1}{T_{ст}} + \frac{1}{T_{Rb-газ}}$  — величина, обратная времени релаксации атомов Rb<sup>87</sup> в основном состоянии,  $r_0$  — классический радиус электрона,  $\gamma_i = \frac{a_i}{\Delta \nu_D}$ ,  $g_i = \frac{a_i P_{\pi} (\ln 2)^{1/2}}{\Delta \nu_D}$ ,  $P_{\pi}$  — давление буферного газа в рабочей ячейке,  $\beta_i, a_i$  — коэффициенты смещения и уширения линий поглощения в присутствии газа,  $\delta_{\frac{1}{2}}^P(x)$  — населенность рабочих уровней в момент резонанса,  $c$  — скорость света,  $f_i$  — сила осциллятора перехода,  $\Delta f_D$  — доплеровское уширение линии эталонного перехода.

Используя (1) — (4), окончательно для параметра качества квантового дискриминатора получим

$$F = \left( \frac{\sigma}{(\ln 2)^{1/2}} \right)^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^4 a_i \int_{-\infty}^{\infty} [I_i^H(l, \omega_i) - I_i^P(l, \omega_i)] d\omega_i \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \sum_{i=1}^4 a_i \int_{-\infty}^{\infty} I_i^p(l, \omega_i) d\omega_i \left[ \left( \frac{1}{\pi T} + \frac{r_0 c}{\pi^{3/2} l} \sum_{i=1}^4 f_i \gamma_i g_i \times \right. \right. \right. \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_i^2 + \gamma_i^2 (\omega_i - y + \beta_i P_n)^2} \int_0^l I_i^p(x, \omega_i) \delta_2^2(x) dx d\omega_i \left. \left. \left. \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (\Delta f_D)^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения параметра качества по формуле (5) необходимо рассмотреть прохождение света в квантовом дискриминаторе от спектральной лампы к фотоприемнику и определить интенсивности  $I_i^h(l, \omega_i)$  и  $I_i^p(l, \omega_i)$  на выходе рабочей ячейки. Фильтрацию СТ компонент головного дублета  $Rb^{87}$ , необходимую для эффективной накачки паров рубидия, в рабочей ячейке осуществляет ячейка-фильтр, содержащая пары  $Rb^{85}$  и буферный газ [1]. Буферный газ смещает и уширяет линии поглощения, способствуя тем самым более эффективному поглощению фильтруемых компонент.

Фильтрующие свойства ячейки-фильтра можно исследовать, решая уравнения, описывающие поглощение света, совместно с уравнениями для населенностей уровней [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dI_i(x, \omega_i)}{dx} = & - \frac{2f_i N r_0 g_i I_i(x, \omega_i)}{\pi^{1/2} \Delta v_D} \left[ 7b_6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_i^2 + \gamma_i^2 (\omega_i - \Delta' - y + \beta_i P_\Phi)^2} + \right. \\ & \left. + 5b_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_i^2 + \gamma_i^2 (\omega_i - \Delta'' - y + \beta_i P_\Phi)^2} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$b_j = -b_j p_j + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{12} b_k p_k + \frac{1}{T} \left( \frac{1}{12} - b_j \right),$$

где

$$p_j = \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma_i r_0 c f_i g_i}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} I_i(x, \omega_i) d\omega_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_i^2 + \gamma_i^2 (\omega_i + \beta_i P_\Phi - y - \Delta^j)^2}$$

— вероятность перехода атома  $Rb^{85}$  в возбужденное состояние под действием света накачки,  $\Delta'$ ,  $\Delta''$  — изотопические смещения,  $b_j$  — населенности уровней основного состояния  $Rb^{85}$ ,  $N$  — плотность атомов рубидия.

Далее свет попадает в рабочую ячейку и, поглощаясь, создает инверсную разность населенностей атомов  $Rb^{87}$  в основном состоянии. Уравнения, описывающие процесс оптической накачки паров  $Rb^{87}$  в рабочей ячейке, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dI_i(x, \omega_i)}{dx} = & - \frac{2r_0 f_i N g_i I_i(x, \omega_i)}{\pi^{1/2} \Delta v_D} \sum_{m=1}^4 \delta_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_i^2 + \gamma_i^2 (\omega_i - y + \beta_i P_n)^2}, \\ \delta_m = & - \delta_m p_m + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 \delta_n p_n + \frac{1}{T} \left( \frac{1}{8} - \delta_m \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$p_m = \sum_{i_m} \frac{\gamma_{i_m} r_0 c f_{i_m} g_{i_m}}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} I_{i_m}(x, \omega_{i_m}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{g_{i_m}^2 + \gamma_{i_m}^2 (\omega_{i_m} - y + \beta_{i_m} P_a)^2}$$

— вероятность перехода атома  $\text{Rb}^{87}$  в возбужденное состояние под действием света накачки,  $i_m = \begin{cases} 1, 2 (m=1, 2, 3) \\ 3, 4 (m=4, 5, 6, 7, 8) \end{cases}$ . В качестве граничных условий при решении системы (7) необходимо взять спектральное излучение на выходе ячейки-фильтра, которое определяется из решения системы (6).

Решив (7) в случае резонанса ( $\delta_1 = \delta_3$ ;  $\delta_2 = \delta_6$ ;  $\delta_4 = \delta_5 = \delta_7 = \delta_8$ ) и вне резонанса ( $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$ ;  $\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_8$ ), найдем  $I_i^p(l, \omega_i)$  и  $I_i^h(l, \omega_i)$ . Подставив эти значения в выражение (5), определим параметр качества квантового дискриминатора. Однако системы уравнений (6) и (7) даже в стационарном случае не решаются аналитически. Для их решения численными методами с помощью ЭВМ контуры линий поглощения и излучения были представлены в виде ряда равноотстоящих дискретных компонент, огибающая амплитуд которых соответствует форме линии [7]. При достаточно мелком разбиении контуров этот метод не вносит значительных погрешностей в результаты исследования.

Расчеты сделаны в предположении, что оптическое излучение имеет спектральную плотность  $I_0 = 10^5 \text{ фот/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{гц}$  при ширине линии каждой спектральной компоненты  $a_i \sim 0,05 \text{ см}^{-1}$ . Для определения плотности атомов рубидия при различных температурах использованы данные работы [8].

Оптическое излучение, попадающее в рабочую ячейку, наиболее эффективно используется для накачки паров  $\text{Rb}^{87}$ , когда линии поглощения и излучения имеют равные полуширины и их вершины совпадают. Если рабочая ячейка не содержит буферного газа, линии излучения будут смещены относительно линий поглощения на величину, определяемую условиями фильтрации [1], а их полуширины будут существенно различными ( $a_i = 0,05 \text{ см}^{-1}$ ,  $\Delta\nu_D \approx 0,017 \text{ см}^{-1}$ ). Буферный газ при определенном давлении уравнивает их полуширины и совмещает вершины. Однако чрезмерное уширение или смещение линий поглощения вновь уменьшает эффективность оптической накачки. Поэтому оптимальное давление газа в рабочей ячейке определяется его коэффициентами смещения и уширения [9]. Зависимости, представленные на рис. 1, позволяют сделать вывод, что не только давление газа, но и величина параметра качества квантового дискриминатора определяется этими коэффициентами.

Высокое оптимальное давление ( $\sim 30 \text{ мм рт. ст.}$ ) имеют газы, обладающие нулевым смещением и малым коэффициентом уширения (кривая 1 рис. 1). В этом случае коэффициент уширения определяет давление газа в ячейке. Однако при больших значениях коэффициента смещения газа он влияет лишь на величину параметра качества. На рис. 1 б представлены те же зависимости для другого сечения взаимодействия атомов рубидия с атомами буферного газа. Сравнения соответствующих зависимостей рис. 1 а и 1 б, можно заключить, что газы с разным сечением имеют различные оптимальные давления лишь при малых коэффициентах смещения и уширения.

Зависимость параметра качества от давления аргона ( $\beta_{7800\text{Å}}^\circ = -0,27 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\alpha_{7800\text{Å}} = 0,87 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\beta_{7947\text{Å}} = -0,37 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\alpha_{7947\text{Å}} = 0,64 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\sigma_{\text{Rb-Ar}} = 2,7 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2$ ) и неона ( $\beta_{7800\text{Å}}^\circ = -$

—  $0,009 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\alpha_{7800\text{Å}} = 0,65 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\beta_{7947\text{Å}} = 0,00 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\alpha_{7947\text{Å}} = 0,54 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ;  $\sigma_{\text{Rb-Ne}} = 5,2 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$ ) в рабочей ячейке приведена на рис. 2. Ячейка, содержащая неон, имеет более высокое оптималь-

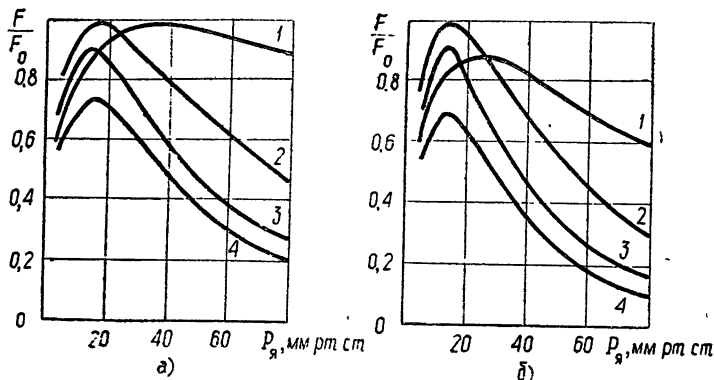


Рис. 1. Зависимость параметра качества квантового дискриминатора от давления газов, имеющих разные коэффициенты смещения и уширения.  $l_{\phi} = 5 \text{ см}$ ,  $T_{\phi} = 70^{\circ}\text{C}$ ,  $P_{\phi} = 100 \text{ мм рт. ст.}$  (аргон),  $l_{я} = 10 \text{ см}$ ,  $T_{я} = 60^{\circ}\text{C}$ ;

а)  $\sigma_{\text{Rb-газ}} = 5,2 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$ , б)  $\sigma_{\text{Rb-газ}} = 2,7 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$ .  
 1— $\beta_i = 0$ ,  $\alpha_i = 0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ; 2— $\beta_i = 0$ ,  $\alpha_i = 1,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ; 3— $\beta_i = -0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ,  $\alpha_i = 1,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ; 4— $\beta_i = -0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ ,  $\alpha_i = 0,5 \text{ см}^{-1}/\text{атм}$ .

ное давление, что обусловлено как малым значением коэффициента смещения, так и малым сечением взаимодействия атомов неона с атомами рубидия. Зависимость параметра качества от давления неона была измерена экспериментально для ячейки длиной  $5 \text{ см}$ , и было получено достаточно хорошее совпадение с расчетными данными (кривая 3, рис. 2).

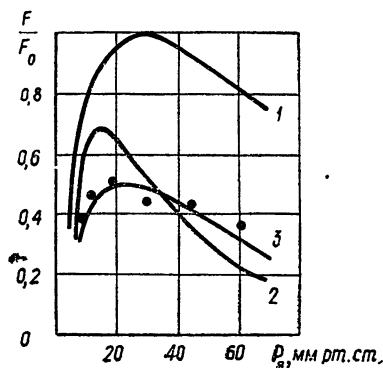


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость параметра качества квантового дискриминатора от давления аргона и неона (теоретические кривые и экспериментальные точки).  $l_{\phi} = 5 \text{ см}$ ,  $T_{\phi} = 70^{\circ}\text{C}$ ,  $P_{\phi} = 100 \text{ мм рт. ст.}$  (аргон),  $T_{я} = 60^{\circ}\text{C}$ ;  
 1—неон,  $l_{я} = 10 \text{ см}$ ; 2—аргон,  $l_{я} = 10 \text{ см}$ ; 3—неон,  $l_{я} = 5 \text{ см}$ .

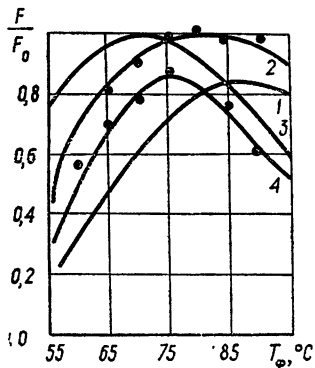


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость параметра качества от температуры ячейки-фильтра при разном давлении содержащегося в ней аргона (расчетные кривые и экспериментальные точки).  $l_{\phi} = 5 \text{ см}$ ,  $T_{я} = 60^{\circ}\text{C}$ ,  $P_{я} = 16 \text{ мм рт. ст.}$  (45% Ar—55% Ne).

1— $P_{\phi} = 12 \text{ мм рт. ст.}$ ; 2— $P_{\phi} = 25 \text{ мм рт. ст.}$ ; 3— $P_{\phi} = 75 \text{ мм рт. ст.}$ ;  
 4— $P_{\phi} = 150 \text{ мм рт. ст.}$

Наибольшее совпадение линий излучения  $Rb^{87}$  и линий поглощения  $Rb^{85}$  в ячейке-фильтре достигается при давлении аргона  $\sim 75$  мм рт. ст. В этом случае эффективная фильтрация оптического излучения достигается при наименьшей температуре (рис. 3). При увеличении или уменьшении давления газа оптимальная температура ячейки-фильтра растет.

Таким образом, смещения и уширения линий поглощения рубидия, обусловленные буферным газом, определяют оптимальные параметры рабочей ячейки и ячейки-фильтра квантового дискриминатора (давление газа, температуру).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968.
- 2 J. M. Anders, D. J. Farmer, C. J. Jновe, IRE Transmil Elector, MTL-3, 178 (1959).
- 3 В. С. Насонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 518 (1963).
- 4 R. F. Lasey, Proc. IEEE, 54, № 2 (1966).
- 5 Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев, сб. Реф. инф. по радиоэлектронике, № 17, реф. 16301.
- 6 С. Э. Фриш, Оптические спектры атомов, Физматгиз, М., 1963.
- 7 В. С. Насонов, Вопросы радиоэлектроники, сер. РТ, вып. 1, 1966.
- 8 U. Busk, H. Pauly, Z. f. Phys chem., 44, 345 (1965).
- 9 Н. М. Еремина, Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев, Н. К. Рудневский, Материалы 7-й Уральской конференции по оптической спектроскопии, Свердловск, 1971.

Поступила в редакцию  
19 ноября 1971 г.

#### THE INFLUENCE OF SHIFT AND BROADENING OF RUBIDIUM ABSORPTION LINES, CAUSED BY BUFFER GAS, ON QUALITY PARAMETER OF RUBIDIUM DISCRIMINATOR

*E. V. Kulagin, G. A. Mishakov, A. I. Pikhteleu*

The influence of buffer gas on the efficiency of optical pump in rubidium vapours has been investigated. The optimal parameters of elements of the quantum discriminator are shown to depend on the gas type and its pressure.

---

УДК 621.372.22

## О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СПЕКТРА ВОЛН В АКТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

*С. В. Кияшко, М. И. Рабинович*

Экспериментально и теоретически исследуется процесс распространения модулированных волн и волн с квазидискретным спектром в нелинейной активной среде. Показано, что в среде с дисперсией нелинейности волна, спектр которой представляет собой сумму узких пакетов в  $\omega$ -пространстве, может монохроматизироваться и превратиться в процессе распространения либо в немодулированную гармоническую волну, либо в квазигармоническую волну — последовательность примыкающих друг к другу радиоимпульсов. Эксперимент проводился в радиодиапазоне на примере активной линии передачи, нелинейный коэффициент усиления которой зависел от частоты.

В данной работе излагаются результаты экспериментального исследования процесса деформации спектра квазигармонических волн при распространении их в нелинейной активной среде с дисперсией. Предварительно приводится краткое теоретическое рассмотрение, которое наряду с известными (см. литературу в [1]) содержит также ряд новых результатов.

В предположении, что синхронные взаимодействия отсутствуют [1], процесс изменения спектра волн анализируется в трех различных приближениях. Вначале полагается, что волна — квазигармоническая и процесс ее распространения может быть описан в пренебрежении дисперсией среды. Далее, при условии, что спектр волны в процессе распространения заметно уширяется и дисперсионные эффекты становятся существенными, для расчета используется параболическое уравнение. Затем исследуется процесс преобразования спектра волн, представляющих собой суперпозицию квазигармонических сигналов.

Заметим, что особенности деформации спектра волн, состоящего из набора узких пакетов в  $\omega$ -пространстве, связаны с конкуренцией в процессе распространения отдельных составляющих спектра. Подобная задача имеет хорошо известный временной аналог — взаимодействие нормальных колебаний (мод) в автоколебательной системе со многими степенями свободы. Решение этой задачи в двухмодовом приближении неоднократно обсуждалось [2-6].

1. Распространение квазигармонической волны в активной среде без релаксации нелинейности описывается уравнением для квадрата амплитуды волны  $m(x, t)$ :

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial x} = h(1 - \alpha m)m, \quad (1)$$

где  $h$ ,  $\alpha$  — параметры среды,  $v$  — групповая скорость.

Решение этого уравнения при граничном условии  $m(t, 0) = m_0(t)$  имеет вид



$$m(x, t) = m_0\left(t - \frac{x}{v}\right) \left\{ \alpha m_0\left(t - \frac{x}{v}\right) + \left[1 - \alpha m_0\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] e^{-hx/v} \right\}^{-1}. \quad (2)$$

Непосредственно из (2) следует, что имевшаяся в волне при  $x = 0$  модуляция в процессе распространения сглаживается и при  $x \rightarrow \infty$  волна становится монохроматической с амплитудой  $A_{cr}^2 = 1/\alpha$ . Если в зависимости  $m_0(t)$  были нули, в частности, если это радиоимпульс длительности  $\tau$ , то в процессе распространения нули сохраняются и модулированная волна превратится в последовательность прижатых друг к другу прямоугольных импульсов, или прямоугольный импульс длительностью  $\tau$ . Решение, для которого характерны скачки амплитуды, есть следствие сделанных приближений, а именно — пренебрежения дисперсией в уравнении (1). Чтобы учесть дисперсионные эффекты внутри узкого спектрального пакета, следует воспользоваться уравнениями 2-го приближения [2]. В случае активной среды с кубичной нелинейностью они имеют вид

$$\dot{A} + vA' - \frac{1}{2A} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( A^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = hA (1 - \alpha A^2); \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} + v\varphi' + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (4)$$

Общий интеграл системы (3), (4) аналитически получить не удается, поэтому, имея в виду, что в процессе распространения волны вдоль системы при  $x \rightarrow \infty$  устанавливается стационарная зависимость амплитуды и фазы волны от переменных  $x$  и  $t$ , найдем это предельное решение. Переходя в (3), (4) к координатам  $z = Vt - x$  и  $t = t$  и отыскивая решение этой системы в виде стационарных волн, распространяющихся со скоростью  $V$ , получим

$$(V - v) \frac{dA}{dz} = \frac{1}{2A} \delta \frac{d}{dz} \left( A^2 \frac{d\varphi}{dz} \right) - hA (1 - \alpha A^2); \quad (5)$$

$$(V - v) \frac{d\varphi}{dz} + \frac{1}{2} \delta \left[ \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dz^2} - \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] = 0 \quad \left( \delta = \frac{d^2 \omega}{dk^2} \right). \quad (6)$$

Активность будем считать теперь малой по сравнению с дисперсионным расплыванием ( $h \ll \delta$ ) и для анализа интересующих нас периодических решений (5), (6) воспользуемся методом усреднения. Для линейной среды (5), (6) имеет решение в виде синусоидально модулированной волны с периодом биений  $\frac{2\pi}{K}$  и волновым числом  $k_m = k + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)_0$  (скорость распространения модуляции — огибающей — определяется граничными условиями), т. е.

$$\left( \frac{d\varphi}{dz} \right)_0 = \frac{V - v}{\delta} = K, \quad (7)$$

$$A(z) = B \sin(Kz + \psi).$$

Решение возмущенной системы (5), (6) ищем в виде (7), но амплитуду и фазу биений будем считать медленно меняющимися функциями  $z$ :

$$\frac{d\varphi}{dz} = K + \mu x(z), \quad (8)$$

$$A = B(\zeta) \sin [Kz + \psi(\zeta)] + \mu A_1(z) \quad (\zeta = \mu z, \mu \ll 1).$$

Подставив (8) в (5), из условия ограниченности  $A_1$  и  $x(z)$  при любом  $z$  найдем после усреднения амплитуду биений

$$B_0 = \frac{2}{\sqrt{3a}}. \quad (9)$$

Скорость распространения волн огибающих в рассматриваемом приближении совпадает с  $V$  и не зависит от величины  $h$ . Найденное решение (8), (9) соответствует случаю, когда спектр модулированной волны — биений, распространяющихся в активной среде, сохраняется. Такая ситуация имеет место лишь в диспергирующей активной среде с весьма малым усилением. Если усиление не мало (по сравнению с величиной дисперсии в интервале  $\Delta\omega$ ), то форма волны огибающих может оказаться существенно несинусоидальной и даже релаксационной.

2. Рассмотрим теперь случай, когда спектр подаваемого сигнала представляет собой набор узких пакетов в  $\omega$ -пространстве. При этом сигнал следует рассматривать как сумму квазигармонических волн, частоты которых различаются достаточно сильно  $|\omega_i - \omega_j| \sim \omega_i, j$ .

Уравнение, описывающее взаимодействие квазигармонических волн в активной диспергирующей среде при отсутствии синхронных взаимодействий, имеет вид

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial m_i}{\partial x} = h_i \left[ 1 - \left( m_i + \sum_{j \neq i}^n \rho_{ij} m_j \right) \right] m_i, \quad (10)$$

здесь  $m_i = a_i A_i^2$ . Значения коэффициентов  $\rho_{ij}$ , определяющих величину связи между волнами, зависят от частотных свойств диссипативных и активных параметров среды (дисперсия нелинейности) и частот  $\omega_i, \omega_j$ . Если на границу системы  $x = 0$  подается стационарный спектр, то за его деформацией в процессе распространения волны можно проследить, определив зависимость  $m_j(x)$  при  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Характер этой зависимости определяется величиной и соотношением коэффициентов связи, т. е. зависимостью  $\rho$  от частоты.

Наиболее простой является, очевидно, задача о деформации спектра, состоящего лишь из двух узких пакетов. Поскольку задача о конкуренции двух волн, распространяющихся в активной среде, уже рассматривалась [3], приведем здесь только основные результаты. На рис. 1 представлено качественное разбиение на траектории плоскости  $m_1, m_2$  ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) для двухкомпонентного спектра в зависимости от значения параметров  $\rho_{ij}$ . Если дисперсия нелинейности в среде отсутствует (т. е. нелинейный коэффициент усиления не зависит от частоты), то  $\rho_{12} = \rho_{21} = \rho$  и характер деформации спектра при распространении полностью определяется соотношением амплитуд спектральных составляющих  $m_1$  и  $m_2$  на границе  $x = 0$ . При  $\rho > 1$  (сильная связь) с ростом  $x$  спектр превращается в монохроматический с  $\omega = \omega_1$ , если  $m_1(0) > m_2(0)$ , и с  $\omega = \omega_2$  в обратном случае. При  $m_1(0) = m_2(0)$  спектр распространяющейся волны не меняется. Если  $\rho < 1$  (слабая связь), то при произвольном соотношении спектральных амплитуд на границе среды ( $m_{1,2}(0) \neq 0$ ) спектр преобразуется в двухкомпонентный с  $m_1(\infty) = m_2(\infty)$ . В случае, когда дисперсия нелинейности слабая,  $\rho_{12} \neq \rho_{21}$ , но коэффициенты связи принадлежат областям (II) или (IV) плоскости параметров (см. рис. 1), качественная картина поведения спектра остается такой же, как при  $\rho_{12} = \rho_{21} > 1$  (или  $\rho_{12} = \rho_{21} < 1$ ). При сильной дисперсии нелиней-

ности ( $\rho_{1,2,21} > 1$ , а  $\rho_{21,12} < 1$ ) независимо от соотношения амплитуд  $m_1(0)$ ,  $m_2(0)$  спектр становится монохроматическим с частотой  $\omega = \omega_{1,2}$ .

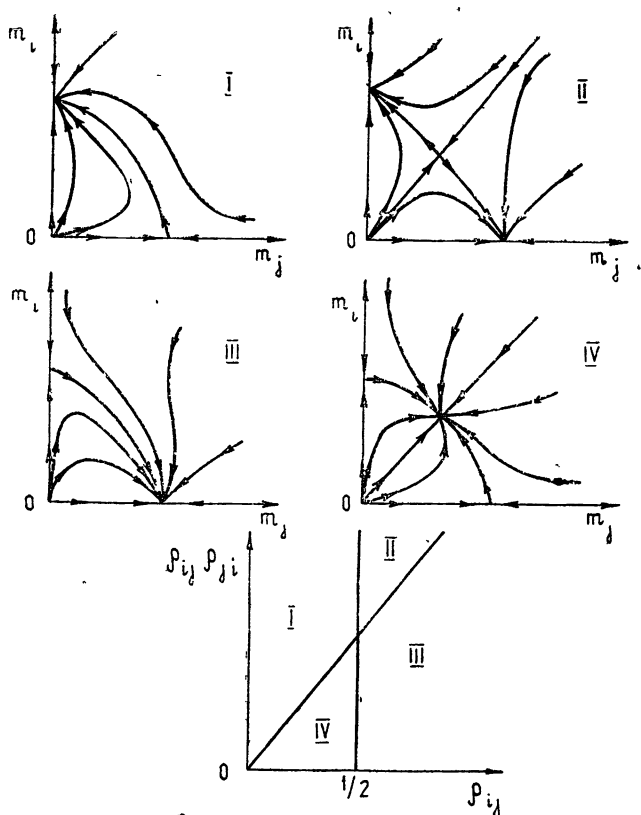


Рис. 1. Разбиение пространства параметров и вид фазовых портретов для случая конкуренции двух волн.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда  $n = 3$ . Вид фазового пространства системы (10) при  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  и  $n = 3$  представлен на

рис. 2. Как и в предыдущем случае, характер деформации спектра при  $x \rightarrow \infty$  определяется соотношением его компонент на границе  $x = 0$  и значениями коэффициентов  $\rho_{ij}$ . В частности, когда коэффициент нелинейного усиления среды не зависит от частоты ( $\rho_{ij} = \rho = \text{const}$ ) и  $\rho > 1$ , в процессе распространения устанавливается монохроматическая волна с частотой  $\omega = \omega_i$ , если  $m_i(0) > m_{j,k}(0)$ . Если  $\rho_{ij} < 1$ , а  $\rho_{ji} > 1$  — сильная дисперсия, при произвольных соотношениях компонент спектра на границе при  $x \rightarrow \infty$  спектр становится монохроматическим с  $\omega = \omega_i$ . На рис. 2б представлен фазовый портрет для случая, когда  $\rho_{31,32} > 1$ ,  $\rho_{13} < 1$  и  $\rho_{23} < 1$ ,  $\rho_{12,21} > 1$ . Характер деформации спектра вдоль  $x$  трудно восстановить по виду фазовых траекторий. Задавая зависимость коэффициентов усиления и нелинейного поглощения среды от частоты, т. е. более детально определив свойства коэффициентов связи  $\rho_{ij}$ , можно сделать заключение и о поведении спектра, состоящего из произвольного числа узких пакетов. В частности, нетрудно убедиться, что при  $\rho_{ij} = \rho < 1$  и  $x \rightarrow \infty$  в системе установится равномерное распределение энергии по спектру —  $m(\omega_i) = \text{const}$ , а при  $\rho_{ij} < 1$ ,  $\rho_{ji} > 1$  при всех  $j$  волна перейдет в монохроматическую с  $\omega = \omega_i$  (рис. 2в).

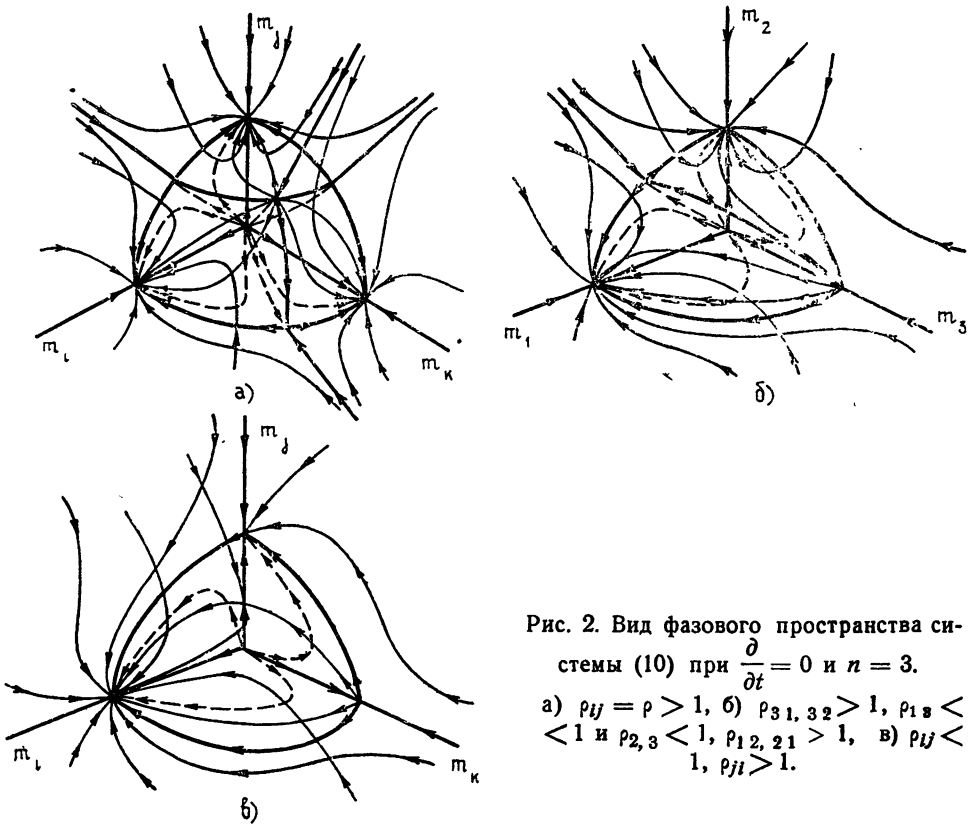


Рис. 2. Вид фазового пространства системы (10) при  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  и  $n = 3$ .

а)  $\rho_{ij} = \rho > 1$ , б)  $\rho_{31, 32} > 1$ ,  $\rho_{13} < 1$  и  $\rho_{2,3} < 1$ ,  $\rho_{12, 21} > 1$ , в)  $\rho_{ij} < 1$ ,  $\rho_{ji} > 1$ .

3. Экспериментальное исследование процесса преобразования спектра волн в нелинейной активной среде производилось в радиодиапазоне на примере  $LC$ -линий передачи, содержащих туннельные диоды. Использовались линии с низкочастотными (тип А) и высокочастотными линейными потерями (тип Б), их принципиальная схема приведена на рис. 3а и 3б соответственно. На концах линии согласовывались с помощью сопротивления, равного волновому. Для того, чтобы система была активна, рабочая точка туннельных диодов выводилась на падающий участок вольтамперной характеристики постоянным напряжением смещения. Входные сигналы подавались на линии через однонаправленные элементы, а распределение энергии по спектру при  $n > 1$  наблюдалось на спектральном анализаторе.

При распространении вдоль линии квазигармонического модулированного сигнала в процессе распространения модуляция сглаживалась, а волна усиливалась до стационарного значения. Когда на вход подавался перемодулированный сигнал — биения, спектр сигнала сохранялся, если несущая частота находилась в области сильной дисперсии системы\* (вблизи критической частоты линии передачи), и существенно расширялся за счет генерации гармоник частоты  $\Omega = \Delta\omega$ , если дисперсия в интервале  $\Delta\omega$  оказывалась слабой. В последнем случае радиоимпульс произвольной формы, подаваемый на вход, превращался практи-

\* При этом выполнялось соотношение  $h \ll \delta$  (см. п. 1).

чески в прямоугольный. Эти результаты не зависели от того, на какой линии (А или Б) производились эксперименты.

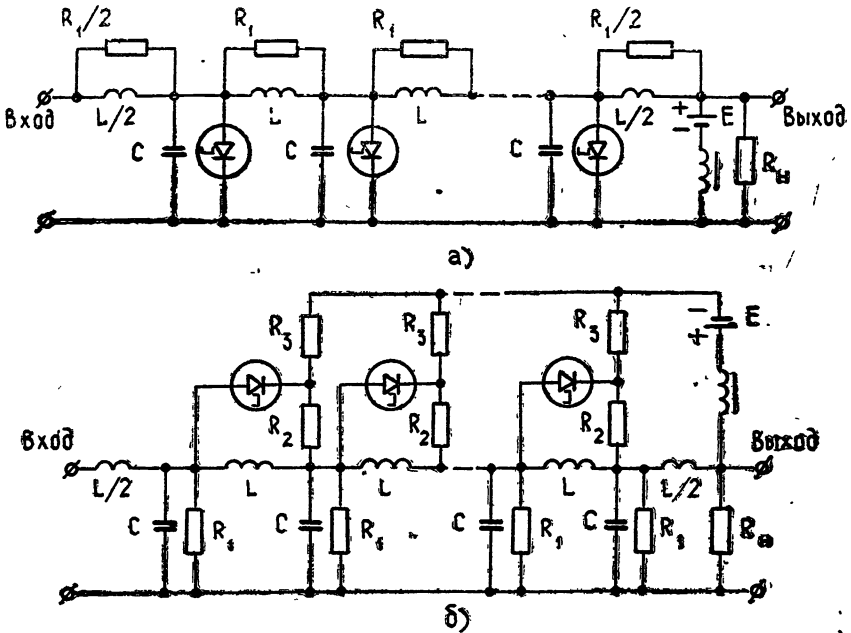


Рис. 3. а) Активная линия с высокочастотными линейными потерями.  
б) Активная линия с низкочастотными линейными потерями.

Когда на вход системы подавалась сумма квазигармонических сигналов, эффекты, наблюдающиеся в линиях типа А и типа Б, были аналогичными с точностью до замены низких частот высокими и наоборот. Поэтому далее будем описывать результаты эксперимента лишь для одного типа линии (А), причем подробно изложим только эксперименты, связанные с анализом конкуренции двух волн. При  $n = 2$  коэффициенты уравнения (10) для рассматриваемых систем выражаются через параметры линии следующим образом (см. рис. 3):

$$h_{1,2} = \frac{L \omega_{1,2}^2 [Gk^2(\omega_{1,2}) + G_1]}{k^2(\omega_{1,2})}, \quad (11)$$

$$\rho_{12} = 2 \frac{G_1 - Gk^2(\omega_2)}{G_1 - Gk^2(\omega_1)}, \quad \rho_{21} = \frac{1}{\rho_{12}}$$

где  $k(\omega)$  определяется дисперсионным уравнением

$$k^2 = \frac{LC \omega^2}{1 - LC_1 \omega^2}, \quad \omega^2 < \frac{1}{LC_1}; \quad (12)$$

$C_1$  — параметр дисперсии, связанной с дискретностью структуры линии,  $G_1$  — отрицательная проводимость туннельного диода на падающем участке характеристики,  $G = 1/R_1$ .

Анализ изменения вдоль линии амплитуд взаимодействующих компонент спектра проводился при различной величине линейных потерь  $G$  и для различных частот. На рис. 4 представлены снятые экспериментально фазовые плоскости переменных  $A_{\omega_1}$  и  $A_{\omega_2}$  при различных  $\omega_{1,2}$  и  $G$ .

Прохождение изображающей точкой какого-либо отрезка траектории, из которых составлен фазовый портрет, соответствует прохождению волновой отрезка линии длиной 48 ячеек. График, демонстрирующий изменение амплитуд спектральных компонент вдоль линии, представлен на рис: 5 ( $G=1/400$ ). При отсутствии линейных потерь ( $G=0$ ,  $\rho_{12} = \rho_{21} = 2$ ) вид фазового портрета не зависит от частот подаваемых сигналов и распределение спектральных амплитуд полностью определяется их начальным соотношением. Введение линейных потерь расширяет область устойчивости монохроматического режима с меньшей частотой и сужает область устойчивости высокочастотной волны. Этот эффект усиливается

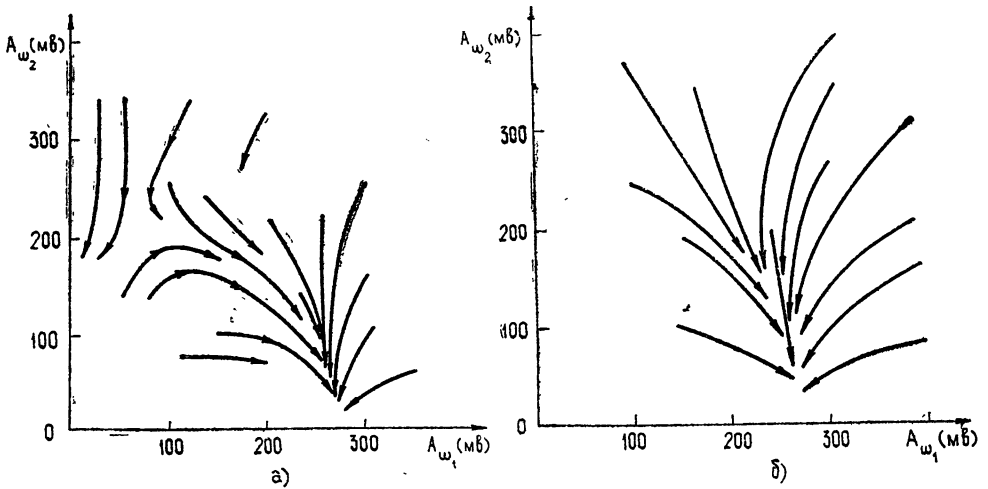


Рис. 4. Экспериментально снятые фазовые портреты при взаимодействии двух волн частот:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,5 \text{ МГц}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 2,8 \text{ МГц};$$

а)  $G = 1/90\Omega$ , б)  $G = 1/40\Omega$ .

с увеличением разности частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (см. рис. 4 а), здесь  $G = 1/900$ , для сравнения укажем  $G_1 = 1/100$ . При больших линейных потерях ( $G = 1/400$ ), если разность частот достаточно велика, независимо от соотношения амплитуд  $A_{\omega_1}$ ,  $A_{\omega_2}$  на входе линии сигнал переходит в монохроматический с частотой  $\omega = \omega_1 < \omega_2$  (рис. 4 б). Заметим, что при этом система остается активной для сигналов обеих частот, и если на входе задать квазигармоническую волну любой частоты ( $\omega \sim \omega_1$ , или  $\omega \sim \omega_2$ ), то она усилится до стационарного значения.

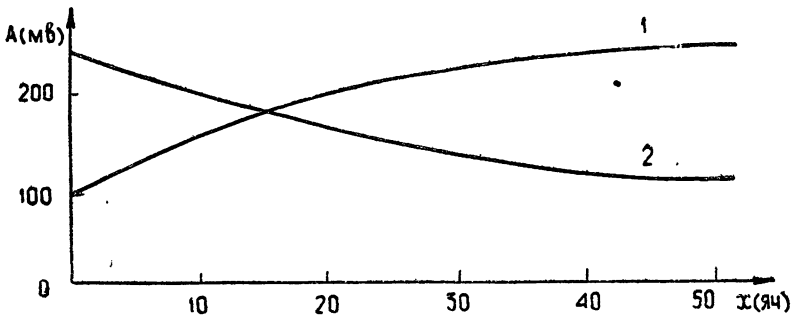


Рис. 5. Изменение амплитуд взаимодействующих волн вдоль линии:  
1— $f = 1,5 \text{ МГц}$ , 2— $f = 2,8 \text{ МГц}$ .

В заключение отметим, что, как показало экспериментальное исследование, активные линии передачи с высокочастотными линейными потерями и низкочастотным нелинейным усилением (тип А) могут служить для выделения из подаваемого на вход сигнала с широким нефиксированным априори спектром гармоник с наименьшей из имеющихся в подаваемом спектре частот. Линии типа В (с низкочастотными линейными потерями), в свою очередь, могут служить для выделения спектральной компоненты с наибольшей частотой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
2. М. И. Рабинович, Аннотации докладов, представленных на IV Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1968.
3. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, изд. ЛГУ, Л., 1970.
4. У. Лэмб, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966, стр. 283.
5. А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934).
6. А. П. Скибарко, С. П. Стрелков, ЖТФ, 4, 158 (1934).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
7 февраля 1972 г.

#### WAVE SPECTRUM TRANSFORMATION IN ACTIVE NONLINEAR MEDIUM

*S. V. Kiyashko, M. I. Rabinovitch*

The propagation of modulated waves and waves with quasi-discrete spectrum in a nonlinear active medium are experimentally and theoretically investigated. It is shown that in the medium with the dispersion nonlinearity the wave with a spectrum consisting of a sum of narrow packets in  $\omega$ -space may be monochromized and converted when propagating either into a nonmodulated harmonic wave or into a quasi-harmonic wave—a succession of pulses adjacent to each other. The experiment was made in radio band on the example of active transmission line the nonlinear amplification coefficient of which was dependent on the frequency.

УДК 538.56

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ И АМПЛИТУДЫ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ, ВЫЗЫВАЮЩЕЙ РЕЗОНАНС В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Д. В. Агеев, А. В. Зенькович*

Определяется форма внешней силы, вызывающей резонанс в линейной системе с меняющимися по произвольному закону параметрами. Решение находится в виде колебания с переменной частотой и амплитудой. Анализируются причины неоднозначности функций, описывающих частоту и амплитуду резонансного колебания, дается обобщенное определение понятия мгновенной частоты, учитывающее характер ее собственных колебаний.

Колебательные системы с переменными параметрами находят все более широкое применение в физике и технике, большое значение имеет использование их резонансных свойств. Задаче анализа резонансных явлений в линейных системах с переменными параметрами посвящены работы Горелика [1]. Они относятся к линейным системам с периодически меняющимися параметрами, для которых резонансные внешние силы представляются производными функций Хилла, т. е. сложной суммой квазипериодических гармонических колебаний.

Ниже на основе введенного Мандельштамом [2] критерия резонанса задача определения внешней силы, вызывающей резонанс в линейной системе с переменными параметрами, решается для случая произвольного закона изменения параметра. Решение ищется в виде единого колебания с изменяющейся частотой и амплитудой, поскольку используемые на практике колебания обычно характеризуются мгновенными частотой и амплитудой.

В качестве исследуемой системы возьмем последовательный колебательный контур с постоянной индуктивностью  $L$ , постоянным активным сопротивлением  $R$  и переменной емкостью  $C(t)$  (рис. 1). Дифференциальное уравнение контура [1] имеет вид

$$q''(t) + 2\alpha q'(t) + \omega_0^2(t)q(t) = \frac{1}{L} e(t),$$

где частота настройки контура и его затухание равны

$$\omega_0(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}.$$

Через  $q(t)$  и  $e(t)$  обозначены соответственно мгновенные значения заряда емкости контура и действующей в нем ЭДС (рис. 1).

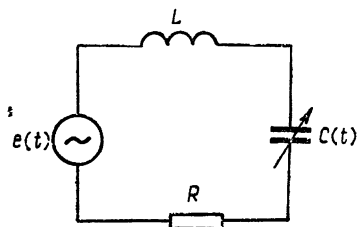


Рис. 1. Схема одиночного контура с переменной емкостью.



Под резонансной понимается такая ЭДС [1, 2], при действии которой в колебательном контуре устанавливается состояние, характеризующееся равенством

$$q''(t) + \omega_0^2(t)q(t) = 0. \quad (1)$$

Оно означает, что напряжения на реактивных элементах контура компенсируют друг друга в каждый момент времени, и поэтому внешняя ЭДС  $e(t)$  полностью падает на активном сопротивлении контура, т. е.

$$Rq'(t) = e(t). \quad (2)$$

Прежде всего выясним, при какой форме колебания  $q(t)$  выполняется условие резонанса (1). Для этого будем искать функцию  $q(t)$  в виде единого колебания с переменной частотой  $\omega_q(t)$  и переменной амплитудой  $Q(t)$ :

$$q(t) = Q(t) \sin \int \omega_q(t) dt. \quad (3)$$

Дифференцируя два раза это выражение, получим

$$q''(t) = - [\omega_q^2(t)Q(t) - Q''(t)] \sin \int \omega_q(t) dt + \\ + \left\{ \frac{d}{dt} [\omega_q(t)Q(t)] + \omega_q(t)Q'(t) \right\} \cos \int \omega_q(t) dt. \quad (4)$$

Величину  $q''(t)$ , определяющую напряжение на индуктивности при  $L = 1$ , также представим в виде единого колебания с переменной частотой  $\omega_L(t)$  и переменной амплитудой  $U_L(t)$ :

$$q''(t) = U_L(t) \sin \int \omega_L(t) dt, \quad (5)$$

где в соответствии с (4) амплитуда, мгновенная фаза и мгновенная частота имеют соответственно вид

$$U_L(t) = \left\{ [\omega_q^2(t)Q(t) - Q''(t)]^2 + \left[ \frac{d}{dt} [\omega_q(t)Q(t)] + \omega_q(t)Q'(t) \right]^2 \right\}^{1/2}; \quad (6)$$

$$\int \omega_L(t) dt = \int \omega_q(t) dt - \arctg \frac{\frac{d}{dt} [\omega_q(t)Q(t)] + \omega_q(t)Q'(t)}{\omega_q^2(t)Q(t) - Q''(t)} + \pi, \quad (7)$$

$$\omega_L(t) = \omega_q(t) - \frac{d}{dt} \arctg \frac{\frac{d}{dt} [\omega_q(t)Q(t)] + \omega_q(t)Q'(t)}{\omega_q^2(t)Q(t) - Q''(t)}.$$

Из последнего соотношения непосредственно следует, что мгновенная частота напряжения на индуктивности  $\omega_L(t)$ , вообще говоря, отличается от мгновенной частоты заряда емкости  $\omega_q(t)$ , и только в частном случае, когда  $\omega_q(t) = \omega_q = \text{const}$  и  $Q(t) = Q = \text{const}$ , имеет место их равенство. Отличие частот объясняется тем, что функция  $q''(t)$  зависит не только от мгновенных значений функций  $\omega_q(t)$  и  $Q(t)$ , но и от значений их производных первого и второго порядка.

В соответствии с равенствами (1) и (3) напряжение на емкости (при  $L = 1$ ) равно

$$U_C(t) \sin \int \omega_C(t) dt = \omega_0^2(t) q(t), \quad (8)$$

где переменная амплитуда и переменная частота

$$U_C(t) = \omega_0^2(t) Q(t); \quad (9)$$

$$\omega_C(t) = \omega_q(t). \quad (10)$$

Следовательно, частота напряжения на емкости в любой момент времени совпадает с частотой колебания заряда.

Для выполнения условия резонанса (1) необходимо, чтобы напряжение на индуктивности в любой момент времени было равно по абсолютной величине напряжению на емкости, но имело бы противоположный знак. После подстановки (5) и (8) в (1) получим

$$U_L(t) \sin \int \omega_L(t) dt = U_C(t) \sin \left[ \int \omega_C(t) dt + \pi \right]. \quad (11)$$

Это равенство будет выполнено, если в любой момент времени

$$\int \omega_L(t) dt = \int \omega_C(t) dt + \pi; \quad (12)$$

$$U_L(t) = U_C(t), \quad (13)$$

т. е. если мгновенные фазы колебаний будут отличаться на  $180^\circ$ , а амплитуды будут одинаковы.

Подставив в (12) и (13) значения входящих в них величин из (7), (10) и (6), (9), получим уравнения

$$\operatorname{arctg} \frac{\frac{d}{dt} [\omega_q(t) Q(t)] + \omega_q(t) Q'(t)}{\omega_q^2(t) Q(t) - Q''(t)} = 0; \quad (14)$$

$$\left\{ [\omega_q^2(t) Q(t) - Q''(t)]^2 + \left[ \frac{d}{dt} [\omega_q(t) Q(t)] + \omega_q(t) Q'(t) \right]^2 \right\}^{1/2} = \omega_0^2(t) Q(t). \quad (15)$$

Мгновенная фаза напряжения на индуктивности будет отличаться на  $180^\circ$  от фазы напряжения на емкости только в том случае, если частота  $\omega_q(t)$  и амплитуда заряда  $Q(t)$  в каждый момент времени будут связаны между собой уравнением (14). Из него следует, что

$$\frac{d}{dt} [\omega_q(t) Q(t)] + \omega_q(t) Q'(t) = 0. \quad (16)$$

Учтя это выражение, вместо (15) можно записать

$$\omega_q^2(t) Q(t) - Q''(t) = \omega_0^2(t) Q(t). \quad (17)$$

Интегрируя (16) как уравнение с разделяющимися переменными, найдем

$$Q(t) = \frac{B}{\sqrt{\omega_q(t)}}, \quad (18)$$

где  $B$  — произвольная постоянная. Только при такой зависимости между  $Q(t)$  и  $\omega_q(t)$  при изменении амплитуды и частоты заряда напряжения на индуктивности и емкости будут противофазны и их частоты будут одинаковы в любой момент времени.

После подстановки (18) в (17) будем иметь

$$\omega_q^2(t) = \omega_0^2(t) + \frac{3}{4} \left[ \frac{\omega_q'(t)}{\omega_q(t)} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_q''(t)}{\omega_q(t)}. \quad (19)$$

Это уравнение определяет частоту колебания заряда  $\omega_q(t)$ , при которой наряду с (12) будет выполняться равенство (13), т. е. амплитуда напряжения на индуктивности будет равна амплитуде напряжения на емкости. Найдя  $\omega_q(t)$  из уравнения (19) и подставив ее в (18), получим амплитуду колебания заряда  $Q(t)$ . Последняя вместе с  $\omega_q(t)$  определяет колебание заряда (3), удовлетворяющее условию резонанса (1).

Уравнение (19) можно также получить методом ВКБ [3]. Оно значительно сложнее, чем уравнение (1). Поэтому, казалось бы, задача решения исходного уравнения (1) сведена к еще более сложной. Как показано ниже, в действительности дело обстоит иначе, так как для достаточно медленно меняющихся функций  $\omega_0(t)$  уравнение (19) нетрудно приближенно проинтегрировать с любой заданной степенью точности.

Уравнение (19) при выбранной конкретной функции  $\omega_0(t)$  определяет не одну функцию  $\omega_q(t)$  а бесконечное множество различных функций. В самом деле, задавая произвольно различные начальные значения  $\omega_q(0)$  и  $\omega_q'(0)$  искомой функции  $\omega_q(t)$ , мы получим из уравнения (19) сколь угодно большое число различных функций  $\omega_q(t)$ . Каждая из них, удовлетворяя уравнению (19), будет определять колебание (3), отвечающее условию резонанса (1). Решение (3) содержит две произвольные постоянные: одну в выражении для амплитуды  $Q(t)$  (18) и другую в неопределенном интеграле (3). С учетом этого выражение (3) можно переписать в виде

$$q(t) = \frac{B}{\sqrt{\omega_q(t)}} \sin \left[ \int_{t_1}^t \omega_q(\tau) d\tau + B_1 \right] = \\ = \frac{B}{\sqrt{\omega_q(t)}} \cos B_1 \sin \int_{t_1}^t \omega_q(\tau) d\tau + \frac{B}{\sqrt{\omega_q(t)}} \sin B_1 \cos \int_{t_1}^t \omega_q(\tau) d\tau,$$

где  $B_1$  — произвольная постоянная величина.

Вводя обозначения  $B \cos B_1 = B_2$  и  $B \sin B_1 = B_3$ , получим

$$q(t) = \frac{B_2}{\sqrt{\omega_q(t)}} \sin \int_{t_1}^t \omega_q(\tau) d\tau + \frac{B_3}{\sqrt{\omega_q(t)}} \cos \int_{t_1}^t \omega_q(\tau) d\tau.$$

Здесь  $q(t)$  — сумма двух линейно независимых частных решений с двумя произвольными постоянными. В соответствии с общей теорией линейных дифференциальных уравнений [4] такое решение является общим решением исходного линейного однородного уравнения второго порядка (1).

Из изложенного следует, что существует бесконечно большое число различных пар функций  $Q(t)$  и  $\omega_q(t)$ , удовлетворяющих соответственно уравнениям (18) и (19), и каждая пара по формуле (3) определяет одну и ту же функцию  $q(t)$ , являющуюся решением уравнения резонанса (1). Но это означает, что предположение о существовании только одной пары функций  $\omega_q(t)$  и  $Q(t)$ , в соответствии с которыми изменяются мгновенная частота и амплитуда искомого колебания (3), является, строго говоря, неправильным.

Полученная неопределенность функций частоты и амплитуды колебания  $q(t)$  есть следствие того обстоятельства, что представление  $q(t)$  в форме (3) не является однозначным. Предположение об однозначности такого представления основано на ошибочном мнении, что любое колебание в текущий момент времени имеет одну определенную частоту и одну определенную мгновенную амплитуду.

Исследования уравнения (19) выходят за рамки данной статьи. Поэтому мы вынуждены ограничиться следующими замечаниями. Если искать приближенное решение уравнения (19) в виде суммы

$$\omega_q(t) = \omega_0(t) + y(t) = \omega_0(t) + \varepsilon x(t), \quad (20)$$

где  $x(t)$  — функция, определяющая форму искомой функции  $y(t)$ , а  $\varepsilon$  — сколь угодно малая постоянная положительная величина, и предположить, что, вследствие медленности изменения  $\omega_0(t)$ , справедливы неравенства

$$\left[ \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right]^2 \ll \omega_0^2(t), \quad \left| \frac{\omega_0''(t)}{\omega_0(t)} \right| \ll \omega_0^2(t), \quad (21)$$

то подстановка (20) в (19) и пренебрежение членами, содержащими  $\varepsilon^n$  при  $n > 1$ , приводит к уравнению

$$y''(t) - 3 \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} y'(t) + 4\omega_0^2(t)y(t) = \quad (22)$$

$$= 2\omega_0(t) \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0''(t)}{\omega_0(t)} \right\}.$$

Поскольку это уравнение линейное, то (20) можно записать так:

$$\omega_q(t) = \omega_0(t) + y(t)_{\text{св}} + y(t)_{\text{вын}}, \quad (23)$$

где  $y(t)_{\text{св}}$  — свободное колебание, являющееся решением уравнения (22), когда его правая часть заменена нулем, а  $y(t)_{\text{вын}}$  — вынужденное колебание, удовлетворяющее уравнению (22) и не зависящее от начальных значений  $y(0)$  и  $y'(0)$ , а следовательно, и от начальных значений  $\omega_q(0)$  и  $\omega_q'(0)$ . Свободное колебание  $y(t)_{\text{св}}$  зависит от  $\omega_q(0)$  и  $\omega_q'(0)$ , которые можно задавать произвольно. Поэтому существует бесконечное множество различных функций  $\omega_q(t)$ , удовлетворяющих уравнению (19).

В связи с этим возникает важный вопрос: нельзя ли устранить указанную неопределенность путем выбора одной функции  $\omega_q(t)$ , которую можно было бы назвать истинной частотой.

Из (22) следует, что при соблюдении неравенств (21) функция  $y(t)_{\text{св}}$  колеблется с частотой, близкой к  $2\omega_0(t)$ , а при  $\omega_0(t) = \text{const}$  — с частотой, точно равной  $2\omega_0$ . Как ясно из (23), с такой же частотой колеблется искомая частота  $\omega_q(t)$ . Эти колебания без какой-либо необходимости увеличивают изменения частоты  $\omega_q(t)$  и обуславливают ее неопределенность. Для устранения указанной неопределенности и уменьшения степени изменения частоты мы предлагаем следующее определение понятия — истинная частота  $\omega_q(t)$  колебания  $q(t)$ . Под истинной частотой  $\omega_q(t)$  будем понимать вынужденное решение уравнения (19), т. е. то из решений, которое не содержит свободных колебаний и поэтому не зависит от начальных значений  $\omega_q(0)$  и  $\omega_q'(0)$ . В случае медленно меняющейся частоты настройки  $\omega_0(t)$  истинную частоту можно определить с помощью (23), если положить  $y(t)_{\text{св}} = 0$ . Иначе говоря, под истинной частотой понимается то из решений  $\omega_q(t)$  уравнения (19), которое зависит только от функции  $\omega_0(t)$ , определяющей частоту настройки контура.

В случае, когда выполняются неравенства (21), истинную частоту можно определить с помощью метода последовательных приближений. Для этого предварительно представим (19) в форме

$$\omega_q(t) = \omega_0(t) \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_0^2(t)} \left[ \frac{3}{4} \left[ \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0''(t)}{\omega_0(t)} \right] \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

С учетом неравенств (21) в качестве нулевого приближения к действительному решению примем функцию

$$\omega_q(t) = \omega_0(t). \quad (25)$$

Для получения первого приближения подставим (25) в правую часть уравнения (24) и после приближенного вычисления значения корня получим

$$\omega_q(t) = \omega_0(t) + \frac{1}{2\omega_0(t)} \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0''(t)}{\omega_0(t)} \right\}. \quad (26)$$

Для нахождения второго приближения подставим (26) в правую часть уравнения (24) и вычислим значение корня до малых величин третьего порядка. Действуя далее аналогичным образом, можно вычислить искомую функцию  $\omega_q(t)$  с любой требуемой степенью точности. При этом получающаяся каждый раз функция  $\omega_q(t)$  представляет собой вынужденное решение уравнения (19).

Вычислим теперь частоту и амплитуду ЭДС

$$e(t) = E(t) \cos \int \omega_e(t) dt, \quad (27)$$

вызывающей резонанс в рассматриваемой линейной системе с переменными параметрами — контуре с переменной емкостью. Для этого подставим (3) и (27) в (2). После дифференцирования и выполнения тригонометрических преобразований получим

$$\omega_e(t) = \omega_q(t) - \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{Q'(t)}{\omega_q(t) Q(t)},$$

$$E(t) = \{ \omega_q^2(t) Q^2(t) + [Q'(t)]^2 \}^{1/2}.$$

Учитывая равенство (18), запишем

$$\omega_e(t) = \omega_q(t) + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \frac{\omega_q'(t)}{\omega_q^2(t)}; \quad (28)$$

$$E(t) = BV \sqrt{\omega_q(t)} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{\omega_q'(t)}{\omega_q^2(t)} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (29)$$

Из выражения (28) следует, что частота резонансной ЭДС  $e(t)$  всегда отличается от частоты колебания заряда  $\omega_q(t)$ . Исключением является случай, когда  $\omega_q(t)$  не изменяется во времени, т. е. когда частота настройки контура постоянна.

Поскольку частота  $\omega_q(t)$  в первом приближении определяется выражением (26), то после подстановки (26) в равенства (28) и (29) и пренебрежения величинами более высоких порядков малости получим искомые выражения

$$\omega_e(t) = \omega_0(t) \left\{ 1 - \frac{5}{8} \left[ \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right]^2 + \frac{1}{4} \frac{\omega_0''(t)}{\omega_0^3(t)} \right\},$$

$$E(t) = BV \sqrt{\omega_0(t)} \left\{ 1 + \frac{5}{16} \left[ \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right]^2 - \frac{1}{8} \frac{\omega_0''(t)}{\omega_0^3(t)} \right\}.$$

Эти выражения позволяют сделать вывод, что частота и амплитуда резонансной внешней силы тем больше отличаются соответственно от величин

ны  $\omega_0(t)$  и  $B\sqrt{\omega_0(t)}$ , чем больше значения скорости и ускорения, с которыми изменяется частота настройки  $\omega_0(t)$ , по сравнению с ее величиной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Горелик, ЖТФ, 4, № 10, 1183 (1934); 5, № 2, 195 (1935); 5, № 3, 489 (1935).
2. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. 4, Лекции по колебаниям, изд. АН СССР, М., 1955.
3. В. Каннингхэм, Введение в теорию нелинейных систем, Госэнергоиздат, М., 1962.
4. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1958.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
5 ноября 1971 г.

DETERMINATION OF FREQUENCY AND AMPLITUDE OF THE  
EXTERNAL FORCE CAUSING RESONANCE IN A LINEAR SYSTEM WITH  
VARIABLE PARAMETERS

*D. V. Ageev, A. V. Zen'kovich*

The form of the external force causing the resonance in the linear system with the parameters variable according to the arbitrary law is determined. The solution is sought in the form of oscillations with the variable frequency and amplitude. The reasons of the ambiguity of functions describing the frequency and amplitude of resonance oscillation are analysed. A generalized determination of the instantaneous frequency is given which takes into account the behaviour of its natural oscillations.

---

УДК 621.396.69 : 535.317

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ МУЛЬТИПЛИКАТОР СИГНАЛОВ

Ю. В. Осипов

Описано оптическое устройство, выполняющее мультиплицирование (умножение) входной информации, записанной на фотографическом транспаранте, в трехмерном пространстве.

Оптико-электронные системы обработки информации позволяют увеличить объем передаваемой информации за счет использования того свойства оптического сигнала, что в отличие от электрического сигнала оптический является функцией пространственных координат  $x, y, z$ . С использованием зависимости от координат  $x, y$  оказывается возможным построение многоканальных оптических систем, например спектр-анализаторов [1]. Третье измерение — ось  $z$ , в направлении которой распространяется сигнальный луч, можно использовать в оптике путем применения в системе бифокальных линз (БЛ) [2] из двупреломляющего оптически прозрачного материала, например исландского шпата. Введение в оптическую систему каскадов из БЛ, как будет показано ниже, увеличивает информационную емкость всей системы.

На рис. 1 представлена оптическая схема действующего макета. В качестве исходного светового пучка использован коллимированный линзами  $L_1$  и  $L_2$  пучок от источника И (ртутная лампа, лампа накаливания или газовый лазер). В качестве сигнала  $a(x', y')$ , предназначенного для передачи и умножения (мультиплицирования), был выбран оптический транспарант, изготовленный фотоспособом на стекле в виде пятипальной тест-миры М, имитирующей укороченную последовательность (пять) прямоугольных импульсов. Мира М (тест-объект), освещенная диффузным светом от рассеивателя Р, изображается в предметной плоскости матрицы линз МЛ. Мультиплицирование изображения миры обуславливается ходом лучей от всех точек самосветящейся миры через все смежные оптические элементы матрицы. Матрица линз работает как многоканальная проекционная система, преобразующая входящий пучок в интегральную систему множества сходящихся пучков со своими центрами сходимости. Таким образом, реакция МЛ на воздействие светящейся точки представляется как совокупность точечных источников по числу элементов матрицы МЛ.

Известно [3], что процесс прохождения информации через оптическую систему эквивалентен рассмотрению прохождения электрического сигнала через систему с линейными звеньями. Используем следующую электрооптическую аналогию [4]. В оптике модели точечного излучателя с координатами  $(x_i, y_i)$  соответствуют короткий (единичной площади) пространственный импульс, т. е. смещенная двумерная дельта-функция, заданная в виде произведения  $\delta^2 \equiv \delta(x - x_i) \delta(y - y_i)$ . При этом можно показать, что сигнал на выходе оптической системы  $S(x, y)$  представляется в виде двумерной свертки сигнала  $a(mx, my)$  с импульсной реакцией системы  $g(x, y)$ :

$$S(x, y) = a(mx, my) * g(x, y), \quad (1)$$

где коэффициент  $m$  учитывает масштаб формируемого изображения.

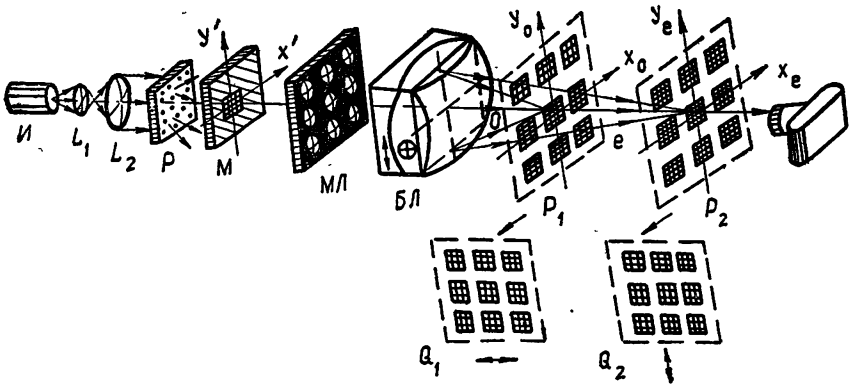


Рис. 1. Устройство пространственного умножения сигнала, закодированного в виде оптического транспаранта.

В случае матрицы МЛ со сферическими линзовыми элементами функцию  $g(x, y)$  можно записать как функцию дискретного аргумента, соответствующего координатам  $(x_i, y_i)$  центров сходимости световых пучков от каждого из  $N$  элементов матрицы:

$$\sum_i \delta_i^2 = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \delta(y - y_i). \quad (2)$$

Результат перемножения сигнальной функции с импульсной реакцией вида (2) проявляется в виде пространственной модуляции исходного светового потока, и выходной сигнал для функции дискретного аргумента дается сверткой дискретизированного вида [5]:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a(mx_i, my_i) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a[m(x - x_i), m(y - y_i)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Результатом операции (3) является умножение входного сигнала, т. е. получение на выходе системы совокупности функций  $a(mx, my)$ . Соотношение (3) правильно описывает действие оптического устройства, показанного на рис. 1, лишь в случае, когда функции  $a(x, y)$  и  $g(x, y)$  предполагаются равными нулю вне своей области определения (в частности,  $a(x', y')$  описывает исходную укороченную последовательность импульсов) и энергия исходного сигнала  $a(x', y')$  усредняется между сигналами (3) на выходе. В записи (3) свертки для функции дискретного аргумента виден коэффициент усреднения  $(1/N)$ .

Умножение, как известно [6], можно также осуществить с помощью голограммы совокупности точечных источников или, в первом приближении, с помощью матрицы искусственных голограмм в виде зонных пластинок Френеля. Это позволяет в принципе реализовать в устройстве (рис. 1) высокую плотность каналов в плоскости  $(x, y)$ .



Бифокальные линзы (БЛ) дают дискретизированный сигнал в виде последовательности выборочных значений вдоль оси  $z$ . На рис. 1 показано действие одного каскада на БЛ, формирующего два ортогонально поляризованных изображения в фокальных плоскостях  $P_1(x_0, y_0)$  и  $P_2(x_e, y_e)$ , соответствующих обыкновенному ( $o$ ) и необыкновенному ( $e$ ) пучкам. БЛ представляет собой триплексную систему [2], в которой одновременная фокусировка  $o$  и  $e$  пучков осуществляется с помощью стеклянной плоско-выпуклой линзы, наклеиваемой на одну из рабочих граней выпукло-вогнутого коллектива из исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ) с взаимно-перпендикулярной ориентировкой кристаллооптических осей.

Расстояние  $L$  между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$  зависит не только от величины двупреломления кристалла  $\Delta n = n_o - n_e$  и радиуса кривизны БЛ, но и от фокусного расстояния  $F$  стеклянной линзы. Практически получены следующие данные: для БЛ из  $\text{CaCO}_3$  (в видимом свете  $\Delta n/n^2 \approx 0,10$ ) с фокусом для  $o$  пучка  $F_o = 150$  мм при линзе с  $F = 110$  мм имеем  $L = 80$  мм. При расстоянии между МЛ и БЛ 210 мм в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$  получены размноженные ( $3 \times 3$ ) изображения равного масштаба. При желании этот масштаб можно регулировать, меняя расстояние между МЛ и БЛ. Качество изображений, сформированных БЛ вдоль оси  $z$ , характеризуется следующими данными. При фотографической регистрации изображений мира зеркальной камерой «Зенит» на пленку типа «Микрат» разрешались линии шириной 25 мкм при размере изображения  $1 \times 1$  мм<sup>2</sup> как в дальней ( $P_2$ ), так и в ближней ( $P_1$ ) зонах.

Располагая последовательно две БЛ (рис. 2) с разными фокусами, будем иметь четыре размноженных вдоль оси  $z$  изображения в фокальных плоскостях  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , отвечающих комбинациям  $o$  и  $e$  пучков:  $o-o, o-e, e-o, e-e$  соответственно. Для двух идентичных БЛ пучки  $o-e$  и  $e-o$  имеют одну фокальную плоскость. Для  $n$  каскадов из БЛ с различными фокусами количество получаемых изображений (сигналов) в общем случае равно  $2^n$ , а для  $n$  одинаковых БЛ число изображений  $(n+1)$ . Для целей построения двойных, тройных и т. д. корреляторов сигналы из плоскостей  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1) с помощью простых отклоняющих систем (на основе волоконной оптики или полупрозрачных зеркал) могут быть «отведены» в подпространства  $Q_1$  и  $Q_2$  (каналы сравнения).

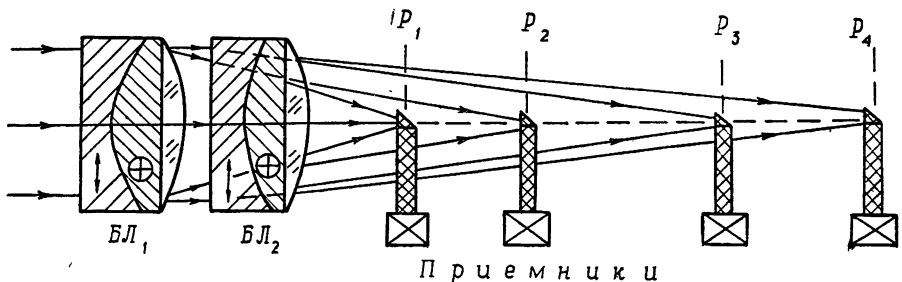


Рис. 2. Двухкаскадный (четырёхпозиционный) расщепитель сигнала на основе двух бифокальных линз.

Описываемое устройство может быть использовано в системах распознавания образов (по их признакам), а также в оптических линиях связи внутри систем ЭВМ с разветвленной программой интегральных операций и обеспечением большого числа дублирующих каналов.

Автор выражает благодарность В. И. Винокурову за обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зверев, Е. Ф. Орлов, Оптические анализаторы, изд. Сов. радио, М., 1971.
2. В. А. Осипов - Кинг, Бюллетень изобретений, Авторское свидетельство № 106823, № 6, 1957.
3. Ю. Г. Якушенков, Основы теории и расчета оптико-электронных приборов, изд. Сов. радио, М., 1971.
4. Л. М. Сороко, Основы голографии и когерентной оптики, изд. Наука, М., 1971.
5. Бергланд, Зарубежная радиоэлектроника, № 3, 52 (1971).
6. Лу Сунь, ТИИЭР, 56, № 1, 132 (1968).

Ленинградский электротехнический институт  
имени В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию  
7 апреля 1972 г.

## SPATIAL SIGNAL MULTIPLICATOR

*Yu. V. Osipov*

An optical device making multiplication of the input information recorded on a photographic transparent in a three-dimensional space is described.

---

УДК 621.391.822.2

## К КУБИЧЕСКОЙ (ЧЕТЫРЕХИНДЕКСНОЙ) ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ШУМОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ

Р. Л. Стратонович, Н. А. Крупенников

Получен ряд новых соотношений, преимущественно некантовых, связывающих различные 4-х индексные функции. Момент  $Q$  выражен через адмиттансные функции  $B$ . Доказана эквивалентность триадмиттансных функций  $C$  и адмиттансной функции  $G$  функциям  $B$ . Рассмотрен несложный радиотехнический пример.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория тепловых флуктуаций в средах с нелинейной диссипацией развивается в двух направлениях, а именно, по пути марковской и по пути динамической теории. В марковской теории, примененной в работе [1], используется релаксационное уравнение и кинетическое уравнение типа уравнения Фоккера—Планка. Динамическая теория, развиваемая в работах [2, 3], не ограничена условием марковости и естественным образом охватывает квантовый случай. Настоящая статья относится ко второму направлению.

Каждая из указанных теорий является прямым обобщением хорошо известной линейной теории тепловых флуктуаций, и каждой из них свойственна аналогичная трудность при переходе от линейной и квадратичной теории к кубической (четыреиндексной) теории. Эта трудность заключается в том, что в кубической теории феноменологические диссипационные характеристики не определяют полностью все четыреиндексные флуктуационные характеристики. В настоящей статье будет продолжено рассмотрение этой трудности, а именно, будет продолжено начатое в [3] исследование произвола, остающегося в четыреиндексной флуктуационно-диссипационной термодинамике после фиксации адмиттансной функции  $G^{4321} \equiv G_{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$ ,  $(t_4, t_3, t_2, t_1)$  (здесь верхний индекс  $k = 1, \dots, 4$  обозначает пару  $(\alpha_k, t_k)$ ). Будет получен ряд новых соотношений, связывающих четыреиндексные функции.

Все рассматриваемые в кубической теории функции—четыреиндексные функции—можно расположить в таблицу (1.1), которая поясняет принятые обозначения.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{\delta \langle F^n \rangle}{\delta h^m \delta h^l \delta h^k} \equiv G^{nmk}, & \frac{\delta \langle \{F^n, F^m\} \rangle}{\delta h^l \delta h^k}, & \frac{\delta \langle \{ \{F^n, F^m\}, F^l \} \rangle}{\delta h^k} \equiv \langle \{ \{ \{F^n, F^m\}, F^l \}, F^k \} \rangle \equiv Y^{nml, k}; \\
 \\
 \frac{\delta \langle F^n F^m \rangle}{\delta h^l \delta h^k} \equiv B^{nm, lk}, & \frac{\delta \langle \{F^n, F^m\} F^l \rangle}{\delta h^k} \equiv Z^{nml, k}, & \\
 \frac{\delta \langle F^n F^m F^l \rangle}{\delta h^k} \equiv C^{nml, k}, & \langle \{F^n, F^m\} F^l F^k \rangle \equiv U^{(nm) lk}; & \\
 \langle F^n F^m F^l F^k \rangle \equiv Q^{nm lk}, & & 
 \end{array} \quad (1.1)$$

Здесь  $Z$  обозначает функции, содержащие две пары скобок типа  $\langle \{F^n, F^m\} F^l, F^k \rangle$ ;  $\langle \{F^n, F^m\} \{F^l, F^k\} \rangle$ . При этом  $\{A, B\} = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right)$  — скобка Пуассона, имеющая в квантовом случае смысл  $i/\hbar [A, B] = i/\hbar (AB - BA)$ ;  $h^k \equiv h_{\alpha_k}(t_k)$  — вспомогательное внешнее возмущение, входящее в возмущенный гамильтониан  $H_{\text{воз}} = H - \sum_{\alpha} h_{\alpha}(t) F_{\alpha}$ . В таблице после дифференцирования полагается  $h_{\alpha}(t) \equiv 0$ .

Будем употреблять такую терминологию: собственно адмиттансную функцию  $G$  будем называть моноадмиттансной функцией, функцию  $B$  будем называть биадмиттансной функцией, а  $C$  — триадмиттансной.

Какие соотношения существуют между функциями, входящими в таблицу? Как показывает теория возмущений,

$$\frac{\delta F^l}{\delta h^k} = \{F^l, F^k\} \eta(t_l - t_k) \quad (1.2)$$

$$(\eta(\tau) = 1 \text{ при } \tau \geq 0; \eta(\tau) = 0 \text{ при } \tau < 0).$$

Поэтому вариационные производные удается выразить через скобки Пуассона. Последние в квантовом случае просто выражаются через  $Q$ . Следовательно, в квантовом случае все функции можно выразить через  $Q$ .

Из результатов работы [3] видно, что  $Q$  удается выразить через  $V$ . Поэтому справедливо предложение:

1) И в квантовом, и в классическом случае все четырехиндексные функции можно выразить через  $V$ .

Адмиттансная функция  $G$  частично определяет  $V$  (совпадает с  $V$  в области  $t_n \geq t_m \geq t_l \geq t_k$ ), но не полностью. Поэтому 2) функция  $G$  не определяет полностью момента  $Q$  и всех прочих функций. В этом состоит основной отрицательный результат работы [3].

В работе [3], наконец, показано, что 3) функции  $G$  и  $Y$  в совокупности определяют  $V$  и, следовательно, все остальные функции.

Поскольку, раскрывая скобки, можно выразить  $\{\{F^n, F^m\}, F^l\}$  через перестановки  $\pm F^n F^m F^l$ , то  $Y^{nml, k}$  просто выражаются через  $C^{nmlk}$ . Следовательно, функции  $G$  и  $C$  в квантовом случае полностью определяют все четырехиндексные функции.

Поскольку функции  $Y$  в классическом случае трудно вычислимы практически, то целесообразно продолжить поиски тех функций, которые нужно добавить к  $G$ , чтобы получить все остальные функции.

В настоящей работе также будет получен ряд других результатов: например, доказана эквивалентность функций  $(G, C)$  функциям  $B$  и их достаточность для определения моментов  $Q$  в неквантовом случае. Неквантовый случай представляет особый интерес, так как в этом случае требуемые функции из числа  $G, B, C, Q$  могут быть вычислены марковскими методами.

## 2. ФУНКЦИИ $U$ И МОМЕНТ $Q$

В квантовом случае удобно пользоваться формулой

$$\langle \{D, B\} \rangle = \frac{\exp(i\beta\hbar p_B) - 1}{i\hbar} \langle DB \rangle, \quad (2.1)$$

вытекающей из равенства (1.1) работы [3] (см. также [5]). Устремляя  $\hbar$  к нулю, получим отсюда неквантовый вариант

$$\langle \{D, B\} \rangle = \beta p_B \langle DB \rangle, \quad (2.2)$$

который, впрочем, можно вывести и неквантовым способом, используя формулу  $\dot{B} = \{H, B\}$  и производя интегрирование по частям в фазовом пространстве.

Полагая в (2.1)  $D = F^n F^m F^l$ ,  $B = F^k$ , имеем

$$\frac{K-1}{i\hbar} \langle F^n F^m F^l F^k \rangle = \langle \{F^n F^m F^l, F^k\} \rangle \quad (2.3)$$

(как и в [3],  $K = \exp(i\beta\hbar p_k)$ ). Но

$$\begin{aligned} \{F^n F^m F^l, F^k\} &= \{F^n, F^k\} F^m F^l + F^n \{F^m, F^k\} F^l + \\ &+ F^n F^m \{F^l, F^k\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

вследствие дистрибутивного свойства

$$\{AB, D\} = \{A, D\} B + A \{B, D\}, \quad (2.5)$$

проверяемого непосредственно. Сопоставление (2.3) и (2.4) дает при обозначениях (1.1)

$$Q^{nmlk} = \frac{i\hbar}{K-1} (U^{(nk)ml} + U^{n(mk)l} + U^{nm(lk)}). \quad (2.6)$$

Следовательно, в квантовом случае функций  $U$  достаточно для определения  $Q^{nmlk}$  и, следовательно, всех функций (1.1).

В неквантовом пределе формула (2.6) принимает такой вид:

$$Q^{nmlk} = \frac{1}{\beta p_k} (U^{(nk)ml} + U^{(mk)nl} + U^{(lk)nm}). \quad (2.7)$$

В силу симметрии неквантового момента ( $Q^{nmlk} = Q^{knlm} = \dots$ ) выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_k} P_{(mnl)} U^{(nk)ml} &= \frac{1}{p_l} P_{(knm)} U^{(kl)nm} = \frac{1}{p_m} P_{(lkn)} U^{(lm)kn} = \\ &= \frac{1}{p_n} P_{(mlk)} U^{(mn)lk}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь  $P_{(ijk)}$  обозначает сумму по циклическим перестановкам:

$$P_{(ijk)} \Phi_{ijk} = \Phi_{ijk} + \Phi_{jki} + \Phi_{kij}. \quad (2.9)$$

Можно доказать, что из трех равенств (2.8) третье равенство является следствием двух других. Если переставлять индексы в функции  $U^{(nm)lk}$ , то вследствие соотношений  $U^{(nm)lk} = -U^{(mn)lk}$ ;  $U^{(nm)lk} = U^{(nm)kl}$  (неквантовый случай), получим 6 различных функций. Два независимых соотношения (2.8) уменьшают число независимых перестановок до 4.

Свяжем функции  $U$  с функцией  $V^{nmlk} = \langle \{\{F^n, F^m\}, F^l\}, F^k \rangle$  и ее перестановками. Применим формулу (2.1) или (2.2), полагая  $D = \{F^n, F^m\}$ ,  $B = F^l F^k$ .

Поскольку

$$p_B B = (p_l + p_k) F^k F^l, \quad (2.10)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} L(p_l + p_k) U^{(nm)lk} &= \langle \{\{F^n, F^m\}, F^l F^k\} \rangle = \\ &= \langle \{\{F^n, F^m\}, F^l\} F^k + F^l \{\{F^n, F^m\}, F^k\} \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $L(p) = [\exp(i\beta\hbar p) - 1]/i\hbar$  в квантовом случае и  $L(p) = \beta p$  в классическом. Еще раз применяя (2.1), получим

$$L(p_k) \langle \{ \{ F^n, F^m \}, F^l \} F^k \rangle = \langle \{ \{ \{ F^n, F^m \}, F^l \}, F^k \} \rangle \quad (2.12)$$

и аналогично для второго члена. В результате из (2.10) имеем

$$U^{(nm)lk} = L^{-1}(p_l + p_k) [L^{-1}(p_k) V^{nmlk} + L^{-1}(p_l) V^{nmkl}]. \quad (2.13)$$

Разрешить это уравнение относительно  $V$  в неквантовом случае не удается. В самом деле, как известно [3], среди перестановок  $V^{nmlk}$  имеется 6 независимых функций, тогда как число независимых функций  $U$  равно 4 (см. выше).

### 3. БИАДМИТТАНСНЫЕ ФУНКЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА

Как уже отмечалось, моноадмиттансная функция  $G$  не определяет полностью момента  $Q$  ни в классическом, ни в квантовом случае. В этом отличие четырехиндексной теории от двухиндексной [6] и трехиндексной [2, 3]. Покажем, однако, что 4) в неквантовом случае биадмиттансные функции  $B$  полностью определяют момент  $Q$ .

Используя (1.2), нетрудно получить следующую формулу для биадмиттансной функции:

$$\begin{aligned} B^{nm, lk} &= \frac{\delta \langle F^n F^m \rangle}{\delta h^l \delta h^k} = \frac{\delta}{\delta h^l} \langle \{ F^n, F^k \} F^m \eta(t_n - t_k) + F^n \{ F^m, F^k \} \times \\ &\times \eta(t_m - t_k) \rangle = \langle \{ \{ F^n, F^l \} \eta_{nl}, F^k \} F^m \eta_{nk} + \{ F^n, \{ F^k, F^l \} \times \\ &\times \eta_{kl} \} F^m \eta_{mk} + \{ F^n, F^k \} \{ F^m, F^l \} \eta_{nk} \eta_{ml} + \\ &+ \{ F^n, F^l \} \{ F^m, F^k \} \eta_{nl} \eta_{mk} + F^n \{ \{ F^m, F^l \} \eta_{ml}, F^k \} \eta_{mk} + \\ &+ F^n \{ F^m, \{ F^k, F^l \} \eta_{kl} \} \eta_{mk} \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вследствие наличия обрезающих множителей  $\eta_{ij} = \eta(t_i - t_j)$  выражения для  $B$  существенно различны в различных упорядоченных временных областях  $t_m \geq t_n \geq t_l \geq t_k$ ,  $t_m \geq t_n \geq t_k \geq t_l$  и др. Обозначим через  $t_1$  минимальное из времен, через  $t_2$  — второе по величине время, ..., через  $t_4$  — максимальное время, т. е. будем вести рассмотрение в области

$$t_4 \geq t_3 \geq t_2 \geq t_1. \quad (3.2)$$

Как видно из (3.1), в этой области имеются также ненулевые биадмиттансные функции:

$$B^{41, 32} = \langle \{ \{ F^4, F^3 \}, F^2 \} F^1 \rangle; \quad (3.3)$$

$$B^{42, 31} = \langle \{ \{ F^4, F^3 \}, F^1 \} F^2 + \{ F^4, F^3 \} \{ F^2, F^1 \} \rangle; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} B^{43, 21} &= \langle \{ \{ F^4, F^2 \}, F^1 \} F^3 + F^4 \{ \{ F^3, F^2 \}, F^1 \} + \\ &+ \{ F^4, F^1 \} \{ F^3, F^2 \} + \{ F^4, F^2 \} \{ F^3, F^1 \} \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражения для  $B^{41, 23}$ ,  $B^{14, 32}$ ,  $B^{14, 23}$  совпадают с (3.3). Аналогичной симметрией обладают  $B^{42, 31}$  и  $B^{43, 21}$ . Функции  $B$ , не имеющие индекса 4 в первой паре индексов, равны нулю в силу условия причинности.

Вследствие (2.12) функция (3.3) в неквантовом случае дублирует моноадмиттансную функцию  $G^{4321} = V^{4321} = \langle \{ \{ \{ F^4, F^3 \}, F^2 \}, F^1 \} \rangle$ .

Формула

$$L(p_1)B^{41,32} = V^{4321},$$

вытекающая из (3.3), (2.12), справедлива в области (3.2) как в классическом, так и в квантовом случае. Однако только в классическом случае ее можно непосредственно разрешить, поделив на  $L(p_1) = \beta p_1$ , и получить

$$B^{41,32} = \frac{1}{\beta p_1} V^{4321} = \frac{1}{\beta p_1} G^{4321} \quad \text{в (3.2)}. \quad (3.6)$$

Оператор  $1/p_1$  здесь следует понимать в смысле интегрирования:

$$\frac{1}{p_1} V^{4321} = \int_{-\infty}^{t_1} V_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}(t_4, t_3, t_2, t_1) dt_1', \quad (3.7)$$

чтобы подынтегральная функция не выходила из области (3.2). Предполагается, что рассматриваемые функции удовлетворяют условию исчезновения на бесконечности типа

$$V^{4321} \rightarrow 0 \quad \text{при } t_1 \rightarrow -\infty \quad (3.8)$$

(это условие связано с условием эргодичности) и интегрируемости.

В квантовом случае найти  $L^{-1}V$ , не выходя за пределы области (3.2), не удастся. Как видно из (3.6), неквантовая функция  $B^{41,32}$  информативно эквивалентна  $G^{4321}$ .

Перейдем к другим бидмиттансным функциям. Учитывая тождество (2.5) при  $A = \{F^1, F^3\}$ ,  $B = F^2$ ,  $D = F^1$ , выражение (3.4) можно привести к виду

$$B^{42,31} = \langle \{ \{ F^1, F^3 \} F^2, F^1 \} \rangle. \quad (3.9)$$

Аналогично для (3.5)

$$B^{43,21} = \langle \{ \{ F^1, F^2 \} F^3, F^1 \} + \{ F^1 \{ F^3, F^2 \}, F^1 \} \rangle. \quad (3.10)$$

Используя (2.1), (2.2) при обозначении (2.11), можно снять внешнюю скобку в стоящих справа функциях, которые после этого перейдут в  $U$ . Получаем

$$B^{42,31} = L(p_1) U^{(43)21}, \\ B^{43,21} = L(p_1) (U^{(42)31} + U^{(32)41}).$$

В неквантовом случае по аналогии с (3.6) отсюда имеем соотношение

$$U^{(43)21} = \frac{1}{\beta p_1} B^{42,31}; \quad (3.11)$$

$$U^{(42)31} + U^{(32)41} = \frac{1}{\beta p_1} B^{43,21} \quad \text{в (3.2)}, \quad (3.12)$$

связывающие парциальные функции. Итак, бидмиттансные функции  $B^{42,31}$ ,  $B^{43,21}$  позволяют частично определить  $U$ . Этой определенности достаточно для отыскания момента  $Q$ .

Чтобы найти  $Q$ , используем свойство симметрии по отношению к временному сопряжению, которым обладает функция  $U^{(nm)ik}$ . Форму-

ла (2.7) из [3] устанавливает свойство временной симметрии квантовых моментов. Из него вытекает свойство симметрии (относительно временного сопряжения) квантовой функции  $\langle [F^n, F^m] F^l F^k \rangle$ . Функция  $U^{(nm)lk} = \langle [F^n, F^m] F^l F^k \rangle$ , отличающаяся множителем  $i$ , обладает, следовательно, свойством антисимметрии:

$$\widetilde{U}^{(nm)lk} = - U^{(nm)lk}. \tag{3.13}$$

Здесь  $\sim$  обозначает операцию комплексного сопряжения, изменение знака у всех 4-х времен и умножение на  $\varepsilon_{a_n}, \dots, \varepsilon_{a_k}$ :

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_{a_n a_m a_l a_k}(t_n, t_m, t_l, t_k) &= \varepsilon_{a_n} \varepsilon_{a_m} \varepsilon_{a_l} \varepsilon_{a_k} \times \\ &\times U_{a_n a_m a_l a_k}^*(-t_n, -t_m, -t_l, -t_k). \end{aligned}$$

Из (3.13), в частности, имеем

$$U^{(12)34} = - \widetilde{U}^{(12)34} = - \widetilde{U}^{(43)21} \quad \text{в (3.2)}. \tag{3.14}$$

Здесь знак  $\sim$  обозначает замену индексов  $4 \rightarrow 1; 3 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 4$ , вводимую для того, чтобы парциальная функция  $\widetilde{f}$  имела ту же самую область определения (3.2), что и  $f$ .

Приведенные соотношения (3.13), (3.14), разумеется, остаются справедливыми и в неквантовом пределе.

Используя (3.14), (3.11), (3.12), находим:

$$U^{(42)31} + U^{(32)41} + U^{(12)34} = \frac{1}{p_1} (B^{43,21} - \widetilde{B}^{42,31}) \quad \text{в (3.2)}.$$

Принимая во внимание (2.7), будем иметь

$$p_2 Q^{4321} = \frac{1}{\beta p_1} (B^{43,21} - \widetilde{B}^{42,31}) \equiv \varphi^{4321} \tag{3.15}$$

(правая часть обозначена через  $\varphi/\beta$ ).

Применяя к (3.15) операцию временного сопряжения и учитывая самосопряженность [3]  $\widetilde{Q}^{4321} = Q^{4321}$  и (вследствие симметрии  $Q^{4321} = Q^{1234}$ ) самосопряженность

$$\widetilde{Q}^{4321} = Q^{4321}, \tag{3.16}$$

будем иметь

$$- p_3 Q^{4321} = \widetilde{\varphi}^{4321}. \tag{3.17}$$

Чтобы отыскать  $Q^{4321}$  в явном виде, проинтегрируем (3.15):

$$\begin{aligned} Q^{4321} &= \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{a_1 a_2 a_3 a_1}(t_4, t_3, t_2', t_1) dt_2' + \\ &+ Q_{a_1 a_2 a_3 a_1}(t_4, t_3, t_1, t_1). \end{aligned}$$

Используя далее (3.17), при  $t_2 = t_1$  имеем

$$Q^{4321} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{a_1 a_2 a_3 a_1}(t_4, t_3, t_2', t_1) dt_2' - \tag{3.18}$$



$$- \int_{t_1}^{t_3} \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1}(t_4, t_3', t_1, t_1) dt_3' + Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1}(t_4, t_1, t_1, t_1).$$

Входящая сюда «граничная» функция  $Q(t_4, t_1, t_1, t_1)$  может быть вычислена при помощи более простой теории.

Именно, как нетрудно показать\*, справедлива такая формула для двумерных кумулянтов:

$$K[F_\beta(t), F_{\alpha_1}(t_0), \dots, F_{\alpha_s}(t_0)] = \beta^{-s} \int_{-\infty}^{t_0} \dots \int_{-\infty}^{t_0} G_{\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_s}(t, t_1', \dots, t_s') \times \\ \times dt_1', \dots, dt_s' \\ (t \geq t_0).$$

( $\varphi - (s + 1)$  — индексная адмиттансная функция,  $K$  обозначает кумулянт). Поэтому

$$Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_1}(t_4, t_1, t_1, t_1) = \beta^{-3} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_1} G_{\alpha_1, \dots, \alpha_1}(t_4, t_3', t_2', t_1') \times \\ \times dt_1' dt_2' dt_3' + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_1}(t_1, t_1) + \\ + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_1}(t_1, t_1) + Q_{\alpha_1, \alpha_1}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_2}(t_1, t_1) = \quad (3.19) \\ = 6\beta^{-3} \int_{-\infty}^{t_1} dt_3' \int_{-\infty}^{t_3'} dt_2' \int_{-\infty}^{t_2'} dt_1' G_{\alpha_1, \dots, \alpha_1}(t_4, t_3', t_2', t_1') + \\ + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_1}(t_1, t_1) + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_1}(t_1, t_1) + \\ + Q_{\alpha_1, \alpha_1}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_2}(t_1, t_1)$$

или, если учесть (3.6),

$$Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_1}(t_4, t_1, t_1, t_1) = 6\beta^{-2} \int_{-\infty}^{t_1} dt_3' \int_{-\infty}^{t_3'} dt_2' B_{\alpha_1, \alpha_1; \alpha_2, \alpha_2}(t_4, t_2'; t_3', t_2') + \\ + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_1}(t_1, t_1) + \quad (3.20) \\ + Q_{\alpha_1, \alpha_2}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_1}(t_1, t_1) + Q_{\alpha_1, \alpha_1}(t_4, t_1) Q_{\alpha_2, \alpha_2}(t_1, t_1).$$

При этом  $Q_{\alpha\alpha'}(t, t)$  определяется по линейной теории, т. е. выражается через  $G^2$ .

Подставляя (3.20) в (4.18), видим, что момент  $Q$  действительно выражен через функции  $B$  (и  $G^2$ ).

#### 4. ТРИАДМИТТАНСНЫЕ ФУНКЦИИ

При помощи (1.2) по аналогии с (3.1) для триадмиттансных функций имеем

\* В самом деле непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что  $K[F_\beta(t), F_{\alpha_1}(t_0), \dots, F_{\alpha_s}(t_0)] = \frac{\partial}{\beta \partial a_{\alpha_1}} \dots \frac{\partial}{\beta \partial a_{\alpha_s}} \int F_\beta(t) W_\alpha(X, t_0) dX(t_0)$ , где  $W_\alpha(X, t_0)$  — возмущенное распределение Гиббса с гамльтонианом  $H - a_\alpha F_\alpha(t_0)$ ,  $X$  — динамические переменные. А оно создается действием постоянной возмущающей силы  $h(t) = a$  при  $t < t_0$  ( $h(t) = 0$  при  $t > t_0$ ).

$$C^{nml,k} \equiv \frac{\delta \langle F^n F^m F^l \rangle}{\delta h^k} = \langle \{F^n, F^k\} F^m F^l \eta_{nk} + F^n \{F^m, F^k\} F^l \eta_{mk} + F^n F^m \{F^l, F^k\} \eta_{lk} \rangle. \quad (4.1)$$

Отсюда имеем парциальные равенства

$$C^{4^2 1, 3} = U^{(4^3) 2 1}; \quad (4.2)$$

$$C^{4^3 1, 2} = U^{(4^2) 3 1} + U^{(3^2) 1}; \quad (4.3)$$

$$C^{4^3 2, 1} = U^{(4^1) 3 2} + U^{4(3 1) 2} + U^{4^3(2 1)} \quad \text{в (3.2)}. \quad (4.4)$$

В некантовом случае перестановки индексов, стоящих в  $C$  до запятой, не меняют функций. Сравнивая (4.2), (4.3) с (3.10), (3.11), видим, что в классическом случае парциальная функция  $C^{4^2 1, 3}$  эквивалентна функции  $B^{4^2, 3 1}$ :

$$C^{4^2 1, 3} = \frac{1}{\beta p_1} B^{4^2, 3 1}, \quad (4.5)$$

а функция  $C^{4^3 1, 2}$  — функции  $B^{4^3, 2 1}$ :

$$C^{4^3 1, 2} = \frac{1}{\beta p_1} B^{4^3, 2 1}. \quad (4.6)$$

Здесь  $p_1^{-1}$  нужно понимать в смысле (3.7). Вследствие (2.7) парциальная функция (4.4) эквивалентна моменту:

$$Q^{4^3 2 1} = \frac{1}{\beta p_1} C^{4^3 2, 1} \quad \text{в (3.2)}. \quad (4.7)$$

Эта формула до известной степени аналогична формуле (3.15). Более подробно в обычных обозначениях эта формула записывается так:

$$Q_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1}(t_4, t_3, t_2, t_1) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{t_1} C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1}(t_4, t_3, t_2; t'_1) dt'_1.$$

Сопоставление этих двух формул дает равенство

$$\beta p_2 C^{4^3 2, 1} = B^{4^3, 2 1} - \bar{B}^{4^2, 3 1}. \quad (4.8)$$

Выражая здесь  $B$  через  $C$  при помощи (4.5), (4.6), получаем связь между триадмиттансными функциями (4.2) — (4.4):

$$p_2 C^{4^3 2, 1} = p_1 C^{4^3 1, 2} + p_4 \bar{C}^{4^2 1, 3} \quad \text{в (3.2)}. \quad (4.9)$$

Из (4.7) и (3.18), (3.20) видно, что  $C^{4^3 2, 1} = \beta p_1 Q^{4^3 2 1}$  может быть выражена через биадмиттансные функции  $B$ , как и функции (4.5), (4.6). Следовательно, все функции  $C$  выражаются через  $B$ . Справедливо и обратное, что функции  $C$ , если добавить еще  $G$ , определяют биадмиттансные функции  $B$ . Чтобы в этом убедиться, нужно разрешить (4.5), (4.6) относительно  $B$  и учесть (3.6). Функции  $(C, G)$  эквивалентны  $B$ .

Итак, некантовые бесскобочные функции, стоящие в левом столбце (1.1), в большой степени дублируют друг друга. Число независимых (базисных, т. е. способных определять другие) парциальных функций между ними невелико. В качестве таковых в некантовом случае можно выбрать три функции  $G^{4^3 2 1}$ ,  $C^{4^2 1, 3}$ ,  $C^{4^3 1, 2}$  или, что эквивалентно, би-

адмиттансные функции  $B^{41,32}$ ,  $B^{42,31}$ ,  $B^{43,21}$ . Другими словами, 5) базисные функции  $G^{4321}$ ,  $C^{421,3}$ ,  $C^{431,2}$  эквивалентны функциям  $B^{41,32}$ ,  $B^{42,13}$ ,  $B^{43,21}$ .

### 5. ПРОСТОЙ РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Рассмотрим простую схему, содержащую нелинейное сопротивление  $R(J)$  (рис. 1). Будем считать заряд на конденсаторе внутренним термодинамическим параметром:  $F = q$ . Внешней возмущающей силой  $h(t)$  для него, дающей в произведении с  $q$  добавочную энергию  $-(H_{\text{воз}} - H)$ , будет внешняя ЭДС  $\varepsilon(t)$  (см. рисунок). Нелинейное сопротивление будем предполагать симметричным и пользоваться характеристикой:

$$J(V) = \frac{V}{R} - \frac{A}{3!} V^3.$$

Рис. 1.

Используя феноменологическое уравнение

$$\dot{q} = -\frac{1}{R} \left( \frac{q}{C} - \varepsilon \right) + \frac{A}{6} \left( \frac{q}{C} - \varepsilon \right)^3, \quad (5.1)$$

нетрудно найти адмиттансную функцию  $G$  для данного примера. Решая (5.1) методом итераций, получим

$$q(t_4)_{\text{воз}} = \int_{-\infty}^{t_4} f(t_4 - t') \left\{ \frac{1}{R} \varepsilon(t') + \frac{A}{6} \left[ \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{t'} f(t' - t'') \varepsilon(t'') dt'' - \varepsilon(t') \right]^3 \right\} dt' + \varepsilon^4 \dots$$

$$(f(\tau) = \exp(-\tau/RC))$$

или, если раскрыть скобки и упорядочить аргументы,

$$q^{(3)}(t_4) = \frac{A}{(RC)^3} \int_{-\infty}^{t_4} f(t_4 - t') \int_{t' > t_3 > t_2 > t_1} f(t' - t_3) f(t' - t_2) f(t' - t_1) \times$$

$$\times \varepsilon(t_3) \varepsilon(t_2) \varepsilon(t_1) dt' dt_3 dt_2 dt_1 - \frac{A}{(RC)^2} \int_{-\infty}^{t_4} f(t_4 - t_3) \times$$

$$\times \int_{t_3 > t_2 > t_1} f(t_3 - t_2) f(t_3 - t_1) \varepsilon(t_3) \varepsilon(t_2) \varepsilon(t_1) dt_3 dt_2 dt_1 + \quad (5.2)$$

$$+ \frac{A}{2RC} \int_{-\infty}^{t_4} f(t_4 - t_3) \int_{t_3 > t_1} f(t_3 - t_1) \varepsilon^2(t_3) \varepsilon(t_1) dt_3 dt_1 -$$

$$- \frac{A}{6} \int_{-\infty}^{t_4} f(t_4 - t_3) \varepsilon^3(t_3) dt_3 + \dots$$

Пользуясь формулой

$$\begin{aligned} \varepsilon^n(t_n) &= \varepsilon(t_n) \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t_n, \dots, t_1) \varepsilon(t_{n-1}), \dots, \varepsilon(t_1) dt_{n-1}, \dots, dt_1 = \\ &= \varepsilon(t_n) n! \int \dots \int_{t_n > t_{n-1} > \dots > t_1} \delta_\varepsilon(t_n, \dots, t_1) dt_{n-1}, \dots, dt_1, \end{aligned}$$

где  $\delta_\varepsilon(t_n, \dots, t_1)$  — симметричная или симметризованная,  $\varepsilon$  — «размазанная» дельта-функция, записываем третий и четвертый члены в правой части (5.2) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{A}{RC} \int \int_{t_4 > \dots > t_1} f(t_4 - t_3) \delta_\varepsilon(t_3 - t_2) f(t_3 - t_1) \varepsilon(t_3) \varepsilon(t_2) \times \\ &\times \varepsilon(t_1) dt_3 dt_2 dt_1 - A \int \dots \int_{t_4 > \dots > t_1} f(t_4 - t_3) \delta_\varepsilon(t_3, t_2, t_1) \times \\ &\times \varepsilon(t_3) \varepsilon(t_2) \varepsilon(t_1) dt_3 dt_2 dt_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из (5.2), (5.3) немедленно получаем вариационную производную:

$$\begin{aligned} G(t_4, \dots, t_1) &\equiv \left[ \frac{\delta^3 q(t_4)}{\delta \varepsilon(t_3) \delta \varepsilon(t_2) \delta \varepsilon(t_1)} \right]_{\varepsilon(t)=0} = \frac{A}{(RC)^3} \int_{t_2}^{t_4} f(t_4 - t') \times \\ &\times f(t' - t_3) f(t' - t_2) f(t' - t_1) dt' - \frac{A}{(RC)^2} f(t_4 - t_3) \times \\ &\times f(t_3 - t_2) f(t_3 - t_1) + \frac{A}{RC} f(t_4 - t_3) \delta_\varepsilon(t_3 - t_2) \times \\ &\times f(t_3 - t_1) - A f(t_4 - t_3) \delta_\varepsilon(t_3, t_2, t_1) \\ &(t_4 \geq t_3 \geq t_2 \geq t_1). \end{aligned}$$

Подставляя  $f(t) = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$  и интегрируя по  $t'$ , будем иметь

$$\begin{aligned} G(t_4, \dots, t_1) &= -\frac{A}{2(RC)^2} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{RC}(t_4 + t_3 - t_2 - t_1)\right] + \right. \\ &+ \exp\left[-\frac{1}{RC}(3t_4 - t_3 - t_2 - t_1)\right] \left. \right\} + \frac{A}{RC} \exp\left[-\frac{1}{RC}(t_4 - t_1)\right] \times \\ &\times \delta_\varepsilon(t_3 - t_2) - A \exp\left[-\frac{1}{RC}(t_4 - t_3)\right] \delta_\varepsilon(t_3, t_2, t_1) \end{aligned} \quad (5.4)$$

в области (3.2).

Адмиттансная функция (5.4) помогает определить другие четырехвременные функции для данного примера (но, как указывалось, не определяет их полностью). Из формул (3.6), (3.7), в частности, после интегрирования имеем

$$B(t_4, t_1; t_3, t_2) \equiv \left[ \frac{\delta^2 \langle q(t_4) q(t_1) \rangle}{\delta \varepsilon(t_3) \delta \varepsilon(t_2)} \right]_{\varepsilon(t)=0} = -\frac{TA}{2RC} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{RC} (t_4 + t_3 - t_2 - t_1) \right] + \exp \left[ -\frac{1}{RC} (3t_4 - t_3 - t_2 - t_1) \right] \right\} + \\ & + A \exp \left( -\frac{t_4 - t_1}{RC} \right) \delta_\varepsilon (t_3 - t_2) \\ & (t_4 \geq t_3 \geq t_2 > t_1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Если применить далее формулу (3.19), то после сокращений получим

$$\begin{aligned} \langle q(t_4) q^3(t_1) \rangle &= \frac{T^3}{2} ARC \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{RC} (t_4 - t_1) \right] - \right. \\ & \left. - \exp \left[ -\frac{3}{RC} (t_4 - t_1) \right] \right\} + 3(TC)^2 \exp \left[ -\frac{1}{RC} (t_4 - t_1) \right] \\ & (t_4 \geq t_1). \end{aligned}$$

Для полного определения всех некантовых четырехиндексных функций требуется задание еще двух парциальных функций, например,  $B(t_4, t_3; t_2, t_1)$  и  $B(t_4, t_2; t_3, t_1)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1512 (1970).
2. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 55, 2322 (1968).
3. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 58, вып. 5, 1612 (1970).
4. J. C. Herzog, J. Math. Phys., 11, № 3, 741 (1970)
5. Л. Каданов, Г. Бейм, Квантовая статистическая механика, ИЛ, М., 1964.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Физматгиз, 1964.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
18 января 1972 г.

#### TO CUBIC (FOUR-INDEX) THEORY OF THERMAL NOISES IN NONLINEAR RESISTANCES

*R. L. Stratonovich, N. A. Krupennikov*

A series of new (primarily nonquantum) relations connecting different four-index functions is obtained. The moment  $Q$  is expressed through biadmittance functions  $B$ . It is proved that the three-admittance functions  $C$  and admittance function  $G$  are equivalent to the functions  $B$ . A noncomplicated radiotechnical example is considered.

УДК 621.317.346

## О ПОДАВЛЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ МОДУЛЯЦИОННЫМ РАДИОМЕТРОМ

*А. Т. Гаврилин, А. А. Горбачев*

Исследовано влияние стробирования импульсных помех, действующих на входе модуляционного радиометра. Получены выражения для смещения и дисперсии оценки интенсивности нормального шума в случае а) периодических и б) пуассоновских помех и проведен их анализ.

Метод подавления импульсных помех путем прерывания (стробирования) тракта приема на время действия импульса широко известен. Он исследован применительно к различной приемной технике. В настоящей работе выясняются возможности и особенности его использования в радиометрической аппаратуре модуляционного типа. Целесообразность применения этого способа защиты от помех может возникать при совместной работе бортовой измерительной аппаратуры, а также различных радиосредств в условиях радиоастрономических полигонов [1].

Задача ставится следующим образом. На вход радиометра вместе с полезным стационарным на интервале наблюдения  $T_n$  шумовым сигналом интенсивности  $\sigma_c^2$  в полосе высокочастотного тракта радиометра действуют импульсные помехи. Собственные шумы приемника будем полагать также стационарными на интервале  $T_n$  и нормальными с дисперсией  $\sigma_0^2$  и корреляционной функцией

$$K_0(\tau) = \sigma_0^2 \exp(-\alpha\tau^2) \cos \omega_0\tau,$$

которая отличается от корреляционной функции полезного шума только величиной дисперсии  $\sigma_0^2$ .

В месте приема о помехах имеется следующая априорная информация: 1) длительность импульсов не превышает некоторого интервала  $\tau_n$ , 2) известны моменты прихода импульсов. Эта информация может поступать по отдельному, не зависящему от радиометрического тракта каналу. Стробирование осуществляется в широкополосном тракте радиометра после квадратичного детектирования путем записывания тракта в момент действия помехи на время  $\tau_n$ , причем оно производится не только в те интервалы, когда радиометр подключен к антенне, но и тогда, когда модулятор подключает вход радиометра к холодному эквиваленту шумов. Необходимость именно такого, «регулярного», стробирования вполне очевидна.

Выясним влияние описанной операции на величину смещения оценки интенсивности полезного сигнала и на дисперсию этой оценки, полагая при этом форма строба прямоугольной.

Рассмотрим два случая.

1. Периодические импульсные помехи.
2. Случайная импульсная последовательность.

Во втором случае будем предполагать распределение моментов появления импульсов пуассоновским (импульсы с перекрытием) [2]. Принцип работы модуляционного радиометра известен, поэтому мы не будем на нем останавливаться [3]. Предполагая шум стационарным на интервале модуляции, а его время корреляции много меньшим периода модуляции  $1/\sqrt{\alpha} \ll T_m$ , запишем корреляционную функцию модулированного нормального шума на выходе квадратичного детектора в виде

$$K_M(\tau) = K_x(\tau) K_m(\tau), \quad (1)$$

где  $K_x(\tau) = k_0^2 \sigma_0^4 (1 + \exp(-2\alpha\tau^2))$  — корреляционная функция стационарного нормального шума на выходе квадратичного детектора с коэффициентом передачи  $k_0$ ,  $K_m(\tau)$  — корреляционная функция меандра с периодом  $T_m$  и глубиной модуляции, определяемой отношением  $\varepsilon = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2}$ ,

$$K_m(\tau) = 1 + \varepsilon^2 \rho_m(\tau), \quad \rho_m(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_m^0(\tau - kT_m),$$

$$\rho_m^0(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{2|\tau|}{T_m} & (|\tau| \leq \frac{T_m}{2}) \\ 0 & (|\tau| > \frac{T_m}{2}) \end{cases}.$$

Найдем спектр  $S_M$  напряжения  $U_d$  на выходе детектора. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} S_M(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_M(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= 2\pi k_0^2 \sigma_0^4 \left\{ \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \left[ \delta(\omega) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{8\alpha}\right) \right] + \right. \\ &+ \left. \varepsilon^2 \sum_{k-\text{нечетн}}^{-\infty, \infty} \frac{2}{\pi^2 k^2} \left[ \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_m}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_m}\right)^2}{8\alpha}\right] \right] \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

1. Рассмотрим случай периодических импульсных помех с периодом  $T_n$  (частотой  $\nu = 1/T_n$ ). Корреляционная функция последовательности стробов равна

$$K_n(\tau) = (1 - 2d) + d\rho_n(\tau),$$

$$\rho_n(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_n^0(\tau - kT), \quad \rho_n^0(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} & (|\tau| \leq \tau_n) \\ 0 & (|\tau| > \tau_n) \end{cases},$$

$d = \nu\tau_n$  — коэффициент заполнения.

Корреляционная функция подвергнутого стробированию напряжения  $U_d$  запишется в виде

$$K(\tau) = K_M(\tau) K_n(\tau),$$

а соответствующий спектр —

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(\omega - \Omega) S_n(\Omega) d\Omega =$$

$$= (1-d)^2 S_M(\omega) + \sum_{l \neq 0} \frac{1}{\pi^2 l^2} \sin^2(\pi ld) S_M(\omega - 2\pi l\nu). \quad (3)$$

Имея в виду то, что процедура измерения полезного сигнала сводится к измерению интенсивности процесса на выходе узкополосного фильтра, настроенного на частоту модуляции, в качестве оценки  $\sigma_c^2$  примем функцию

$$\hat{\sigma}_c^2 = \frac{V\pi}{2k_0} \left[ \int_{\frac{2\pi}{T_M} - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\frac{2\pi}{T_M} + \frac{\Delta\omega}{2}} S(\omega) d\omega \right]^{1/2} \equiv \frac{V\pi}{2k_0} S_{\Delta\omega}^{1/2}. \quad (4)$$

При отсутствии стробирования эта оценка несмещенная:

$$m_1\{\hat{\sigma}_c^2\} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \hat{\sigma}_c^2 = \frac{V\pi}{2k_0} \sqrt{A_1} = \sigma_c^2,$$

где  $A_1$  — мощность гармонической составляющей на частоте  $2\pi/T_M$ . При наличии стробирования связь между  $S_{\Delta\omega}$  и  $\sigma_c^2$  будет более сложной и оценка получит смещение:

$$\Delta\sigma_c^2 = m_1\{\hat{\sigma}_c^2\} - \sigma_c^2 = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{V\pi}{2k_0} (\sqrt{S_{\Delta\omega}} - \sqrt{S_{M\Delta\omega}}).$$

Пусть  $T_M/T_n = m/n$ , где  $m, n$  — целые числа. Тогда

$$A_1 = 2\pi k_0^2 \sigma_0^4 \left\{ (1-d)^2 \frac{2\varepsilon^2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi ld}{l^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \delta_{ml, n} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\varepsilon^2}{\pi^4} \sum_{l \neq 0} \sum_{k - \text{нечетн}} \frac{\sin^2 \pi ld}{k^2 l^2} \delta_{n(1-k), ml} \right\}$$

где  $\delta_{p, q}$  — символы Кронекера,  $\delta_{p, q} = \begin{cases} 1 & (p = q) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$ ,

$$\Delta\hat{\sigma}_c^2 = \left[ \sigma_c^4 (1-d)^2 + \frac{\sigma_0^4 + (\sigma_c^4/2)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi ld}{l^2} \delta_{ml, n} + \frac{\delta_c^4}{\pi^2} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{l \neq 0} \frac{\sin^2 \pi ld}{l^2} \sum_{k - \text{нечетн}} \frac{1}{k^2} \delta_{ml, n(k-1)} \right]^{1/2} - \sigma_c^2. \quad (5)$$

Вычислим дисперсию оценки интенсивности шумового сигнала, связанную с конечностью интервала наблюдения  $T_n = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$  ( $T_n > T_M$ ). Ди-



сперсия будет равна, очевидно, средней мощности гармонических составляющих процесса, частоты которых лежат в интервале  $\left[ \frac{2\pi}{T_m} - \frac{\Delta\omega}{2}, \frac{2\pi}{T_m} + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$ , за вычетом  $A_1$ :

$$\begin{aligned}
 D(\hat{\sigma}_c^2) &= \frac{\pi}{4k_0^2} \left[ \int_{\left| \frac{2\pi}{T_m} - \omega \right| < \frac{\Delta\omega}{2}} S(\omega) d\omega - A_1 \right] = \\
 &= \left[ (1-d)^2 \frac{\pi^2 \Delta\omega}{4\sqrt{2\pi\alpha}} \left( \sigma_0^4 + \frac{\sigma_c^4}{2} \right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\alpha T_m^2}\right) \right] + \\
 &+ \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi l d}{l^2} \left[ \left( \sigma_0^4 + \frac{\sigma_c^4}{2} \right) \left( \chi_{\Delta\omega} \left( \frac{2\pi}{T_m} - 2\pi l \nu \right) - \delta_{ml, n} \right) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \sigma_0^4 \chi_{\Delta\omega} \left( \frac{2\pi}{T_m} - 2\pi l \nu \right) \frac{\Delta\omega}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{1}{8\alpha} \left( \frac{2\pi}{T_m} - 2\pi l \nu \right)^2 \right] \right] \right\} + \\
 &+ \left\{ \frac{\sigma_c^4}{\pi^2} \sum_{l \neq 0} \sum_{k-\text{нечетн}} \frac{\sin^2 \pi l d}{k^2 l^2} \left[ \left( \chi_{\Delta\omega} \left( \frac{2\pi}{T_m} (k-1) - 2\pi l \nu \right) - \delta_{ml, n(k-1)} \right) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \chi_{\Delta\omega} \left( \frac{2\pi}{T_m} (k-1) - 2\pi l \nu \right) \frac{\Delta\omega}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{((2\pi/T_m)(k-1) - 2\pi l \nu)^2}{8\alpha}\right] \right] \right\},
 \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\chi_{\Delta\omega}(\omega)$  — характеристическая функция интервала,

$$\chi_{\Delta\omega}(\omega) = \begin{cases} 1 & \left( \left| \frac{2\pi}{T_m} - \omega \right| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \right) \\ 0 & \left( \left| \frac{2\pi}{T_m} - \omega \right| > \frac{\Delta\omega}{2} \right) \end{cases}$$

Проанализируем полученные выражения (5) и (6). Заметим прежде всего, что если частоты модуляции и стробирования не соизмеримы, то выражение для величины смещения упрощается:

$$\Delta \hat{\sigma}_c^2 = \sqrt{\sigma_c^4 (1-d)^2} - \sigma_c^2 = -d \sigma_c^2. \quad (5a)$$

В случае  $T_n/T_m = n$ ,  $n$  — целое, смещение запишется в виде

$$\Delta \hat{\sigma}_c^2 = \sigma_c^2 \left( \sqrt{(1-d)^2 + \frac{1}{2} + \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_c} \right)^4 \frac{\sin^2 \pi n d}{n^2}} - 1 \right). \quad (5b)$$

Легко видеть, что наиболее неблагоприятная ситуация (максимум смещения) возникает здесь при  $T_n = T_m$ . Третий член в (5) обусловлен появлением разностных частот между гармониками стробирования и гармониками модулирующего колебания, равных частоте модуляции.

В формуле (6) 1-й член в квадратных скобках обязан своим происхождением естественным флуктуациям протектированного шума; стро-

бирование влияет на него только «интегрально», через среднее значение. Второй член оказывается существенным при  $T_n/T_m$ , близком целому числу, он обусловлен попаданием одной из гармоник стробирования и ее пьедестала в полосу фильтра. Третий член в (6) имеет ту же природу, что и соответствующий член в (5). Из формулы (6) следует, что при  $T_n \rightarrow \infty$  ( $\Delta\omega \rightarrow 0$ ) дисперсия оценки стремится к нулю, т. е. оценка является асимптотически эффективной.

2. Рассмотрим влияние стробирования импульсных помех, моменты появления которых распределены по закону Пуассона [2]:

$$W(t_k) \equiv W_k(\zeta) = \frac{\nu}{(k-1)!} \zeta^{k-1} \exp(-\nu\zeta), \quad (7)$$

$W(t_k)$  — плотность вероятности появления  $k$ -го импульса,  $\nu$  — средняя частота следования импульсов. Обозначим через  $d$  средний коэффициент заполнения  $d = \nu\tau_n$  и ограничимся случаем  $d$ , малых по сравнению с единицей. Тогда, как показывают вычисления, спектральная плотность стробированного процесса равна

$$S(\omega) = (1-d)^2 S_M(\omega) + 4\nu k_0^2 \sigma_0^4 \left[ \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \frac{\sin^2 \frac{\omega\tau_n}{2}}{\omega^2} + \varepsilon^2 \sum_{k-\text{нечетн}} \frac{2}{\pi^2 k^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin^2 \left( \omega - \frac{2\pi k}{T_m} \right) \frac{\tau_n}{2}}{\left( \omega - \frac{2\pi k}{T_m} \right)^2} \right] + 2k_0^2 \sigma_0^4 d \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{8\alpha}\right) \times \right. \\ \times \left[ \left(1 + \frac{i\omega}{4\alpha\tau_n}\right) \Phi\left(\tau_n\sqrt{2\alpha} + \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) + \left(1 - \frac{i\omega}{4\alpha\tau_n}\right) \Phi\left(\tau_n\sqrt{2\alpha} - \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{i\omega}{2\alpha\tau_n} \Phi\left(\frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) \right] - \frac{1}{\alpha\tau_n} [1 - \cos \omega\tau_n \exp(-2\alpha\tau_n^2)] + \varepsilon^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \times \quad (8) \\ \times \left[ \left(1 + \frac{1}{\alpha\tau_n T_m} - \frac{\omega^2}{4\tau_n T_m \alpha^2}\right) \left( \Phi\left(\tau_n\sqrt{2\alpha} + \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) + \Phi\left(\tau_n\sqrt{2\alpha} - \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) \right) + \right. \\ \left. - \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}} \right] + \frac{i\omega}{4\alpha} \left( \frac{1}{\tau_n} + \frac{2}{T_m} \right) \left( \Phi\left(\tau_n\sqrt{2\alpha} + \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) - \Phi\left(\tau_n\sqrt{2\alpha} - \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) - \right. \\ \left. - \frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}} \right) - 2\Phi\left(\frac{i\omega}{2\sqrt{2\alpha}}\right) \left. \right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\alpha}\right) - \\ - \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left( \frac{1}{\tau_n} + \frac{2}{T_m} \right) [1 - \cos \omega\tau_n \exp(-2\alpha\tau_n^2)] \left. \right\}.$$

Здесь  $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  — интеграл вероятности.

Из (8) в предположении  $1/\sqrt{\alpha} \leq \tau_n \ll T_m$  получаем следующие выражения для смещения и дисперсии оценки (4):

$$\Delta \sigma_c^2 = -d \sigma_c^2; \quad (9)$$

$$D(\hat{\sigma}_c^2) \approx \left\{ \frac{\sigma_c^4(1-d)^2}{2\sqrt{2\pi\alpha}} + \frac{\pi^2}{2} \frac{\exp(-\pi^2/2\alpha T_m^2)}{2\sqrt{2\pi\alpha}} \left[ \left( \sigma_0^4 + \frac{\sigma_c^4}{2} \right) (1-d)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4d \Phi(\tau_n \sqrt{2\alpha})(\sigma_0^4 + \sigma_c^4) \right] + \pi d \tau_n \left[ \frac{1}{4} \left( \sigma_0^4 + \frac{\sigma_c^4}{2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_c^4 \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\tau_n}{T_m} \right) \right] \right\} \Delta \omega. \quad (10)$$

Таким образом, как и в случае периодического стробирования, оценка (4) смещенная и асимптотически эффективная.

Из полученных выражений (6), (9) следует, что относительная погрешность измерения при стробировании в случае слабых сигналов будет в основном определяться уровнем собственных шумов радиометра. В этом случае использование стробирования для подавления помех, уровень которых соизмерим с уровнем принимаемых сигналов, может оказаться целесообразным лишь при достаточно больших временах  $T_n$ , поскольку в этом случае ошибка измерения будет в основном определяться смещением, которое может быть скомпенсировано умножением результата измерения на некоторый коэффициент, зависящий от  $d$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Margulies, IEEE Electromagn. Compatib. Symp. Rec. Anaheim, Calif., N. Y., 1970, p. 463.
2. И. Н. Амиантов, В. И. Тихонов, Радиотехника, 14, № 4 (1959).
3. В. И. Бунимович, Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
14 апреля 1972 г.

#### SUPPRESSION OF PULSE NOISES WHEN MEASURING THE NOISE SIGNAL INTENSITY BY MODULATION RADIOMETER

A. T. Gavrilin, A. A. Gorbachev

The influence of the pulse noises strobing at the input of the modulation radiometer is investigated. The expressions are obtained for the shift and dispersion of an estimate of the normal noise intensity in the case of periodic and Poisson noises. The analysis of the expressions has been also made.

УДК 538.56 : 519.25

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА СИГНАЛОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

*В. О. Ашкеназы*

В статье рассмотрена задача оптимального учета дисперсионных свойств среды распространения при статистической оценке координат источника сигналов, принимаемых на фоне случайных помех. Получены расчетные соотношения и выполнен анализ точностных характеристик однопунктовых и многопунктовых спектрально-дисперсионных измерительных систем.

В экспериментальной радиофизике и геофизике для получения данных о характеристиках среды и для оценки параметров удаленных источников регистрируемых излучений могут использоваться явления частотной дисперсии сигналов при распространении. Поэтому представляется полезным исследование возможностей статистически-оптимального учета дисперсионных свойств среды распространения при обработке принимаемых сигналов с целью определения местоположения их источника.

### 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Предположим, что источник сигналов расположен в однородной изотропной среде, которая характеризуется частотно-зависящей функцией распространения

$$\Gamma(\omega) = \alpha(\omega) + i\beta(\omega), \quad (1.1)$$

где  $\alpha(\omega)$  — удельное (на единицу пути волны) поглощение, а

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c_0} + \beta_*(\omega) \quad (1.2)$$

— удельный фазовый сдвиг, причем  $c_0$  — скорость распространения волны в свободном пространстве,  $\beta_*(\omega)$  — дополнительный фазовый сдвиг, вносимый средой.

Вводя преобразования Фурье для сигнала  $u_0(t)$ , излучаемого в момент  $t_0$  в точке  $R_0$ , и для сигнала  $v(t; \rho)$ , регистрируемого в точке приема  $R$  на расстоянии  $\rho = |R - R_0|$  от источника,

$$U_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = A_0 A_\omega(\omega) \exp\{i[\varphi_u(\omega) - \omega t_0]\}, \quad (1.3)$$

$$V(\omega; \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t; \rho) e^{-i\omega t} dt = A_v(\omega; \rho) \exp[i\varphi_v(\omega; \rho)],$$

мы можем записать комплексный коэффициент передачи тракта распространения в виде

$$G(\omega; \rho) = \frac{V(\omega; \rho)}{U_0(\omega)} = G_0 G_\rho(\rho) G_\omega(\omega) \exp [i\varphi_G(\omega)] e^{-\Gamma(\omega)\rho}. \quad (1.4)$$

Здесь  $A_0$  и  $G_0$  — нормирующие множители, причем  $A_0$  — модуль спектра сигнала на расстоянии  $\rho_n$  в свободном пространстве, для частоты  $\omega_n$ ;  $A_\omega(\omega)$  и  $G_\omega(\omega)$  — безразмерные функции частоты. Геометрия распространения волны характеризуется функцией  $G_\rho(\rho) = (\rho/\rho_n)^{-p/2}$ , где  $p = 0$  в одномерном случае (плоская волна),  $p = 1$  в двумерном случае (цилиндрическая волна) и  $p = 2$  для трехмерной (сферической) волны.

Таким образом, для амплитудного и фазового спектров принимаемого сигнала получим

$$\begin{aligned} A_v(\omega; \rho) &= A_0 G_0 A_\omega(\omega) G_\omega(\omega) G_\rho(\rho) e^{-\alpha(\omega)\rho}, \\ \varphi_v(\omega; \rho) &= \varphi_\alpha(\omega) + \varphi_G(\omega) - \omega t_0 - \beta(\omega)\rho. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Эти спектральные соотношения могут быть использованы при обработке сигнала с целью оценки координат его источника. Если для определенности считать известными форму спектра сигнала в источнике и частотную зависимость функции распространения, то в число неизвестных параметров задачи  $a$  помимо искоемых координат  $R_0$  войдут время излучения сигнала  $t_0$  и амплитудный множитель  $A_0 G_0$ .

Предположим, что измерение амплитудного и фазового спектров принимаемого сигнала производится на ряде частот  $\omega_1 \leq \omega_k \leq \omega_n$  в неперекрывающихся узкополосных каналах шириной  $\Delta\omega$ , охватывающих диапазон от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{\max}$ . Заменяя амплитудный спектр сигнала его логарифмом, запишем множество измеряемых величин в виде

$$\underline{x}(\omega; \underline{a}) = \left\| \begin{aligned} \alpha x(\omega_k) &= \ln A_v(\omega_k) \\ \varphi x(\omega_k) &= \varphi_v(\omega_k) \end{aligned} \right\| \quad (k = 1 \div n). \quad (1.6)$$

Задача теперь сведется к статистической оценке совокупности неизвестных параметров  $\underline{a}$  на основании множества измерений

$$\underline{x} = \underline{x}(\omega; \underline{a}) + \underline{n}, \quad (1.7)$$

производимых со случайными погрешностями  $\underline{n}$ , играющими здесь роль аддитивного шума. Эти погрешности обычно вызываются помеховым фоном, который принимается вместе с полезным сигналом.

Для выяснения потенциальных точностных характеристик определения местоположения источника сигнала в диспергирующей среде мы воспользуемся методом максимально-правдоподобной оценки параметров [1]. При нормально-распределенном шуме совокупность оценок неизвестных параметров  $\hat{\underline{a}}$  может быть найдена в виде решения системы уравнений правдоподобия:

$$\underline{X}^T(\omega; \hat{\underline{a}}) \underline{N}^{-1}(\omega) [\underline{x}(\omega) - \underline{x}(\omega; \hat{\underline{a}})] = 0. \quad (1.8)$$

Здесь  $\underline{N} = \overline{(\underline{n} - \bar{\underline{n}})(\underline{n}^T - \bar{\underline{n}}^T)}$  — корреляционная матрица измерительного шума, а прямоугольная матрица  $\underline{X}(\omega; \underline{a})$  содержит частные производные  $(\underline{X})_{ks} = \frac{\partial x_k}{\partial a_s}$  от измеряемых величин по оцениваемым параметрам.

Ошибки оценки параметров

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\overset{\wedge}{a}}(\underline{x}; \underline{a}) - \underline{a} \quad (1.9)$$

сложным образом зависят как от погрешностей отдельных измерений, так и от структуры алгоритма обработки результатов измерений. Нижняя граница этих ошибок, т. е. потенциальная точность максимально-правдоподобной оценки параметров, может быть охарактеризована корреляционной матрицей

$$\underline{E} = \overline{(\underline{\varepsilon} - \underline{\bar{\varepsilon}})(\underline{\varepsilon}^T - \underline{\bar{\varepsilon}}^T)} = \underline{F}_0^{-1}, \quad (1.10)$$

где

$$\underline{F}_0 = \underline{X}^T \underline{N}^{-1} \underline{X} \Big|_{\underline{a} = \underline{a}}^{\underline{\wedge}} \quad (1.11)$$

— так называемая «информационная» матрица.

## 2. СПЕКТРАЛЬНО-ДИСПЕРСИОННАЯ ДАЛЬНОМЕТРИЯ

Рассмотрим однопунктовую измерительную систему, для которой дисперсия сигнала в среде является единственным источником информации о дальности  $\rho_0$  до излучателя. В этом случае совокупность неизвестных параметров  $\underline{a}$  будет включать в себя

$$a_1 = \rho_0, \quad a_2 = t_0, \quad a_3 = \ln(A_0 G_0). \quad (2.1)$$

Погрешности отдельных спектральных измерений  $\alpha x(\omega_k)$  и  $\varphi x(\omega_k)$ , вызываемые случайной помехой в неперекрывающихся частотных каналах, можно считать взаимно некоррелированными. Тогда корреляционная матрица измерительного шума

$$\underline{N} = \left\| \begin{array}{cc} \alpha N & 0 \\ 0 & \varphi N \end{array} \right\| \quad (2.2)$$

будет диагональной. Средние квадраты погрешностей соответствующих измерений логарифма амплитудного спектра и фазового спектра приближенно равны [1]

$$D[\alpha x(\omega_k)] \approx D[\varphi x(\omega_k)] = D_0(\omega_k) \approx \frac{\pi}{\Delta \omega d^2(\omega_k)}, \quad (2.3)$$

где

$$d(\omega_k) = \frac{2A_s(\omega_k)}{[\eta(\omega_k) \Pi(\omega_k)]^{1/2}} \quad (2.4)$$

— отношение сигнал/помеха в полосе частот, равной одному герцу,  $\Pi(\omega)$  — функция спектральной плотности (энергетический спектр) помехового фона, а  $\eta(\omega) \approx \eta_0$  — волновое сопротивление среды. Таким образом,

$$\alpha N \approx \varphi N = \left\| \begin{array}{ccc} D_0(\omega_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & D_0(\omega_k) & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & D_0(\omega_n) \end{array} \right\|. \quad (2.5)$$

Подставляя полученные соотношения в (1.8) и решая эту систему уравнений относительно интересующего нас параметра  $a_1 = \rho_0$ , находим его максимально-правдоподобную оценку:

$$\hat{\rho}_0 = \frac{\sum_{k=1}^n d_k^2 (\alpha_k a y_k + \beta_k \varphi y_k) - \frac{\sum_{k=1}^n d_k^2 \alpha_k \sum_{k=1}^n d_k^2 a y_k}{\sum_{k=1}^n d_k^2} - \frac{\sum_{k=1}^n d_k^2 \beta_k \omega_k \sum_{k=1}^n d_k^2 \omega_k \varphi y_k}{\sum_{k=1}^n d_k^2 \omega_k^2}}{\sum_{k=1}^n d_k^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) - \frac{(\sum_{k=1}^n d_k^2 \alpha_k)^2}{\sum_{k=1}^n d_k^2} - \frac{(\sum_{k=1}^n d_k^2 \beta_k \omega_k)^2}{\sum_{k=1}^n d_k^2 \omega_k^2}} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\underline{y} = \underline{x} - \underline{f}(\omega); \quad (2.7)$$

$$f(\omega_k) = \ln[A_\omega(\omega_k)G_\omega(\omega_k)], \quad \varphi f(\omega_k) = \varphi_u(\omega_k) + \varphi_G(\omega_k) \quad (2.8)$$

и для сокращения записи (введено очевидное упрощение обозначений).

В полученном нами алгоритме определения дальности до источника сигналов используются совместно как амплитудные, так и фазовые спектральные измерения. Опуская соответствующие члены в числителе и знаменателе выражения (2.6), можно реализовать частные схемы амплитудной или фазовой спектрально-дисперсионной дальнометрии. Необходимо лишь, чтобы общее число измерений было не меньше числа неизвестных параметров, т. е. в рассматриваемом случае — не меньше трех.

Определим ошибки оценки параметров. В соответствии с (1.11) «информационная» матрица будет иметь вид

$$\underline{F}_0 = \frac{\Delta\omega}{\pi} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n d_k^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) & \sum_{k=1}^n d_k^2 \beta_k \omega_k & -\sum_{k=1}^n d_k^2 \alpha_k \\ \sum_{k=1}^n d_k^2 \beta_k \omega_k & \sum_{k=1}^n d_k^2 \omega_k^2 & 0 \\ -\sum_{k=1}^n d_k^2 \alpha_k & 0 & \sum_{k=1}^n d_k^2 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

При достаточно большом числе каналов спектроанализатора (для  $n > 3 \div 5$ ) суммирование по дискретной последовательности частот  $\omega_k$  можно приближенно заменить интегрированием по непрерывному аргументу  $\omega$  в пределах от  $\omega_{\min}$  до  $\omega_{\max}$ . Выполнив обращение матрицы  $\underline{F}_0$ , после некоторых преобразований найдем средний квадрат ошибок максимально-правдоподобной оценки дальности

$$D_p = (\Delta\rho_e)^2 / q_0^2 \mu. \quad (2.10)$$

Здесь величина  $\Delta\rho_e$ , имеющая размерность дальности, характеризует дисперсионные свойства среды распространения сигнала:

$$(\Delta\rho_e)^2 \approx \frac{1}{2} \times \frac{\int d^2(\omega) d\omega}{\int d^2(\omega) [\alpha^2(\omega) + \beta_*^2(\omega)] d\omega - \frac{[\int d^2(\omega) \alpha(\omega) d\omega]^2}{\int d^2(\omega) d\omega} - \frac{[\int d^2(\omega) \beta_*(\omega) \omega d\omega]^2}{\int d^2(\omega) \omega^2 d\omega}} \quad (2.11)$$

Как видно из этой формулы, ослабление дисперсии, сопровождаемое уменьшением  $\alpha(\omega)$  и  $\beta_*(\omega)$ , будет приводить к росту ошибок спектрально-дисперсионной дальнометрии. Величина

$$q_0^2 = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2\pi n} \sum_{k=1}^n d_k^2 \approx \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d^2(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.12)$$

соответствует квадрату пикового отношения сигнал/среднеквадратичный уровень помехи на выходе оптимального фильтра Дворка [1]. И, наконец, параметр  $\mu$ , который можно назвать коэффициентом использования спектра, определяется как

$$\mu = \frac{\Delta\omega n}{\omega_{\max} - \omega_{\min}} \leq 1. \quad (2.13)$$

### 3. ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗНЕСЕННАЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Перейдем к исследованию более общего случая системы из пространственно-разнесенных приемников и найдем потенциальный выигрыш в точности определения местоположения источника сигналов по данным такой системы, который может быть достигнут за счет дисперсионных свойств среды распространения.

Множество измеряемых величин  $\underline{x}(\omega; a)$  будет теперь состоять из результатов спектрального анализа сигнала, зарегистрированного  $M$  приемниками после распространения его на соответствующие расстояния  $\rho_i(R_0)$ , т. е.

$$a, \varphi \underline{x}(\omega_k) = \left\| \begin{array}{c} a, \varphi x_1(\omega_k) \\ \vdots \\ a, \varphi x_i(\omega_k) \\ \vdots \\ a, \varphi x_M(\omega_k) \end{array} \right\|, \quad (3.1)$$

а в число оцениваемых неизвестных параметров  $a$  войдут  $(p+1)$  координат источника  $R_0$ . Например, для двумерной геометрии задачи  $R = \{\xi, \vartheta\}$ , и совокупность параметров будет

$$a_1 = \xi_0, \quad a_2 = \vartheta_0, \quad a_3 = t_0, \quad a_4 = \ln(A_0 G_0). \quad (3.2)$$

Вид элементарных корреляционных матриц погрешностей спектральных измерений  $\underline{D}_0(\omega_k)$ , имеющих размер  $M \times M$ , определяется пространственной структурой помехи. В частности, при некоторых упрощающих предположениях можно показать, что для изотропного поля пространственно-распределенных источников случайных мешающих сигналов

$$[\underline{D}_0(\omega_k)]_{ij} \approx D_0(\omega_k) J_0 \{\Delta_{ij} [\alpha^2(\omega_k) + \beta^2(\omega_k)]^{1/2}\}. \quad (3.3)$$

Здесь  $J_0(\ )$  — функция Бесселя,  $\Delta_{ij}$  — расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м приемниками. Обращение матрицы  $\underline{D}_0(\omega_k)$  в общем случае должно выполняться численными методами. Однако при достаточно больших расстояниях между приемниками  $\Delta_{ij} \gg [\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)]^{-1/2}$  она становится приближенно диагональной и



$$[\underline{D}_0(\omega_k)]_{ij} \approx D_0(\omega_k) \delta_{ij} = \frac{\pi}{\Delta\omega d^2(\omega_k)} \delta_{ij}. \quad (3.4)$$

При этом система уравнений правдоподобия (1.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^n d^2(\omega_k) \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} \left\{ \left[ \frac{1}{2\rho_i} + \alpha(\omega_k) \right] [{}^{\vee} a x_i(\omega_k) - {}_a x_i(\omega_k; \hat{a})] + \right. \\ \left. + \beta(\omega_k) [{}^{\vee} \varphi x_i(\omega_k) - {}_{\varphi} x_i(\omega_k; \hat{a})] \right\} = 0, \\ \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^n d^2(\omega_k) \frac{\partial \rho_i}{\partial \vartheta} \left\{ \left[ \frac{1}{2\rho_i} + \alpha(\omega_k) \right] [{}^{\vee} a x_i(\omega_k) - {}_a x_i(\omega_k; \hat{a})] + \right. \\ \left. + \beta(\omega_k) [{}^{\vee} \varphi x_i(\omega_k) - {}_{\varphi} x_i(\omega_k; \hat{a})] \right\} = 0, \\ \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^n d^2(\omega_k) [{}^{\vee} a x_i(\omega_k) - {}_a x_i(\omega_k; \hat{a})] = 0, \\ \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^n d^2(\omega_k) \omega_k [{}^{\vee} \varphi x_i(\omega_k) - {}_{\varphi} x_i(\omega_k; \hat{a})] = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Два последних линейных уравнения следует использовать для исключения «мешающих» параметров  $a_3$  и  $a_4$ . Первая пара уравнений, нелинейных относительно искомых параметров  $a_1 = \xi_0$  и  $a_2 = \vartheta_0$ , решается по итерационной схеме, причем на начальном цикле можно пренебречь затуханием и дисперсией сигналов в среде и отбросить члены с измерениями спектральных амплитуд, а функцию  $\beta(\omega)$  заменить на  $\omega/c_0$ . Система уравнений первого приближения сведется при этом к обычной разностно-дальномерной схеме оценки координат источника сигнала в свободном пространстве.

Вычисляемая по общей формуле (1.11) «информационная» матрица для ошибок оптимальной статистической оценки параметров описывается довольно простыми выражениями. С целью получения наиболее компактных и удобных для последующей интерпретации оценочных соотношений мы рассмотрим далее такой вариант построения системы, когда приемники расположены на равных расстояниях друг от друга вдоль дуги окружности, имеющей длину  $L$  («апертура» системы). Источник сигнала поместим в центре этой окружности на удалении  $\rho_i = \rho_0$  от приемников, а угол между осью симметрии системы  $\xi$  и вектором  $\rho_i$  обозначим  $\psi_i$ . После обращения матрицы  $\underline{F}_0$  и перехода от суммирования по  $k$  к интегрированию по  $\omega$  найдем средние квадраты и коэффициент корреляции «продольных» (вдоль оси  $\xi$ ) и «поперечных» ошибок определения местоположения источника:

$$D_{\xi, \vartheta} = \left[ \frac{Q}{(D_{\xi, \vartheta})_0} + \frac{1}{(D_{\xi, \vartheta})_p} \right]^{-1}, \quad (3.6)$$

$$K_{\xi, \vartheta} \approx 0.$$

Соотношения (3.6) наглядно показывают вклад различных факторов в точность определения местоположения источника сигналов в условиях диспертирующей среды. Здесь

$$(D_{\xi})_0 \approx \frac{1}{2q_0^2 \mu \sum_{i=1}^M \cos^2 \psi_i} \frac{c_0^2 \int d^2(\omega) d\omega}{\left[ 1 - \frac{(\sum_{i=1}^M \cos \psi_i)^2}{M \sum_{i=1}^M \cos^2 \psi_i} \right] \int d^2(\omega) \omega^2 d\omega}, \quad (3.7)$$

$$(D_{\theta})_0 \approx \frac{1}{2q_0^2 \mu \sum_{i=1}^M \sin^2 \psi_i} \frac{c_0^2 \int d^2(\omega) d\omega}{\int d^2(\omega) \omega^2 d\omega},$$

это средние квадраты ошибок определения координат источника системой разнесенных приемников в свободном пространстве при использовании статистически-оптимальной разностно-дальномерной схемы, причем множитель

$$Q \approx \left[ 1 + c_0 \frac{\int d^2(\omega) \beta_*(\omega) \omega d\omega}{\int d^2(\omega) \omega^2 d\omega} \right] + c_0^2 \frac{\int d^2(\omega) d\omega}{\int d^2(\omega) \omega^2 d\omega} \left[ \frac{1}{2\rho_0} + \frac{\int d^2(\omega) \alpha(\omega) d\omega}{\int d^2(\omega) d\omega} \right]^2 \quad (3.8)$$

показывает выигрыш в точности обработки информации по этой схеме, вносимый учетом различий в затуханиях и дисперсии сигналов, распространяющихся к разным приемникам через реальную среду.

Второй член формулы (3.6) для  $D_{\xi, \theta}$  определяется средними квадратами ошибок определения координат источника при «некогерентном» объединении результатов автономной спектрально-дисперсионной дальнометрии, производимой по данным каждого из приемников:

$$(D_{\xi})_{\rho} = \frac{D_{\rho}}{\sum_{i=1}^M \cos^2 \psi_i}, \quad (D_{\theta})_{\rho} = \frac{D_{\rho}}{\sum_{i=1}^M \sin^2 \psi_i}. \quad (3.9)$$

Величина  $D_{\rho}$  находится по формулам (2.10) — (2.13).

Полезно отметить, что в практически важном случае, когда относительный разнос приемников невелик и  $\Delta\psi = L/\rho_0 < 0,8 \div 1$ , можно воспользоваться приближенными соотношениями

$$\sum_{i=1}^M \sin^2 \psi_i \approx \left( \frac{L}{\rho_0} \right)^2 \frac{M(M+1)}{12(M-1)} \sim \left( \frac{L}{\rho_0} \right)^2 \frac{M}{12},$$

$$\sum_{i=1}^M \cos^2 \psi_i \approx M, \quad (3.10)$$

$$1 - \frac{(\sum_{i=1}^M \cos \psi_i)^2}{M \sum_{i=1}^M \cos^2 \psi_i} \approx \left( \frac{L}{\rho_0} \right)^4 \frac{(M+1)(3M^2-7)}{960(M-1)^3} \sim \frac{1}{320} \left( \frac{L}{\rho_0} \right)^4.$$

Последние аппроксимации в (3.10) соответствуют случаю  $M \gg 1$ .

#### 4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОМЕХИ

В геофизических приложениях принимаемый сигнал обычно принадлежит множеству аналогичных ему независимых частично перекрывающихся последовательностей случайных сигналов, источники которых статистически распределены в пространстве, и должен регистрироваться на их фоне. Найдем выражения для энергетического спектра такой помехи в диспергирующей среде и для соответствующей частотной зависимости отношения сигнал/помеха или введенной нами ранее «весовой» функции  $d(\omega)$ .

Используя результаты [2], можно показать, что для изотропного поля источников помех

$$\Pi(\omega) = \frac{2\nu_0}{\eta_0} \int_S \overline{A_n^2(\omega; \rho_n)} ds. \quad (4.1)$$

Здесь интегрирование производится по всему помеховому полю,  $\nu_0$  — это интенсивность случайного (пуассоновского) потока сигналов, излучаемых из единичного объема поля, а  $A_n(\omega; \rho_n)$  — амплитудный спектр принимаемых элементарных помеховых сигналов, определяемый аналогично (1.5), причем амплитуда  $A_{n0}$  и параметры, характеризующие форму сигнала в источнике, являются случайными. Для двумерной геометрии поля и  $p = 1$  получим

$$\Pi(\omega) = \frac{2\pi\nu_0}{\eta_0} \frac{G_0^2 G_\omega^2(\omega) \overline{A_{n0}^2} \overline{A_{n\omega}^2(\omega)}}{\alpha(\omega)}. \quad (4.2)$$

Учитывая, что для поля излучателей, одинаковых по своей физической природе,  $\overline{A_{n0}} = \overline{A_0}$  и  $\overline{A_{n\omega}(\omega)} = \overline{A_\omega(\omega)}$ , найдем теперь соответствующее отношение сигнал/помеха для отдельного сигнала, излучаемого источником, находящимся на дальности  $\rho_0$ :

$$d^2(\omega) = \frac{A_0^2}{A_0^2} \frac{\alpha(\omega)}{2\pi\nu_0 \rho_0} \exp(-2\alpha(\omega)\rho_0). \quad (4.3)$$

В частном случае, если амплитуды излучаемых сигналов имеют экспоненциальное распределение, то  $\overline{A_0^2} = 2\overline{A_0}^2$ .

#### 5. ПРИМЕР

В качестве конкретного примера использования полученных соотношений рассмотрим случай распространения цилиндрической волны, образуемой нулевой ТМ-модой в плоском волноводе с хорошо проводящими стенками. При этом, как показано в [3], частотная зависимость составляющих  $\alpha(\omega)$  и  $\beta_*(\omega)$  функции распространения может быть приближенно записана в виде

$$\alpha(\omega) \approx \beta_*(\omega) \approx \frac{\gamma}{c_0} \omega^{1/2}, \quad (5.1)$$

где  $\gamma > 0$  определяется проводимостью стенок волновода и расстоянием между ними. Такие соотношения характерны, в частности, для условий распространения низкочастотных «медленных хвостов» атмосфериков в волноводе Земля — ионосфера.

Считая  $\omega_{\min} \ll \omega_{\max}$  и интегрируя по  $\omega$  в пределах от 0 до  $\infty$ , после несложных, хотя и громоздких выкладок получим

$$D_p \approx \frac{2}{5} \frac{\rho_0^2}{q_0^2 \mu}, \quad (5.2)$$

где, с учетом результатов разд. 4,

$$q_0^2 = \left( \frac{A_0}{\bar{A}_0} \right)^2 \frac{c_0^2}{16\pi^2 \nu_0 \gamma^2 \rho_0^4}. \quad (5.3)$$

Таким образом, среднеквадратичная ошибка спектрально-дисперсионной дальнометрии будет в этом случае пропорциональна кубу расстояния до источника сигнала.

Для пространственно-разнесенной системы из  $M$  приемников, имеющей «апертуру»  $L$ , получим

$$D_{\xi} \approx -\frac{160}{M\mu} \left( \frac{\rho_0}{L} \right)^4 \frac{c_0^2}{q_0^2 \omega_*^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{\gamma^2 \rho_0}{c_0} \right) + \frac{1}{45} \left[ 13 + 800 \left( \frac{\rho_0}{L} \right)^4 \right] \left( \frac{\gamma^2 \rho_0}{c_0} \right)^2 \right\}^{-1},$$

$$D_{\delta} \approx \frac{6}{M\mu} \left( \frac{\rho_0}{L} \right)^2 \frac{c_0^2}{q_0^2 \omega_*^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{\gamma^2 \rho_0}{c_0} \right) + \frac{31}{90} \left( \frac{\gamma^2 \rho_0}{c_0} \right)^2 \right\}^{-1}, \quad (5.4)$$

где

$$\omega_*^2 = \frac{\int_0^{\infty} d^2(\omega) \omega^2 d\omega}{\int_0^{\infty} d^2(\omega) d\omega} \approx \frac{45}{2} \left( \frac{c_0}{\gamma \rho_0} \right)^4. \quad (5.5)$$

Член в фигурных скобках формулы (5.4) характеризует выигрыш в точности, вносимый дисперсией сигнала в среде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, М., 1963.
2. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. L. Liebermann, J. Appl. Phys., **27**, № 12, 1477 (1956).

Поступила в редакцию  
10 января 1972 г.

#### ON THE STATISTICAL ESTIMATION OF THE LOCATION OF A SIGNAL SOURCE IN DISPERSIVE MEDIUM

V. O. Ashkenazy

The problem of optimal consideration of the transmission-medium dispersive properties when statistically estimating the signal source coordinates in the presence of random interference is discussed. Computational relations are derived and the accuracy of one- and multi-point spectral-dispersive measuring systems is analyzed.

УДК 538.574.4

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Ю. Н. Барабаненков, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский

Проводится обоснование уравнения переноса излучения, исходя из скалярного волнового уравнения для поля в среде со случайными неоднородностями. Уравнение переноса излучения получено в общем случае анизотропных флуктуаций в среде с плавно меняющимися статистическими характеристиками диэлектрической проницаемости, а также с учетом когерентной части поля.

1. Уравнение переноса излучения обычно выводят феноменологическим путем, используя энергетические соображения. С учетом регулярной рефракции это уравнение имеет вид [1-5]

$$n^2(\mathbf{R}) \frac{d I(\mathbf{R}, \mathbf{s})}{dl n^2(\mathbf{R})} = -\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{s}) I(\mathbf{R}, \mathbf{s}) + \int \sigma(\mathbf{R}; \mathbf{s}, \mathbf{s}') I(\mathbf{R}, \mathbf{s}') d\Omega(\mathbf{s}'), \quad (1)$$

где  $I(\mathbf{R}, \mathbf{s})$  — лучевая интенсивность волнового поля;  $dl$  — элемент длины луча, проходящего через точку  $\mathbf{R}$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{s}$ ;  $n^2(\mathbf{R})$  — регулярная составляющая коэффициента преломления среды;  $\sigma(\mathbf{R}; \mathbf{s}, \mathbf{s}')$  — коэффициент рассеяния среды;  $\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{s})$  — коэффициент поглощения, равный сумме коэффициентов истинного поглощения и экстинкции.

В последнее время уравнение переноса излучения было выведено из общей теории многократного рассеяния волн для статистически однородных флуктуаций диэлектрической проницаемости как для скалярных [6-9], так и для электромагнитных волн [10, 11]. Кроме того, в работе [12] выведено уравнение переноса электромагнитного излучения с учетом искривления лучей и вращения плоскости поляризации, т. е. с учетом регулярной неоднородности среды. В работах [11, 12] используется модель среды, состоящей из дискретных рассеивателей (электронов). Однако, в работах [11, 12] учитываются лишь парные корреляции положений рассеивателей, в силу чего постановка задачи в них, по существу, эквивалентна модели сплошной среды с флуктуациями диэлектрической проницаемости, распределенными по нормальному закону. Введение дискретной модели среды при сделанных в этих работах предположениях представляется поэтому излишним.

В данной работе приводится простой «волновой» вывод уравнения переноса излучения из волнового уравнения

$$\hat{L}u \equiv \Delta u + k^2 [\epsilon_0(\mathbf{r}) + \tilde{\epsilon}(\mathbf{r})] u = 0 \quad (2)$$

для скалярного поля  $u(\mathbf{r})$ , распространяющегося в непоглощающей

среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(\mathbf{r}) + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$ , причем\*  $\varepsilon_0(\mathbf{r}) \equiv \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle$  — среднее значение диэлектрической проницаемости, а  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$  — ее флуктуации. Излагаемый способ вывода уравнения переноса излучения оказывается более простым, чем предложенные в [6–12], и применим для юред как с постоянными, так и с меняющимися статистическими характеристиками.

2. Запишем уравнение (2) для точки  $\mathbf{r}_1$  и умножим его на  $u^*(\mathbf{r}_2)$ , а затем вычтем из него умноженное на  $u(\mathbf{r}_1)$  уравнение для  $u^*(\mathbf{r}_2)$ . В результате получим

$$[(\Delta_1 - \Delta_2) + k^2 [\varepsilon_0(\mathbf{r}_1) - \varepsilon_0(\mathbf{r}_2)] + k^2 [\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)]] u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta_i$  — оператор Лапласа, действующий по координатам точки  $\mathbf{r}_i$ . Усредним (3) и введем обозначение  $\Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \langle u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle$  для пространственной функции когерентности поля  $u(\mathbf{r})$ . Тогда будем иметь

$$(\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 [\varepsilon_0(\mathbf{r}_1) - \varepsilon_0(\mathbf{r}_2)] \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 \langle [\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)] u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle = 0. \quad (4)$$

Из волнового уравнения (2) видно, что поле  $u(\mathbf{r})$  — функционал от  $\tilde{\varepsilon}$ . Предположим, что случайное поле  $\tilde{\varepsilon}$  является гауссовым. Тогда для нахождения третьего слагаемого в (4) можно использовать полученную Фурутцу [13] и Новиковым [14] формулу

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) R[\tilde{\varepsilon}] \rangle = \int B_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta R[\tilde{\varepsilon}]}{\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')} \right\rangle d^3 r', \quad (5)$$

позволяющую вычислить корреляцию случайного гауссова поля  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})$  с произвольным функционалом  $R[\tilde{\varepsilon}]$  от него. В правой части (5)  $B_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') \rangle$  — корреляционная функция поля  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\delta/\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')$  — оператор вариационной (функциональной) производной. Применим (5) к (4), считая  $R = u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2)$ . В результате получим

$$(\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 [\varepsilon_0(\mathbf{r}_1) - \varepsilon_0(\mathbf{r}_2)] \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 \int d^3 r' [B_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - B_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')] \left\langle \frac{\delta u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')} \right\rangle = 0. \quad (6)$$

Действуя на уравнение (2) оператором  $\delta/\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')$  и учитывая, что  $\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})/\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , приходим к уравнению для  $\delta u(\mathbf{r})/\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')$ :

$$\hat{L}(\mathbf{r}) \frac{\delta u(\mathbf{r})}{\delta \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')} = -k^2 u(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (7)$$

Если через  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  обозначить случайную функцию Грина уравнения (2), для которой  $\hat{L}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , то решение уравнения (7) есть

\* Угловые скобки  $\langle \rangle$  означают статистическое усреднение.

$$\frac{\delta u(\mathbf{r})}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}')} = -k^2 u(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (8)$$

Дифференцируя произведение  $uu^*$  и используя (8), получаем

$$\left\langle \frac{\delta u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2)}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}')} \right\rangle = -k^2 [\langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') u^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}') \rangle]. \quad (9)$$

Случайную функцию Грина можно представить в виде  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , где  $\bar{G} = \langle G \rangle$  — средняя функция Грина, удовлетворяющая уравнению Дайсона [15], а  $\tilde{G} = G - \langle G \rangle$ . Точно так же  $uu^* = \langle uu^* \rangle + \tilde{u}\tilde{u}^*$ , поэтому  $\langle Guu^* \rangle = \bar{G}\langle uu^* \rangle + \langle \tilde{G}\tilde{u}\tilde{u}^* \rangle$ . Мы будем считать, что величина  $\langle \tilde{G}\tilde{u}\tilde{u}^* \rangle$  мала по сравнению с первым слагаемым, и ею можно пренебречь. Используя это приближение, после подстановки (9) в (6) имеем

$$(\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + k^2 [\varepsilon_0(\mathbf{r}_1) - \varepsilon_0(\mathbf{r}_2)] \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - k^4 \int d^3 r' [B_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - B_\varepsilon(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')] [\bar{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \Gamma'(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) + \bar{G}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')] = 0. \quad (10)$$

Заметим, что уравнение (10), полученное в пренебрежении величиной  $\langle \tilde{G}\tilde{u}\tilde{u}^* \rangle$  по сравнению с  $\bar{G}\langle uu^* \rangle$ , эквивалентно так называемому «лестничному» приближению для уравнения Бете—Солпитера теории многократного рассеяния волн [15].

Мы будем рассматривать лишь плавно неоднородные среды, для которых функции  $B_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ,  $\bar{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и  $\Gamma'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  являются «медленными» функциями от  $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$  и «быстрыми» функциями от  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Примем эти величины за новые переменные и обозначим  $\Gamma'(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}) = \Gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \langle u(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}) u^*(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}) \rangle$ , а у функций  $B_\varepsilon$  и  $\bar{G}$  в качестве первого аргумента будем писать  $\mathbf{R}$ , в качестве второго— $\boldsymbol{\rho}$ . Уравнение (10) при этом с помощью простых замен переменных интегрирования можно привести к виду\*

$$\begin{aligned} \hat{P} \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \equiv 2\nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{r}} \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) + k^2 \left[ \varepsilon_0\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) - \varepsilon_0\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \\ - \int M\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}}{2}, \boldsymbol{\rho}\right) \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}\right) d^3 \boldsymbol{\rho} + \int M^*\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}}{2}, \boldsymbol{\rho}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}\right) d^3 \boldsymbol{\rho} - k^4 \int B_\varepsilon\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}\right) \bar{G}^*\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}}{2}, \boldsymbol{\rho}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}\right) d^3 \boldsymbol{\rho} + k^4 \int B_\varepsilon\left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}\right) \times \end{aligned} \quad (11)$$

\* Уравнение (11) можно получить непосредственно из уравнений Дайсона и Бете—Солпитера теории многократного рассеяния волн.

$$\times \bar{G}\left(R - \frac{r-\rho}{2}, \rho\right) \Gamma\left(R - \frac{\rho}{2}, r - \rho\right) d^3 \rho = 0,$$

где  $M(R, \rho) = k^4 B_\varepsilon(R, \rho) \bar{G}(R, \rho)$  — сумма быстроубывающих членов ядра массового оператора уравнения Дайсона.

3. Для построения решения уравнения (11) введем оператор  $\hat{P}_0$ ,

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 \Gamma(R, r) \equiv & 2\nabla_R \nabla_r \Gamma(R, r) + k^2 r \nabla_R \varepsilon_0(R) \Gamma(R, r) - \\ & - \int M(R, \rho) \Gamma(R, r - \rho) d^3 \rho + \int M^*(R, \rho) \Gamma(R, r + \rho) d^3 \rho - \\ & - \int \frac{r - \rho}{2} \frac{\partial M(R, \rho)}{\partial R} \Gamma(R, r - \rho) d^3 \rho - \\ & - \int \frac{r + \rho}{2} \frac{\partial M^*(R, \rho)}{\partial R} \Gamma(R, r + \rho) d^3 \rho + \int \frac{\rho}{2} M(R, \rho) \frac{\partial \Gamma(R, r - \rho)}{\partial R} d^3 \rho - \\ & - \int \frac{\rho}{2} M^*(R, \rho) \frac{\partial \Gamma(R, r + \rho)}{\partial R} d^3 \rho - \\ & - k^4 \int B_\varepsilon(R, r + \rho) \bar{G}^*(R, \rho) \Gamma(R, r + \rho) d^3 \rho + \\ & + k^4 \int B_\varepsilon(R, r - \rho) \bar{G}(R, \rho) \Gamma(R, r - \rho) d^3 \rho, \end{aligned} \quad (12)$$

который можно формально получить из входящего в (11) оператора  $\hat{P}$ , разлагая в ряды Тейлора функции  $\varepsilon_0$ ,  $B_\varepsilon$ ,  $M$  и  $\Gamma$ . Поскольку мы ограничиваемся случаем плавно неоднородных сред, операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{P}_0$  близки между собой, если расстояние  $r$  между точками наблюдения не слишком велико.

Переписывая уравнение (11) в виде

$$\hat{P}_0 \Gamma(R, r) = \delta \hat{P} \Gamma(R, r) \quad (\delta \hat{P} = \hat{P}_0 - \hat{P}), \quad (13)$$

покажем, что равенство нулю левой его части эквивалентно уравнению переноса излучения. Для этого осуществим преобразование Фурье по разностной координате  $r$ . В результате найдем:

$$\begin{aligned} 2i\kappa \frac{\partial f(R, \kappa)}{\partial R} + ik^2 \nabla_{\varepsilon_0}(R) \frac{\partial f(R, \kappa)}{\partial \kappa} - 2i\tilde{M}''(R, \kappa) f(R, \kappa) - \\ - i \frac{\partial \tilde{M}'(R, \kappa)}{\partial R} \frac{\partial f(R, \kappa)}{\partial \kappa} + i \frac{\partial \tilde{M}'(R, \kappa)}{\partial \kappa} \frac{\partial f(R, \kappa)}{\partial R} - \\ - \frac{k^4}{(2\pi)^3} \int \Phi_\varepsilon(R, \kappa - \kappa') f(R, \kappa') d^3 \kappa' \times \\ \times \int [\bar{G}^*(R, \rho) e^{-i\kappa\rho} - G(R, \rho) e^{i\kappa\rho}] d^3 \rho = B, \end{aligned} \quad (14)$$

где



$$f(R, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Gamma(R, r) e^{-i\kappa r} d^3 r; \quad (15)$$

$$\tilde{M}(R, \kappa) = \tilde{M}'(R, \kappa) + i\tilde{M}''(R, \kappa) = \int M(R, r) e^{-i\kappa r} d^3 r; \quad (16)$$

$$\Phi_e(R, \kappa) = \int B_e(R, r) e^{-i\kappa r} d^3 r, \quad (17)$$

а  $B$  отвечает малой поправке  $\delta \hat{P} \Gamma(R, r)$ . Напомним, что средняя функция Грина  $\bar{G}$ , преобразование Фурье от которой входит в (14), удовлетворяет уравнению Дайсона, которое в случае плавно неоднородных сред можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_r \bar{G}(R, r) + k^2 \varepsilon_0(R) \bar{G}(R, r) = \\ = \int M(R, r - \rho) \bar{G}(R, \rho) d^3 \rho + \delta(r). \end{aligned} \quad (18)$$

Осуществляя в этом уравнении преобразование Фурье, при  $|\tilde{M}''| \ll k^2$  получаем\*

$$\begin{aligned} \int G(R, \rho) e^{i\kappa \rho} d^3 \rho = \frac{1}{k^2 \varepsilon_0(R) - \kappa^2 - \tilde{M}(R, \kappa)} \approx \\ \approx p \left[ \frac{1}{k^2 \varepsilon_0(R) - \kappa^2 - \tilde{M}'(R, \kappa)} \right] + i\pi \delta [k^2 \varepsilon_0(R) - \kappa^2 - \tilde{M}'(R, \kappa)], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $p[\dots]$  означает главную часть выражения, стоящего в квадратных скобках. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int [\bar{G}^*(R, \rho) e^{-i\kappa \rho} - \bar{G}(R, \rho) e^{i\kappa \rho}] d^3 \rho \approx \\ \approx 2\pi i \delta [k^2 \varepsilon_0(R) - \kappa^2 - \tilde{M}'(R, \kappa)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что правую часть уравнения (14) можно представить в виде  $2i \left| \kappa + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{M}'(R, \kappa)}{\partial \kappa} \right| \frac{df}{dl}$ , где  $dl$  — дифференциал криволинейного

луча, проходящего через точку  $R$  в направлении  $\kappa + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{M}'(R, \kappa)}{\partial \kappa}$ , в среде с эффективной диэлектрической проницаемостью  $^{[16]} \varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon_0(R) - \tilde{M}'(R, \kappa)/k^2$  (т. е. с гамильтонианом  $H(R, \kappa) = \frac{1}{2} [\kappa^2 - k^2 \varepsilon_{\text{эфф}}]$ ). Пред-

положим, что флуктуации  $\tilde{\varepsilon}$  статистически изотропны, тогда направление  $\kappa + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{M}'(R, \kappa)}{\partial \kappa}$  совпадает с направлением  $\kappa$ . Все это дает возможность записать уравнение (14) в форме

\* Это неравенство ограничивает допустимую величину флуктуаций  $\tilde{\varepsilon}$ . В случае мелкомасштабных неоднородностей ( $ka \ll 1$ ) должно быть  $\langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle (ka)^3 \ll 1$ , а в случае крупномасштабных ( $ka \gg 1$ ) —  $\langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle ka \ll 1$ . (Оценки получены для среды с экспоненциальной корреляционной функцией  $B_e(R, \rho) = \langle \tilde{\varepsilon}^2 \rangle \exp(-\rho/a)$ ,  $a$  — радиус корреляции.)

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x} \right| \frac{df}{dl} - \tilde{M}''(R, x) f(R, x) - \frac{k^4}{16\pi^2} \delta [H(R, x)] \times \\ \times \int \Phi_e(R, x - x') f(R, x') d^3 x' = B. \quad (21)$$

Пренебрегая малой правой частью (21), будем искать решение в виде

$$f(R, x) = f_0(R, x) + f_1(R, x); \quad (22)$$

$$f_1(R, x) = I(R, s) k \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{-2} \delta [H(R, x)] \quad \left( s = \frac{x}{x} \right), \quad (22a)$$

считая, что  $f_0(R, x)$  удовлетворяет уравнению

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x} \right| \frac{df_0}{dl} = \tilde{M}''(R, x) f_0(R, x). \quad (23)$$

Заметим, что  $f_0(R, x)$  представляет собой в этом случае фурье-преобразование по разностной переменной  $r$  от произведения средних полей:

$$f_0(R, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\langle u \left( R + \frac{r}{2} \right) \right\rangle \left\langle u^* \left( R - \frac{r}{2} \right) \right\rangle e^{-ixr} d^3 r. \quad (24)$$

При сделанных предположениях оказывается, что функция  $I(R, s)$  удовлетворяет уравнению

$$n_{эфф}^2(R) \frac{d}{dl} \frac{I(R, s)}{n_{эфф}^2(R)} = \frac{\tilde{M}''(R, k_{эфф}(R))}{k n_{эфф}(R)} I(R, s) + \frac{k^2 k_{эфф}^2(R)}{16\pi^2 n_{эфф}^2(R)} \times \\ \times \int \Phi_e [R, k_{эфф}(R)(s - s')] I(R, s') d\Omega(s') + \frac{k^4}{16\pi^2} \times \\ \times \int \Phi_e [R, k_{эфф}(R)s - x'] f_0(R, x') d^3 x'. \quad (25)$$

В уравнении (25) через  $k_{эфф}(R)$  обозначен корень уравнения  $H(R, k_{эфф}) = 0$ , а  $n_{эфф} = \frac{1}{k} \left| \frac{\partial H(R, x)}{\partial x} \right|_{x=k_{эфф}}$  — эффективный коэффициент преломления.

Уравнение (25) отличается от (1) наличием последнего члена, который описывает преобразование когерентной части рассеянного поля в некогерентную. При рассмотрении традиционных оптических проблем излучения, имеющих дело с некогерентными полями, этот член равен нулю. Однако его надо учитывать при исследовании частично когерентных полей, например, при анализе прохождения лазерного пучка через турбулентную атмосферу. Влияние этого члена существенно в конусе с раствором  $\sim \frac{1}{ka}$ , где  $a$  — радиус корреляции неоднородностей.

Заметим, что учет члена  $B$  в уравнении (21) привел бы к появлению в выражении (22 а) для  $f_1$  дополнительных слагаемых, не содержащих  $\delta$ -функцию, т. е. не сосредоточенных на «энергетической поверхности»  $x = k_{эфф}$ , где  $H(R, x) = 0$ . Эта «размазанная» часть спектра оказывает влияние на значение функции корреляции лишь при достаточно большом разнесении точек наблюдения, но не существенна при  $r \ll a$ .

4. При помощи (15) и (22 а) нетрудно получить связь между лучевой интенсивностью и функцией корреляции поля  $B_u(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{R}, \mathbf{r}) - \langle u(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) \rangle \langle u^*(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \rangle$ :

$$B_u(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{k^2 n_{эфф}^2}{k^2 n_{эфф}^2} \int I(\mathbf{R}, \mathbf{s}) \exp(ik_{эфф} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d\Omega(\mathbf{s}). \quad (26)$$

Соотношение (26) является «волновым» определением лучевой интенсивности некогерентно рассеянного поля (яркости рассеянного излучения). Тем самым устанавливается соответствие между электродинамическими и фотометрическими величинами. Впервые аналогичное соотношение было получено Долиным [17]. Другим способом оно было найдено Розенбергом [18].

5. Из (25) следует, что феноменологические коэффициенты  $\alpha$  и  $\sigma$  выражаются через  $\tilde{M}''$  и  $\Phi_\varepsilon$ :

$$\alpha(\mathbf{R}) = - \frac{\tilde{M}''(\mathbf{R}, k_{эфф})}{k n_{эфф}}; \quad (27)$$

$$\sigma(\mathbf{R}; \mathbf{s}, \mathbf{s}') = \frac{k^2 k_{эфф}^2}{16\pi^2 n_{эфф}^2} \Phi_\varepsilon(\mathbf{R}, k_{эфф}(\mathbf{s} - \mathbf{s}')). \quad (28)$$

Для статистически однородной среды аналогичные соотношения были получены в [6-9]. В отличие от этих работ в рассматриваемом случае появляется явная зависимость коэффициентов экстинкции и рассеяния от координат. Кроме того, коэффициент рассеяния (28) учитывает многократное рассеяние (он не совпадает с поперечником рассеяния в борновском приближении).

6. Если не прибегать к требованию изотропности флуктуаций проницаемости  $\tilde{\varepsilon}$ , уравнение (21) (при  $B = 0$ ) примет вид

$$\left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right| \frac{df}{dl} = \tilde{M}''(\mathbf{R}, \mathbf{x}) f(\mathbf{R}, \mathbf{x}) + \frac{k^4}{16\pi^2} \delta[H(\mathbf{R}, \mathbf{x})] \times \\ \times \int \Phi_\varepsilon(\mathbf{R}, \mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{R}, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (29)$$

Исключая из рассмотрения когерентную часть поля, т. е. считая, что  $f_0 = 0$ , будем искать  $f$  в виде

$$f = k \frac{\left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|}{\left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|^3} \delta[H(\mathbf{R}, \mathbf{x})] I(\mathbf{R}, \mathbf{s}). \quad (30)$$

Заметим попутно, что величина  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  есть не что иное, как  $s \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$ , где  $s = \mathbf{x}/x$ . Очевидно, что вектор  $s$  задает направление фазовой скорости, а вектор  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$  — групповой. Поэтому (30) можно записать как

$$f = \frac{k}{\left| \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|^2 |\cos \theta(\mathbf{R}, \mathbf{s})|} \delta[H(\mathbf{R}, \mathbf{x})] I(\mathbf{R}, \mathbf{s}), \quad (30a)$$

где  $\theta(R, s)$  — угол между фазовой и групповой скоростями волны. Подставляя (30 а) в (29), получаем уравнение для  $I(R, s)$ :

$$n_{эфф}^2(R, s) \frac{d}{dl} \frac{I(R, s)}{|\cos \theta(R, s)| n_{эфф}^2(R, s)} = \frac{\tilde{M}''(R, k_{эфф}(R, s) s)}{k n_{эфф}(R, s)} \times \\ \times I(R, s) + \int \frac{k k_{эфф}^2(R, s')}{16\pi^2} \frac{n_{эфф}(R, s)}{n_{эфф}^3(R, s')} \frac{|\cos \theta(R, s)|}{|\cos \theta(R, s')|} \times \\ \times \Phi_e [R, k_{эфф}(R, s) s - k_{эфф}(R, s') s'] I(R, s') d\Omega(s'), \quad (31)$$

где через  $k_{эфф}(R, s)$  обозначен корень уравнения  $H(R, k_{эфф}(R, s) s) = 0$ , а  $n_{эфф}(R, s) = \frac{1}{k} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=k_{эфф}}$ .

Таким образом, уравнение переноса излучения в случае анизотропных флуктуаций несколько отличается от (1). В частности, в левой части уравнения появился множитель  $|\cos \theta(R, s)|$ , учитывающий несоответствие направлений групповой и фазовой скоростей (аналогичный множитель возникает при рассмотрении переноса излучения в магнитно-активной среде [3, 5]). Коэффициенты экстинкции и рассеяния теперь равны:

$$\alpha(R, s) = - \frac{\tilde{M}''(R, k_{эфф}(R, s) s)}{k n_{эфф}(R, s)}; \quad (32)$$

$$\sigma(R; s, s') = \frac{k^2 k_{эфф}^2(R, s')}{16\pi^2} \frac{n_{эфф}(R, s)}{n_{эфф}^3(R, s')} \frac{|\cos \theta(R, s)|}{|\cos \theta(R, s')|} \times \\ \times \Phi_e(R, k_{эфф}(R, s) s - k_{эфф}(R, s') s'). \quad (33)$$

По-видимому, изложенный «волновой» способ вывода уравнения переноса излучения в аналогичном приближении удастся применить и к векторной электромагнитной задаче. Основная трудность такого рассмотрения — наличие у функции Грина сингулярности более высокого порядка, чем в скалярной задаче (см. [19, 20]).

В заключение авторы выражают свою признательность С. М. Рытову за обсуждение работы и ряд ценных советов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Wooley, Austral. J. Sci., Supplement, 10, № 2, 1 (1947).
2. R. Wooley, D. Stibbs, The Outer Layer of a Star, Oxford, Clarendon Press, 1953.
3. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
4. L. Ostor, S. Sofia, Astrophys. J., 141, № 3, 1139 (1965).
5. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1057 (1966).
6. Ю. Н. Барабаненков, Докл. АН СССР, 174, 53 (1967).
7. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, 978 (1967).
8. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 106 (1970).
9. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ, 56, 1261 (1969).
10. A. Z. Dolginov, Yu. N. Gnedin, N. A. Silant'ev, J. Q. S. R. T., 10, 707 (1970).
11. K. M. Watson, J. Math. Phys., 10, № 4, 688 (1969).
12. C. W. Law, K. M. Watson, J. Math. Phys., 11, № 11, 3125 (1970).
13. K. Furutsu, J. Res. NBS, 67-D, № 3, 303 (1963).
14. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 1919 (1964).
15. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

16. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 10, 1582 (1968).
17. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 559 (1964).
18. Г. В. Розенберг, Оптика и спектроскопия, 28, 392 (1970).
19. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 34, 509 (1964).
20. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
3 декабря 1971 г.

APPLICATION OF THE THEORY OF MULTIPLE WAVE SCATTERING  
TO DEDUCTION OF RADIATIVE TRANSFER EQUATION FOR A  
STATISTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

*Yu. N. Barabanenkov, A. G. Vinogradov, Yu. A. Kravtsov, V. I. Tatarskii*

The substantiation of the radiative transfer equation is given on the basis of the scalar wave equation for the field in the medium with random inhomogeneities. The radiative transfer equation is obtained in the general case of anisotropic fluctuations in the medium with smoothly varying statistical characteristics of the dielectric permittivity and with taking into account the coherent part of the field.

---

УДК 621.371.22

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФЛУКТУАЦИЙ ФАЗ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

*В. П. Лукин, В. В. Покасов, С. С. Хмелевцов*

Показано, что гетеродинирование опорным сигналом, модулированным по фазе гармоническим колебанием, позволяет разделить амплитудные и фазовые флуктуации оптического излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере. Проведенные эксперименты показывают, что флуктуации фазы действительно подчиняются гауссовому закону, существует корреляционная функция флуктуаций фазы с радиусом корреляции  $\sim L_0$ .

Успешное применение техники гетеродинного приема в практике научных исследований флуктуационных явлений при распространении оптических волн, видимо, впервые было описано в работе [2]. Уже из этой работы видны те принципиальные трудности, которые при этом возникают, и главная из них — низкая взаимная когерентность излучения различных ОКГ. Использование в качестве опорной волны части излучения передающего ОКГ, с предварительным сдвигом частоты за счет доплеровского эффекта, позволяет снизить требования к когерентности передатчика, однако остается трудноразрешимой проблема обеспечения узкой полосы преобразования частоты за достаточно большое время в непрерывном режиме.

Как показали исследования, проведенные в Институте оптики атмосферы СО АН СССР, эту проблему удастся разрешить при использовании в качестве опорной волны части передающего ОКГ с предварительной фазовой модуляцией его по гармоническому закону.

### ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Сигнальную волну, прошедшую слой атмосферы, можно представить в виде

$$V_s(\mathbf{r}, t) = \bar{A}_s \exp [\chi(\mathbf{r}, t) + i\Phi(\mathbf{r}, t)] \exp [i(\omega_s t + \Phi_s)], \quad (1)$$

где  $\bar{A}_s$  — среднее значение амплитуды поля в точке  $\mathbf{r}$ ;  $\omega_s$  и  $\Phi_s$  — частота и начальная фаза излучения; величины  $\chi(\mathbf{r}, t) = \ln \frac{A(\mathbf{r}, t)}{\bar{A}_s}$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$

характеризуют флуктуации поля в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ ;  $A(\mathbf{r}, t)$  — амплитуда поля в точке  $(\mathbf{r}, t)$ ;  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — добавка к фазе за счет действия турбулентности.

Опорное колебание, представляющее собой часть излучения передатчика, модулированное по фазе гармоническим сигналом, есть

$$V_0(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp [i(\omega_s t + ka \cos \Omega t + \Phi_0)], \quad (2)$$

где  $A_0$  и  $\Phi_0$  — амплитуда и начальная фаза опорного сигнала,  $a$  и  $\Omega$  — амплитуда и частота модулирующего колебания. При смещении колебаний (1) и (2) в спектре фототока имеются компоненты вида

$$i_{20} = \eta A_0 \bar{A}_s e^{\chi(r, t)} J_1(ka) \sin \Delta \Phi(r, t) \sin \Omega t, \quad (3)$$

$$i_{22} = \eta A_0 \bar{A}_s e^{\chi(r, t)} J_2(ka) \cos \Delta \Phi(r, t) \cos 2 \Omega t.$$

Причем  $\Delta \Phi(r, t) = \Phi(r, t) + (\Phi_0 - \Phi_s)$ , а  $J_1(ka)$ ,  $J_2(ka)$  — функции Бесселя первого рода,  $\eta$  — квантовая эффективность фотоприемника. Совместное использование двух гармоник  $i_{20}$  и  $i_{22}$  позволяет производить раздельную регистрацию флуктуаций амплитуды и фазы оптического поля, распространяющегося в атмосфере.

Все сказанное выше справедливо для приемника с точечной апертурой, а всякий реальный фотоприемник проводит усреднение поля по поверхности, т. е. фототок  $i = \int di$ , где интегрирование ведется по освещенной поверхности фотоприемника,  $di$  — фототок в окрестности  $dr$  точки  $r$ , равный [3]

$$di = \eta(r) (V_0 V_s^* + V_s V_0^*) dr,$$

$$\eta(r) = \begin{cases} \eta & (\text{для всех освещенных точек поверхности фотоприемника}). \\ 0 & (\text{вне этих точек}) \end{cases}$$

Вычисление автокорреляционной функции  $\Gamma_{11}(\tau)$  для компоненты  $i_{20}$  приводит к выражению

$$\Gamma_{11}(\tau) = J_1^2(ka) A_0^2 \bar{A}_s^2 e^{i2\tau} \left[ \iint \eta(r_1) \eta(r_2) B(r_1, r_2, \tau) \times \right. \quad (4)$$

$$\left. \times dr_1 dr_2 + \cos(\Phi_0 - \Phi_s) \iint \eta(r_1) \eta(r_2) B'(r_1, r_2, \tau) dr_1 dr_2 \right],$$

$B(r_1, r_2, \tau)$  и  $B'(r_1, r_2, \tau)$  — корреляционные функции, равные

$$B(r_1, r_2, \tau) = \langle \exp [\chi(r_1, t) + \chi(r_2, t + \tau)] \cos [\Phi(r_1, t) - \Phi(r_2, t + \tau)] \rangle,$$

$$B'(r_1, r_2, \tau) = \langle \exp [\chi(r_1, t) + \chi(r_2, t + \tau)] \cos [\Phi(r_1, t) + \Phi(r_2, t + \tau)] \rangle.$$

В предположении, что случайные поля  $\chi(r, t)$  и  $\Phi(r, t)$  стационарны, изотропны и подчиняются гауссовому закону распределения [1]:

$$B(r_1, r_2, \tau) = \exp \left[ -\frac{1}{2} D(r, \tau) \right]; \quad (5)$$

$$B'(r_1, r_2, \tau) = \exp \left[ -\frac{1}{2} D(r, \tau) - 2B_\Phi(r, \tau) \right], \quad (6)$$

где  $r = |r_1 - r_2|$ .

Равенства (5) и (6) верны, по крайней мере, для плоской и сферической волн [4]. Поскольку радиус корреляции флуктуаций фазы (в области применимости МПВ) близок к  $L_0$  — внешнему масштабу турбулентных неоднородностей [6], то для малых  $\tau$  и не слишком больших приемных апертур  $B_\Phi(r, \tau)$  совпадает с дисперсией флуктуаций фазы  $\sigma_\Phi^2$ . В итоге

$$\Gamma_{11}(\tau) = J_1^2(ka) A_0^2 \bar{A}_s^2 e^{i2\tau} [1 + \cos(\Phi_0 - \Phi_s) \exp(-2\sigma_\Phi^2)] \times \quad (7)$$

$$\times \iint \eta(r_1) \eta(r_2) \exp \left[ -\frac{1}{2} D(r, \tau) \right] dr_1 dr_2.$$

Величина  $\exp\left[-\frac{1}{2}D(r, \tau)\right]$  представляет собой передаточную функцию атмосферы, поэтому если бы регистрация проводилась точечным приемником, то  $\Gamma_{11}(\tau)$  давало бы точное значение передаточной функции атмосферы. Приемник, имеющий конечные размеры, дает некую усредненную передаточную функцию. Тогда для спектральной плотности флуктуаций  $\hat{\Gamma}_{11}(\omega)$  (фурье-преобразование  $\Gamma_{11}(\tau)$ ) получаем

$$\hat{\Gamma}_{11}(\omega) = \iint T^*(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}, \omega + \Omega) d\mathbf{x}, \quad (8)$$

где

$$T(\mathbf{x}) = \iint \eta(r_1) \eta(r_2) e^{-i\mathbf{x}r} dr_1 dr_2,$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \omega) = \iiint B(r, \tau) e^{i(\mathbf{x}r + \omega\tau)} dr d\tau.$$

Отсюда видно, что пространственно-временной спектр флуктуаций  $\Phi(\mathbf{x}, \omega)$  фильтруется функцией пропускания приемной апертуры. Следовательно, любая неточечная апертура искажает временной спектр флуктуаций. Но так как флуктуации фазы определяются в основном крупномасштабными неоднородностями, проведенный выше анализ остается справедливым и для не слишком больших конечных апертур.

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальные исследования флуктуаций фазы проводились на приземных трассах (высота над Землей  $h = 1,5$  м) протяженностью 95 и 200 м. Оптическая часть экспериментальной установки представлена на рис. 1, на котором обозначены: 1 — ОКГ, 2 — полупрозрачная пластина, 3 — отражающее зеркало, 4 — фазовый модулятор, 5; 5'; 5'' — коллиматоры, 6 — ФЭУ, 7 — среда. В качестве передатчика использовался He-Ne ОКГ с длиной волны 0,63 мк. Длина когерентности излучения ОКГ превосходила 1000 м. Излучение ОКГ, сформированное коллиматором 5, пройдя слой атмосферы, после отражения от отражателя О принимается коллиматором 5'. Необходимая юстировка обеспечивается системой зеркал 3 и полупрозрачной пластиной 2.

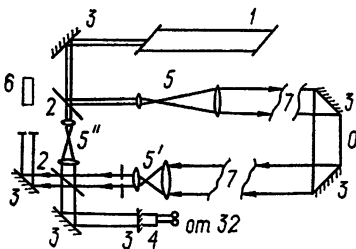


Рис. 1.

Рис. 1. Оптическая часть экспериментальной установки.

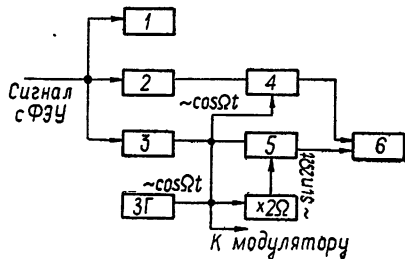


Рис. 2.

Рис. 2. Блок-схема электрической части экспериментальной установки.

Модулятор 4 представлял собой пьезокерамический элемент с легким зеркальцем, возбуждаемый с помощью звукового генератора на частоте  $\Omega/2\pi = 5$  кГц. В качестве фотоприемника использовался фотоумножитель ФЭУ-28. Дальнейшая обработка электрического сигнала обеспечивалась аналоговым устройством, блок-схема которого изображена на рис. 2. Анализатор спектра (1) использовался для визуального контроля



за наличием в спектре тока гармоник  $i_2$  и  $i_{22}$ . Сигнал ФЭУ подавался на селективные усилители ((2) и (3) (5 и 10 кГц соответственно)), которые из всего спектра вырезали первую  $i_2$  и вторую  $i_{22}$  гармоники. Как следует из (3),

$$i_2 \sim J_1(ka) \bar{A}_s e^{\lambda(r,t)} \sin \Delta\Phi(t) \sin \Omega t,$$

$$i_{22} \sim J_2(kd) \bar{A}_s e^{\lambda(r,t)} \cos \Delta\Phi(t) \cos 2\Omega t.$$

Последующее синхронное детектирование в блоках СД<sub>1</sub> (4) и СД<sub>2</sub> (5) позволяет выделить огибающие

$$i_1 \sim A(t) \sin \Delta\Phi(t),$$

$$i_2 \sim A(t) \cos \Delta\Phi(t). \quad (9)$$

Регистрация  $i_1$  и  $i_2$  проводилась шлейфовым осциллографом Н-700 (6). Разделение информации об амплитудных  $A(t)$  и фазовых  $\Delta\Phi(t)$  флуктуациях обеспечивалось при дальнейшей машинной обработке.

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты экспериментальных исследований, проведенных за период октябрь — декабрь 1970 года, приведены на рис. 3—8. Численные расчеты статистических характеристик выполнялись на ЭВМ типа М-20. Рис. 3, 4, показывают, что распределения логарифма амплитуды и фазы

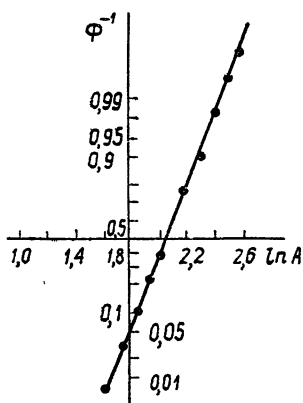


Рис. 3.

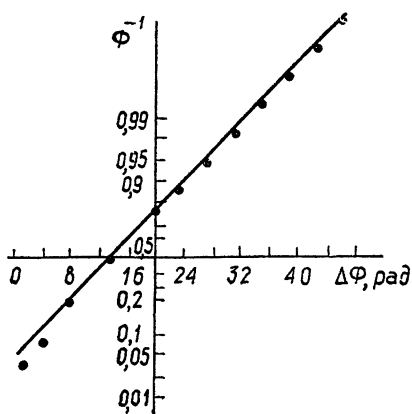


Рис. 4.

Рис. 3. Проверка эмпирического закона распределения вероятности флуктуаций логарифма амплитуды (по оси ординат отложена величина  $\Phi^{-1}$  — функция, обратная интегралу вероятности).

Рис. 4. Проверка эмпирического закона распределения вероятности флуктуаций фазы.

удовлетворительно описываются гауссовым законом. Рассчитанные нормированные корреляционные функции флуктуаций фазы  $b_\Phi(\tau)$  — II и логарифма амплитуды  $b_\lambda(\tau)$  — I даны на рис. 5. Сравнения показывают, что радиус корреляции флуктуаций фазы, соизмеримый с  $L_0$  — внешним масштабом неоднородностей, значительно превосходит радиус корреляции флуктуаций амплитуды. Рис. 6 иллюстрирует отклонение хода структурной функции фазы  $D_\Phi(\tau)$  от закона «5/3» [1] (прямая линия соответствует закону «5/3») с заметным насыщением для больших  $\tau$  [6].

На рис. 7, 8 приведены нормированные спектральные плотности флуктуаций  $\hat{F}_\lambda(f)$  и  $\hat{F}_\Phi(f)$ , показывающие, что в флуктуации фазы

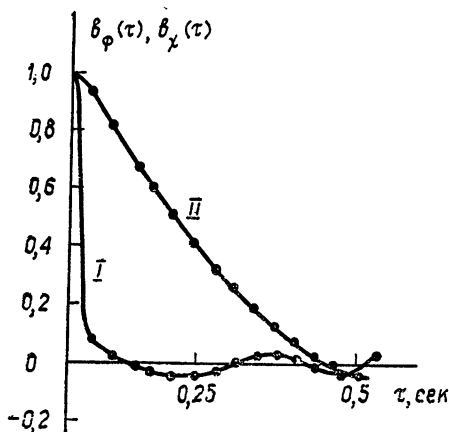


Рис. 5.

Рис. 5. Нормированные временные корреляционные функции флуктуаций фазы и логарифма амплитуды (соответствующая величина  $u_{\perp}$  — поперечной компоненты скорости ветра составляла 1,7 м/сек).

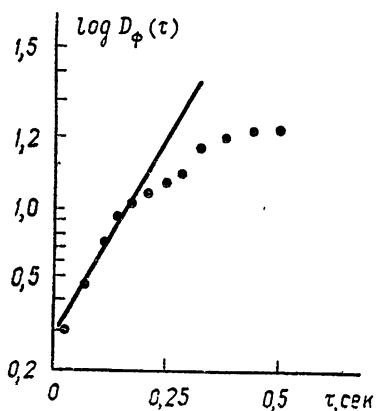


Рис. 6.

Рис. 6. Структурная функция флуктуаций фазы.

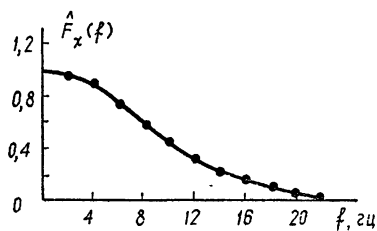


Рис. 7.

Рис. 7. Нормированная временная спектральная плотность флуктуаций логарифма амплитуды.

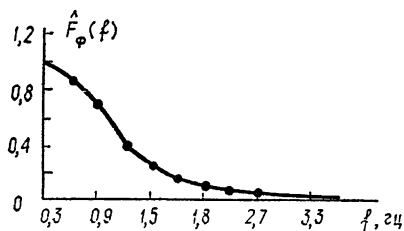


Рис. 8.

Рис. 8. Нормированная временная спектральная плотность флуктуаций фазы.

вносят основной вклад крупномасштабные неоднородности (малые значения  $\kappa$ ), а флуктуации амплитуды обусловлены в основном значительно меньшими неоднородностями. Резкий спад спектра флуктуации амплитуды, происходящий раньше, чем это следует из теории [1], объясняется усредняющим действием приемной апертуры. Полученное спектральное представление для флуктуаций фазы  $\hat{F}_{\Phi}(f)$  согласуется с теоретическим выводом, согласно которому  $\hat{F}_{\Phi}(f) \sim f^{-8/3}$ . Проведенные измерения, в частности насыщение  $D_{\Phi}(\tau)$ , указывают на зависимость спектральной плотности флуктуаций показателя преломления среды от  $L_0$  [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Голдстейн, Майлс, Шабо, Тр. ИИЭР, 53, № 9 (1965).
3. Д. Л. Фрид, Тр. ИИЭР, 55, № 1, 51 (1967).
4. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).

5. R. F. Lutomirski, H. T. Yura, J. Opt. Soc. Amer., 61, № 4, 482 (1971).  
6. В. П. Лукин, В. В. Покасов, О. Л. Тузов, Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Секция IV, изд. Наука, М., 1972.

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
16 марта 1972 г.

INVESTIGATION OF TIME CHARACTERISTICS OF PHASE FLUCTUATIONS  
OF OPTICAL WAVES PROPAGATING IN THE ATMOSPHERIC  
LAYER NEAR THE EARTH

*V. P. Lukin, V. V. Pokasov, S. S. Khmelevtsov*

It is shown that the heterodyning by the reference signal phase-modulated by a harmonic oscillation enables one to separate amplitude and phase fluctuations of the optical radiation propagating in the turbulent atmosphere. The experiments made show that the phase fluctuations are subject to the Gauss law and that there is the correlation function of phase fluctuations with the correlation radius  $\sim L_0$ .

---

УДК 621.372.8.09

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

*В. В. Воробьев*

На основании уравнения для функции когерентности четвертого порядка рассчитываются флуктуации интенсивности на оси светового пучка при его распространении в волноводном канале с параболическим профилем среднего показателя преломления. Показано, что наличие волноводного канала может приводить как к усилению, так и к ослаблению флуктуаций, по сравнению с флуктуациями в однородной среде.

В ряде работ (см., например, [1-5]) обсуждается возможность использования искусственных волноводных каналов с параболическим профилем показателя преломления для оптической связи на больших расстояниях. Такие волноводы, градиент показателя преломления в которых создается либо подогревом стенок трубы, заполненной газом, либо нагреванием газа интенсивным световым пучком, обладают малыми потерями на рассеяние и отражение, по сравнению с обычными линзовыми системами. Недостатком их является, однако, то, что в неравномерно разогретом газе возникают турбулентность и конвекция, вызывающие флуктуации показателя преломления. Эти флуктуации, в свою очередь, приводят к преобразованию мод в пучке и флуктуациям поля.

Ранее были рассмотрены задачи о рассеянии из основной моды в другие [6, 7] и об уширении светового пучка из-за рассеяния на случайных неоднородностях в волноводном канале [8]. В настоящей работе рассчитываются флуктуации интенсивности светового поля, которые определяются суммой полей, рассеянных во все моды. Эти флуктуации могут быть обусловлены как дифракцией на случайных неоднородностях, так и фокусировкой и случайными смещениями центра пучка. Показано, что наличие волноводного канала может приводить как к усилению флуктуаций — в случае, когда существенна дифракция на неоднородностях, так и к ослаблению флуктуаций — в случае крупномасштабных неоднородностей.

Распространение светового пучка в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + \varepsilon_1(x, y, z) - \frac{1}{R^2} (y^2 + z^2) \right] \quad (1)$$

( $\varepsilon_1$  — случайная часть диэлектрической проницаемости,  $R^2 = d^2/\varepsilon_2$ ,  $d$  — радиус волновода,  $\varepsilon_2$  — разность диэлектрических проницаемостей на оси волновода и вне его) при условии, что  $\varepsilon_1 \ll 1$ ,  $\varepsilon_2 \ll 1$  и что длина световой волны много меньше как размеров неоднородностей, так и размеров пучка, можно описывать параболическим уравнением

$$2ik \frac{\partial E}{\partial x} + \Delta_{\perp} E + k^2 \left[ \varepsilon_1(x, \rho) - \frac{\rho^2}{R^2} \right] E = 0. \quad (2)$$

Из этого уравнения, воспользовавшись марковским приближением случайного процесса [9], можно получить уравнения для функций когерентности второго и четвертого порядка  $\Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) = \langle E(x, \rho_1) E^*(x, \rho_2) \rangle$ ,  $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \langle E(x, \rho_1) E(x, \rho_2) E^*(x, \rho_3) E^*(x, \rho_4) \rangle$  и для флуктуаций интенсивности  $u(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) - \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_3) \Gamma_2(x, \rho_2, \rho_4)$ , а именно:

$$2ik \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} + (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_2 - \frac{k^2}{R^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) \Gamma_2 + ik^3 \pi H(\rho_1 - \rho_2) \Gamma_2 = 0; \quad (3)$$

$$2ik \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} + (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) \Gamma_4 - \frac{k^2}{R^2} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - \rho_4^2) \Gamma_4 + ik^3 \pi F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \Gamma_4 = 0; \quad (4)$$

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) u - \frac{k^2}{R^2} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - \rho_4^2) u = -ik^3 \pi \{ F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) - [H(\rho_1 - \rho_3) + H(\rho_2 - \rho_4)] \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_3) \Gamma_2(x, \rho_2, \rho_4) \}, \quad (5)$$

где

$$\Delta_n = \Delta_{\perp}(\rho_n), \quad H(\rho) = \int \Phi_{\epsilon}(x) [1 - \cos(x\rho)] d^2x,$$

$$F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = H(\rho_1 - \rho_3) + H(\rho_1 - \rho_4) + H(\rho_2 - \rho_3) + H(\rho_2 - \rho_4) - H(\rho_1 - \rho_2) - H(\rho_3 - \rho_4),$$

$\Phi_{\epsilon}(x)$  — трехмерный спектр флуктуаций  $\epsilon_1$  при  $x_x = 0$ .

Уравнение (3), описывающее изменение средней интенсивности, решалось ранее в работе [8], где было показано, что эффективная ширина пучка из-за рассеяния растет при наличии волноводного канала медленнее, чем в однородной среде (пропорционально  $x$  при  $x \gg R$  и  $x^3$  при  $x \ll R$ ). В отличие от уравнения (3), уравнения (4) и (5), описывающие флуктуации интенсивности, точного аналитического решения не имеют.

Будем решать уравнение (5), используя метод возмущений. Предполагая, что  $\Gamma_{40} \gg u \sim \langle \epsilon_1^2 \rangle$ , и заменяя в правой части уравнения (5)  $\Gamma_4$  на  $\Gamma_{40} = \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_3) \Gamma_2(x, \rho_2, \rho_4)$ , где  $\Gamma_{20}$  — решение уравнения (3) при  $H(\rho) = 0$ , будем иметь

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) u - \frac{k^2}{R^2} (\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - \rho_4^2) u = -ik^3 \pi F_1(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \Gamma_{40}. \quad (6)$$

Здесь

$$F_1 = H(\rho_1 - \rho_4) + H(\rho_2 - \rho_3) - H(\rho_1 - \rho_2) - H(\rho_3 - \rho_4).$$

В уравнении (6) перейдем к координатам [10]

$$r_1 = \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4), \quad r_2 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4),$$

$$r_3 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \rho_4), \quad r_4 = (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4),$$

тогда (6) принимает вид

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + 2(\nabla_1 \nabla_4 + \nabla_2 \nabla_3) u - \frac{2k^2}{R^2} (r_1 r_4 + r_2 r_3) u =$$

$$= -i\pi k^3 F_1(r_2, r_3, r_4) \Gamma_{40}(x, r_1, r_2, r_3, r_4), \quad (7)$$

где

$$F_1(r_2, r_3, r_4) = 2 \int \Phi_\varepsilon(x) \cos x r_2 \left[ \cos x r_3 - \cos \frac{x r_4}{2} \right] d^2 x.$$

Уравнение (7) удобно решать, используя преобразование Фурье по координатам  $r_1, r_2$ . Полагая

$$u(x, r_1, r_2, r_3, r_4) = \int \varphi(x, p, q, r_3, r_4) \exp(ipr_1 + iq r_2) d^2 p d^2 q,$$

для  $\varphi$  получим уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left( \frac{p}{k} \nabla_4 + \frac{q}{k} \nabla_3 \right) \varphi - \frac{k^2}{R^2} (r_4 \nabla_p + r_3 \nabla_q) \varphi =$$

$$= -\frac{\pi k^2}{2} \int d^2 q' F_1(q', r_3, r_4) \varphi_0(x, p, q - q', r_3, r_4), \quad (8)$$

решение которого нетрудно найти. Оно имеет вид

$$\varphi(x, p, q, r_3, r_4) = -\pi k^2 \int_0^x d\xi \int d^2 x \Phi_\varepsilon(x) \times$$

$$\times \left\{ \cos \left[ x \left( r_3 \cos \frac{x-\xi}{R} - \frac{qR}{k} \sin \frac{x-\xi}{R} \right) \right] - \cos \left[ \frac{x}{2} \left( r_4 \cos \frac{x-\xi}{R} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{pR}{k} \sin \frac{x-\xi}{R} \right) \right] \right\} \varphi_0 \left( 0, p \cos \frac{x}{R} + \frac{k}{R} r_4 \sin \frac{x}{R}, \right.$$

$$q \cos \frac{x}{R} + \frac{kr_3}{R} \sin \frac{x}{R} - x \cos \frac{\xi}{R}, r_3 \cos \frac{x}{R} - \frac{qR}{R} \sin \frac{x}{k} + \frac{xR}{k} \sin \frac{\xi}{R},$$

$$\left. r_4 \cos \frac{x}{R} - \frac{pR}{k} \sin \frac{x}{R} \right).$$

При  $r_3 = 0, r_4 = 0$  это выражение упрощается:

$$\varphi(L, p, q, 0, 0) = -\pi k^2 R \int_0^L d\xi \int (d^2 x \Phi_\varepsilon(x) \left\{ \cos \left[ \frac{xqR}{k} \sin \xi \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \left[ \frac{xpR}{2k} \sin \xi \right] \right\} \varphi_0(x, p \cos L, q \cos L - x \cos(L-\xi),$$

$$\left. - \frac{qR}{k} \sin L + \frac{xR}{k} \sin(L-\xi), -\frac{p}{k} R \sin L \right), \quad (10)$$

здесь  $L = x/R$  — безразмерная координата.

Воспользовавшись соотношением (10), будем рассчитывать флуктуации интенсивности на оси коллимированного пучка с гауссовым распределением поля в поперечном сечении:

$$E(0, \rho) = A_0 \exp(-\rho^2/2a_0^2), \quad (11)$$

$$\varphi_0(0, \rho, q, r_3, r_4) = \frac{A_0^4 a_0^4}{16\pi^2} \exp\left(-\frac{a_0^2 \rho^2}{8} - \frac{a_0^2 q^2}{2} - \frac{r_3^2}{2a_0^2} - \frac{r_4^2}{8a_0^2}\right).$$

Подставляя (11) в (10), для флуктуаций интенсивности на оси пучка  $u(L, 0, 0, 0, 0) = u(L) = \int d^2 p d^2 q \varphi(L, \rho, q, 0, 0)$  после интегрирования по  $\rho$  и  $q$  получим выражение

$$u(L) = \frac{\pi k^2 R A_0^4}{f^4(L)} \int_0^L d\xi \int d^2 x \Phi_\varepsilon(x) \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{R}{k} \frac{f_1^2(L, \xi)}{f^2(L)} x^2 \sin \xi \right] \right\} \times \quad (12)$$

$$\times \exp \left[ -\frac{a_0^2 \gamma^2 x^2 \sin^2 \xi}{f^2(L)} \right],$$

где

$$f^2(L) = \cos^2 L + \gamma^2 \sin^2 L, \quad f_1^2(L, \xi) = \cos L \cos(L - \xi) + \gamma^2 \sin L \sin(L - \xi),$$

$$\gamma = R/ka_0^2.$$

Дальнейшие вычисления будем проводить, предполагая флуктуации показателя преломления гауссовыми со спектром

$$\Phi_\varepsilon(x) = \pi^{-3/2} \langle \varepsilon_1^2 \rangle l_0^3 \exp(-l_0^2 x^2). \quad (13)$$

После интегрирования выражения (12) по  $x$  имеем

$$u(L) = \frac{\sqrt{\pi} k^2 R A_0^4 \langle \varepsilon_1^2 \rangle l_0}{f^4(L)} \int_0^L d\xi \left\{ \frac{1}{1 + q^2 \sin^2 \xi} - \frac{1 + q^2 \sin^2 \xi}{(1 + q^2 \sin^2 \xi)^2 + q^4 \gamma^{-2} f_1^4 \sin^2 \xi} \right\}, \quad (14)$$

где  $q^2 = q^2(L) = q_0^2 \gamma^2 / f^2(L)$ , а  $q_0^2 = a_0^2 / l_0^2$  — квадрат отношения ширины пучка к размеру неоднородностей.

Рассмотрим частные случаи.

1. Однородная среда.  $\gamma = R/ka_0^2 \rightarrow \infty$ ,  $L = \frac{x}{R} \rightarrow 0$ ;

$$f^2(x) = 1 + x^2/(k^2 a_0^4), \quad f_1^2(x, \xi) = 1 + x(x - \xi)/(k^2 a_0^4).$$

Рассмотрим для простоты флуктуации в прожекторной зоне  $x \ll ka_0^2$ , когда изменением ширины невозмущенного пучка можно пренебречь. Тогда можно положить  $f^2(x) = f_1^2(x, \xi) = 1$ ,  $q^2 \sin^2 \xi = q_0^2 \xi^2 / k^2 a_0^4$ , и флуктуации на оси пучка будут

$$u_{\text{одн}}(x) = \sqrt{\pi} k^2 \langle \varepsilon_1^2 \rangle A_0^4 l_0 R_2 \left[ \arctg \frac{x}{R_2} - \frac{1}{\sqrt{q_0^2 + 4}} \arctg \left( \sqrt{q_0^2 + 4} + \right. \right. \quad (15)$$

$$\left. \left. + q_0 \right) \frac{x}{2R_2} - \frac{1}{\sqrt{q_0^2 + 4}} \arctg \left( \sqrt{q_0^2 + 4} - q_0 \right) \frac{x}{2R_2} \right],$$

где  $R_2 = ka_0 l_0$ . В случае, когда ширина пучка много больше размера неоднородностей,  $q_0 \gg 1$ , пренебрегая малыми членами в соотношении (15), получим

$$u_{\text{одн}}(x) = \sqrt{\pi} k^2 \langle \varepsilon_1^2 \rangle A_0^4 l_0 R_2 \left( \text{arctg} \frac{x}{R_2} - \frac{1}{q_0} \text{arctg} \frac{q_0 x}{R_2} \right). \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что флуктуации при  $x \gg ka_0 l_0$  насыщаются, что связано с пухом рассеянного излучения из пучка\*.

2. Флуктуации в критическом волноводе. В этом случае

$$R = ka_0^2, \quad \gamma = 1, \quad f^2(L) = 1, \quad f_1^2(L, \xi) = \cos \xi, \quad q^2 = q_0^2 = \text{const}$$

и

$$u_{\text{кр}}(L) = \sqrt{\pi} k^2 \langle \varepsilon_1^2 \rangle A_0^4 l_0 R \left\{ \frac{\text{Arctg} \left[ \sqrt{1+q_0^2} \text{tg} L \right]}{\sqrt{1+q_0^2}} - \frac{\text{Arctg} \left[ (1+q_0^2) \text{tg} L \right]}{2+q_0^2} - \frac{L}{2+q_0^2} \right\}. \quad (17)$$

При  $q_0 \gg 1$

$$u_{\text{кр}}(L) = \sqrt{\pi} k^2 \langle \varepsilon_1^2 \rangle A_0^4 l_0 R_2 \left[ \text{Arctg} (q_0 \text{tg} L) - \frac{1}{q_0} \text{Arctg} (q_0^2 \text{tg} L) \right]. \quad (18)$$

Из сравнения выражений (16) и (18) видно, что при  $L \ll 1$ ,  $q_0 \gg 1$  волноводный канал не сказывается на флуктуациях интенсивности. При  $L \gg 1$  флуктуации в волноводном канале больше, чем в однородной среде, и при  $L = \pi/2$  значение  $u_{\text{кр}}$  такое же, как  $u_{\text{одн}}(x \rightarrow \infty)$ . При увеличении расстояния насыщения флуктуаций не происходит. Наиболее быстро флуктуации, как это видно из рис. 1, на котором изображена функция  $u_{\text{кр}}(L)$  при  $q_0 = 10$  и  $q_0 = 100$ , растут вблизи точек  $L = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), а между точками  $L = n\pi$  и  $L = (n+1)\pi$  при больших значениях  $q_0$  величина флуктуаций меняется слабо.

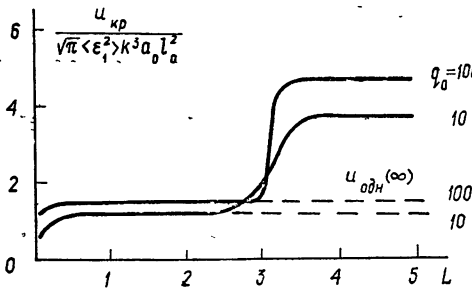


Рис. 1.

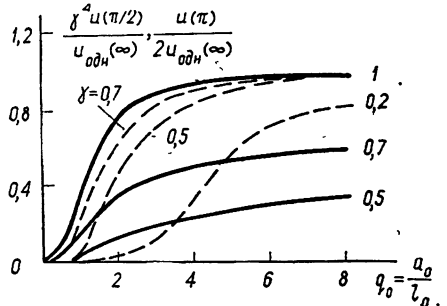


Рис. 2.

\* При больших расстояниях  $x \gg ka_0^2$  когда становится существенным дифракционное уширение пучка, флуктуации снова нарастают.



Качественно этот результат можно пояснить следующим образом.

При  $L = x/ka_0^2 = \frac{\pi}{2}$  выполняется условие  $x \gg ka_0 l_0$ . Поскольку размеры

неоднородностей меньше ширины пучка, рассеянное поле при  $\Delta \leq \frac{\pi}{2}$

уходит из пучка и так же, как в однородной среде, флуктуации вызываются слоем длиной  $R_2 = ka_0 l_0$  от точки наблюдения к началу волновода. Волновод начинает сказываться только при значениях  $L \sim \pi$ . Здесь рассеянное поле из волновода возвращается в пучок, и во флуктуации вносит вклад поле, рассеянное в начале волновода. На расстоянии  $\Delta x \sim R_2$  происходит быстрый рост флуктуаций до уровня, который остается постоянным при  $\pi < L < 2\pi$ . В точке  $L = 2\pi$  флуктуации определяются уже рассеянием как в начале волновода, так и в окрестностях точек  $\Delta = \pi$  и  $L = 2\pi$ .

3. В более общем случае, когда  $\gamma \neq 1$ ,  $R \neq ka_0^2$ , форма невозмущенного пучка изменяется в процессе распространения и зависимость флуктуаций интенсивности от расстояния становится довольно сложной. Мы ограничимся здесь расчетом флуктуаций в точках  $L_1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ , где невозмущенный пучок фокусируется, и  $L_2 = n\pi$ , где пучок расфокусируется до начальной ширины, предполагая, что параметр  $\gamma \leq 1$ . Интегрируя выражение (14), получим

$$u(L_1) = \sqrt{\pi} k^2 A_0^4 \langle \varepsilon_1^2 \rangle l_0 R \frac{L_1}{\gamma^4} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+q_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+q_0^2 + (1/4)\gamma^2 q_0^4}} \right]; \quad (19)$$

$$u(L_2) = \sqrt{\pi} k^2 A_0^4 \langle \varepsilon_1^2 \rangle l_0 R L_2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2 q_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2 q_0^2 + (1/4)\gamma^2 q_0^4}} \right]. \quad (20)$$

Графики зависимости флуктуаций в точках  $L_1 = \pi/2$  и  $L_2 = \pi$  от параметров  $q_0 = a_0/l_0$  и  $\gamma = R/ka_0^2$  представлены на рис. 2. Здесь сплошными линиями изображены функции

$$\begin{aligned} \frac{u(\pi/2)}{\Gamma_{40}(\pi/2)} \frac{A_0^4}{u_{\text{одн}}(\infty)} &= \frac{\gamma^4 u(\pi/2)}{u_{\text{одн}}(\infty)} = \\ &= \frac{\gamma q_0 [(1+q_0^2)^{-1/2} - (1+q_0^2 + (1/4)\gamma^2 q_0^4)^{-1/2}]}{[1 - (1 + (1/4)q_0^2)^{-1/2}]} \end{aligned}$$

— отношение флуктуаций в точке  $L = \pi/2$  к флуктуациям в однородной среде при  $x \rightarrow \infty$ , пунктирными линиями — отношение  $u(\pi/2) u_{\text{одн}}(\infty)$ . Из рис. 2 видно, что с уменьшением  $\gamma$  (это соответствует уменьшению фокусного расстояния  $R$ ) флуктуации уменьшаются, причем больше они ослабляются в точке  $L = \pi/2$ .

Отличие влияния волноводного канала на флуктуации в точках  $L = \pi/2$  и  $L = \pi$  поясняет рис. 3. Процесс рассеяния неоднородностями грубо можно представить как образование новых пучков с радиусами, равными размеру неоднородностей. На рис. 3 показано, как изменяются радиусы невозмущенного пучка (сплошная линия) и радиусы пучков, образовавшихся после неоднородностей (пунктирные линии). Флуктуации в точке  $L_1 = \pi/2$  обусловлены рассеянием на неоднородностях в слое II; флуктуации в точке  $L_2 = \pi$  — рассеянием в слоях I и III. При уменьшении  $\gamma$  уменьшается и радиус пучка в точке  $L_1$  до величины

$a = a_0 \gamma$ . Поэтому и толщина слоя II, в котором происходит насыщение флуктуаций, уменьшается до значения  $\Delta x \sim ka_0 l_0 \gamma$ . Соответственно

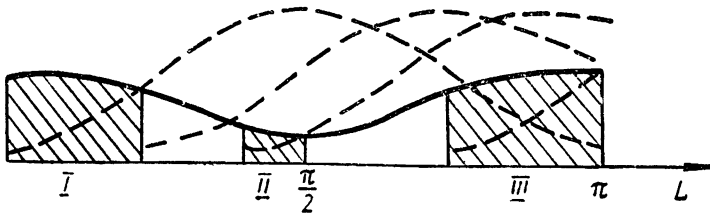


Рис. 3.

уменьшается и уровень флуктуаций в точке  $L_1 = \pi/2$ , и при  $q_0 \gamma \gg 1$ , как это следует из формулы (21), относительные флуктуации в фокусе  $-\gamma^4 u(\pi/2) = \gamma u_{одн}$ . В то же время толщина слоев I и III при уменьшении  $\gamma$  уменьшается медленнее, и при условии  $q_0 \gamma \gg 1$  уровень флуктуаций в точке  $L = \pi$  не зависит от величины  $\gamma$ , в два раза превышая уровень насыщения в однородной среде.

В случае крупномасштабных неоднородностей или малого фокусного расстояния ( $q_0 \gamma \leq 1$ ) значение флуктуаций в точках  $L_1, L_2$  уменьшается, по сравнению с уровнем насыщения в однородной среде. Поскольку при  $q_0 \gamma \leq 1, x \leq ka_0 l_0$  флуктуации в однородной среде еще не насыщаются, удобнее сравнивать флуктуации при прохождении пучком одинакового расстояния в однородной среде и в волноводе. График зависимости отношения флуктуаций в точке  $L = \pi, x = \pi \gamma ka_0^2$  к флуктуациям на том же расстоянии  $x$  в однородной среде представлен на рис. 4.

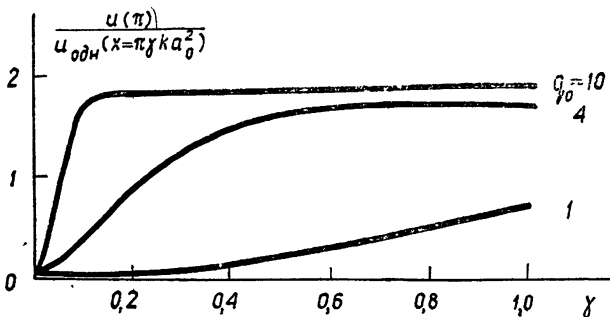


Рис. 4.

Видно, что при уменьшении как величины  $\gamma$ , так и  $q_0$  флуктуации в волноводном канале уменьшаются и при условии  $q_0 \gamma \ll 1$  будут меньше, чем в однородной среде. При этом минимальный размер пучка меньше размера неоднородностей, и флуктуации интенсивности определяются не только дифракцией, но, главным образом, случайными смещениями центра пучка, которые уменьшаются из-за рефракции.

Отметим в заключение, что на рассмотренных эффектах изменения флуктуаций может сказаться селективность волновода, обусловленная ограниченностью его поперечного сечения. Это особенно существенно для рассеяния мелкомасштабными неоднородностями, так как часть рассеянного излучения может уходить из волновода. Нетрудно показать, что условие, при котором рассеянное излучение остается в волноводе, будет  $\epsilon_2 > (kl_0)^{-2}$ . Если же последнее неравенство не выполняется, то

часть рассеянного излучения уходит из волновода, вследствие чего рост флуктуаций в точках  $L_2 = n\pi$  будет происходить медленнее.

Автор благодарен В. И. Татарскому за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. Marcuse, S. E. Miller, Bell System Techn. J., **43**, 1759 (1964).
2. S. E. Miller, Bell System Techn. J., **44**, 2017 (1965).
3. D. Marcuse, Bell System Techn. J., **46**, 149 (1966).
4. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, **55**, 1400 (1968).
5. T. Uchida, IEEE J. Quant. Electr., **QE-6**, 606 (1970).
6. M. Imai, J. Opt. Soc. Amer., **59**, 904 (1969).
7. Y. Miyazaki, Pulse wave propagation in a randomly perturbed light-focusing beam waveguide, Preprint, Nagoya University, Japan, 1971.
8. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 8, 1283 (1971).
9. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **56**, 2106 (1969).
10. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 7, 1061 (1970).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
26 ноября 1971 г.

#### INTENSITY FLUCTUATIONS OF A LIGHT BEAM PROPAGATING IN A WAVEGUIDE CANAL WITH RANDOM INHOMOGENEITIES OF THE REFRACTIVE INDEX

V. V. Vorob'ev

The intensity fluctuations on the axis of a light beam which propagates in a waveguide canal with a parabolic profile of the mean refractive index are calculated on the basis of the equation for the fourth order coherent function. It is shown that the presence of the wave canal may lead both to amplification and weakening of fluctuations as compared with those in a homogeneous medium.

УДК 621.372.8.09

## ФЛУКТУАЦИИ УРОВНЯ И ФАЗЫ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*В. Г. Безродный, И. М. Фукс*

Методом плавных возмущений получены выражения для пространственно-временных корреляционных функций уровня и фазы поля точечного источника в волноводе со статистически неровной границей. Линейные размеры неровностей предполагались большими по сравнению с длинами нормальных волн в невозмущенном волноводе. Рассмотрены вопросы пространственной, временной и частотной корреляции уровня и фазы в предельных случаях больших и малых по сравнению с поперечным размером зоны Френеля линейных размеров неровностей.

1. Флуктуации параметров реальных каналов связи могут оказывать существенное влияние на сверхдальнее распространение сигнала. Одним из наиболее часто встречающихся примеров подобных флуктуаций являются случайные неоднородности стенок волновода (сюда относятся как флуктуации импеданса, так и неровности поверхности). Влияние неоднородностей границ на среднее поле в волноводе в настоящее время достаточно хорошо изучено (см., например, [1-3]). В то же время практически нет работ, посвященных вопросу исследования флуктуационных характеристик поля (интенсивность флуктуаций, корреляционные зависимости). В работах [4, 5] для плоской задачи рассчитаны интенсивности флуктуаций в отдельных модах. При этом не учитывалось влияние поперечного к направлению распространения волны размера неровностей. В работах [6, 7] в предельном случае геометрической оптики (линейный размер неровностей велик по сравнению с поперечным размером зоны Френеля) исследовались вторые моменты флуктуаций амплитуды и фазы (дисперсии флуктуаций, пространственные корреляционные функции, энергетические спектры флуктуаций). Однако и в этом случае влияние поперечного размера неровностей на флуктуационное поле пренебрежимо мало.

В настоящей работе в рамках метода плавных возмущений получены общие выражения для пространственно-временных корреляционных функций уровня и фазы волны при произвольном соотношении между поперечными размерами неровностей и зоны Френеля. Показано, что интенсивность флуктуаций и их корреляционные свойства в общем случае сильно зависят от поперечного размера неоднородностей.

2. Рассмотрим волновод, образованный двумя бесконечными поверхностями, нижняя из которых  $z = 0$  идеально проводящая, верхняя  $z = a + \zeta(r, t)$  — импедансная с приведенным поверхностным импедансом  $\eta$ ,  $r = \{x, y\}$ . Относительно неровностей верхней границы будем предполагать следующее:  $\langle \zeta(r, t) \rangle = 0$ ,  $\langle \zeta^2(r, t) \rangle = \sigma^2$ ,  $\langle \zeta(r, t) \zeta(r + \rho, t + \tau) \rangle = \sigma^2 W(\rho, \tau)$ , угловые скобки означают статистическое усреднение.

Пусть волновод возбуждается вертикально поляризованным точечным электрическим диполем частоты  $\omega_0$  с единичным дипольным моментом, расположенным в точке  $R_0 \{0, 0, z_0\}$ . Как показано в [7], при выполнении условий

$$(k \sigma \sin \psi_n)^2 \ll 1; \quad (1)$$

$$kl_{x,y} \cos \psi_n \gg 1, \quad (2)$$

где  $k = \omega_0/c$ ,  $c$  — скорость света,  $\psi_n$  — характерный угол скольжения  $n$ -й нормальной волны невозмущенного волновода,  $l_{x,y}$  — линейные размеры неровностей границы в направлениях осей  $x$  и  $y$ , деполяризацией поля за счет рассеяния на неоднородностях можно пренебречь, и задача сводится к отысканию функции Грина скалярного волнового уравнения

$$\Delta G(R, R_0, t) + k^2 G(R, R_0, t) = -4\pi\delta(R - R_0) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 \Big|_{z=0}, \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= ik\eta G \Big|_{z=a+\zeta(r,t)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для исследования корреляционных зависимостей поля в волноводе применим метод плавных возмущений (метод Рытова), успешно использующийся в теории объемного рассеяния (см. монографии [8, 9]). Для этого представим поле в виде  $G = e^\Phi$ , где  $\Phi$  — комплексная фаза, и применим метод возмущений к комплексной фазе, разлагая ее в ряд по степеням  $\zeta$ :

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

Ограничиваясь нулевым и первым членами разложения, легко выразить флуктуационную добавку  $\Phi_1$  к комплексной фазе через уровень  $\chi = \ln \frac{A}{A_0}$  и фазу  $S = \varphi - \varphi_0$ :  $\Phi_1 = \chi + iS$ . Подставляя  $G = e^\Phi$  в (3), (4), разлагая полученные выражения по степеням  $\zeta$  и удерживая линейные относительно  $\zeta$  члены, получим для  $u = G_0 \Phi_1$  уравнение

$$\Delta u(R, R_0, t) + k^2 u(R, R_0, t) = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \Big|_{z=0}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - ik\eta u &= -\zeta \left. \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} G_0 - ik\eta G_0 \right\} \right|_{z=a}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G_0$  — функция Грина невозмущенного волновода, удовлетворяющая граничным условиям (4) при  $\zeta = 0$ .

Используя формулу Грина, из уравнения (5) с граничным условием (6) получим для  $\Phi_1$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi_1(R, R_0, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{z_1=a} d r_1 \frac{G_0(R, r_1)}{G_0(R, R_0)} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[ \frac{\partial}{\partial z_1} G_0(r_1, R_0) - \right. \\ &\quad \left. - ik\eta G_0(r_1, R_0) \right] \zeta(r_1, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Функция Грина невозмущенного волновода может быть представлена в виде разложения по нормальным волнам:

$$G_0(R, R_0) = \sum_n G_{0n} = \frac{2\pi}{i} \sum_n \frac{1}{q_n} \frac{dq_n}{da} \cos q_n z \cos q_n z_0 H_0^{(1)}(x_n D), \quad (8)$$

где  $a$  — ширина волновода,  $D = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от источника до точки наблюдения ( $y \ll x$ ),  $x_n = \sqrt{k^2 - q_n^2}$  — продольное волновое число  $n$ -й нормальной волны,  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля 1-го рода,  $q_n$  — поперечные волновые числа, удовлетворяющие уравнению

$$q_n \operatorname{tg} q_n a = -ik\eta. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (7), получим выражение для  $\Phi_1$  в виде двойной суммы по индексам  $n$  и  $m$ . Каждый член этой суммы описывает рассеяние из моды с номером  $n$  в моду с номером  $m$ . Если выполнено условие

$$kl_x \cos \psi_n \gg N_{\max}, \quad (10)$$

где  $N_{\max} = \left[ \frac{ak}{\pi} \right]$  — целая часть  $\frac{ak}{\pi}$  (число распространяющихся мод в волноводе с идеальными границами), рассеянием из моды в моду можно пренебречь и сумма диагонализруется. Считая, что точка наблюдения находится в волновой зоне,

$$kD \cos \psi_n \gg 1, \quad (11)$$

используем асимптотику функций Ханкеля при больших значениях аргумента. При этом (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi_1(R, R_0, t) &= \frac{2i}{G_0(R, R_0)} \sum_n \frac{1}{x_n} \left( \frac{dq_n}{da} \right)^2 \cos q_n z_0 \cos q_n z \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \frac{\exp \{ i x_n \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + i x_n [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2} \}}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2) [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]}} \times \\ &\times \zeta(x_1, y_1, t). \end{aligned} \quad (12)$$

При выполнении условия

$$\frac{kl_y^2 \cos \psi_n}{x} \gg \frac{1}{(kl_y \cos \psi_n)^2} \quad (13)$$

показатель экспоненты в подынтегральном выражении (12) можно разложить в ряд по степеням  $y_1/x_1$ ,  $(y - y_1)/(x - x_1)$  и ограничиться квадратичными членами. Заметим, что неравенство (13) при замене  $|x_n| \approx \approx k \cos \psi_n$  на  $k$  совпадает с известным условием применимости метода плавных возмущений к задачам объемного рассеяния. Полагая в предэкспоненциальных множителях в (12)  $y_1 = y - y_1 = 0$  и ограничивая интегрирование по  $x_1$  пределами  $[0, x]$ , что соответствует пренебрежению рассеянием назад, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1(R, R_0, t) &= \frac{2i}{G_0(R, R_0)} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{\exp(i x_n D)}{x_n} \left( \frac{dq_n}{da} \right)^2 \cos q_n z_0 \times \\ &\times \cos q_n z \int_0^x \frac{dx_1}{\sqrt{x_1(x - x_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \exp \left[ i \frac{x_n x (y_1 - x_1(y/x))^2}{2x_1(x - x_1)} \right] \times \\ &\times \zeta(x_1, y_1, t). \end{aligned} \quad (14)$$

В формуле (14) суммирование можно проводить только до членов с номером  $N_0$ , где  $N_0$  — номер последней незатухающей на расстоянии  $D$  моды ( $\text{Im } \kappa_{N_0} \leq 1/D$ ). Условие (13) допускает два предельных случая: а) линейный размер неровностей  $l_y$  велик по сравнению с поперечным размером зоны Френеля  $\left(\frac{kl_y^2 \cos \psi_n}{x} \gg 1\right)$  — случай геометрической оптики); б) в зоне Френеля находится много неровностей  $\left(\frac{kl_y^2 \cos \psi_n}{x} \ll 1\right)$ . В дальнейшем при исследовании  $\Phi_1$  будем рассматривать оба эти предельных случая.

3. Используя выражение (14), составим коррелятор  $J(R, R', \tau) \equiv \langle \Phi_1(R, R_0, t) \Phi_1^*(R', R_0, t + \tau) \rangle$ . Выражая корреляционную функцию неровностей через ее пространственный спектр:

$$W(\rho, \tau) = \int d\alpha \widetilde{W}(\alpha, \tau) e^{i\alpha\rho},$$

и выполняя интегрирование по поперечным координатам  $y_1, y_2$ , получим для  $J$  следующее выражение:

$$J(R, R', \tau) = \frac{\sigma^2}{xx'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)_1 \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0m}}{\partial a} \right)_2^* \times \\ \times \int_0^x dx_1 \int_0^{x'} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_x d\alpha_y \widetilde{W}(\alpha_x, \alpha_y, \tau) \exp \left\{ -i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x - x_1)}{2 \kappa_n x} + \right. \\ \left. + i \frac{\alpha_y^2 x_2 (x' - x_2)}{2 \kappa_m^* x'} - i \alpha_y \left( x_1 \frac{y}{x} - x_2 \frac{y'}{x'} \right) + i \alpha_x (x_2 - x_1) \right\}. \quad (15)$$

Здесь  $R = \{x, y, z\}$ ,  $R' = \{x', y', z'\}$ , индексом «1» обозначены функции с аргументом  $R$ , индексом «2» — функции с аргументом  $R'$ .

Произведем в (15) замену переменных  $x_2 = x_1 + \xi$ . При выполнении ранее наложенных ограничений и условий

$$l_x \ll x; \quad (16)$$

$$kl_y^2 \cos \psi_n \gg l_x \quad (17)$$

можно всюду пренебречь  $\xi$  по сравнению с  $x_1$  и распространить пределы интегрирования по  $\xi$  до бесконечности. В результате приходим к выражению

$$J(R, R', \tau) = \frac{2\pi\sigma^2}{xx'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)_1 \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0m}}{\partial a} \right)_2^* \times \\ \times \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y \widetilde{W}(0, \alpha_y, \tau) \exp \left\{ -i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x - x_1)}{2 \kappa_n x} + \right. \\ \left. + i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x' - x_1)}{2 \kappa_m^* x'} - i \alpha_y x_1 \left( \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'} \right) \right\}. \quad (18)$$

Аналогичным образом для  $J'(R, R', \tau) \equiv \langle \Phi_1(R, R_0, t) \Phi_1(R', R_0, t + \tau) \rangle$  получим

$$\begin{aligned}
 J'(R, R', \tau) &= \frac{2\pi\sigma^2}{xx'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)_1 \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0m}}{\partial a} \right)_2 \times \\
 &\times \int_0^x dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y \widetilde{W}(0, \alpha_y, \tau) \exp \left\{ -i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x - x_1)}{2x_n x} - \right. \\
 &\quad \left. - i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x' - x_1)}{2x_m x'} - i \alpha_y x_1 \left( \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Корреляторы уровня и фазы могут быть выражены через  $J$  и  $J'$ :

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \langle \chi_1 \chi_2 \rangle \\ \langle S_1 S_2 \rangle \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ J \pm J' \}, \\
 \langle \chi_1 S_2 \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ J' - J \}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (18), (19) в (20), получим окончательное выражение для пространственно-временных корреляционных функций уровня и фазы:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \langle \chi_1 \chi_2 \rangle \\ \langle S_1 S_2 \rangle \\ \langle \chi_1 S_2 \rangle \end{aligned} \right\} &= \frac{2\pi\sigma^2}{xx'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_y \widetilde{W}(0, \alpha_y, \tau) \int_0^x dx_1 \exp \left[ i \alpha_y x_1 \left( \frac{y}{x} - \frac{y'}{x'} \right) \right] \times \\
 &\times \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Re}} \left\{ \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)_1 \exp \left[ -i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x - x_1)}{2x_n x} \right] \right\} \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left\{ \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0m}}{\partial a} \right)_2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times \exp \left[ -i \frac{\alpha_y^2 x_1 (x' - x_1)}{2x_m x'} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

4. Рассмотрим выражения для дисперсий флуктуаций уровня и фазы и функции их взаимной корреляции в одной точке. Для этого положим в формуле (21)  $y' = y = \tau = 0$ ,  $x' = x = D$ . В случае геометрической оптики,

$$kl_y^2 \cos \phi_n / D \gg 1, \tag{22}$$

показатели экспонент малы и экспоненты могут быть заменены единицами. В результате приходим к выражению (ср. с [6, 7])

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle \\ \langle S^2 \rangle \\ \langle \chi S \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{l_x}{D} \sigma^2 \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Re}} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right) \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right), \tag{23}$$

где  $l_x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\xi W(\xi, 0, 0)$ .

При выполнении условия (22) рассеивающей областью является зона Френеля, поперечный размер которой  $\sqrt{D/k \cos \phi_n}$  мал по сравнению с поперечным размером неровностей  $l_y$ . В силу этого обстоятельства последовательные отражения волн, формирующих моды, от неровной границы волновода происходят так же, как и от плоскости, смещенной по высоте на величину  $\zeta(r, t)$  от своего среднего положения  $z = a$ . Флуктуации уровня и фазы определяются изменением геометрической длины



пути каждой моды и последующей интерференцией мод. При этом флуктуации во всех модах полностью скоррелированы.

В обратном предельном случае, когда  $l_y$  мало по сравнению с поперечным размером зоны Френеля, экспоненты в (21) быстро осциллируют. При выполнении условия

$$\sqrt{D/kl_y^2 \cos \psi_n} \gg N_0 \sqrt{N_{\max}} \quad (24)$$

двойная сумма диагонализруется, и мы приходим к следующим выражениям:

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle S^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\Phi_1|^2 \rangle = \frac{l_x}{D} \frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=0}^{N_0} \left| \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right|^2, \quad (25)$$

$$\langle \chi S \rangle \equiv 0.$$

Условие (24) означает, что корреляция между модами отсутствует. Действительно, в отличие от предельного случая геометрической оптики, поперечный размер рассеивающей области для  $n$ -й моды определяется углом шириной  $(|x_n|/l_y)^{-1}$  индикатрисы рассеяния в плоскости  $(xy)$  и по порядку величины равен  $D/|x_n|/l_y$ . Отличие поперечных размеров рассеивающих областей для двух соседних мод —  $\Delta y \approx D \Delta x / |x_n|^2 l_y \approx D/kl_y \cos \psi_n N_{\max}$ . Моды будут нескоррелированы, если  $\Delta y \gg l_y$ , что и приводит к неравенству (24).

При выполнении условия (24) величина флуктуирующей добавки  $\Phi_1$  к комплексной фазе обусловлена суммарным действием большого числа нескоррелированных рассеивателей и, следовательно, распределена по нормальному закону. В результате ортогональные компоненты  $\chi$  и  $S$  комплексного вектора  $\Phi_1$  распределены также по нормальному закону. Дисперсии  $\chi$  и  $S$  в силу их некоррелированности равны и составляют половину интенсивности флуктуаций  $\Phi_1$ .  $\langle |\Phi_1|^2 \rangle$  за счет некогерентного сложения интенсивностей в отдельных модах существенно убывает по сравнению со случаем геометрической оптики.

5. Перейдем к рассмотрению вопроса о пространственной корреляции уровня и фазы, рассматривая в отдельности случаи поперечного и продольного разнесения точек наблюдения.

а) Поперечное разнесение ( $x' = x, y' = -y, \tau = 0$ ). В обоих предельных случаях (22) и (24) для коэффициентов поперечной корреляции уровня и фазы из формулы (21) следует

$$K_{\chi\chi}^{\perp} = K_{SS}^{\perp} = F(y)/F(0), \quad (26)$$

где

$$F(y) = \frac{1}{xy} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{2y} d\eta W(\xi, \eta, 0), \quad (27)$$

коэффициенты корреляции определены соотношениями

$$K_{\chi\chi} \equiv \frac{\langle \chi_1 \chi_2 \rangle}{\sqrt{\langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2^2 \rangle}}, \quad K_{SS} = \frac{\langle S_1 S_2 \rangle}{\sqrt{\langle S_1^2 \rangle \langle S_2^2 \rangle}}. \quad (28)$$

Из формул (26), (27) видно, что коэффициент поперечной корреляции имеет одинаковый вид для уровня и для фазы, не зависит от ширины волновода и импеданса его границ и определяется только корреляционной функцией неровностей верхней стенки. Коэффициент взаимной

корреляции уровня и фазы в случае геометрической оптики выражается той же формулой (26). В обратном предельном случае уровень и фаза не коррелируют между собой. Из формул (26) и (27) следует, что интервал поперечной корреляции уровня и фазы по порядку величины равен поперечному размеру неровностей  $l_y$ .

В случае геометрической оптики (см. [7]) этот результат можно объяснить тем, что при разнесениях  $2y \gg l_y$  в рассеивающие области для каждой точки наблюдения (ширина их — порядка поперечного размера зоны Френеля  $\sqrt{x/|x_n|}$ ) попадают некоррелирующие участки неровной поверхности. В обратном предельном случае рассеивающая область имеет ширину порядка  $x/|x_n|l_y$  и включает в себя большое число неровностей. За счет этого происходит усреднение рассеянного поля по большому числу независимых рассеивателей, и для декорреляции полей в разнесенных точках достаточно появления у рассеивающих областей пересекающегося участка с поперечным размером  $\approx l_y$ .

б) Продольное разнесение ( $y' = y = \tau = 0, x = D, x' = D'$ ). Удобно вместо  $D$  и  $D'$  ввести приведенное расстояние  $D = \frac{D' + D}{2}$  и относительное разнесение  $d = \frac{D' - D}{2} \geq 0$ . В случае геометрической оптики (условие (22)) для коэффициентов продольной корреляции из формулы (21) следует (ср. с [7]):

$$K_{xx}^{\parallel} = K_{ss}^{\parallel} = K_{xs}^{\parallel} = \sqrt{\frac{D-d}{D+d}} \quad (29)$$

Как и при поперечном разнесении, коэффициент корреляции в этом случае не зависит от ширины волновода и импеданса его границ. Интервал корреляции, однако, значительно превосходит интервал корреляции при поперечном разнесении, является величиной порядка  $D$  и не зависит от длины неровностей. Такой результат объясняется тем, что при малых по сравнению с  $D$  разнесениях в точки  $R$  и  $R'$  приходит поле, рассеянное фактически на одних и тех же участках случайной поверхности, и поэтому для его существенной декорреляции точки приема необходимо разнести на расстояние  $\approx D$ .

В обратном предельном случае (неравенство (24)) из формулы (21) получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi_1 \chi_2 \rangle, \langle S_1 S_2 \rangle \\ \langle \chi_1 S_2 \rangle \end{aligned} \right\} = \pm \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N_0} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)_1 \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)_2^* Q_n(d), \quad (30)$$

где

$$Q_n(d) = \left( \frac{i\pi^3 x_n}{D^2 d} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_y}{\alpha_y} \widehat{W}(0, \alpha_y, 0) \Phi \left( \alpha_y \sqrt{\frac{d}{ix_n}} \right); \quad (31)$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}. \quad (32)$$

Из структуры формул (30), (31) видно, что интервалы продольной корреляции полей разных мод, вообще говоря, различны. Интервал корреляции в  $n$ -й моде ( $\approx |x_n|l_y^2$ ) значительно меньше  $D$ , но по-прежнему существенно превосходит  $l_{x,y}$ . Такая величина продольного интервала корреляции определяется величиной разнесения, которое необходи-

мо для того, чтобы приращение поперечного размера рассеивающей области  $\Delta y \approx 2d/|x_n|L_y$  стало сравнимым с  $L_y$ . В случае, когда до приемника доходит только одна мода, можно из формул (30), (31) получить следующие простые асимптотики для коэффициентов продольной корреляции:

$$K_{xx}^{\parallel} = K_{ss}^{\parallel} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{10} \frac{d^2}{|x|^2 L_y^4} & (d \ll |x| L_y^2) \\ \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{|x| L_y^2}{d} \ln \frac{d}{|x| L_y^2} & (|x| L_y^2 \ll d \ll D) \end{cases}, \quad (33)$$

$$K_{xs}^{\parallel} \equiv 0.$$

Здесь характерные размеры неровностей определены соотношениями

$$l_y \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\eta W(0, \eta, 0), \quad 1/L_y^4 \equiv \left. \frac{\partial^4 W(\xi, \eta, \tau)}{\partial \eta^4} \right|_{\xi = \eta = \tau = 0}.$$

При оценках мы считали, что  $l_y \approx L_y$ , хотя в общем случае они могут существенно отличаться.

6. Временные корреляционные функции флуктуаций уровня и фазы получаются из формулы (21) при  $R' = R$ . Введем нормированные энергетические спектры флуктуаций, определив их как преобразование Фурье соответствующих временных коэффициентов корреляции. При этом в обоих предельных случаях (22) и (24) вид спектра флуктуаций уровня и фазы оказывается одинаковым и зависит только от явного вида пространственно-временной корреляционной функции неровностей границы:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\tau W(\xi, 0, \tau) e^{i\omega\tau}}{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi W(\xi, 0, 0)}. \quad (34)$$

Выражение (34) было получено в работе [7] только в предельном случае геометрической оптики. Видно, что этот результат имеет более широкую область применимости. Если неровности движутся как целое со скоростью  $V = \{V_x, V_y\}$ , из (34) следует

$$S(\omega) = \frac{1}{V_y} \widetilde{W}_y \left( \frac{\omega}{V_y} \right), \quad (35)$$

где  $\widetilde{W}_y(\alpha_y) \equiv (2\pi/L_x) \widetilde{W}(0, \alpha_y)$ . Ширина спектра  $\Delta\omega \approx V_y/l_y$  определяется временем  $\Delta\tau \approx L_y/V_y$  смены реализаций случайной поверхности на трассе, происходящей за счет поперечного движения границы, и не зависит от продольной составляющей скорости  $V_x$ . При  $V_y \rightarrow 0$   $S(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$

7. Для исследования вопроса о корреляции флуктуаций уровня и фазы на разных частотах введем функции частотной корреляции, положив в (21)  $R' = R$ ,  $\tau = 0$  и приписывая величинам с индексом  $n$  частоту  $\omega$ , а величинам с индексом  $m$  частоту  $\omega'$ . Нетрудно видеть, что в случае геометрической оптики коэффициенты частотной корреляции уровня, фазы и их перекрестная тождественно равны единице. В обратном предельном случае получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi^{(1)} \chi^{(2)} \rangle, \langle S^{(1)} S^{(2)} \rangle \\ \langle \chi^{(1)} S^{(2)} \rangle \end{aligned} \right\} = \pm \sigma^2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N_0} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)^{(1)} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial a} \right)^{(2)*} P_n(\Delta \omega), \quad (36)$$

где

$$P_n(\Delta \omega) = \sqrt{\frac{2 i \pi^3 |x_n^{(1)}|^3 c}{k^{(1)} D^3 \Delta \omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_y}{\alpha_y} \widetilde{W}(0, \alpha_y, 0) \Phi \left( \alpha_y \sqrt{\frac{k^{(1)} D \Delta \omega}{8 i |x_n^{(1)}|^3 c}} \right) \times \\ \times \exp \left( -i \frac{\alpha_y^2 k^{(1)} D \Delta \omega}{8 |x_n^{(1)}|^3 c} \right), \quad (37)$$

$\Delta \omega \equiv \omega' - \omega$ ,  $\Phi(z)$  определяется формулой (32), индекс (1) означает зависимость от частоты  $\omega$ , индекс (2)—зависимость от  $\omega'$ .

Как следует из формул (36), (37), интервал частотной корреляции полей в  $n$ -й моде равен по порядку величины  $\frac{|x_n|^3 l_y^2 c}{kD} \ll \omega$ . Такое значение интервала частотной корреляции определяется различием поперечных размеров рассеивающих областей  $\Delta y \approx \frac{kD \Delta \omega}{|x_n|^3 l_y c}$  для частот  $\omega$  и  $\omega'$ . Декорреляция наступает, когда  $\Delta y$  становится порядка  $l_y$ .

В случае, когда до приемника доходит только одна мода, можно получить следующие простые асимптотики коэффициентов частотной корреляции:

$$K_{xx}^{\omega} = K_{ss}^{\omega} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{15L_y^4} \left( \frac{k^{(1)} D \Delta \omega}{4 |x^{(1)}|^3 c} \right)^2 & \left( \Delta \omega \ll \frac{|x|^3 l_y^2 c}{kD} \right) \\ \sqrt{\frac{\pi |x^{(1)}|^3 l_y^2 c}{4 k^{(1)} D \Delta \omega}} & \left( \Delta \omega \gg \frac{|x|^3 l_y^2 c}{kD} \right) \end{cases}, \quad (38)$$

$$K_{xs}^{\omega} \equiv 0.$$

8. В качестве иллюстрации приведем результат расчета стандарта отклонения фазы  $\sqrt{\langle S^2 \rangle}$  поля СДВ в волноводном канале Земля—ионосфера в условиях одномодового распространения в дневное время на расстоянии 2500 км от передатчика. При расчете использовались характеристики нормальных волн частоты  $f = 15$  кГц при  $N/\nu_{\text{эфф}} = 10^{-5}$  сек·см<sup>-3</sup> ( $N$ —концентрация,  $\nu_{\text{эфф}}$ —эффективная частота соударений электронов в нижней ионосфере), приведенные в работе [10]. Для простоты предполагалось, что неровности нижней границы ионосферы изотропны, т. е.  $l_x = l_y = l$ . При характерных высотах  $\sigma = 1$  км и линейных размерах неоднородностей  $l = 200$  км и  $l = 500$  км стандарт отклонения фазы равен соответственно 1,0° и 1,6°.

В заключение отметим, что, поскольку в точках, где функция  $G_0$  обращается в нуль, нарушаются условия применимости метода возмущений ( $\Phi_1 \rightarrow \infty$ ), полученные результаты пригодны только для областей волновода, находящегося вдали от точек минимума функции  $G_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 12, № 4, 489 (1966).
2. А. Д./Лапин, Тр. VI Всесоюзной акуст. конференции, А-1-4, М., 1968.
3. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1521 (1969).
4. М. А. Исакович, Акуст. ж., 3, № 1, 37 (1957).

5. А. Д. Лапкин, Акуст. ж., 4, № 3, 267 (1958).
6. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Акуст. ж., 17, № 4, 521 (1971).
7. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 1, 73 (1972).
8. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
9. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
10. Я. Л. Альперт, О распространении электромагнитных волн низкой частоты над земной поверхностью, изд. АН СССР, М., 1955.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
24 января 1972 г

## FLUCTUATIONS IN THE LEVEL AND PHASE OF A FIELD IN A WAVEGUIDE WITH A RANDOM BOUNDARY

*V. G. Bezrodnyi, I. M. Fuks*

Expressions are obtained by the smooth perturbation method for spatial-time correlation functions of the level and phase of a point source field in a waveguide with a statistically rough boundary. Linear dimensions of irregularities are assumed larger than the normal wavelengths in an unperturbed waveguide. The problems of spatial time and frequency correlation of the level and the phase are considered in the limiting cases of linear irregularity dimensions being large and small as compared with the transverse dimensions of the Fresnel zone.

---

УДК 621.372.8.09

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКАХ ИЗ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ СО СПИРАЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

*А. В. Безуглый, В. П. Шестопалов*

Методом, обобщающим [8, 9], получено решение задач дифракции плоской электромагнитной волны на круговом цилиндре со спиральной щелью, отдельной решетке из таких цилиндров и многослойной решетке спиральных цилиндров.

Решетки из круговых цилиндров со спиральной щелью являются двумерно-периодическими структурами. В общем случае задача дифракции на двумерно-периодической решетке является векторной, и для произвольного соотношения между периодами структуры и длиной падающей волны пока не существует эффективного метода ее решения. В настоящей работе метод, предложенный Тверским [8, 9] для скалярной задачи дифракции на решетке из круговых цилиндров, развит на случай векторной задачи. С помощью функции Грина поле, рассеянное решеткой цилиндров с произвольными граничными условиями импедансного типа, представлено через «амплитуды рассеяния»  $G^e, G^h$  для одного цилиндра в решетке, и затем получена система функциональных уравнений, связывающих  $G^e, G^h$  с амплитудами рассеяния  $g^e, g^h$  для изолированного цилиндра. Система функциональных уравнений, учитывающая эффект взаимодействия между спиральными цилиндрами через набор плоских гармоник решетки, включает быстро сходящийся оператор. Разложение  $G^e, G^h$  и  $g^e, g^h$  в ряды Фурье приводит непосредственно к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, связывающей искомые коэффициенты разложений  $G^e, G^h$  с коэффициентами амплитуд  $g^e, g^h$ .

### 1. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРЕ СО СПИРАЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

Пусть на цилиндр со спиральной щелью падает плоская волна

$$\begin{Bmatrix} E_z^0 \\ H_z^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{Bmatrix} \exp(ikz \sin \varphi_0) \exp(ig_0 r \cos(\theta - \theta_0)) \quad (1)$$

(временной множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и в дальнейшем опущен). Волновой вектор  $k$  образует угол  $\varphi_0$  с плоскостью  $XOY$ , и его проекция  $g_0 = k \cos \varphi_0$  на плоскость  $XOZ$  составляет угол  $\theta_0$  с осью  $OX$  (рис. 1).

Задача о трехмерном рассеянии плоской волны спиральным цилиндром определяется решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим эквивалентным граничным условиям вида [3]. Записывая поля и подчиняя их граничным условиям, в рэлеевском приближении ( $g_0 a \ll 1$ ) получим для коэффициентов рассеянного поля следующие выражения:

для волны типа  $E$ .

$$a_0^e = -\frac{i \pi \alpha_0 \Delta^2}{L^+} \cos^2 \varphi_0 + O(\delta), \quad a_{\pm 1}^e = \frac{1}{4} \frac{i \pi \alpha_0 (ka)^2}{L^+ L^-} \sin^2 \varphi_0 + O(\delta), \quad (2)$$

$$b_0^e = -\frac{1}{2} \frac{\pi \alpha_0}{L^+} \Delta ka \cos^2 \varphi_0 + O(\delta), \quad b_{\pm 1}^e = \pm \frac{1}{4} \frac{\pi \alpha_0 (ka)^2}{L^+ L^-} \sin \varphi_0 + O(\delta);$$

для волны типа H

$$a_0^h = \frac{1}{2} \frac{\pi \beta_0}{L^+} \Delta ka \cos^2 \varphi_0 + O(\delta), \quad a_{\pm 1}^h = \mp \frac{1}{4} \pi \beta_0 \frac{(ka)^2 \sin \varphi_0}{L^+ L^-} + O(\delta), \quad (3)$$

$$b_0^h = -\frac{1}{4} i \pi \beta_0 \frac{(ka)^2}{L^+} \cos^2 \varphi_0 + O(\delta), \quad b_{\pm 1}^h = \frac{i}{4} \frac{\pi \beta_0 (ka)^2}{L^+ L^-} + O(\delta),$$

где

$$\Delta = \frac{l}{2\pi a}, \quad L^\pm = 1 - \Delta \ln^\pm = 1 - \Delta \ln \frac{1 \pm \cos \frac{\pi d}{l}},$$

$$\delta = [(ka)^2 + \Delta ka] [(ka)^2 + \Delta^2 + \Delta ka + \varepsilon], \quad \varepsilon = \frac{d^2(l-d)^2}{l^4}.$$

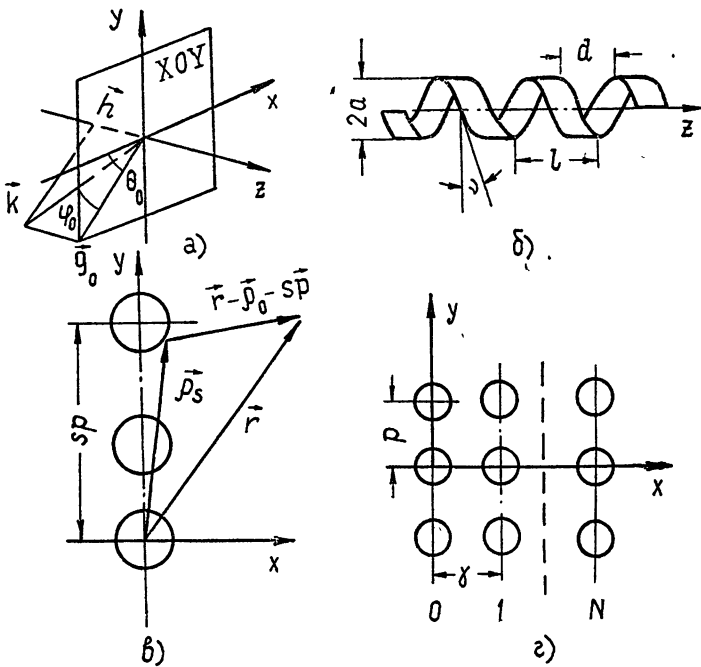


Рис. 1.

При построении решения задачи о рассеянии плоской волны решеткой спиралью удобно пользоваться не рассеянными полями, а амплитудами рассеяния. Они представляют собой угловое (по углу  $\theta$ ) распределение поля в дальней зоне ( $g_0 r \gg 1$ ), нормированного на множитель

$$\left( \frac{2}{\pi i g_0 r} \right)^{1/2} \exp(i g_0 r). \quad (4)$$

Их разложения в ряды Фурье имеют следующий вид:

для волны типа  $E$

$$g^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^e \exp(in(\theta - \theta_0)), \quad \tilde{g}^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^e \exp(in(\theta - \theta_0)); \quad (5)$$

для волны типа  $H$

$$g^h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^h \exp(in(\theta - \theta_0)), \quad \tilde{g}^h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^h \exp(in(\theta - \theta_0)). \quad (6)$$

## 2. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ ИЗ ЦИЛИНДРОВ СО СПИРАЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

Пусть со стороны отрицательных значений  $x, y, z$  (рис. 1) на решетку падает плоская волна (1). Будем искать полное поле всюду в пространстве в виде суммы падающего и дифрагированного полей. Дифрагированное поле  $E_z^d, H_z^d$  представим как суперпозицию волн, рассеянных каждым спиральным цилиндром в решетке:

$$H_z^d(\mathbf{r}, z) = e^{ihz} H_z^d(\mathbf{r}) = e^{ihz} \sum_{s=-\infty}^{\infty} H_{zs}^d(\mathbf{r} - s\mathbf{p}), \quad (7)$$

$$E_z^d(\mathbf{r}, z) = e^{ihz} \sum_{s=-\infty}^{\infty} E_{zs}^d(\mathbf{r} - s\mathbf{p}).$$

Следует отметить, что цилиндр со спиральной щелью представляет собой структуру, неоднородную в направлении оси  $z$ , и в общем случае задача о рассеянии волны решеткой является трехмерной. Однако ограничения, налагаемые на соотношения между длиной волны и периодом спирали, вследствие использования усредненных граничных условий, позволяют поставить ей в соответствие некоторую однородную по оси  $OZ$  структуру, в которой при  $l/\lambda \ll 1$  свойства спирального цилиндра сохранены. Это дает возможность свести трехмерную задачу к двумерной.

Применим теорему Грина к парам функций  $E_{zs}^d(\rho_s), J(\mathbf{r}, \rho_s)$  и  $H_{zs}^d(\rho_s), J(\mathbf{r}, \rho_s)$ , где  $J$  — функция Грина,  $J(\mathbf{r}, \rho_s) = (i/4) H_0^{(1)}(g_0 | \mathbf{r} - \rho_s |)$ . Тогда, используя формулу суммирования Пуассона, получим представление рассеянного поля по плоским гармоникам решетки [8]:

$$H_z^d(\mathbf{r}, z) = 2 \exp(ikz \sin \varphi_0) \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} C_{\mu} G^{h\pm} H_{z\mu}^{\pm}, \quad (8)$$

$$E_z^d(\mathbf{r}, z) = 2 \exp(ikz \sin \varphi_0) \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} C_{\mu} G^{e\pm} E_{z\mu}^{\pm},$$

где

$$H_{z\mu}^{\pm} = E_{z\mu}^{\pm} = \exp[\pm ig_0 r \cos(\theta - \theta_{\mu})], \quad C_{\mu} = (g_0 p \cos \theta_{\mu})^{-1},$$

$\sin \theta_{\mu} = \sin \theta_0 + 2\pi\mu/g_0 p$ ,  $\theta_{\mu}$  — углы излучения дифракционных гармоник; функции  $G^{e\pm}, G^{h\pm}$  — амплитуды поля, рассеянного отдельным цилиндром в решетке. Для области  $x > a$   $G^+ = G(\theta_{\mu}, \theta_0)$ , для области  $x < -a$   $G^- = G(\pi - \theta_{\mu}, \theta_0)$ .

Преобразуем полные поля  $E_z = E_z^0 + E_z^d$ ,  $H_z = H_z^0 + H_z^d$ . Прибавим и вычтем из них поля, рассеянные центральным цилиндром (ось которого совмещена с осью  $OZ$ )  $E_{z0}^d, H_{z0}^d$ . Тогда, используя вновь формулу Грина, для полного поля получим следующие выражения:

$$H_z(\mathbf{r}) = H_z^0 + 2SC_{\mu} H_{z\mu} G^h(\theta_{\mu}, \theta_0) + H_{z0}^d, \quad (9)$$



$$E_z(\mathbf{r}) = E_z^0 + 2SC_\mu E_{z\mu} G^e(\theta_\mu, \theta_0) + E_{z0}^d,$$

где оператор  $S$  представляет разность дискретного и непрерывного спектров плоских волн, т. е.

$$Sf(\mu) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} f(\mu) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) d\mu.$$

Полное поле (9) состоит из начальной плоской волны  $E_z^0, H_z^0$ , цилиндрической волны, рассеянной центральным цилиндром,  $H_{z0}^d, E_{z0}^d$  и волны, рассеянной всеми остальными цилиндрами решетки, представленной в виде разности дискретного и непрерывного спектров плоских гармоник решетки. Такая форма записи идентична случаю, когда изолированный цилиндр возбуждается суперпозицией плоских волн:

$$\begin{aligned} H_z^0 + 2SC_\mu H_{z\mu} G^h(\theta_\mu, \theta_0), \\ E_z^0 + 2SC_\mu E_{z\mu} G^e(\theta_\mu, \theta_0). \end{aligned}$$

В этом случае поле, рассеянное одиночным цилиндром, может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} H_z^r(\mathbf{r}) &= H_z^{0r} + 2SC_\mu G^h(\theta_\mu, \theta_0) H_{z\mu}^r + \tilde{H}_z^{0r} + 2SC_\mu G^e(\theta_\mu, \theta_0) \tilde{H}_{z\mu}^r, \\ E_z^r(\mathbf{r}) &= E_z^{0r} + 2SC_\mu G^e(\theta_\mu, \theta_0) E_{z\mu}^r + \tilde{E}_z^{0r} + 2SC_\mu G^h(\theta_\mu, \theta_0) \tilde{E}_{z\mu}^r, \end{aligned}$$

где  $H_z^{0r}, \tilde{E}_z^{0r}$  и  $E_z^{0r}, \tilde{H}_z^{0r}$  — цилиндрические волны, возникающие соответственно при рассеянии плоских волн  $H_z^0$  и  $E_z^0$  на центральном цилиндре;  $H_{z\mu}^r, \tilde{E}_{z\mu}^r$  и  $E_{z\mu}^r, \tilde{H}_{z\mu}^r$  — волны, появляющиеся при рассеянии плоских волн  $H_{z\mu}$  и  $E_{z\mu}$ .

Применяя теперь теорему Грина к парам функций  $J(\mathbf{r}, \rho_0), H_z^r(\rho_0)$  и  $J(\mathbf{r}, \rho_0), E_z^r(\rho_0)$ , получим систему двух функциональных уравнений, связывающих «амплитуды рассеяния цилиндра в решетке» с амплитудами рассеяния изолированного цилиндра:

$$\begin{aligned} G^e(\theta, \theta_0) &= g^e(\theta, \theta_0) + 2SC_\mu g^e(\theta, \theta_\mu) G^e(\theta_\mu, \theta_0) + \\ &+ \tilde{g}^h(\theta, \theta_0) + 2SC_\mu \tilde{g}^h(\theta, \theta_\mu) G^h(\theta_\mu, \theta_0), \\ G^h(\theta, \theta_0) &= g^h(\theta, \theta_0) + 2SC_\mu g^h(\theta, \theta_\mu) G^h(\theta_\mu, \theta_0) + \\ &+ \tilde{g}^e(\theta, \theta_0) + 2SC_\mu \tilde{g}^e(\theta, \theta_\mu) G^e(\theta_\mu, \theta_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Каждое слагаемое в (10) имеет определенный физический смысл; так, основные члены  $g^e, g^h, \tilde{g}^e, \tilde{g}^h$  соответствуют случаю, когда в качестве рассеивателя выступает один цилиндр, помещенный в начало координат, остальные члены, содержащие оператор  $S$ , соответствуют мультипольному рассеянию. Они характеризуют взаимодействие центрального цилиндра со всеми остальными цилиндрами решетки.

Система (10) дает решение задачи для случая падения волны смешанного типа. Решение для волны типа  $E$  получается из (10), если положить  $g^h(\theta, \theta_0) = \tilde{g}^h(\theta, \theta_0) = 0$ . Полагая  $g^e(\theta, \theta_0) = \tilde{g}^e(\theta, \theta_0) = 0$ , получим решение для волны типа  $H$ .

Представление амплитуд рассеяния  $G^e, G^h$  в виде рядов Фурье по  $\theta$ :

$$G^e(\theta, \theta_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}, \quad G^h(\theta, \theta_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\theta}, \quad (11)$$

приводит (10) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов разложения  $A_n, B_n$ :

$$A_n = (a_n^e + a_n^h) e^{-in\theta_0} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_n^e A_m + a_n^h B_m) H_{n-m},$$

$$B_n = (b_n^e + b_n^h) e^{-in\theta_0} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (b_n^e A_m + b_n^h B_m) H_{n-m}, \quad (12)$$

где  $H_{n-m} = 2SC_{\mu} e^{-i(n-m)\theta_{\mu}}$  — ряды Шлемильха. Удобное представление для них через элементарные функции можно найти в [7].

Полученная система уравнений дает решение задачи при любых значениях  $p/\lambda, 2a/p, 1-a/l$ . Насколько она полно представляет решение задачи о дифракции плоской волны на решетке спиральных цилиндров, зависит от точности решения задачи о рассеянии на одном цилиндре.

Для случая  $(g_0 p) \ll 1, (a/p) \ll 1$  система (12) может быть решена методом последовательных приближений. В рассматриваемом случае решетке спиралей можно поставить в соответствие некоторую бесконечно тонкую пленку, лежащую в плоскости  $x = 0$ , электродинамические свойства которой тождественны свойствам решетки [4, 5]. При этом сопоставлении следует рассматривать в плоскости  $x = 0$  не действительные, а некоторые усредненные по периодам решетки  $l$  и  $p$  поля, которые на расстоянии  $|x| \gg p, |x| \gg a + l$  совпадают с реально существующими полями и в этом смысле им эквивалентны.

Определяя поля (в нулевом приближении) и экстраполируя их на плоскость  $x = 0$ , определим для них следующие системы усредненных граничных условий:

для волны типа  $E$

$$E_z^+ - E_z^- = -\frac{ikl_1 \Delta \ln^-}{L^+ L^-} (H_y^+ + H_y^-) - \frac{l_1}{L^+} \frac{\partial}{\partial z} (E_x^+ + E_x^-) + 0(\zeta_1),$$

$$H_z^+ - H_z^- = \frac{ikl_1}{L^+ L^-} (E_y^+ + E_y^-) + 0(\zeta_1), \quad (13a)$$

$$H_y^+ - H_y^- + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} (E_x^+ - E_x^-) = -\frac{l_1 \Delta \ln^-}{L^+ L^-} \frac{\partial}{\partial y} (H_x^+ + H_x^-) - \frac{il_1}{kL^+} \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} (E_y^+ + E_y^-) + 2ikl_1 \frac{(\Delta/ka)^2 + \Delta \ln^-}{L^+} \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (E_z^+ + E_z^-) + 0(\zeta_1),$$

$$E_y^+ - E_y^- - \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} (H_x^+ - H_x^-) = -\frac{l_1}{L^+ L^-} \frac{\partial}{\partial y} (E_x^+ + E_x^-) - \frac{\pi a \Delta}{pL^+ L^-} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) (E_z^+ + E_z^-) + 0(\zeta_1);$$

для волны типа  $H$

$$H_z^+ - H_z^- = \frac{ik l_1}{L^+} (E_y^+ + E_y^-) - \frac{l_1 \Delta \ln^-}{L^+ L^-} \frac{\partial}{\partial z} (H_x^+ + H_x^-) + 0(\zeta_1),$$

$$E_z^+ - E_z^- = -\frac{ikl_1}{L^+} (H_y^+ + H_y^-) + 0(\zeta_1),$$

$$E_y^+ - E_y^- - \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} (H_x^+ - H_x^-) = -\frac{ikl_1}{2L^+} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (H_z^+ + H_z^-) - \quad (136)$$

$$- \frac{l_1}{L^+} \frac{\partial}{\partial y} (E_x^+ + E_x^-) + \frac{il_1 \Delta \ln^-}{kL^+ L^-} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} (H_y^+ + H_y^-) + 0(\zeta_1),$$

$$H_y^+ - H_y^- + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial z} (E_x^+ - E_x^-) = -\frac{l_1}{L^+ L^-} \frac{\partial}{\partial y} (H_x^+ + H_x^-) -$$

$$- \frac{l_1}{L^+} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (H_z^+ + H_z^-) + 0(\zeta_1),$$

где

$$l_1 = \frac{\pi a^2}{p}, \quad \zeta_1 = ka \frac{a}{p} \left[ ka + \Delta(\Delta + \varepsilon) + \left( \frac{a}{p} \right)^2 \right].$$

### 3. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА МНОГОСЛОЙНОЙ РЕШЕТКЕ ИЗ СПИРАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Усредненные граничные условия, сформулированные для решетки спиралей, дают возможность построить решение задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на многослойной решетке спиралей.

Рассмотрим случай падения волны типа  $E$  на многослойную решетку спиралей. Структура представляет собой последовательно расположенные друг за другом вдоль оси  $x$  на расстоянии  $\gamma$  плоские решетки идентичных спиралей. Используем известную методику определения отраженного и прошедшего полей для многослойных структур, основывающуюся на знании усредненных граничных условий для одной решетки (одного слоя). Записывая скачки тангенциальных составляющих поля на каждом слое (имеющих одинаковые значения вследствие идентичности слоев), получим систему уравнений, позволяющую определить отраженное и прошедшее поля.

Решая затем полученную систему в случае падения волны типа  $E$  на  $N$ -слойную решетку, найдем следующие выражения:

для отраженного поля

$$E_z^r = -i \frac{2\pi \cos^2 \varphi_0 \psi^-}{kp L^+ \cos \theta_0} \left[ \Delta^2 - \frac{(ka)^2}{2L^-} \cos 2\theta_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \right] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma), \quad (14)$$

$$H_z^r = -\frac{a}{p} \frac{\pi \psi^-}{L^+ \cos \theta_0} \left[ \Delta \cos \varphi_0 - i \frac{ka}{L^-} \sin 2\theta_0 \sin \varphi_0 \right] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma),$$

для прошедшего поля

$$E_z^t = -\cos \varphi_0 \left\{ 1 + i \frac{2\pi \cos \varphi_0}{kp L^+ \cos \theta_0} \left[ \Delta^2 - \frac{(ka)^2}{L^-} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \right] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma) \right\} \psi^+, \quad (15)$$

$$H_z^t = -\frac{\pi \Delta \cos^2 \varphi_0}{L^+ \cos \theta_0} \frac{a}{p} \psi^+ \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma),$$

где

$$\psi^\pm = \exp(ik \sin \varphi_0 z) \exp[ik \cos \varphi_0 (\pm x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)].$$

В случае произвольного падения волны типа  $H$  имеем:

для отраженной волны

$$E_z^r = \frac{\pi(a/p)\psi^-}{L^+ \cos \theta_0} \left( \Delta \cos^2 \varphi_0 - i \frac{ka}{L^-} \sin \varphi_0 \sin 2\theta_0 \right) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma), \quad (16)$$

$$H_z^r = -i \frac{\pi ka^2}{2pL^+ \cos \theta_0} \psi^- \left( \cos^2 \varphi_0 - \frac{1}{L^-} \cos 2\theta_0 \right) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma),$$

для прошедшей волны

$$E_z^t = \frac{\pi\Delta}{L^+} \left( \frac{a}{p} \right) \cos^2 \varphi_0 \psi^+ \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma), \quad (17)$$

$$H_z^t = \cos \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{i \pi ka}{L^+ \cos \theta_0} \left( \frac{a}{p} \right) \cos \varphi_0 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{L^-} \right] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(ik_x n \gamma) \right\} \psi^+.$$

Многослойная решетка спиралей представляет собой неоднородную анизотропную среду. В длинноволновой области, когда размеры неоднородностей и расстояние между ними малы по сравнению с длиной падающей волны, такая неоднородная среда по своим электродинамическим свойствам эквивалентна некоторой однородной среде, характеризуемой средними (эффективными) значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Иными словами, по отношению к усредненным полям неоднородная среда приобретает свойства однородного искусственного диэлектрика.

Определим эффективные значения показателей преломления для среды, состоящей из спиралей. Выделим в многослойной структуре произвольный слой толщины  $\gamma$  и поставим ему в соответствие эквивалентный слой однородного диэлектрика той же толщины. Тогда, разлагая волну, прошедшую через слой неоднородной структуры, на правополяризованную и левополяризованную компоненты, можем для них записать

$$E^+ = |E^+| e^{i\varphi^+} e^{ik\gamma}, \quad E^- = |E^-| e^{i\varphi^-} e^{ik\gamma}. \quad (18)$$

Для нормальных волн, прошедших через эквивалентный слой однородного диэлектрика, будем иметь

$$E'^+ = |E'^+| \exp(ikn_e^+ \gamma), \quad E'^- = |E'^-| \exp(ikn_e^- \gamma). \quad (19)$$

Сравнивая теперь фазы полей (18) и (19), получим показатели преломления право- и левополяризованной волн:

$$n_e^+ = 1 - \frac{\pi\Delta}{k\gamma(1-\Delta \ln^+)} \left( \frac{a}{p} + \frac{2\Delta}{kp} \right), \quad (20)$$

$$n_e^- = 1 + \frac{\pi\Delta}{k\gamma(1-\Delta \ln^+)} \left( \frac{a}{p} - \frac{2\Delta}{kp} \right).$$

При падении волны типа  $H$  показатели преломления находятся аналогично и имеют следующий вид:

$$n_0^+ = 1 + \left( \frac{a}{p} \right) \frac{\pi\Delta}{k\gamma(1-\Delta \ln^+)} \left[ 1 + \frac{ka}{\Delta} \left( \frac{1}{1-\Delta \ln^-} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (21)$$

$$n_0^- = 1 - \left( \frac{a}{p} \right) \frac{\pi\Delta}{k\gamma(1-\Delta \ln^+)} \left[ 1 - \frac{ka}{\Delta} \left( \frac{1}{1-\Delta \ln^-} + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Из выражений (20), (21) видно, что при падении волны типа  $E$  показатель преломления правополяризованной компоненты  $n_e^+ < 1$ , при падении  $H$ -волны  $n_o^+ > 1$  во всем диапазоне изменения параметров. Следует при этом отметить, что  $(a/p) \ll 1$ ,  $ka \sim \Delta \ll 1$ . Показатели преломления для левополяризованных волн в обоих случаях ( $E$ - и  $H$ -поляризации) могут быть как больше единицы:

$$\begin{aligned} n_e^- > 1 & \quad \text{при} & \quad 2\Delta < ka, \\ n_o^- > 1 & \quad \text{при} & \quad 2\Delta < ka \left( \frac{2}{1 - \Delta \ln^-} - 1 \right), \end{aligned}$$

так и меньше единицы:

$$\begin{aligned} n_e^- < 1 & \quad \text{при} & \quad 2\Delta > ka, \\ n_o^- < 1 & \quad \text{при} & \quad 2\Delta > ka \left( \frac{2}{1 - \Delta \ln^-} - 1 \right). \end{aligned}$$

Существуют также значения параметров, когда среда становится прозрачной для левополяризованных волн:

$$\begin{aligned} n_e^- = 1 & \quad \text{при} & \quad 2\Delta = ka, \\ n_o^- = 1 & \quad \text{при} & \quad 2\Delta = ka \left( \frac{2}{1 - \Delta \ln^-} - 1 \right). \end{aligned}$$

Искусственный диэлектрик из спиралей представляет собой оптически активную среду. Плоскость поляризации результирующей волны на выходе из такой среды оказывается повернутой относительно исходного положения на некоторый угол—угол вращения плоскости поляризации  $\chi$ . Согласно [1] удельный угол вращения плоскости поляризации (на единицу длины пути) можно определить по формуле

$$\begin{aligned} \chi^e &= k \frac{n_e^+ - n_e^-}{2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\pi\Delta}{1 - \Delta \ln^+} \left( \frac{a}{p} \right), \\ \chi^o &= k \frac{n_o^+ - n_o^-}{2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\pi\Delta}{1 - \Delta \ln^+} \left( \frac{a}{p} \right). \end{aligned}$$

Впервые модель оптически активной молекулы была дана Борном [1]. Борн показал, что оптическая активность обусловлена отсутствием у молекул вещества центра и плоскости симметрии. Спираль представляет собой структуру, лишенную центра и плоскости симметрии. Ее асимметрия обусловлена углом намотки. Действительно, когда  $\Delta \rightarrow 0$ , угол вращения  $\chi \rightarrow 0$ , т. е. спираль теряет способность вращать плоскость поляризации. В этом случае цилиндр со спиральной щелью превращается в анизотропно проводящий цилиндр с бесконечной проводимостью в азимутальном направлении и нулевой проводимостью в аксиальном направлении. При этом падающая  $E$ -поляризованная волна стремится возбудить токи, текущие вдоль оси цилиндра. Вследствие нулевой высоты колец эти токи ничтожно малы, и создаваемое ими вторичное поле практически равно нулю. Поэтому для среды из цилиндров с таким видом анизотропии  $n_e^+ = n_e^- = 1$ . При падении  $H$ -поляризованной волны в цилиндрах индуцируются только кольцевые токи, в результате чего в пределе при  $\Delta = 0$  отражательные свойства таких цилиндров не отличаются от свойств сплошных идеально проводящих цилиндров. В этом случае  $n_o^+ = n_o^- = 1 \mp$

$+ \frac{1}{2} \frac{\pi a^2}{p \gamma}$ , или, полагая  $\gamma = p$ , получаем  $n_0 = 1 + \frac{1}{2} \frac{\pi a^2}{p^2}$ , что совпадает с соответствующим выражением для показателя преломления среды, образованной сплошными цилиндрами [5, 6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Оптика, ОНТИ, 1937.
2. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 25, № 1, 158 (1955).
3. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, 28, № 7, 1494 (1958).
4. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехника и электроника, 4, № 3, 428 (1959).
5. Z. A. Karrielian, J. Appl. Phys., 27, № 12, 1491 (1956).
6. M. M. Z. Kharadly, W. Jackson, The properties of Artificial Dielectrics comprising Arrays of conducting elements, Proc. IEE, 100, part III, 188 (1953).
7. V. Twersky, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 8, 323 (1967).
8. V. Twersky, IRE Trans., AP-3, 330 (1956).
9. V. Twersky, IRE Trans., AP-6, 737 (1962).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
10 декабря 1971 г.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON LATTICES  
OF CIRCULAR CYLINDERS WITH A SPIRAL SLOT

A. V. Bezuglyi, V. P. Shestopalov

Using the method generalizing [8, 9] a solution is obtained of the problem of diffraction of a plane electromagnetic wave on a circular cylinder with a spiral slot, on a separate lattice of these cylinders and on a multilayer lattice of spiral cylinders.

УДК 538.56

## ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕММЫ ЛОРЕНЦА К РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ МОД\*

*Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев*

Предлагается метод расчета коэффициентов возбуждения дифракционных мод, направляемых поверхностью рассеивающего объекта, основанный на использовании леммы Лоренца и обобщающий известную теорию возбуждения экранированных и неэкранированных систем. Метод рассмотрен на примере задач о дифракции электромагнитных волн на диэлектрических цилиндре и шаре. На основе полученных общих формул проведено подробное исследование резонансных эффектов, связанных с возбуждением слабо излучающих квазиповерхностных волн в случае соответствующих плазменных образований.

В работе показано, что при решении проблемы дифракции электромагнитных волн на гладких объектах может быть использован известный из теории возбуждения экранированных и неэкранированных систем метод, опирающийся на лемму Лоренца (или теорему взаимности) [2-4]. Так же, как и в случае экранированных систем, вся процедура решения дифракционной задачи сводится при этом к определению коэффициентов возбуждения отдельных дифракционных мод, что позволяет, в частности, установить четкую связь между конструктивным келлеровским и строгим асимптотическим подходами.

Рассмотрение проводится на примере задач о рассеянии цилиндрической и плоской электромагнитных волн на круговом диэлектрическом цилиндре, а также сферической и плоской электромагнитных волн на диэлектрическом шаре. Полученные общие выражения позволяют проследить характер изменения собственно дифракционной части поля при изменении диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  цилиндра и шара практически во всем интервале  $-\infty < \epsilon < +\infty$ . Поскольку аналогичная задача для цилиндра частично обсуждалась в литературе, мы приводим вывод общих формул именно для цилиндрического случая с целью иллюстрации эффективности предложенного метода. Кроме того, это дает возможность довольно компактно изложить «сферический» случай, где соответствующий вывод выглядит существенно более прозаичным. В качестве конкретного примера рассмотрены задачи о дифракции плоской волны на плазменных цилиндре и шаре, причем основное внимание здесь сосредоточено на исследовании резонансных эффектов, связанных с возбуждением слабо излучающих истинных (направляемых границей плазмы) квазиповерхностных волн.

1. Пусть цилиндрическая волна, создаваемая источником\*\*

$$j^e(r, \varphi, z) = r^{-1} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) z^0 \quad (1)$$

( $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты), падает из вакуума —  $\epsilon_0, \mu_0; k_0 =$

\* Результаты настоящей работы доложены на Международном симпозиуме по теории электромагнитных волн, Тбилиси, сентябрь 1971 г. (см. [1]).

\*\* Зависимость от времени принимается в виде  $e^{i\omega t}$ .

$= \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  — на бесконечный круговой диэлектрический  $-\epsilon \epsilon_0 (\epsilon \geq 1)$ ,  $\mu_0$ ;  $k = k_0 \sqrt{\epsilon}$ ,  $Z = Z_0 / \sqrt{\epsilon}$  — цилиндр (большого по сравнению с длиной падающей волны  $\lambda_0$  и длиной волны в среде  $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon}$  радиуса  $a^*$ :

$$k_0 a \gg 1, \quad |k| a \gg 1. \quad (2)$$

Тогда полное дифракционное поле может быть представлено в виде суперпозиции полей дифракционных мод, направляемых поверхностью цилиндра. Компоненты поля отдельной такой моды с номером  $s$  записываются следующим образом:

$$E_{\pm s} = z^0 \exp(\mp i \nu_s \varphi) \begin{cases} H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 r) & (r > a) \\ J_{\nu_s}(kr) \frac{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)}{J_{\nu_s}(ka)} & (r < a) \end{cases}, \quad (3)$$

$$H_{\pm s} = r^0 \frac{\pm \nu_s}{z_0 k_0 r} E_{\pm s} + \varphi^0 \frac{-i}{z_0 k_0} \frac{\partial}{\partial r} E_{\pm s},$$

где  $\nu_s$  — угловая постоянная распространения;  $J_{\nu_s}(\xi)$ ,  $H_{\nu_s}^{(2)}(\xi)$  — функции Бесселя и Ханкеля второго рода. Каждая мода обегает цилиндр бесконечное число раз, так что  $\varphi$  в (3) предполагается изменяющимся в интервале  $-\infty < \varphi < +\infty$  (см. [6]).

Дисперсионное уравнение для определения  $\nu_s$  имеет вид

$$\frac{H_{\nu_s}'^{(2)}(k_0 a)}{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)} = \sqrt{\epsilon} \frac{J_{\nu_s}'(ka)}{J_{\nu_s}(ka)} \quad (4)$$

(штрих означает дифференцирование по аргументу).

Для отыскания коэффициентов возбуждения  $D_{\pm s}^{(H)}$  дифракционных мод\*\* (дифракционных коэффициентов) воспользуемся вытекающей из леммы Лоренца теоремой взаимности:

$$\int_V (j_1^e E_2 - j_1^m H_2) dV = \int_V (j_2^e E_1 - j_2^m H_1) dV. \quad (5)$$

Пусть  $E_1, H_1$  — искомое дифракционное поле,

$$E_1 = \sum_s (D_s^{(H)} E_s + D_{-s}^{(H)} E_{-s}), \quad (6)$$

$$H_1 = \sum_s (D_s^{(H)} H_s + D_{-s}^{(H)} H_{-s}),$$

создаваемое заданным линейным током  $j_1^e = j^e$ ,  $j_1^m = 0$ . В качестве  $j_2^e$ ,  $j_2^m$  возьмем токи, отвечающие некоторой дифракционной моде номера  $l$ , текущей в сторону положительных  $\varphi$ , которые зададим на поверхности  $\varphi = 0$ :

\* Заметим, что эти условия не являются, вообще говоря, необходимыми и могут быть уточнены в конкретных случаях. Так, например, полученные ниже результаты, отвечающие рассеянию цилиндрической волны, создаваемой линейным магнитным током, остаются справедливыми для цилиндра с  $\epsilon = 0$ , поскольку при этом на поверхности цилиндра выполняется граничное условие  $H_z = 0$ , и, следовательно, он ведет себя как идеальный магнитный проводник (см. [6]).

\*\* Индекс  $(H)$  обозначает тип волны по отношению к радиальному направлению — волна  $H$ -типа.



$$j_2^e = [\varphi^0 H_l] r^{-1} \delta(\varphi), \quad j_2^m = -[\varphi^0 E_l] r^{-1} \delta(\varphi). \quad (7)$$

Подставляя соответствующие выражения для токов и полей в (5), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} & H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r_0) \exp(-i \nu_l \varphi_0) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i \nu_l 2\pi n) \right] = \\ & = \sum_s \left\{ (D_s^{(H)} I_{l,s} \exp(i \nu_s \varphi_0) + D_{-s}^{(H)} I_{l,-s} \exp(-i \nu_s \varphi_0) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i \nu_s 2\pi n) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$I_{l,\pm s} = \int_0^{\infty} \{ [E_l^{(0)} H_{\pm s}^{(0)}] - [E_{\pm s}^{(0)} H_l^{(0)}] \} \varphi^0 dr, \quad (9)$$

где  $E_{\pm s}^{(0)} = E_{\pm s}(\varphi=0)$ ,  $H_{\pm s}^{(0)} = H_{\pm s}(\varphi=0)$  описывают распределение поля в поперечном (по отношению к направлению распространения  $\varphi^0$ ) сечении.

Как нетрудно непосредственно убедиться,

$$I_{l,s} = 0 \quad \text{при} \quad s \neq -l; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} I_{l,-l} = N_l^{(H)} = Z_0^{-1} a \left\{ \left[ H_{\nu}^{(2)}(u) \frac{\partial^2 H_{\nu}^{(2)}(u)}{\partial \nu \partial u} - \frac{\partial H_{\nu}^{(2)}(u)}{\partial u} \frac{\partial H_{\nu}^{(2)}(u)}{\partial \nu} \right] - \right. \\ \left. - \sqrt{\varepsilon} \left[ \frac{H_{\nu}^{(2)}(u)}{J_{\nu}(\tilde{u})} \right]^2 \left[ J_{\nu}(\tilde{u}) \frac{\partial^2 J_{\nu}(\tilde{u})}{\partial \nu \partial \tilde{u}} - \frac{\partial J_{\nu}(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial J_{\nu}(\tilde{u})}{\partial \nu} \right] \right\}_{\substack{\nu=\nu_l \\ u=k_0 a \\ \tilde{u}=ka}}, \end{aligned} \quad (11)$$

т. е. дифракционные моды ортогональны в том же смысле, что и собственные волны в волноводе (см., например, [4]).

Учитывая (10), (11), из (8) имеем

$$D_{-l}^{(H)} = \frac{1}{N_l^{(H)}} H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r_0). \quad (12)$$

Вполне очевидно, что\*

$$D_l^{(H)} = D_{-l}^{(H)}. \quad (13)$$

Формулы (13), (12), (11) и (6) полностью определяют искомое поле.

Полученный ряд (6) дает, вообще говоря, строгое решение задачи, в чем можно дополнительно убедиться, если воспользоваться известным стандартным способом [7] построения таких рядов (см. также [8-10]). Описываемое им полное дифракционное поле включает, естественно, как поле падающей волны, так и рассеянное цилиндром поле; это последнее, в свою очередь, включает отраженное и преломленное по законам геометрической оптики поле, т. е. геометрическую и собственно дифракционную части. Однако выделение поля падающей волны и геометрической части рассеянного поля требует перехода от ряда

\* Кстати, в общем виде (произвольное двумерное распределение электрических токов) формулы для коэффициента возбуждения дифракционных мод выглядят аналогично соответствующим волноводным формулам [4].

к интегралу (см., например, [11]; относительно последующего вычисления соответствующего интеграла см. также [12–14]), так что ряд (6) непосредственно приспособлен для описания лишь собственно дифракционной части рассеянного поля, которой мы здесь и интересуемся (слово «собственно» в дальнейшем для краткости будем опускать). Исходя из такого представления, будем относить к дифракционной части рассеянного поля поля всех тех дифракционных мод, которые имеют самостоятельный физический смысл и отвечают соответствующим отдельным членам ряда (6) (перечень таких мод вместе со ссылками на литературу приводится несколько ниже).

Совершенно аналогично выполняются вычисления и для случая возбуждения цилиндра линейным магнитным током

$$j^m(r, \varphi, z) = -r^{-1} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) z^0. \quad (14)$$

Компоненты поля дифракционной моды  $E$ -типа с номером  $s$  получаются из (3) с помощью принципа двойственности: в области  $r > a$  —  $E \rightarrow -H$ ,  $H \rightarrow E$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ ,  $\mu_0 \rightarrow \epsilon_0$ ; в области  $r < a$  — выполняются аналогичные замены и затем в полученную формулу для  $H$  добавляется общий множитель  $1/\epsilon$ , что отвечает замене  $\mu = 1 \rightarrow \epsilon$ . Дисперсионное уравнение мод  $E$ -типа получается из (4) путем замены  $\sqrt{\epsilon}$  на  $1/\sqrt{\epsilon}$ . Коэффициент возбуждения  $D_l^{(E)}$  отличается от  $D_l^{(H)}$  только выражением для нормы волны:  $N_l^{(E)} = N_l^{(H)}$  ( $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ ,  $\mu_0 \rightarrow \epsilon_0$ ;  $\sqrt{\epsilon} \rightarrow 1/\sqrt{\epsilon}$ ).

Подставляя в (12) асимптотическое выражение для  $H_{\nu_l}^{(2)}(k_0 r_0)$  при  $r_0 \rightarrow \infty$  и заменяя в полученной форме множитель  $-Z_0 \sqrt{k_0/8\pi r_0} \times \exp[-i(k_0 r_0 - \pi/4)]$  единицей, приходим к дифракционному коэффициенту  $\tilde{D}_l^{(H)}$ , отвечающему рассеянию однородной плоской волны единичной амплитуды:

$$\tilde{D}_l^{(H)} = \tilde{D}_{-l}^{(H)} = -\frac{4}{k_0 Z_0 N_l^{(H)}} \exp(i\nu_l \pi/2). \quad (15)$$

Полученные выражения для дифракционных коэффициентов при известном решении дисперсионных уравнений позволяют проследить за изменением дифракционной части рассеянного поля при изменении  $\epsilon$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Во всех рассмотренных ранее частных случаях они переходят в известные результаты. Эти случаи следующие.

1) Идеально проводящий цилиндр —  $\epsilon \rightarrow -\infty$  (см. [6, 15]); дифракционные моды здесь — это «ползущие волны».

2) Импедансный цилиндр —  $\epsilon \ll -1$  (поверхностный импеданс  $g = Z$ ) [6, 16]; дифракционные моды включают квазиповерхностные и ползущие волны.

3) Цилиндрическая полость —  $0 < \epsilon < 1$  (см. [17, 14]); дифракционные моды включают волны шепчущей галереи и ползущие волны.

4) Диэлектрический цилиндр —  $\epsilon > 1$  (см. [18, 19]); дифракционные моды включают, так же как в предыдущем случае, волны шепчущей галереи и ползущие волны.

Следует отметить, что при использовании асимптотических представлений Лангера—Фока (см. [20, 21]) для бесселевых функций полученные формулы автоматически дают равномерные по  $r$  асимптотические выражения.

2. Перейдем к задаче о рассеянии сферической волны, создаваемой источником

$$j^e(r, \vartheta, \varphi) = r^{-2} \sin^{-1} \vartheta \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \pi) \delta(\varphi) x^0 \quad (16)$$

( $r, \vartheta, \varphi$  — сферические координаты), на диэлектрическом шаре большого радиуса  $a$ .

Полное дифракционное поле представляется в виде суперпозиции полей дифракционных мод  $E$ - и  $H$ -типов по отношению к радиальному направлению обтекающих шар в меридиональном направлении ( $-\infty < \vartheta < +\infty$ ). Составляющие поля таких меридиональных дифракционных мод могут быть описаны с помощью потенциалов Дебая (см., например, [22]), причем зависимость от  $\vartheta$  в области значений  $\Delta \ll \vartheta \ll \pi - \Delta$  ( $\Delta \ll 1, 1/\Delta \gg \nu$ ) дается множителем (для моды, бегущей в сторону уменьшения  $\vartheta$ ) —  $e^{i\pi/4} \sqrt{\nu_s/2\pi \sin \vartheta} \exp(i\nu_s \vartheta)$ , что следует из асимптотического представления присоединенного полинома Лежандра  $P_{\nu_s-1/2}^{(1)}(\cos \vartheta)$ . При прохождении через полюс  $\vartheta = 0$  волна приобретает дополнительный сдвиг фазы  $-\pi/2$ , так что на соответствующем интервале изменения  $\vartheta$  имеем  $-e^{-i\pi/2} e^{i\pi/4} \sqrt{\nu_s/2\pi \sin \vartheta} \exp(-i\nu_s \vartheta)$ . Проходя затем через полюс  $\vartheta = \pi$ , волна снова приобретает сдвиг фазы  $-\pi/2$  и так далее.

Дисперсионное уравнение меридиональных дифракционных мод на шаре представляется в виде

$$\frac{H_{\nu_s}^{(2)'}(k_0 a)}{H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)} + \frac{1}{2k_0 a} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\varepsilon} \\ (\sqrt{\varepsilon})^{-1} \end{array} \right\} \left[ \frac{J_{\nu_s}'(ka)}{J_{\nu_s}(ka)} + \frac{1}{2ka} \right], \quad (17)$$

где верхняя строчка в фигурной скобке отвечает волнам  $H$ -типа, нижняя — волнам  $E$ -типа.

Задавая в качестве вспомогательных токов (на поверхности  $\vartheta = \text{const}$ \*) сначала токи, отвечающие некоторой дифракционной моде  $E$ -типа с номером  $l$ , а затем — моде  $H$ -типа с номером  $l$ , и убеждаясь в ортогональности дифракционных мод разных типов, а также различных мод внутри одного типа, из теоремы взаимности получаем

$$D_{-l}^{(E)} = \frac{-2i}{\pi \nu_l N_l^{(E)}} \frac{Z_0}{r_0} h_{\nu_l-1/2}^{(2)'}(k_0 r_0); \quad (18)$$

$$D_{-l}^{(H)} = \frac{2}{\pi \nu_l N_l^{(H)}} \frac{1}{r_0} h_{\nu_l-1/2}^{(2)}(k_0 r_0), \quad (19)$$

где  $h_{\nu_l-1/2}^{(2)}(\xi)$  — сферическая функция Ханкеля второго рода;  $N_l^{(H)}$  дается по-прежнему формулой (11), а  $N_l^{(E)}$  получается из  $N_l^{(H)}$  указанным выше способом\*\*.

Заменяя в (18), (19)  $h_{\nu_l-1/2}^{(2)}(k_0 r_0)$  ее асимптотическим значением при  $r_0 \rightarrow \infty$  и приравнивая множитель  $\frac{k_0 Z_0}{4\pi r_0} \exp(-ik_0 r_0)$  единице, получаем дифракционные коэффициенты для случая рассеяния однородной плоской волны единичной амплитуды:

$$\tilde{D}_{-l}^{(E)} = -\frac{8}{\nu_l k_0 N_l^{(E)}} \exp[i(\nu_l \pi/2 + \pi/4)]; \quad (20)$$

$$\tilde{D}_{-l}^{(H)} = \frac{8}{\nu_l k_0 Z_0 N_l^{(H)}} \exp[i(\nu_l \pi/2 + \pi/4)]. \quad (21)$$

\* Мы здесь выбрали конкретно  $\text{const} = \pi/2$ .

\*\* Норма меридиональной дифракционной моды на шаре  $(N_l^{(H)})_{\text{ш}}$  отличается от нормы соответствующей моды на цилиндре  $N_l^{(H)}$  множителем  $-i\pi/4 (\nu_l^2 - 1/4) \nu_l k_0^{-1}$ :  $(N_l^{(H)})_{\text{ш}} = -i\pi/4 (\nu_l^2 - 1/4) \nu_l k_0^{-1} N_l^{(H)}$ .

Приведенные выражения для дифракционных коэффициентов при известном решении дисперсионных уравнений также позволяют проследить за изменением дифракционной части рассеянного поля с изменением  $\varepsilon$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В частном случае идеально проводящего шара,  $\varepsilon \rightarrow -\infty$ , приходим к известным результатам, содержащимся в [23–25].

3. В качестве конкретного примера применения полученных общих формул рассмотрим задачи о дифракции плоской электромагнитной волны на плазменных цилиндре и шаре с диэлектрической проницаемостью в области  $\varepsilon \leq -1$ , где существуют слабо излучающие истинные — направляемые границей плазма — вакуум (см., например, [26]) — квази-поверхностные волны. На исследовании резонансных эффектов, связанных с возбуждением этих волн, и сосредоточено далее основное внимание\*.

Линейная постоянная распространения дифракционной моды вдоль поверхности цилиндра или шара  $h_s$  связана с угловой постоянной  $\nu_s$  следующим очевидным соотношением:

$$h_s = \nu_s/a. \quad (22)$$

Величина же  $h_s$  для истинных квазиповерхностных волн, как легко понять, больше или порядка  $k_0$  ( $|h_s| \geq k_0$ ), так что в силу (2)  $|\nu_s| = |h_s|a \gg 1$ . Поэтому входящие в выражения для поля соответствующих волн функции  $H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 r)$  и  $J_{\nu_s}(kr)$  могут быть заменены их асимптотическими значениями по Фоку [20]. Непосредственно на поверхности цилиндра или шара  $r = a$  в области значений  $\varepsilon$ , отвечающих сравнительно большому замедлению\*\*, таким, что  $[\nu_s^2 - (k_0 a)^2]^{3/2} \gg \nu_s^2$ , представление Фока сводится к известному асимптотическому представлению Дебая, которое мы и будем использовать:

$$H_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\nu_s^2 - (k_0 a)^2}} e^{-\eta} + i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu_s^2 - (k_0 a)^2}} e^{\eta}, \quad (23)$$

$$J_{\nu_s}(ka) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\nu_s^2 - (ka)^2}} \exp(-\eta_e),$$

где  $\eta = -\sqrt{\nu_s^2 - (k_0 a)^2} + \nu_s \operatorname{arccch} \frac{\nu_s}{k_0 a}$ , а  $\eta_e$  получается из  $\eta$  путем замены  $k_0$  на  $k$ .

Подставляя (23) в общее дисперсионное уравнение и соответствующее общее выражение для коэффициента возбуждения дифракционных мод  $E$ -типа, получаем дисперсионное уравнение и коэффициент возбуждения квазиповерхностных волн, направляемых слабо искривленной границей плазма — вакуум\*\*\*. Решая затем полученное дисперсионное уравнение методом возмущений (см. [30]), находим постоянную распространения этих волн, что, в свою очередь, позволяет установить условия резонансов, определить радиационную ширину резонансных линий и оценить, зная коэффициент возбуждения, резонансное значение поля. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем и прокомментируем результаты последовательно для цилиндра и шара.

\* Аналогичная задача для шара обсуждалась в [27–29]. Приведенные здесь результаты дополняют и обобщают результаты указанных работ.

\*\* Эта область как раз и представляет основной интерес с точки зрения получения больших резонансных эффектов.

\*\*\* Только волны  $E$ -типа и могут быть отнесены к числу квазиповерхностных

*Плазменный цилиндр.* Угловая постоянная распространения  $\nu$  (индекс опускаем) соответствующей квазиповерхностной волны представляется в виде

$$\nu = \rho_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho_0} \frac{(-1 - \varepsilon)^{3/2}}{2\varepsilon} - i \rho_0 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right\}}, \quad (24)$$

где  $\rho_0 = k_0 a$ ,  $\rho_0 = \exp\{-2 \operatorname{Re} \eta^{(0)}\}$ , а  $\eta^{(0)}$  получается из  $\eta$  путем подстановки  $\nu_s = \nu^{(0)} = \rho_0 \sqrt{\varepsilon/(1 + \varepsilon)}$ . Член, стоящий перед фигурной скобкой,  $\nu^{(0)}$  отвечает постоянной распространения волны вдоль плоской границы, второй и третий члены в скобке дают, очевидно, поправку, связанную с искривлением границы. Эти поправочные члены получены методом возмущений, так что формула (24) написана фактически с точностью до членов более высокого порядка по параметрам  $\rho_0^{-1}$  и  $\rho_0$ . Хотя указанная поправка довольно мала, учет ее мнимой части имеет принципиальное значение, так как именно мнимая добавка ответственна за излучение, а следовательно, и радиационное затухание волны. Следует подчеркнуть, что в выделенной области значений параметров эта добавка экспоненциально мала.

Коэффициент возбуждения квазиповерхностной волны падающей плоской волной единичной амплитуды дается выражением

$$\tilde{D}^{(E)} = 2\pi \operatorname{Im} \nu \exp(i \nu_l \pi/2). \quad (25)$$

В качестве характеристики обусловленного наличием квазиповерхностной волны рассеянного поля  $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d^*$  возьмем отвечающее ему сечение рассеяния в обратном ( $\varphi = \varphi_0$ ) направлении  $\sigma_d$  (по определению,  $\sigma_d = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r |E_{d\varphi}(\varphi_0)|^2$ ). Как нетрудно получить,  $\sigma_d$  описывается формулой

$$\sigma_d = \frac{16}{k_0} \left| \frac{\pi \operatorname{Im} \nu}{\sin \nu \pi} \right|^2. \quad (26)$$

Условие резонанса квазиповерхностной волны имеет, очевидно, вид  $\nu = n$  ( $n$  — целое число) и при заданных значениях параметров плазмы и радиуса цилиндра позволяет определить комплексные резонансные частоты  $\omega'_n = \omega_n + i\omega_n$ . В интересующей нас области значений  $\varepsilon$ , где, как уже отмечалось,  $\operatorname{Im} \nu \ll 1$ , приходим к следующим значениям действительной части собственной частоты  $\omega_n$  и постоянной радиационного затухания  $\gamma_n^r = 2\omega_n$ :

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{2n^2}{p_p^2} - \sqrt{1 + \frac{4n^4}{p_p^4}} \right\}^{1/2}; \quad (27)$$

$$\gamma_n^r = \omega_n \left\{ \rho_0 \frac{2n^4 (p_0^2 - n^2)}{(p_0^2 - 2n^2) [n^4 + (p_0^2 - n^2)^2]} \right\}_{\omega = \omega_n}, \quad (28)$$

$\omega_p$  — плазменная частота,  $p_p = \omega_p \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 a}$ .

Резонансное значение дифракционного сечения обратного рассеяния  $\sigma_d^{\text{res}}$  согласно (26) (учитывая, что  $\operatorname{Re} \nu = n$  и  $\operatorname{Im} \nu \ll 1$ ) равно

$$\sigma_d^{\text{res}} = \frac{16}{k_0} \quad (29)$$

независимо от номера резонанса  $n$ .

\* Вклад этого поля в дифракционную часть рассеянного поля в целом является определяющим, учет ползущих волн приведет к сравнительно небольшим поправкам.

Сравнение  $\sigma_d^{\text{res}}$  с геометрикооптическим сечением  $\sigma_g = \pi a - \frac{\sigma_d^{\text{res}}}{\sigma_g} = \frac{16}{\pi} p_0^{-1}$  — показывает, что для цилиндра больших электрических размеров ( $p_0 \gg 1$ ) резонансные эффекты выражены весьма слабо.

При  $\epsilon \rightarrow -1$  постоянная распространения квазиповерхностной волны  $\nu$  стремится к бесконечности (см. (24)), а ее длина  $\lambda_c$  — к нулю. Отсюда можно утверждать, что в области значений  $\epsilon$ , непосредственно примыкающих к  $-1$ , полученные результаты должны оставаться справедливыми и для цилиндра малых электрических размеров,  $p_0 \ll 1$ ,  $|p| = |k|a \ll 1$ . Это утверждение находит формальное выражение в том, что асимптотическое представление Дебая с помощью формулы Стирлинга удается свести к первому члену ряда, представляющего соответствующую цилиндрическую функцию при малых значениях аргумента. Следует только подчеркнуть, что приведенные здесь формулы, как оказалось, правильно описывают все квазистатические резонансы, включая дипольный, для которого  $\nu = ha = 1^*$ . Таким образом, квазистатические резонансы кругового цилиндра можно интерпретировать как резонансы квазиповерхностной волны.

**Плазменный шар.** Если, так же как в случае цилиндра, для отыскания постоянной распространения меридиональной квазиповерхностной волны на шаре воспользоваться методом возмущений (по параметрам  $p_0^{-1} = (k_0 a)^{-1}$  и  $\rho_0$ ), то получим выражение, в котором поправочный член, содержащий  $p_0^{-1}$ , стремится к бесконечности при  $\epsilon \rightarrow -1$ . Это связано с наличием в дисперсионном уравнении для шара дополнительных, по сравнению с цилиндром, членов  $(2p_0)^{-1}$  и  $(2p)^{-1}$ . Для получения корректного выражения следует указанные дополнительные члены отнести к нулевому приближению по параметру  $p_0^{-1}$ ; тогда в рамках применимости этого приближения будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \nu &= p_0 \sqrt{\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{16 p_0^2} \frac{(\epsilon-1)^2}{\epsilon(1+\epsilon)}} + \frac{1}{4 p_0} \frac{\epsilon-1}{\sqrt{\epsilon(1+\epsilon)}} \right\}}, \\ \operatorname{Im} \nu &= - \frac{\rho_0 \epsilon [(\operatorname{Re} \nu)^2 - p_0^2] \sqrt{(\operatorname{Re} \nu)^2 - \epsilon p_0^2}}{(\operatorname{Re} \nu) [\sqrt{(\operatorname{Re} \nu)^2 - p_0^2} + \epsilon \sqrt{(\operatorname{Re} \nu)^2 - \epsilon p_0^2}]}, \end{aligned} \quad (30)$$

причем входящая в  $\rho_0$  величина  $\eta^{(0)}$  (см. (24)) получается здесь из  $\eta$  путем подстановки  $\nu_s = \operatorname{Re} \nu$  (приведенные выражения впервые получены в [23]).

В соответствии с (30) постоянная распространения ( $h$ ) волны на шаре близка к постоянной распространения на плоскости, т. е. соблюдается принцип локальности только при выполнении условия

$$\frac{1}{4 p_0} \left| \frac{\epsilon-1}{\sqrt{\epsilon(\epsilon+1)}} \right| \ll 1, \quad (31)$$

или

$$\lambda_0^4 \ll 4 (2\pi)^2 a^2 \lambda_n^2, \quad (32)$$

где  $\lambda_n$  — длина поверхностной волны (на плоскости).

\* В квазистатическом предельном случае резонансные эффекты, как известно, выражены сильно, что следует из сравнения  $\sigma_d^{\text{res}}$  с соответствующим нерезонансным значением  $\sigma_{q, s}$  (дипольное приближение):

$$\frac{\sigma_d^{\text{res}}}{\sigma_{q, s}} = \frac{4}{\pi^2} \frac{(\epsilon+1)^2}{(\epsilon-1)^2} p_0^{-4},$$

При приближении  $\epsilon$  к  $-1$  всегда найдется такое значение, начиная с которого неравенства (31), (32) перестают выполняться и, несмотря на то, что  $\lambda_n \rightarrow 0$ , принцип локальности нарушается. Отмеченная особенность имеет место для плазменных объектов с двойной кривизной — оба радиуса кривизны ограничивающей поверхности конечны — и отсутствует, как мы видели выше, когда один из радиусов равен бесконечности. Если выполняется неравенство, обратное (31), то угловая постоянная распространения дается формально выражением

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} + i \rho_0 \frac{\epsilon(1 - \epsilon)}{2(1 + \epsilon)^2} \quad (33)$$

и определяется, согласно этому выражению, свойствами всей поверхности в целом.

Коэффициент возбуждения меридиональной квазиповерхностной волны  $E$ -типа на шаре падающей плоской волной единичной амплитуды равен

$$\tilde{D}^{(E)} = \exp [i(\nu\pi/2 + \pi/4)] 4\pi \frac{\text{Im } \nu}{\nu}. \quad (34)$$

В качестве характеристики обусловленного этой волной рассеянного поля возьмем (так же как в случае цилиндра) отвечающее ему сечение обратного ( $\vartheta = \pi$ ) рассеяния  $\sigma_d$  (здесь, по определению,  $\sigma_d = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \times \times |E_{d\vartheta}(\pi)|^2$ ), для которого будем иметь

$$\sigma_d = \frac{4\pi}{k_0^2} (\text{Re } \nu)^2 \left| \frac{\pi \text{Im } \nu}{\cos \nu\pi} \right|^2. \quad (35)$$

Условие резонанса меридиональной волны, позволяющее найти собственные частоты и постоянные радиационного затухания плазменного шара, записывается следующим образом:  $\nu = n + 1/2$ . Наличие дополнительного (по сравнению с цилиндром) слагаемого  $1/2$  обусловлено изменением фазы при прохождении волны через точки фокусировки ( $\vartheta = 0, \pi$ ). Получение в явном виде общих выражений, для  $\omega_n$  и  $\gamma_n^r$  соответствующих непосредственно формуле (30), затруднительно, поэтому мы ограничимся частными случаями, отвечающими неравенству (31) и неравенству, обратному (31). В первом из этих случаев выражения для  $\omega_n$  и  $\gamma_n^r$  шара отличаются от соответствующих выражений для цилиндра (27), (28) только тем, что вместо  $n$  стоит  $n + 1/2$ . Во втором случае имеем

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{2 + 1/n}}; \quad (36)$$

$$\gamma_n^r = \omega_n \left\{ \frac{\rho_n(n+1)}{2n} \right\}_{\omega=\omega_n}. \quad (37)$$

Учитывая, что при резонансе  $\text{Re } \nu = n + 1/2$ , а также что  $\text{Im } \nu \ll 1$ , для резонансного значения  $\sigma_d^{\text{res}}$  из (35) получим

$$\sigma_d^{\text{res}} = \frac{\pi}{k_0^2} (2n + 1)^2. \quad (38)$$

Резонансное значение дифракционного сечения обратного рассеяния шара даже в области не слишком близких  $k \rightarrow -1$  (неравенство (31)) значений  $\epsilon$  заметно превышает геометрикооптическое сечение  $\sigma_g = \pi a^2$ :  $\sigma_d^{\text{res}}/\sigma_g = p_0^{-2} (2n + 1)^2 = 4\epsilon_n/(\epsilon_n + 1)$ . При приближении  $\epsilon$  к  $-1$  значе-

ние  $n$ , а с ним и  $\sigma_d^{\text{res}}$  непрерывно возрастает и в пределе при  $\epsilon \rightarrow -1$   $\sigma_d^{\text{res}} \rightarrow \infty^*$ . Отсюда резонансные эффекты, связанные с возбуждением квазиповерхностной волны, в случае шара больших электрических размеров выражены довольно сильно.

Формулы (36), (37), (38) остаются справедливыми и для шара малых электрических размеров  $p_0 \ll 1$ ,  $|p| \ll 1$  [31], причем формулы (36), (38) имеют такой же вид здесь, как и в квазистатической области, а формула (37) преобразуется к нужному виду с помощью формулы Стирлинга. Заметим, что отмеченные формулы правильно описывают все квазистатические резонансы, включая дипольный,  $\nu = 3/2$ .

4. Проведенное рассмотрение с очевидностью свидетельствует об эффективности метода, опирающегося на лемму Лоренца, применительно к задачам дифракции электромагнитных волн (векторные задачи) на гладких диэлектрических объектах; метод отличается простотой, наглядностью и четким физическим смыслом. Использование этого метода позволяет провести исследование эффектов, связанных с возбуждением различных дифракционных мод — ползущих волн, квазиповерхностных волн, волн шепчущей галереи, — с единых позиций и единым образом. Такая универсальность подхода открывает возможность четкой систематизации соответствующих задач.

Необходимо заметить, что полученные здесь результаты с помощью описанного метода (правда, опирающегося, вообще говоря, на обобщенную лемму Лоренца) могут быть обобщены на цилиндрические и сферические объекты с более сложными электродинамическими характеристиками, обусловленными наличием поглощения ( $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ ), слабой пространственной дисперсии, анизотропии (в частности, гиротропии): неоднородности распределения проницаемости по радиусу ( $\epsilon = \epsilon(r)$ ).

Вместе с тем, результаты этой работы могут, по-видимому, быть использованы для отыскания дифракционной части поля, рассеянного гладкими выпуклыми диэлектрическими объектами с большими радиусами кривизны поверхности и медленно меняющимися в масштабе длины волны дифракционных мод. Ситуация в этом смысле подобна той, которая имеет место в геометрической теории дифракции Келлера, хотя основополагающий принцип — принцип локальности — нуждается здесь, как мы видели на примере плазменного шара, в более внимательном обосновании.

Авторы признательны М. А. Миллеру за полезные советы и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Zaboronkova, I. G. Kondrat'ev, *Electromagnetic Wave Theory* (Preprints), изд. Наука, М., 1971, стр. 279.
2. Я. Н. Фельд, *ЖТФ*, 17, 1471 (1947).
3. М. Б. Заксон, Докл. АН СССР, 66, 637 (1949).
4. Л. А. Вайнштейн, *ЖТФ*, 23, 654 (1953); 26, 126 (1956).
5. В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, *Радиотехника и электроника*, 10, 658 (1965).
6. J. V. Keller, *IRE Trans.*, AP-4, 312 (1956).
7. А. Зоммерфельд, *Дифференциальные уравнения в частных производных физики*, ИЛ, М., 1965, стр. 298.
8. N. Macquitt, *Commun. Pure Appl. Math.*, 4, 263 (1951).
9. П. Е. Краснушкин, Докл. АН СССР, 185, № 5, 1014 (1969).
10. В. С. Булдырев, сб. Численные методы исследования дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы, изд. Наука, М., 1964, стр. 275.
11. Л. А. Вайнштейн, А. А. Федоров, *Радиотехника и электроника*, 6, 31 (1961);

\* Разумеется, учет, наряду с радиационным затуханием других механизмов диссипации, приведет к подавлению резонансов высоких порядков (больше  $n$ ).



12. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, Тр. МИАН, 92, Краевые задачи матем. физ., вып. 4, изд. Наука, М.—Л., 1966.
13. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, ЖВММФ, 6, 90 (1966).
14. D. Ludwig, J. Math. Phys., 11 (1970).
15. А. С. Горяинов, Радиотехника и электроника, 5, 603 (1958).
16. Л. А. Вайнштейн, Г. Д. Малюжинец, Радиотехника и электроника, 6, 1489 (1961).
17. J. M. Chen, J. Math. Phys., 6, 1332 (1965).
18. P. Beckmann, W. Franz, Z. Naturforschung, 12a, № 3, 257 (1957).
19. P. Beckmann, Z. Naturforschung, 12a, № 12, 960 (1957).
20. В. А. Фок, Докл. АН СССР, 1, № 3, 97 (1934).
21. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
22. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
23. А. А. Федоров, Радиотехника и электроника, 3, 1451 (1958).
24. B. R. Levy, J. V. Keller. Common Pure Appl. Math., 12, 159 (1959).
25. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967.
26. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959, стр. 364.
27. P. J. Wyatt, J. Appl. Phys., 36, 3875 (1965).
28. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1358 (1967).
29. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 8, 1265 (1968).
30. М. А. Миллер, В. И. Таланов, ЖТФ, 26, 2755 (1956).
31. В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, ЖТФ, 33, 301 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
6 января 1972 г.

## THE APPLICATION OF LORENTZ LEMMA TO CALCULATION OF EXCITATION COEFFICIENTS OF DIFFRACTION MODES

*T. M. Zaboronkova, I. G. Kondrat'ev*

A method is proposed to calculate the excitation coefficients of diffraction modes guided by the surface of a scattering object. This method is based on the use of Lorentz lemma and generalizes the known theory of excitation of shielded and nonshielded systems. The method has been considered on the example of the problems of the electromagnetic wave diffraction on the dielectric cylinder and sphere. Using the general formulas obtained a detailed investigation of resonance effects associated with the excitation of weakly radiating quasi-surface waves in the case of corresponding plasma formations is given.

УДК 538.574.6

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ДЛЯ РЕАКТАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. Ф. Чаплин, А. М. Аксельрод

Рассматривается обратная задача дифракции применительно к плоской импедансной поверхности. Найдено аналитическое выражение для распределения реактивного импеданса, обеспечивающего формирование заданного поля рассеяния. Исследуются случаи переотражения падающей на плоскость плоской волны под заданным углом.

Развитие техники переизлучающих антенных решеток и антенн с пространственной модуляцией параметров вызывает необходимость решения задачи синтеза таких антенн. На практике также возникает задача формирования определенного поля рассеяния при дифракции плоской электромагнитной волны на некотором теле, в частности, задача ориентации отраженной волны в заданном направлении. В качестве одной из возможных можно взять задачу о возбуждении бесконечной плоскости с изменяющимся вдоль нее реактивным поверхностным сопротивлением (реактансом). Тогда обратная задача дифракции может быть поставлена как задача нахождения закона изменения поверхностного реактанса по заданному полю рассеяния при падении плоской электромагнитной волны под определенным углом.

В данной работе обсуждаются общие свойства такой обратной задачи и исследуются некоторые частные случаи.

Для упрощения выкладок мы рассмотрим двумерную задачу, считая, что в декартовой системе координат плоскость  $z = 0$  является реактансной плоскостью и что поля не зависят от координаты  $x$ . Ограничимся изучением структуры поля в виде ТМ-волн по отношению к оси  $z$ , имея в виду возможность распространить без труда рассуждения и на случай ТЕ-волн.

В качестве выражения, устанавливающего связь между падающим и отраженным полями и распределением поверхностного импеданса, возьмем соотношение (8.20) из [1]:

$$Z(y) = \frac{E_y(y, 0)}{H_x(y, 0)} = \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - F^o(x)] e^{-ixy} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) + F^o(x)] \frac{e^{-ixy}}{\sqrt{x^2 - k^2}} dx}. \quad (1)$$

Вводимые здесь нами функции  $F^o(x)$  и  $f(x)$ , являющиеся спектральными плотностями составляющей  $E_y$  падающего и отраженного полей, соответствуют отношениям  $\frac{F^o(x)}{x}$  и  $\frac{f(x)}{x}$  в обозначениях цитируемой монографии [1].

Мы будем интересоваться лишь случаями, когда искомым поверхностный импеданс будет реактивным,  $Z(y) = iX(y)$ . Это условие приво-

дит к некоторой связи между падающим и отраженным полями. Чтобы установить эту связь, выделим в числителе и знаменателе выражения (1) действительные и мнимые части следующим образом:

$$Z(y) = \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{a(y) + ib(y)}{c(y) + id(y)},$$

и запишем условие реактивности импеданса в виде

$$a(y) d(y) = b(y) c(y). \quad (2)$$

При выделении действительных и мнимых частей, обозначаемых индексами «д» и «м» соответственно, разделим спектральные плотности на две части:

$$F^{\alpha}(x) = \begin{cases} F_1(x) & (|x| < k) \\ F_2(x) & (|x| > k) \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (|x| < k) \\ f_2(x) & (|x| > k) \end{cases}. \quad (3)$$

Кроме того, каждую из функций в (3) разобьем на четные и нечетные функции, обозначив их индексами «ч» и «н» соответственно.

Рассмотрим вместо (2) два условия: первое—для четных функций переменной  $y$ , второе—для нечетных функций. С учетом обозначений (3) эти два условия примут вид

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^k (f_{1д}^ч - F_{1д}^ч) \cos xy \, dx + \int_k^{\infty} (f_{2д}^ч - F_{2д}^ч) \cos xy \, dx \right] \left[ \int_k^{\infty} (f_{2м}^ч + F_{2м}^ч) \times \right. \\ & \quad \times \frac{\cos xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx - \left. \int_0^k (f_{1д}^ч + F_{1д}^ч) \frac{\cos xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right] + \\ & + \left[ \int_0^k (f_{1м}^н - F_{1м}^н) \sin xy \, dx + \int_k^{\infty} (f_{2м}^н - F_{2м}^н) \sin xy \, dx \right] \times \\ & \times \left[ - \int_k^{\infty} (f_{2д}^н + F_{2д}^н) \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx - \int_0^k (f_{1м}^н + F_{1м}^н) \frac{\sin xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right] = \\ & = \left[ \int_0^k (f_{1м}^ч - F_{1м}^ч) \cos xy \, dx + \int_k^{\infty} (f_{2м}^ч - F_{2м}^ч) \cos xy \, dx \right] \times \quad (4a) \\ & \times \left[ \int_k^{\infty} (f_{2д}^ч + F_{2д}^ч) \frac{\cos xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx + \int_0^k (f_{1м}^ч + F_{1м}^ч) \frac{\cos xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right] - \\ & - \left[ \int_0^k (f_{1д}^н - F_{1д}^н) \sin xy \, dx + \int_k^{\infty} (f_{2д}^н - F_{2д}^н) \sin xy \, dx \right] \times \\ & \times \left[ \int_k^{\infty} (f_{2м}^н + F_{2м}^н) \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx - \int_0^k (f_{1д}^н + F_{1д}^н) \frac{\sin xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right]; \\ & \left[ \int_0^k (f_{1д}^ч - F_{1д}^ч) \cos xy \, dx + \int_k^{\infty} (f_{2д}^ч - F_{2д}^ч) \cos xy \, dx \right] \times \\ & \times \left[ - \int_k^{\infty} (f_{2м}^ч + F_{2м}^ч) \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx - \int_0^k (f_{1м}^ч + F_{1м}^ч) \frac{\sin xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \int_0^k (f_{1M}^H - F_{1M}^H) \sin xy \, dx + \int_k^\infty (f_{2M}^H - F_{2M}^H) \sin xy \, dx \right] \times \\
 & \cdot \left[ \int_k^\infty (f_{2M}^H + F_{2M}^H) \frac{\cos xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx - \int_0^k (f_{1L}^H + F_{1L}^H) \frac{\cos xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right] = \quad (46) \\
 & = \left[ \int_0^k (f_{1M}^H - F_{1M}^H) \cos xy \, dx + \int_k^\infty (f_{2M}^H - F_{2M}^H) \cos xy \, dx \right] \times \\
 & \times \left[ \int_k^\infty (f_{2M}^H + F_{2M}^H) \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx - \int_0^k (f_{1L}^H + F_{1L}^H) \frac{\sin xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right] - \\
 & - \left[ \int_0^k (f_{1L}^H - F_{1L}^H) \sin xy \, dx + \int_k^\infty (f_{2L}^H - F_{2L}^H) \sin xy \, dx \right] \times \\
 & \times \left[ \int_k^\infty (f_{2L}^H + F_{2L}^H) \frac{\cos xy}{\sqrt{x^2 - k^2}} \, dx + \int_0^k (f_{1M}^H + F_{1M}^H) \frac{\cos xy}{\sqrt{k^2 - x^2}} \, dx \right].
 \end{aligned}$$

При заданном падающем поле и заданной асимптотике отраженного поля в дальней зоне, определяемой функцией  $f_1(x)$ , соотношения (4 а) и (4 б) представляют собой систему двух нелинейных интегральных уравнений относительно четырех неизвестных функций  $f_{2L}^H, f_{2L}^H, f_{2M}^H$  и  $f_{2M}^H$ . Недоопределенность системы (4 а), (4 б) позволяет задать, например, функции  $f_{2L}^H$  и  $f_{2M}^H$ , что превращает систему (4 а), (4 б) в систему линейных интегральных уравнений относительно функций  $f_{2L}^H$  и  $f_{2M}^H$ . Можно видеть, что для нахождения распределения реактанса  $X(y)$  нет необходимости решать систему уравнений (4 а), (4 б), а достаточно лишь установить существование решения при заданных функциях  $f_{2L}^H$  и  $f_{2M}^H$ .

В случае падения плоской волны на реактансную плоскость спектральная плотность падающего поля записывается в виде  $F^0(x) = A\delta(x - x_0)$ . Отраженное поле мы также будем представлять в виде дискретного набора плоских волн  $f(x) = \sum_n B_n \delta(x - x_n)$ . В результате система интегральных уравнений (4 а), (4 б) превращается в систему функциональных уравнений со сдвигом. Анализ еще более упрощается, если распределение поля симметрично относительно плоскости  $y = 0$ . При этом все нечетные функции обращаются в нуль, и уравнение (4 б) удовлетворяется тождественно.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда на реактансную плоскость нормально падает плоская волна, а отражаются две плоские волны под углами  $\pm \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\pm x_1}{k}\right)$ . Пусть имеется также плоская волна, отражающаяся по нормали к реактансной плоскости. Таким образом, спектральные плотности полей запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 F_{1M}^H(x) &= A_n \delta(x - 0), & F_{1L}^H(x) &= F_{2L}^H(x) = F_{2M}^H(x) = 0, \\
 f_{1L}^H(x) &= B_L \delta(x - 0) + C_L [\delta(x - x_1) + \delta(x + x_1)], & (5) \\
 f_{1M}^H(x) &= B_M \delta(x - 0) + C_M [\delta(x - x_1) + \delta(x + x_1)].
 \end{aligned}$$

В соответствии с имеющимся произволом зададим функцию  $f_{2m}^u(x)$  в виде  $f_{2m}^u(x) = D_m [\delta(x - x_2) + \delta(x + x_2)]$ , где  $|x_2| > k$ . Подставляя эти данные в уравнение (4 а), получим

$$\begin{aligned} & b_1(\eta) f_{2k}^u(\eta + x_2) - b_2(\eta) f_{2k}^u(\eta - x_2) - b_3(\eta) f_{2k}^u(\eta + x_1) - \\ & - b_4(\eta) f_{2k}^u(\eta - x_1) - b_5(\eta) f_{2k}^u(\eta) = a_0 \delta(\eta - 0) + a_1 [\delta(\eta - x_1) + \\ & + \delta(\eta + x_1)] + a_2 [\delta(\eta - 2x_1) + \delta(\eta + 2x_1)] + a_3 [\delta(\eta - x_2) + \\ & + \delta(\eta + x_2)] + a_4 [\delta(\eta + x_1 - x_2) + \delta(\eta - x_1 + x_2)] + \\ & + a_5 [\delta(\eta - x_1 - x_2) + \delta(\eta + x_1 + x_2)], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} b_1(\eta) &= D_m \left[ \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - k^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\eta + x_2)^2 - k^2}} \right], \\ b_2(\eta) &= D_m \left[ -\frac{1}{\sqrt{x_2^2 - k^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\eta - x_2)^2 - k^2}} \right], \\ b_3(\eta) &= \frac{C_d}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} + \frac{C_m}{\sqrt{k^2 - (\eta + x_1)^2}}, \\ b_4(\eta) &= \frac{C_d}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} + \frac{C_m}{\sqrt{k^2 - (\eta - x_1)^2}}, \\ b_5(\eta) &= \frac{B_d}{k} + \frac{B_m - A_m}{\sqrt{\eta^2 - k^2}}, \\ a_0 &= \frac{B_d^2 + B_m^2 - A_m^2}{k} + 2 \frac{C_d^2 + C_m^2}{\sqrt{k^2 - x_1^2}}, \\ a_1 &= \frac{B_d C_d + C_m (B_m - A_m)}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} + \frac{B_d C_d + C_m (B_m + A_m)}{k}, \\ a_2 &= \frac{C_d^2 + C_m^2}{\sqrt{k^2 - x_1^2}}, \quad a_3 = D_m \left[ \frac{A_m + B_m}{k} - \frac{B_d}{\sqrt{x_2^2 - k^2}} \right], \\ a_4 &= D_m \left[ \frac{C_m}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} - \frac{C_d}{\sqrt{x_2^2 - k^2}} \right] = a_5. \end{aligned}$$

Уравнение (6) должно удовлетворяться при всех значениях  $\eta$ . При  $\eta = 0$  оно принимает вид

$$\frac{A_m^2}{k} = \frac{B_d^2 + B_m^2}{k} + 2 \frac{C_d^2 + C_m^2}{\sqrt{k^2 - x_1^2}}. \quad (7)$$

Выполнение равенства (7) требует существования баланса мощностей падающей волны и волны, отраженной по нормали и под углами  $\pm \theta_1$ . Если равенство (7) выполнено, то из уравнения (6) при всех других значениях  $\eta$  определяется функция  $f_{2k}^u$ , являющаяся бесконечным набором  $\delta$ -функций. При достаточно больших значениях  $\eta$  уравнение (6) пред-

ставляет собой рекуррентное соотношение, с помощью которого можно определить амплитуды медленных гармоник со все возрастающими волновыми числами:

$$f_{2д}^4(\eta + x_2) \approx -f_{2д}^4(\eta - x_2) + \frac{C_d \sqrt{x_2^2 - k^2}}{D_m \sqrt{k^2 - x_1^2}} f_{2д}^4(\eta + x_1) + \frac{C_d \sqrt{x_2^2 - k^2}}{D_m \sqrt{k^2 - x_1^2}} f_{2д}^4(\eta - x_1) + \frac{B_d \sqrt{x_2^2 - k^2}}{D_m k} f_{2д}^4(\eta). \quad (8)$$

Выбрав  $D_m$  достаточно большим, можно добиться того, чтобы амплитуды медленных гармоник в (8) не возрастали с ростом их волнового числа.

Искомое распределение реактанса находим по формуле

$$X(y) = \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{D_m \cos x_2 y + 0,5 B_m + C_m \cos x_1 y - 0,5 A_m}{D_m \frac{\cos x_2 y}{\sqrt{x_2^2 - k^2}} - \frac{B_d}{2k} - \frac{C_d \cos x_1 y}{\sqrt{k^2 - x_1^2}}}. \quad (9a)$$

Представляет интерес рассмотрение более частного случая, когда  $D_m = C_d = 0$ . При этом распределение импеданса имеет вид постоянной составляющей с косинусоидальной модуляцией:

$$X(y) = W_0 (X_0 + h \cos x_1 y), \quad (9b)$$

где

$$W_0 = \frac{k}{\omega \varepsilon}, \quad X_0 = \frac{A_m - B_m}{B_d}, \quad h = -\frac{2C_m}{B_d}.$$

Уравнение (6) в этом случае принимает вид разностного уравнения для значений  $0 \leq \eta < \infty$ :

$$\varphi(\eta) [-kX_0 + \sqrt{\eta^2 - k^2}] - \frac{kh}{2} [\varphi(\eta - x_1) + \varphi(\eta + x_1)] = Q(\eta), \quad (10)$$

где

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} 0 & (\eta < k) \\ \frac{f_{2д}^4(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - k^2}} & (\eta \geq k) \end{cases},$$

$$Q(\eta) = a_0 \delta(\eta - 0) + a_1 \delta(\eta - x_1) + a_2 \delta(\eta - 2x_1),$$

$$a_0 = \frac{B_m^2 + B_d^2 - A_m^2}{2k} + \frac{C_m^2}{\sqrt{k^2 - x_1^2}},$$

$$a_1 = \frac{C_m}{2} \left[ \frac{A_m + B_m}{k} + \frac{B_m - A_m}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} \right], \quad a_2 = \frac{C_m^2}{2 \sqrt{k^2 - x_1^2}}.$$

Проанализируем для этого простого случая вид решения и условия его существования. Разделяя положительную полуось  $\eta$  на четыре характерных участка, получаем следующие равенства:

$$0 \leq \eta < k - x_1, \quad 0 = Q(\eta); \quad (11a)$$

$$k - x_1 \leq \eta < k, \quad -\frac{kh}{2} \varphi(\eta + x_1) = Q(\eta); \quad (11б)$$

$$k \leq \eta < k + x_1, \quad \varphi(\eta) [-kX_0 + \sqrt{\eta^2 - k^2}] - \frac{kh}{2} \varphi(\eta + x_1) = Q(\eta); \quad (11в)$$

$$k + x_1 \leq \eta, \quad \varphi(\eta) [-kX_0 + \sqrt{\eta^2 - k^2}] - \frac{kh}{2} [\varphi(\eta + x_1) + \varphi(\eta - x_1)] = Q(\eta). \quad (11г)$$

Необходимым условием существования решения уравнения (10) является выполнение равенства (11 а). При  $\eta = 0$  это равенство означает баланс мощности (7). В зависимости от значения  $x_1$  на отрезок  $0 \leq \eta < k - x_1$  могут попадать и две другие  $\delta$ -функции, содержащиеся в функции  $Q(\eta)$ . При  $k < 2x_1 < 2k$  для выполнения (11 а) достаточно обеспечения баланса мощности (7). При  $k/3 < x_1 < k - x_1$  необходимо также выполнение равенства  $a_1 = 0$ . При  $0 < x_1 < k/3$  решение возможно лишь при  $C_m = 0$ , т. е. получить отраженный луч в этом секторе углов при косинусоидальной модуляции реактанса невозможно.

Для определенности рассмотрим случай  $k < 2x_1 < 2k$ , когда для выполнения равенства (11 а) достаточно баланса мощности. Из (11 б) можно определить неизвестную функцию  $\varphi(\eta)$  на отрезке  $k < \eta < k + x_1$

$$\varphi(\eta) = -\frac{2a_1}{kh} \delta(\eta - 2x_1). \quad (12)$$

С помощью уравнения (11 в) находим функцию  $\varphi(\eta)$  на отрезке  $k + x_1 < \eta < k + 2x_1$  по определенному ранее значению этой функции (12):

$$\varphi(\eta) = -\frac{2}{kh} \{a_2 \delta(\eta - 3x_1) - \varphi(\eta - x_1) [-kX_0 + \sqrt{(\eta - x_1)^2 - k^2}]\}. \quad (13)$$

Дальнейшее поведение функции  $\varphi(\eta)$  можно определить с помощью рекуррентного соотношения (11 г). Таким образом, функция  $\varphi(\eta)$  является бесконечным набором дельта-функций вида

$$\varphi(\eta) = \sum_{m=2}^{\infty} a_m \delta(\eta - mx_1), \quad (14)$$

где первые два коэффициента  $a_2$  и  $a_3$  определяются из уравнения (10) как

$$a_2 = -\frac{C_m}{kh} \left[ \frac{B_m - A_m}{\sqrt{k^2 - x_1^2}} + \frac{B_m + A_m}{k} \right]; \quad (15)$$

$$a_3 = -\frac{2}{kh} \left[ a_2 + \frac{2a_1}{kh} \left( -kX_0 + \sqrt{(2x_1)^2 - k^2} \right) \right]. \quad (16)$$

Амплитуды гармоник с номерами больше трех находятся по формуле (11 г):

$$a_m = -a_{m-1} \frac{2}{h} \left[ X_0 + \sqrt{\frac{(m-1)^2 x_1^2}{k^2} - 1} \right] - a_{m-2}. \quad (17)$$

Рассмотренный нами пример интересен прежде всего потому, что позволяет сравнить решение обратной задачи в такой постановке с ре-

результатами анализа поля над плоскостью с импедансом, модулированным по закону косинуса [2-4]. Проведенный в работе [4] анализ нормального падения плоской волны на плоскость с реактансом, меняющимся по закону (9б), показал, что спектральная плотность отраженного поля определяется выражением

$$f(x) \doteq A_0 \delta(x-0) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m [\delta(x - mx_1) + \delta(x + mx_1)], \quad (18)$$

где амплитуды гармоник связаны между собой следующими соотношениями:

$$A_0 \left( \frac{1 + iX_0}{ih} \right) + A_1 = \frac{1 - iX_0}{ih}; \quad (19a)$$

$$A_0 + \frac{2}{ih} \left[ iX_0 + \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{k^2}} \right] A_1 + A_2 = -1; \quad (19б)$$

$$A_m + \frac{2}{ih} \left[ iX_0 + \sqrt{1 - \frac{(m+1)^2 x_1^2}{k^2}} \right] A_{m+1} + A_{m+2} = 0 \quad (19в)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots).$$

Несколько первых гармоник, для которых  $mx_1 < k$ , являются плоскими волнами, распространяющимися под углами  $\pm \arcsin\left(\frac{mx_1}{k}\right)$  к нормали, а остальные гармоники соответствуют поверхностным волнам. Сравнивая (19а) — (19в) с (15) — (17), можно убедиться в их полном соответствии.

Таким образом, при косинусоидальной модуляции реактанса получить в отраженном поле один наклонный луч (не считая луча, отраженного в направлении нормали) удается лишь в случаях, когда угол наклона от нормали  $\theta_1 > \arcsin(k/3)$ . В противном случае отраженное поле будет иметь многолепестковый характер.

Для практики интересен случай, когда в отраженном поле нет волны, направленной в сторону падения входящей волны. В нашем случае это означает, что  $B_d = B_m = 0$ . Если  $D_m \neq 0$ , то единственным условием существования решения (6) будет выполнение баланса мощности (7). При  $D_m = 0$  решение будет существовать, если  $x_1 \geq k/3$ , и не будет существовать при  $x_1 < k/3$  (при  $k/3 \leq x_1 \leq k/2$  возникает связь между фазами падающего и отраженного полей вида  $C_d/C_m = A_m/A_d$ ).

В несимметричном случае, когда плоская волна, падающая наклонно на реактансную плоскость, полностью переотражается под некоторым заданным углом, (4а), (4б) превращаются в систему двух функциональных уравнений со сдвигом. Анализ показывает, что при задании функций  $f_{2m}^u$  и  $f_{2n}^d$  в виде соответственно четного и нечетного наборов  $\delta$ -функций единственным условием существования решения получающейся системы является баланс мощности между падающей и отраженной волнами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967, стр. 259.
- 2 В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1065 (1961).



3. Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 1, № 1, 65 (1955).
4. Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 4, № 1, 47 (1958).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
20 сентября 1971 г.

## INVERSE PROBLEM OF DIFFRACTION FOR REACTANCE PLANE

*A. F. Chaplin, A. M. Aksel'rod*

The inverse problem of diffraction in application to a plane impedance surface is considered. An analytical expression is derived for the distribution of the reactance impedance providing formation of the given scattering field. The cases of re-reflection of a plane wave incident on the plane at the given angle are investigated.

---

УДК 621.372.8.09

## КВАЗИОПТИЧЕСКАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ВОЛНОВОДОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕФЛЕКТОРОВ

С. Н. Власов, И. М. Орлова, М. И. Петелин

Описана конструкция и приведен расчет квазиоптического волнового трансформатора, преобразующего одну из собственных волн сверхразмерного волновода кругового сечения в собственную волну другого волновода кругового сечения, отличающуюся от первой радиальным индексом. Экспериментально осуществлено преобразование волны  $H_{01}$  в волну  $H_{02}$  с коэффициентом передачи по мощности  $\eta = 0,74$ .

Применение существующих методов преобразования волн (таких, как плавное изменение поперечного сечения [1] или импеданса стенок волноводов [2], использование неоднородностей в волноводе, связывающих две волны [3], использование связанных волн, распространяющихся в разных волноводах [4] или в одном и том же волноводе [5]) к волноводам большого — по сравнению с длиной волны  $\lambda$  — сечения сталкивается с трудностями, обусловленными необходимостью обеспечения высокой точности изготовления волноводных трансформаторов. Несоблюдение этих требований влечет за собой потери мощности на переизлучение в паразитные типы волн.

Для преобразования собственных волн волноводов увеличенного сечения друг в друга, а также в квазиоптические волновые пучки можно использовать квазиоптические методы [6]. В настоящей работе для трансформации одной из собственных волн сверхразмерного волновода кругового сечения в другую, отличающуюся от первой лишь радиальным индексом, предлагается преобразователь в виде аксиально-симметричного рефлектора (рис. 1). Принцип действия его может быть рассмотрен на основе геометрикооптических представлений.

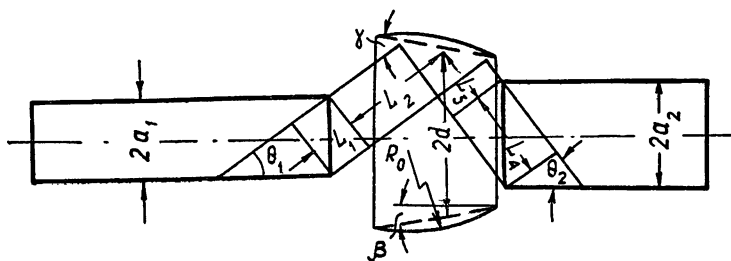


Рис. 1. Аксиально-симметричный волновой трансформатор.

**Геометрооптическое представление.** Представим собственную волну волновода кругового сечения в виде суперпозиции плоских волн (концепция Бриллюэна), волновые векторы  $k$  которых образуют одинаковый угол  $\theta = \arcsin \frac{x_{mn}}{k}$  с осью  $z$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $x_{mn}$  — поперечное волновое

число (для  $H_{mn}$ -волн  $x_{mn} = v_{mn}/a$ , где  $v_{mn}$  — корень уравнения  $J'_m(v_{mn}) = 0$ ; для  $E_{mn}$ -волн  $x_{mn} = \mu_{mn}/a$ , где  $\mu_{mn}$  — корень уравнения  $J_m(\mu_{mn}) = 0$ ,  $J_m, J'_m$  — функция Бесселя и ее производная соответственно,  $a$  — радиус волновода). При выполнении условия  $m^2 \ll v_{mn}^2$  или  $m^2 \ll \mu_{mn}^2$  поле излучения вблизи открытого конца сверхразмерного волновода представляет собой набор расходящихся волн, ограниченных апертурой волновода и составляющих угол  $\theta$  с осью  $z$ , и описывается  $z$ -компонентой вектор-потенциала (магнитного или электрического)

$$\frac{f(r, z) \exp(j \sqrt{k^2 - h^2} r - jhz + jm\varphi)}{\sqrt{r}},$$

где

$$f(r, z) = g(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi < -a \operatorname{ctg} \theta) \\ A = \text{const} & (-a \operatorname{ctg} \theta < \xi < a \operatorname{ctg} \theta), \\ 0 & (\xi > a \operatorname{ctg} \theta) \end{cases}$$

$$\xi = z - r \operatorname{ctg} \theta.$$

Волнам одного типа (магнитным или электрическим), имеющим одинаковые азимутальные, но различные радиальные индексы, соответствующие волновые пучки, отличающиеся лишь углом  $\theta$  между направлением их распространения и осью  $z$ . Чтобы осуществить преобразование одной из этих волн в волну с другим радиальным индексом, необходимо изменить угол между направлением распространения волновых пучков и осью  $z$ , что достигается посредством конического отражателя (рис. 1). Если образующая отражателя составляет угол  $\beta$  с осью  $z$ , должно выполняться соотношение

$$\beta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2},$$

где  $\theta_2$  и  $\theta_1$  — бриллюэновские углы для волн  $H_{m_2}(E_{m_2})$  в волноводе II и  $H_{m_1}(E_{m_1})$  в волноводе I. Ширина пучков, измеренная перпендикулярно направлению их распространения, должна быть одинаковой для обоих волноводов:

$$a_1 \cos \theta_1 = a_2 \cos \theta_2.$$

Геометрооптический подход может быть использован в качестве нулевого приближения при расчете трансформаторов волн при соблюдении следующих условий.

1. Диаметры волноводов должны быть достаточно велики:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s_1 \lambda}}{2a_1 \cos \theta_1} \ll 1, \quad p_2 = \frac{\sqrt{s_2 \lambda}}{2a_2 \cos \theta_2} \ll 1$$

(здесь  $s_1$  и  $s_2$  — расстояния от центров волноводов до той точки отражателя, в которой пересекаются центральные лучи).

2. Волновые пучки каждого из волноводов должны существовать раздельно в области отражателя. Из-за дифракции пучки расплываются и при значениях параметра  $p \gg 1$  границы их приближаются к асимптотам, составляющим углы  $\alpha = \pm \arcsin \frac{\lambda}{2a_{1,2} \sin \theta_{1,2}}$  с направлениями распространения пучков. В дальней зоне эти углы соответствуют первым нулям диаграмм направленности. Можно считать, что пучки существуют раздельно, если первый нуль диаграммы направленности каждого из пуч-

ков находится с той же стороны от линии  $\theta = 0$ , что и направление главного лепестка. Отсюда следует условие  $\nu_{ml}, \nu_{mp} > \pi$ . Этому условию не удовлетворяет волна  $H_{11}$ : из-за дифракции пучки сливаются при любом диаметре волновода; поэтому излучение, направленное вдоль оси, попадает в волновод II, минуя отражатель, что снижает эффективность преобразования.

**Квазиоптическое приближение.** При геометрикооптическом подходе функция  $f(r, z)$  в выражении для вектор-потенциала зависит только от одной переменной  $\xi = z - r \operatorname{ctg} \theta$ ; в более высоком — квазиоптическом — приближении следует учитывать расплывание волнового пучка. Если поле волны, распространяющейся под углом  $\theta$  к оси  $z$ , на цилиндрической поверхности радиуса  $a_1$  описывается функцией  $f_1(z + a_1 \operatorname{ctg} \theta)$  при  $-l_0 < z + a_1 \operatorname{ctg} \theta < l_0$ , то функция  $f_2(z - a_2 \operatorname{ctg} \theta)$ , описывающая поле волны на цилиндрической поверхности радиуса  $a_2$ , может быть найдена с помощью интеграла Кирхгофа:

$$f_2(z - a_2 \operatorname{ctg} \theta) = \sqrt{\frac{ik \sin^3 \theta}{2\pi(a_1 + a_2)}} \int_{-l_0}^{l_0} f_1(z + a_1 \operatorname{ctg} \theta) \times \\ \times \exp \left[ -\frac{ik \sin^3 \theta}{4(a_1 + a_2)} (z_1 - z)^2 \right] dz_1.$$

Эта формула, полученная в [7] для  $m = 0$ , справедлива при условии  $m^2 \ll \nu_{mn}^2$ .

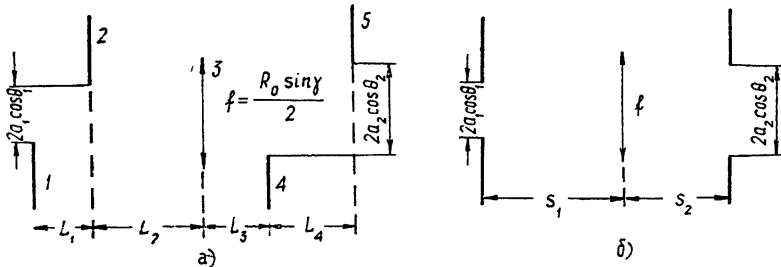


Рис. 2. Эквивалентные схемы преобразователя.

Для уменьшения потерь в предполагаемом преобразователе целесообразно использовать отражатель с фазовой коррекцией. Оптимальный радиус кривизны образующей отражателя и величина коэффициента преобразования могут быть определены из эквивалентной схемы, приведенной на рис. 2 а, где 1, 2, 4, 5 — поглощающие экраны, 3 — линза с фокусным расстоянием  $f = \frac{R_0 \sin \gamma}{2}$ ,  $R_0$  — радиус кривизны образующей отра-

жателя,  $\gamma$  — угол между образующей отражателя и направлением падающего на него лучка. Расстояния  $L_1, L_2, L_3, L_4$  определяются из лучевых соображений (рис. 1) и связаны с геометрическими размерами преобразователя следующими соотношениями:  $L_1 = 2a_1 \sin \theta_1$ ;  $L_2 = d/\sin \theta_1 - a_1 \sin \theta_1$ ;  $L_3 = d/\sin \theta_2 - a_2 \sin \theta_2$ ;  $L_4 = 2a_2 \sin \theta_2$ . При расчете коэффициента трансформации энергии падающего пучка определяется в плоскости 2. Коэффициент возбуждения волновода II зависит от безразмерных параметров  $C_1 = \frac{k(a_1 \cos \theta_1)^2}{L_1}$ ,  $C_2 = \frac{k(a_1 \cos \theta_1)^2}{L_2}$ ,  $C_3 = \frac{ka_1 a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{L_3}$ ,  $C_4 = \frac{k(a_2 \cos \theta_2)^2}{L_4}$  и  $f/L_2$ . В области применимости геометрической

оптики, что соответствует значениям  $C_1, C_2, C_3, C_4 \gg 2\pi$ , коэффициент трансформации стремится к 1\*. Однако, как показывает расчет, даже при  $C_1, C_2, C_3, C_4$  порядка  $\pi$  коэффициент преобразования может быть достаточно высок.

На рис. 3 приведена сосчитанная на ЭВМ зависимость коэффициента возбуждения волновода II по мощности от величины  $f/L_2$  для системы с  $C_1 = 3,7$ ;  $C_2 = 2$ ;  $C_3 = 4,7$ ;  $C_4 = 2,8$  (эти параметры соответствуют экспериментальной модели трансформатора, изображенной на рис. 4, с диаметрами волноводов  $2a_1 = 17,2$  мм,  $2a_2 = 23,6$  мм,  $2d = 30$  мм, предназначенной для преобразования волны  $H_{01}$  в волну  $H_{02}$  на длине волны  $8,35$  мм). Как следует из графика, максимальная величина коэффициента преобразования  $\eta$  равна 0,72 и очень медленно падает при отклонении фокусного расстояния линзы от оптимального значения, для описанной модели равного 19 мм.

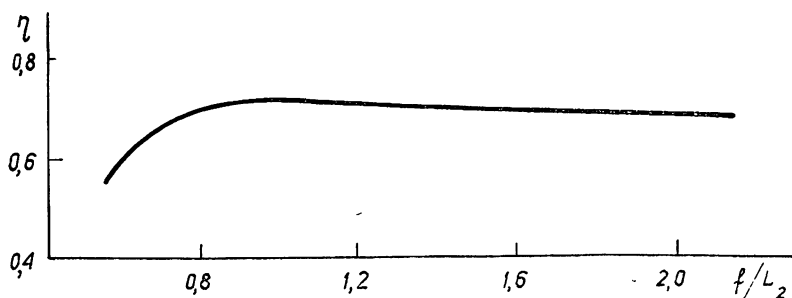


Рис. 3. Расчетная зависимость коэффициента преобразования от фокусного расстояния линзы.

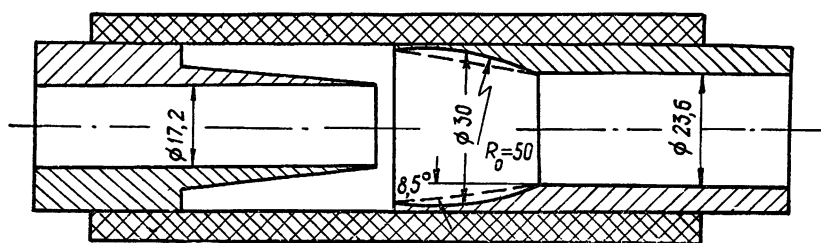


Рис. 4. Экспериментальная модель преобразователя.

**Приближенный метод подбора корректора.** Некритичность коэффициента передачи по отношению к изменению фокусного расстояния корректора позволяет определять фокусное расстояние  $f$  по упрощенной эквивалентной схеме (рис. 2 б). Будем считать, что поле плоской волны обрезается краями волновода не поочередно слева и справа, а одновременно в некотором среднем сечении:  $2a_1 \cos \theta_1$ ,  $2a_2 \cos \theta_2$  — размеры пучков по линиям, проходящим через центры апертур волноводов перпендикулярно направлению распространения пучков; фазовый фронт вдоль этих линий предполагается плоским, а распределение поля П-образным. Аппроксимируем П-образные распределения полей гауссовыми функциями-

\* При больших значениях  $C$  уменьшается дифракционное распыливание пучков; однако волноводы становятся очень многомодовыми, бриллюэновские углы для волн, имеющих одинаковые азимутальные и близкие радиальные индексы, мало отличаются друг от друга, в связи с чем возрастают требования к точности изготовления и юстировки рефлекторов.

ми  $\exp\left(-\frac{x^2}{\omega_{1,2}}\right)$ , где  $\omega_{1,2} = \frac{a_{1,2} \cos \theta_{1,2}}{1,06}$  [8]. При  $s_1 = s_2 = s$  и  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  оптимальное фокусное расстояние  $f$  можно найти по формуле

$$f = \frac{\pi^2 \omega^4}{2\lambda^2 s} + \frac{s}{2}.$$

Для преобразователя, параметры которого приведены выше, найденное таким образом значение  $f$  равно 17,5 мм, соответственно  $R_0 = 50$  мм, что согласуется с более точным расчетом на основе метода интегрального уравнения.

*Полоса преобразования.* Оценка полосы преобразования может быть осуществлена следующим образом. При изменении длины волны  $\lambda$  меняются углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , что приводит к смещению центров пучков волноводов I и II на отражателе. При аппроксимации пучков соответствующими гауссовыми пучками зависимость коэффициента преобразования от длины волны определяется выражением  $\exp\left(-\frac{\Delta^2}{\omega^2}\right)$ , где  $\Delta$  — смещение центров пучков на образующей отражателя, равное

$$\Delta = \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{1}{\sin(\theta_1 + \beta)} (S_1 \operatorname{tg} \theta_1 + S_2 \operatorname{tg} \theta_2),$$

а  $\bar{\omega}$  — полуширина пучков на отражателе.

*Результаты эксперимента.* Экспериментально исследовались волновые преобразователи  $H_{01} \rightarrow H_{02}$ . Схема установки для измерения коэффициента преобразования приведена на рис. 5. Измерение коэффициента преобразования производилось с помощью подвижного поршня, помещавшегося в волновод II. В качестве поршня использовалась коническая втулка, полностью отражающая волну  $H_{02}$  и не влияющая на проходящие волны  $H_{01}$ . Волна  $H_{01}$  излучалась из волновода II практически без отражения, что позволяло рассматривать систему как четырехполюсник. При различных положениях конической втулки определялись с помощью измерительной линии комплексные коэффициенты отражения на входе системы. Точки, изображающие коэффициенты отражения в полярной системе координат, хорошо легли на некоторую окружность. С помощью соответствующих построений [9] был определен коэффициент передачи по мощности данного четырехполюсника, равный (если пренебречь омическими потерями в преобразователе Марье) коэффициенту преобразования исследуемого трансформатора.



Рис. 5 Схема установки для измерения коэффициента преобразования: 1—генератор, 2—измерительная линия, 3—преобразователь Марье, 4, 6—волноводы кругового сечения, 5—конический отражатель, 7—подвижная втулка.

Максимальная величина коэффициента преобразования волны  $H_{01}$  в волну  $H_{02}$  для трансформатора, изображенного на рис. 4, с  $R_0 = 50$  мм достигала величины  $0,74 \pm 0,02$ . Этот результат находится в хорошем согласии с результатами расчета. В модели без фазовой коррекции максимальная величина коэффициента преобразования не превышала 0,6.

На рис. 6 приведена зависимость коэффициента преобразования от длины волны  $\lambda$ . Полосу преобразования не удалось снять полностью, так как она была ограничена со стороны длинных волн полосой преобразователя Марье ( $\lambda < 8,8$  мм). Полоса преобразования, измеренная на уровне  $\eta = 0,8 \eta_{\max}$ , составляет 7% и близка к расчетному значению, равному 8%.

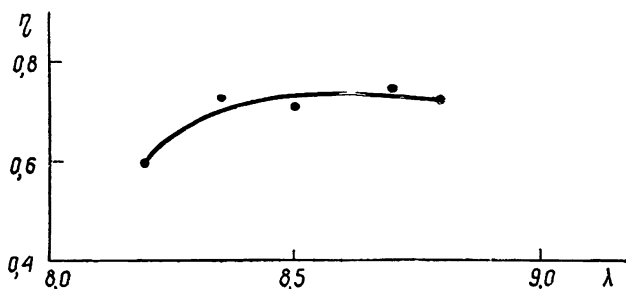


Рис. 6.

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Marie, *Onde electr., Communications presentees au Congres International des Circuits et Antennas Hyperfrequences*, Paris, 2, 471 (1957).
2. Н. П. Керженцева, *Радиотехника и электроника*, 16, № 1, 29 (1971).
3. П. Л. Капица, *Электроника больших мощностей*, сб. 4, изд. Наука, М., стр. 7, 1965.
4. S. E. Miller, *Bell System Techn. J.*, 33, № 3, 661 (1954).
5. Н. Ф. Ковалев, И. М. Орлова, М. И. Петелин, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 11, № 4, 784 (1968).
6. С. Н. Власов, Л. И. Загрядская, Н. Ф. Ковалев, И. М. Орлова, М. И. Петелин, *Тезисы докладов 5-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению радиоволн*, Ленинград, 1970.
7. Б. З. Каценеленбаум, *Радиотехника и электроника*, 8, № 9, 1516 (1963).
8. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Э. М. Попова, Н. М. Шеронова, *Радиотехника и электроника*, 11, № 4, 750 (1966).
9. Э. Гинзтон, *Измерения на сантиметровых волнах*, ИЛ, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
3 апреля 1972 г.

### QUASI-OPTICAL TRANSFORMATION OF NATURAL WAVES OF CIRCULAR-SECTION WAVEGUIDES BY MEANS OF AXIALLY-SYMMETRIC REFLECTORS

*S. N. Vlasov, I. M. Orlova, M. I. Petelin*

The design is described and the calculation is made of the quasi-optical wave transformer which transforms one of natural waves of a super-dimensional circular-section waveguide into the natural wave of the other circular-section waveguide differing from the first in the radial index. The  $H_{01}$  wave transformation into  $H_{02}$  wave with the power transmission coefficient  $\eta=0.74$  is experimentally realized.

УДК 621.372.8.09

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ СО СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ ВСТАВКАМИ

С. И. Ланга

Рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в круглом волноводе с периодическими кольцевыми спирально проводящими вставками. Электродинамическая граничная задача сводится к задаче Римана — Гильберта. При узких спирально проводящих вставках, или узких сплошных кольцах, или когда период волновода мал по сравнению с его диаметром, получено приближенное дисперсионное уравнение квазисобственных волн этого волновода. Исследованы волноводные волны типа, близкого к волнам  $H_{01}$  и  $E_{01}$ , сплошного круглого волновода. Рассмотрены также медленные волны такого волновода.

Рассмотрим упрощенную модель круглого волновода со спиральными вставками. Эта модель представляет собой бесконечную периодическую последовательность чередующихся круглых сплошных металлических колец и аксиально симметричных спирально проводящих колец, расположенных вплотную друг к другу. Стенки колец бесконечно тонкие. Круглый волновод со спиральными вставками интересен в связи с применением подобных элементов в волноводной технике [1] и в качестве замедляющих систем ЛБВ. В том и в другом случае используются так называемые квазисобственные волны открытого волновода, постоянные распространения которых в отличие от собственных волн сплошного волновода уже не являются чисто вещественными.

Для последовательного изучения природы квазисобственных волн в открытом волноводе необходимо решать задачу о его возбуждении, как это сделано, например, для кольцевого волновода [2]. При этом оказывается, что при достаточно узких щелях поле источника в открытом волноводе в определенных областях представляется в основном суперпозицией его квазисобственных волн. Не повторяя подобного строгого анализа, при построении решения соответствующей электродинамической граничной задачи будем сразу искать поле в волноводе в виде квазисобственной волны. Из условия существования такого решения получим дисперсионное уравнение квазисобственных волн.

Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  так, чтобы ось  $Oz$  совпала с осью волновода и начало координат было внутри одного из спирально проводящих колец и равноудалено от его кромок. На рис. 1 показаны принятые обозначения:  $\tau$  — направление,  $\theta$  — угол спиральной проводимости,  $L$  — период волновода,  $d$  — ширина спирально проводящего кольца,  $2a$  — диаметр волновода.

Будем использовать комплексные амплитуды, а временной множитель  $e^{-i\omega t}$  везде опускать.

Электромагнитное поле в нашей системе  $E, H$  удобно представлять через электрический и магнитный векторы Герца с единственными отличными от нуля  $z$ -составляющими  $\Pi^e(\rho, z)$  и  $\Pi^m(\rho, z)$ .



Учитывая периодичность волновода, функции  $\Pi^{e,m}$  будем искать в виде

$$\Pi^{e,m}(\rho, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{e,m} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(p_n a) J_0(p_n \rho) \\ J_1(p_n a) H_0^{(1)}(p_n \rho) \end{array} \right\} \exp(ih_n z). \quad (1)$$

В этом представлении при  $\rho \leq a$  следует брать верхнюю строчку, а при  $\rho \geq a$  — нижнюю. Для  $\Pi^e$  индекс  $\gamma = 0$ , для  $\Pi^m$  —  $\gamma = 1$ . Здесь  $J_n(y)$  и  $H_n^{(1)}(y)$  — функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно,  $p_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}$ ,  $h_n = \lambda + \frac{2\pi n}{L}$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $c$  — скорость света; выбрана та ветвь корня, для которой  $\text{Im } p_n > 0$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  вдоль вещественной оси.

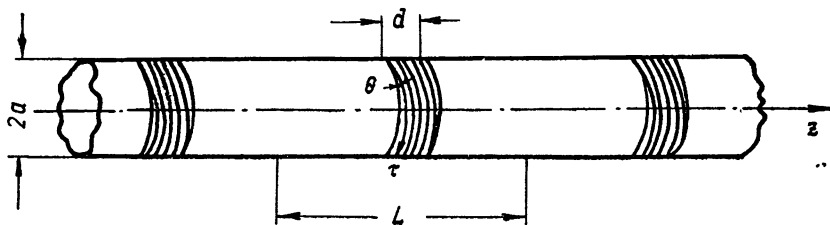


Рис. 1.

Мы будем искать значения параметра  $\lambda$ , при которых существует нетривиальное решение однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющее условию конечности энергии в любом ограниченном объеме и граничным условиям на кольцах следующего типа: на сплошных кольцах  $E_\varphi = E_z = 0$ , на спирально проводящих —  $E_\tau = 0$ ,  $H_\tau$  непрерывно.

Поле, построенное с помощью  $\Pi^{e,m}$  в виде (1), уже удовлетворяет условию непрерывности составляющих электрического вектора  $E_\varphi$  и  $E_z$  во всем пространстве. Оставшиеся граничные условия — равенство нулю  $E_\tau$  на всем цилиндре  $\rho = a$ , непрерывность  $H_\tau$  на спирально проводящих кольцах и равенство нулю  $E_\varphi$  и  $E_z$  на сплошных кольцах — будут выполнены, если коэффициенты  $\alpha_n^{e,m}$  удовлетворяют следующей системе функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{h_n} \exp(ih_n z) = 0 \quad \left( \frac{d}{2} < |z| \leq \frac{L}{2} \right); \quad (2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{h_n} \left[ \frac{1}{J_1 H_1^{(1)}} + \frac{x^2 \text{ctg}^2 \theta}{p_n^2 a^2 J_0 H_0^{(1)}} \right] \exp(ih_n z) = 0 \quad \left( |z| < \frac{d}{2} \right), \quad (2a)$$

$$\alpha_n^e = - \frac{i x \text{ctg} \theta}{h_n a p_n^2 J_0 H_0^{(1)}} x_n, \quad \alpha_n^m = \frac{x_n}{h_n p_n J_1 H_1^{(1)}}.$$

Здесь и далее, если оговорено противное, у функций Бесселя опущен аргумент  $p_n a$ ;  $x = ka$ .

Из поведения функций Бесселя при большом значении аргумента следует, что при больших  $|n|$  функция в квадратных скобках уравнения (2a) при  $\theta \neq 0$  ведет себя как  $|n|$ , в то время как при  $\theta = 0$  она есть  $O\left(\frac{1}{|n|}\right)$ . Поэтому при  $\theta = 0$  систему (2), (2a) следует решать сущест-

венно иначе, чем при  $\theta \neq 0$ . Наш волновод при  $\theta = 0$  эквивалентен для магнитных волн такому же сплошному, а для электрических волн — кольцевому, соответствующими анизотропно проводящими вставками [2]. Учитывая это, считаем в дальнейшем  $\theta \neq 0$ .

Введем обозначения

$$\varepsilon_n = 1 + \frac{i}{\pi h_n a} \frac{|n|}{n} \left[ \frac{1}{J_1 H_1^{(1)}} + \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\rho_n^2 a^2 J_0 H_0^{(1)}} \right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\frac{|0|}{0} = 1, \quad \Delta = \frac{L}{2\pi a}, \quad \nu = \frac{\lambda L}{2\pi}.$$

Используя асимптотические представления для функций Бесселя, можно показать, что

$$|\varepsilon_n| < C \Delta^2 \frac{1 + x^2}{\sin^2 \theta [1 + |n + \nu|^2]}, \quad (3)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от параметров задачи.

Продифференцируем уравнение (2) по  $z$  и учтем равенство, которое получается из него при  $z = L/2$ . Полученные уравнения совместно с уравнением (2а) эквивалентны исходной системе (2), (2а). В результате, переходя к новой координате  $\psi = \frac{2\pi}{L} z$ , имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\psi} = 0 \quad \left( \frac{\pi d}{L} < |\psi| \leq \pi \right); \quad (4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n e^{in\psi} \quad \left( |\psi| < \frac{\pi d}{L} \right); \quad (4a)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{x_m}{m+\nu} = 0. \quad (4б)$$

Согласно результатам работы [3] уравнения (4), (4а) эквивалентны следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{m-1}^{n-1} + x_0 P_m \quad (m \neq 0), \quad (5)$$

в которой введены обозначения

$$V_{m-1}^{n-1} = \frac{m}{2(m-n)} [P_{m-1} P_n - P_m P_{n-1}],$$

$P_\nu = P_\nu(u)$  — функции Лежандра 1-го рода,  $u = \cos \frac{\pi d}{L}$ .

Подставим в соотношение (4б) вместо  $x_m$  их выражения через правые части равенств (5) и произведем суммирование, тогда придем к следующей системе:

$$x_m = x_0 P_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{m-1}^{n-1} \quad (m \neq 0); \quad (6)$$

$$2x_0 P_{\nu-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_n^\nu = 0. \quad (6a)$$

Здесь

$$W_n^\nu = \frac{\nu}{n + \nu} [P_n P_\nu - P_{n-1} P_{\nu-1}].$$

Обозначим

$$q = \max_{\nu m} \frac{1}{\left| 1 - \varepsilon_m \frac{|m|}{m} V_{m-1}^{m-1} \right|} \sum_{n \neq 0, m} |\varepsilon_n V_{m-1}^{n-1}|.$$

Используя неравенства (3) и оценки для функций Лежандра, можно показать, что

$$q < C_1(x) \Delta^2 \sqrt{1 - u^2} [1 + \ln(1 + |\nu|)].$$

При густом расположении колец ( $\Delta \ll 1$ ) либо при узких тех или иных кольцах ( $1 - u^2 \ll 1$ ) величина  $q \ll 1$ . В этом случае решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (6) может быть получено методом последовательных приближений в предположении, что  $x_0$  известно. Затем найденные  $x_m$  ( $m \neq 0$ ) подставим в уравнение (6a). Из условия наличия нетривиального решения задачи получим искомого дисперсионное уравнение. Ограничиваясь первым приближением, будем иметь

$$P_{\nu-1} + P_\nu + (1 - \varepsilon_0)(P_{\nu-1} - P_\nu) + \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_n^\nu \frac{P_n + \eta_n + \varepsilon_0 (V_{n-1}^{-1} + \eta_n^0)}{1 - \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_{n-1}^{n-1}} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\eta_n$  и  $\eta_n^0$  — малые величины порядка  $\sqrt{1 - u^2} q$ .

Используя представления функций Лежандра в окрестностях точек  $\pm 1$  и при малых значениях индекса, пренебрегаем в уравнении (7) членами порядка  $\Delta^2(1 - u^2) \left| \ln \frac{1+u}{4} \right|$ . Теперь дисперсионное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{J_1(y) H_1^{(1)}(y)} + \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{y^2 J_0(y) H_0^{(1)}(y)} = -i \pi^2 \delta, \quad (8)$$

где  $y = p_0 a$ ,  $\delta = - \left( \pi \Delta \ln \frac{1+u}{2} \right)^{-1}$  при  $\Delta \ll 1$  или  $1 - u \ll 1$ ; в случае  $1 + u \ll 1$

$$\delta = - \frac{1}{\pi \Delta} \left[ \ln \frac{1+u}{2} + \psi(\nu) + \psi(-\nu) - 2\psi(0) - \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \frac{\varepsilon_n}{(n+\nu)(1-\varepsilon_n)} \right]^{-1}$$

и  $\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z+1)}{dz}$  — логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции. Учи-

тывая малость соответствующих членов, параметр  $\delta$  можно считать в первом приближении не зависящей от  $\lambda$  величиной.

Уравнение (8) получено нами при угле  $\theta$ , достаточно большом (так как при малом  $\theta$   $\varepsilon_n$  (см. (3)) велики). В общем случае произвольных  $\theta \neq 0$  решение функциональной системы (2), (2a) можно свести к решению систем, подобных системе (4), (4a), но с другими  $\varepsilon_n$ , которые ко-

нечны при всех  $\theta$  [4]. При этом оказывается, что дисперсионное уравнение (8) справедливо для всех  $\theta \neq 0$ .

Рассмотрим сначала решения дисперсионного уравнения (8), которые в сплошном волноводе соответствуют быстрым волнам. Практический интерес в этом смысле представляет, очевидно, только случай узких спирально проводящих колец (круглый волновод со спиральными фильтрами [1]).

Будем искать решения уравнения (8) методом возмущений относительно наименьшего отличного от нуля корня уравнения  $J_1(y) = 0$ ,  $y_0 \approx \approx 3,832$  или относительно наименьшего корня уравнения  $J_0(y) = 0$ ,  $\tilde{y}_0 \approx \approx 2,405$ , считая, что  $x > y_0$  в первом и  $x > \tilde{y}_0$  во втором случае. Полученные решения соответствуют волнам, близким к волнам  $H_{01}$  и  $E_{01}$  сплошного круглого волновода. В этом смысле рассматриваемые волны можно называть «магнитной  $H_{01}$ » и «электрической  $E_{01}$ » волнами в исследуемом волноводе, хотя в действительности обе они являются смешанными.

Найденные таким образом решения имеют вид  $\left( \varepsilon = \frac{2}{\pi \delta} \approx \frac{\pi a^2}{4 La} \right)$

$$y \approx y_0 - \varepsilon \frac{y_0}{4} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{3y_0}{32} - \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta [N_0 + iJ_0]}{8\pi y_0 J_0 [J_0^2 + N_0^2]} + \frac{\pi y_0^3}{32} [J_0 N_0 - iJ_0^2] \right\}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y} \approx \tilde{y}_0 - \varepsilon \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{4\tilde{y}_0} + \varepsilon^2 \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{8\tilde{y}_0} \left\{ \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{4\tilde{y}_0^2} - \frac{N_1 + iJ_1}{\pi J_1 [J_1^2 + N_1^2]} + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4} x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta [J_1 N_1 - iJ_1^2] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь у функций Бесселя опущены аргументы: в выражении (9) —  $y_0$ , а в (10) —  $\tilde{y}_0$ .

Формулы (9), (10) интересно сравнить с решениями дисперсионных уравнений, описывающими подобные волны в круглом волноводе с узкими кольцевыми щелями [2, 5]. При  $\operatorname{ctg} \theta = 0$  выражения (9) и (10), как и следовало ожидать, совпадают соответственно с решениями уравнений для симметричных магнитных волн кольцевого волновода и для симметричных электрических волн сплошного круглого. При  $\theta \rightarrow 0$  формулы (9), (10) не пригодны. Обращаясь к уравнению (8), убеждаемся, что при  $\theta = 0$ , как и следует из физических соображений, получается уравнение симметричных магнитных волн сплошного круглого волновода. Однако из уравнения (8) при  $\theta = 0$  не следует уравнение для симметричной электрической волны кольцевого волновода, т. е. нет непрерывного перехода волны « $E_{01}$ » рассматриваемого здесь волновода в волну  $E_{01}$  круглого волновода с кольцевыми щелями.

Для обоих выражений (9) и (10)  $\operatorname{Re} y < y_0$ , т. е.  $\operatorname{Re} \lambda a > \lambda_0 a$  ( $\lambda_0 a = = \sqrt{x^2 - y_0^2}$ ). Следовательно, обе волны « $H_{01}$ » и « $E_{01}$ » распространяются в таком волноводе с меньшими фазовыми скоростями, чем в сплошном волноводе.

Затухание определяется мнимой частью волнового числа  $\lambda a$  и для волн « $H_{01}$ » и « $E_{01}$ » равно соответственно

$$\operatorname{Im} \lambda a \approx \varepsilon^2 \frac{y_0}{\lambda_0 a} \left\{ \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{8\pi y_0 [J_0^2(y_0) + N_0^2(y_0)]} + \frac{\pi y_0^3}{32} J_0^2(y_0) \right\},$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\lambda} a \approx e^2 \frac{x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{8 \pi \tilde{\lambda}_0 a} \left[ \frac{1}{J_1^2(\tilde{y}_0) + N_1^2(\tilde{y}_0)} + \frac{\pi^2}{4} x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta J_1^2(\tilde{y}_0) \right].$$

Итак, можно сделать следующие выводы о волнах « $H_{01}$ » и « $E_{01}$ » в круглом волноводе со спирально проводящими вставками.

1) Затухание «электрических» и «магнитных» волн в таком волноводе одного порядка по ширине спирально проводящего кольца, но при большом  $\operatorname{ctg}^2 \theta$  волна « $E_{01}$ » затухает значительно сильнее, чем « $H_{01}$ ».

2) Фазовая скорость «электрических» и «магнитных» волн в этом волноводе меньше, чем фазовая скорость соответствующих волн в сплошном волноводе.

3) При  $\theta \rightarrow \pi/2$  волны « $H_{01}$ » и « $E_{01}$ » непрерывно переходят соответственно в волны  $H_{01}$  кольцевого волновода и  $E_{01}$  сплошного круглого. При  $\theta \rightarrow 0$  волна « $H_{01}$ » также непрерывно переходит в волну  $H_{01}$  сплошного круглого волновода; однако нет непрерывного перехода волны « $E_{01}$ » при  $\theta \rightarrow 0$  в волну  $E_{01}$  кольцевого волновода. Скорость распространения волны « $E_{01}$ » в рассматриваемом здесь волноводе при  $\theta \neq 0$  меньше, а при  $\theta = 0$  больше, чем в сплошном волноводе.

С физической точки зрения отсутствие непрерывности в одном случае и наличие ее в других вполне закономерно. Действительно, при  $\theta \rightarrow 0$  скачком нарушается электрическая связь между металлическими кольцами, такие же скачки характерны для продольных токов на стенке волновода и симметричной электрической волны в нем. Для симметричной магнитной волны наличие или отсутствие электрической связи элементов волновода, естественно, не существенно.

Кроме быстрых волн, в исследуемом волноводе могут распространяться и медленные волны. Для их анализа удобно в уравнении (8) перейти к модифицированным функциям Бесселя

$$x^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - 2 \pi \delta x^2 I_0(x) K_0(x) = x^2 \frac{I_0(x) K_0(x)}{I_1(x) K_1(x)}. \quad (11)$$

Здесь  $x = \sqrt{\lambda^2 a^2 - x^2}$  и взята та ветвь корня, для которой  $\operatorname{Re} x > 0$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  вдоль вещественной оси.

При малом угле  $\theta$  можно получить аналитическое решение уравнения (11) и выражение для фазовой скорости медленной волны в системе. Эти формулы совпадают с соответствующими выражениями работы [4]. При малых  $\delta$  решение уравнения (11) легко найти методом возмущений по  $\delta$ . Оказывается, что при малых  $\delta$  волна в рассматриваемом здесь волноводе, соответствующая медленной незатухающей волне спирально проводящего волновода, также является незатухающей вдоль оси волновода. При увеличении  $\delta$  ее фазовая скорость растет.

Вещественные решения уравнения (11) удобно исследовать графически. Учитывая поведение левой и правой частей уравнения (11) при  $0 < x < \infty$ , придем к следующим выводам.

В данном приближении медленная незатухающая волна может распространяться в исследуемом волноводе при любых его параметрах. Скорость ее увеличивается с уменьшением частоты либо с ростом угла спиральной проводимости, с ростом ширины сплошных колец, либо при более густом их расположении.

Из сравнения этого волновода с секционированным спирально проводящим [4] следует, что в спирально проводящем волноводе введение периодически расположенных кольцевых щелей сильнее, чем введение таких же металлических сплошных колец, увеличивает скорость медленной волны, хотя узкие щели и кольца при малом угле спиральной проводимости одинаково изменяют ее скорость.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. Г. Сологубу за интерес и внимание к данной работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. У. Д. Уортерс, сб. Волноводные линии передачи с малыми потерями, ИЛ., М., 1960, стр. 382.
2. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб, сб. Радиотехника, вып. 1, изд. ХГУ, Харьков, 1965, стр. 3.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
4. С. И. Лапта, сб. Радиотехника, вып. 20, изд. ХГУ, Харьков, 1972, стр. 58.
5. Н. Н. Смирнов, ЖТФ, 28, 7, 1494 (1958).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
17 января 1972 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A CIRCULAR  
WAVEGUIDE WITH SPIRALLY CONDUCTING INSERTIONS

*S. I. Lapta*

The propagation of electromagnetic waves in a circular waveguide with periodic ring spirally conducting insertions is considered. The electrodynamic boundary problem is reduced to Rheeman—Gilbert problem. With narrow spirally conducting insertions or narrow continuous rings or when the waveguide period is smaller than its diameter, the approximative dispersion equation of quasi-natural waves of this waveguide is obtained. The waves of  $H_{01}$  and  $E_{01}$  type are investigated. Slow waves of this waveguide are also considered.

---

УДК 538.574

## О СУЩЕСТВОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ВОЛН В НЕКОТОРЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

С. Б. Раевский

Исследуется возможность существования электромагнитных волн с комплексными постоянными распространения (при отсутствии диссипации энергии) в двухслойном круглом экранированном волноводе и в изотропном стержне, помещенном в неограниченную среду.

Возможность существования волн, имеющих комплексные постоянные распространения, несмотря на отсутствие диссипации энергии, была выявлена при изучении различных сложных структур: связанных линий передачи, описываемых телеграфными уравнениями [1]; штыревых замедляющих систем [2]; волноводов с диафрагмами [3]; волноводов с анизотропными импедансными стенками [4]; полупространства над плоской однородной поверхностью, поддерживающей распространение волн [5] и др. В работе [6] была сделана попытка обнаружить комплексные волны и указать область их существования в круглом волноводе с диэлектрическим стержнем. В [7] были представлены дисперсионные характеристики комплексных волн в такой системе, рассчитанные на ЭВМ.

В настоящей работе исследуется принципиальная возможность существования комплексных волн в круглом двухслойном экранированном волноводе и в круглом диэлектрическом стержне с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$ , помещенном в среду  $\epsilon_2, \mu_2$ . Предлагается метод расчета постоянных распространения комплексных волн в этих структурах.

Используя асимптотические представления функций Бесселя при больших значениях аргумента, дисперсионное уравнение для волны типа  $HE_{1n}$  в круглом двухслойном волноводе [7, 8] преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_1^2} \left( \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\alpha_1^2} - \frac{\epsilon_2 \mu_2}{\alpha_2^2} \right) \left( \frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} \right) - \left\{ \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \left[ \operatorname{ctg} \alpha_2 (r_2 - r_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2r_1 \alpha_2} \right] - \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \left[ \operatorname{tg} \left( \alpha_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right) + \frac{1}{2r_2 \alpha_2} \right] \right\} \left\{ \frac{\mu_1}{\alpha_1} \left[ \operatorname{tg} \left( \alpha_1 r_1 - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{4} \pi \right) + \frac{1}{2r_1 \alpha_1} \right] + \frac{\mu_2}{2\alpha_2^2 r_1} \frac{(4\alpha_2^2 r_1 r_2 + 1) \operatorname{tg} \alpha_2 (r_2 - r_1) - 2\alpha_2 (r_2 - r_1)}{2\alpha_2 r_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 (r_2 - r_1)} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $r_1, r_2$  — радиусы внутреннего слоя и экрана;  $\epsilon_1, \mu_1, \epsilon_2, \mu_2$  — параметры слоев волновода;

$$\alpha_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 k^2 - \beta^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 k^2 - \beta^2}, \quad (2)$$

$k = \omega/c$  — постоянная распространения в свободном пространстве,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — в общем случае комплексные величины, поскольку  $\beta$  — постоянная распространения комплексных волн вдоль рассматриваемого волновода — является комплексной величиной.

Записав  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в виде

$$\alpha_1 = \gamma_1 + i\delta_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 + i\delta_2$$

и используя соотношения (2), нетрудно получить связь между  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2. \quad (3)$$

Записывая дисперсионное уравнение в форме (1), считаем, что

$$|\alpha_1 r_{1,2}| \gg 1, \quad |\alpha_2 r_{1,2}| \gg 1. \quad (4)$$

Эти условия выполняются, когда  $|\gamma_{1,2} r_{1,2}| \gg 1$  или  $|\delta_{1,2} r_{1,2}| \gg 1$ . Первый случай соответствует волнам высших типов ( $n \gg 1$ ), второй может относиться к любой волне  $HE_{1n}$ .

При выполнении условий (4) вместо (1) имеем

$$\operatorname{tg} \left( \alpha_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right) = \alpha_1 \left[ \frac{\mu_1 P(\alpha_2) + \varepsilon_1 Q(\alpha_2)}{2 \varepsilon_1 \mu_1} \pm \frac{\mu_1 P(\alpha_2) - \varepsilon_1 Q(\alpha_2)}{2 \varepsilon_1 \mu_1} \right], \quad (5)$$

где

$$P(\alpha_2) = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} \left[ \operatorname{ctg} \alpha_2 (r_2 - r_1) + \frac{1}{2r_1 \alpha_2} \right],$$

$$Q(\alpha_2) = \frac{-\mu_2}{2\alpha_2^2 r_1} \frac{(4\alpha_2^2 r_1 r_2 + 1) \operatorname{tg} \alpha_2 (r_2 - r_1) - 2\alpha_2 (r_2 - r_1)}{2\alpha_2 r_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 (r_2 - r_1)}.$$

Функция  $\operatorname{tg} \left( \alpha_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right)$ , моногенная в комплексной плоскости  $\alpha_1$  (поскольку для нее выполняются условия Коши—Римана), конформно отображает плоскость  $\alpha_1$  на плоскость  $w = u + iv$ . Областями однолистности этой функции на плоскости  $\alpha_1$  являются полосы

$$\frac{1}{r_1} \left( k\pi + \frac{1}{4} \pi \right) < \gamma_1 < \frac{1}{r_1} \left( k\pi + \frac{5}{4} \pi \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Каждая прямая  $\gamma_1 = \operatorname{const}$  на плоскости  $\alpha_1$  преобразуется функцией  $\operatorname{tg} \left( \alpha_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right)$  на плоскости  $w$  в кривую, описываемую уравнением

$$u = \frac{(v^2 - 1) \sin 2 \left( \gamma_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right)}{2 \sin^2 \left( \gamma_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right) - 1 \pm \sqrt{1 - v^2 \sin^2 2 \left( \gamma_1 r_1 - \frac{3}{4} \pi \right)}}. \quad (6)$$

Правая часть уравнения (5) преобразует прямые  $\gamma_1 = \operatorname{const}$  в плоскости  $\alpha_1$  в прямую

$$u = -\frac{S_1}{R_1} v + \frac{R_1^2 + S_1^2}{\varepsilon_1 R_1} \quad (7)$$

на плоскости  $w$ . В (7) обозначено

$$R_1 = \frac{\varepsilon_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \left[ \frac{\gamma_2 \sin(2\gamma_2 d) - \delta_2 \operatorname{sh}(2\delta_2 d)}{\operatorname{ch}^2(\delta_2 d) \sin^2(\gamma_2 d) + \operatorname{sh}^2(\delta_2 d) \cos^2(\gamma_2 d)} + \frac{\gamma_2^2 - \delta_2^2}{r_1(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \right],$$

$$S_1 = \frac{\varepsilon_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \left[ \frac{\delta_2 \sin(2\gamma_2 d) + \gamma_2 \operatorname{sh}(2\delta_2 d)}{\operatorname{ch}^2(\delta_2 d) \sin^2(\gamma_2 d) + \operatorname{sh}^2(\delta_2 d) \cos^2(\gamma_2 d)} + \frac{\gamma_2 \delta_2}{r_1(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \right]$$

$$(d = r_2 - r_1).$$



Таким образом, одной и той же прямой  $\gamma_1 = \text{const}$  на плоскости  $\alpha_1$  соответствуют две кривые (6) и (7) на плоскости  $\omega$ . Корню дисперсионного уравнения соответствует точка пересечения этих кривых.

Для того, чтобы уравнение (5) имело комплексный корень,  $\gamma_{1,2}$  и  $\delta_{1,2}$  должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\text{sh}(2\delta_1 r_1)}{\sin 2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{\delta_1 R_1 + \gamma_1 S_1}{\gamma_1 R_1 - \delta_1 S_1}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(\gamma_1 R_1 - \delta_1 S_1) = \frac{1}{2} \frac{\sin 2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)}{\text{ch}^2(\delta_1 r_1) - \sin^2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)} \quad (9)$$

$$\left(\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right).$$

Уравнение (8) обеспечивает равенство аргументов комплексных правой и левой частей уравнения (5), а уравнение (9) — равенство модулей. При этом  $\gamma_{1,2}$  и  $\delta_{1,2}$  связаны соотношением (3). Задавая одну из величин  $\gamma_{1,2}$ ;  $\delta_{1,2}$ , все остальные можем определить из уравнений (3), (8), (9). Учитывая, что параметры  $r_1$  и  $\varepsilon$  можно варьировать, нетрудно убедиться, что эти уравнения имеют действительные решения, что доказывает существование комплексных решений дисперсионного уравнения.

Принципиальную возможность существования комплексных решений дисперсионного уравнения можно показать и другим образом. Задав значения  $\gamma_{1,2}$  и  $\delta_{1,2}$  так, чтобы они удовлетворяли соотношению (3), решим систему уравнений (8), (9) относительно  $\varepsilon$  и  $r_1$  при каких-либо конкретных значениях остальных параметров. Для того, чтобы максимально упростить функции, входящие в уравнения (8), (9), возьмем

$$\gamma_1 = 3,2 \frac{1}{\text{мм}}, \quad \gamma_2 = 3,14 \frac{1}{\text{мм}}, \quad \delta_2 = 0,01 \frac{1}{\text{мм}}, \quad d = 1 \text{ мм}$$

( $\delta_1 = 0,0098 \frac{1}{\text{мм}}$  определяется из соотношения (3)). В этом случае

$$R_1 = \frac{-r_1(\gamma_2^2 + \delta_2^2)\delta_2 \text{sh}(2\delta_2 d) + (\gamma_2^2 - \delta_2^2) \text{sh}^2(\delta_2 d)}{2r_1(\gamma_2^2 + \delta_2^2)^2 \text{sh}^2 \delta_2 d},$$

$$S_1 = \frac{r_1(\gamma_2^2 + \delta_2^2)\gamma_2 \text{sh}(2\delta_2 d) + 2\gamma_2 \delta_2 \text{sh}^2(\delta_2 d)}{2r_1(\gamma_2^2 + \delta_2^2)^2 \text{sh}^2 \delta_2 d},$$

$$\frac{\text{sh}(2\delta_1 r_1)}{\sin 2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)} \approx \frac{\delta_1 \delta_2 - \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 \delta_2 + \delta_1 \gamma_2}.$$

Решая систему уравнений (8), (9) относительно  $r_1$  и  $\varepsilon$ , получаем

$$r_1 = 20,862 \text{ мм}, \quad \varepsilon = 18,11.$$

Таким образом, существование действительных решений ( $r_1, \varepsilon$ ) системы (8), (9) является достаточным условием существования комплексных

решений дисперсионного уравнения (1), в чем мы убедились на простом численном примере.

Получив из дисперсионного уравнения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , частоту определяем из уравнения

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \left( 1 + \frac{\delta_2^2}{\gamma_1^2} \right) = k^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2), \quad (10)$$

а постоянную распространения  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  из соотношений

$$\beta_1^2 = \frac{\epsilon_1 \mu_1 k^2 - \gamma_1^2 + \delta_2^2}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \gamma_1^2 \delta_1^2}{(\epsilon_1 \mu_1 k^2 - \gamma_1^2 + \delta_1^2)^2}} \right], \quad (11)$$

$$\beta_2 = -\frac{\gamma_1 \delta_1}{\beta_1}.$$

Из уравнений (8), (9) нетрудно увидеть, что если значения

$$\alpha_1^0 = \gamma_1^0 + i\delta_1^0, \quad \alpha_2^0 = \gamma_2^0 + i\delta_2^0$$

удовлетворяют дисперсионному уравнению (1), то комплексно-сопряженные им значения

$$\alpha_1^{0*} = \gamma_1^0 - i\delta_1^0, \quad \alpha_2^{0*} = \gamma_2^0 - i\delta_2^0$$

также удовлетворяют этому уравнению. Действительно, замена  $\delta_{1,2} \rightarrow -\delta_{1,2}$  в (8), (9) не изменяет вида этих уравнений. Таким образом, дисперсионное уравнение имеет комплексно-сопряженные решения.

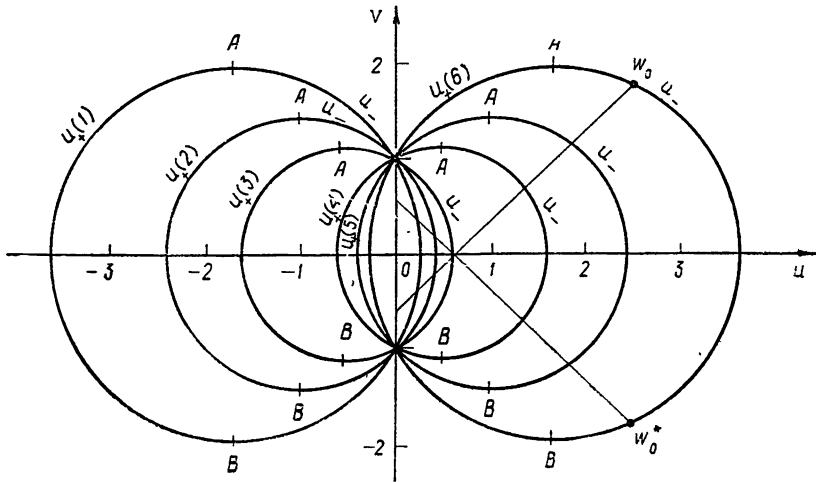


Рис. 1. Преобразование прямых  $\gamma_1 = \text{const}$  правой и левой частями уравнения (5) с плоскости  $\alpha_1$  на плоскость  $w$ .  $u_+$  и  $u_-$  отвечают соответственно плюсу и минусу перед радикалом в (6).

(1)  $-\gamma_1 = c_1$ ; (2)  $-\gamma_1 = c_2$ ; (3)  $-\gamma_1 = c_3$ ; (4)  $-\gamma_1 = c_4$ ; (5)  $-\gamma_1 = c_5$ ;  
 (6)  $-\gamma_1 = c_6$ ;  $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6$ .

На рис. 1 представлены кривые  $\gamma_1 = \text{const}$  на плоскости  $u, v$ , описываемые уравнением (6). Здесь точки A и B соответствуют совпадению решений уравнений (6), взятых с плюсом и с минусом перед радикалами. На этом же рисунке изображены прямые, описываемые уравнением (7). Решению дисперсионного уравнения соответствует точка пересечения прямой с одной из окружностей. Из рис. 1 нетрудно видеть, что если

существует решение  $\alpha_{1,2}^0$ , то обязательно должно быть решение  $\alpha_{1,2}^{0*}$ , поскольку полуокружностям, лежащим над осью  $u$ , соответствует  $\delta_1 > 0$ , а полуокружностям, лежащим под осью  $u$ ,  $-\delta_1 < 0$ . В точке пересечения  $\omega_0$ ,  $\delta_1 > 0$ .

Сменив в (7) знак перед  $\delta_2$ , получим новую прямую, которая дает симметричную точку пересечения  $\omega_0^*$  с нижней полуокружностью, т. е. комплексно-сопряженный корень дисперсионного уравнения. Существование комплексно-сопряженных решений говорит о том, что комплексные волны существуют парами:

$$\exp[-i(\beta_1 - i\beta_2)z], \quad \exp[-i(-\beta_1 - i\beta_2)z].$$

Первая волна, фаза которой распространяется в положительном направлении, имеет затухающий в направлении распространения характер, вторая, фаза которой распространяется в противоположном направлении, — нарастающий. Одновременное существование двух таких волн приводит, как отмечалось в [1], к отсутствию переноса ими энергии.

Изложенная выше методика отыскания комплексных решений дисперсионного уравнения может быть также использована для круглого стержня с параметрами  $\epsilon_1, \mu_1$ , помещенного в среду  $\epsilon_2, \mu_2$ . Дисперсионное уравнение [9] для собственной несимметричной волны типа  $HE_{1n}$  после некоторых преобразований, возможных опять-таки при  $|\alpha_1 r_1| \gg 1$  и  $|\alpha_2 r_1| \gg 1$  ( $r_1$  — радиус стержня), можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\left(\alpha_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (R_2 + iS_2), \quad (12)$$

где

$$R_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1} - \frac{(\epsilon_1 \mu_2 + \epsilon_2 \mu_1)^2}{4(\epsilon_1 \mu_1)^2}}, \quad S_2 = \frac{\epsilon_1 \mu_2 + \epsilon_2 \mu_1}{2\epsilon_1 \mu_1}.$$

Таким образом, слева в (12) стоит уже рассмотренная нами функция, отображающая плоскость  $\alpha_1$  на плоскость  $\omega$ ; функция, стоящая справа в (12), преобразует каждую прямую  $\gamma_1 = \text{const}$  в прямую на плоскости  $\omega$ , описываемую уравнением

$$u = -\frac{\gamma_2}{\delta_2} v + \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{\gamma_2}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\gamma_2}\right) \frac{\pm |R_2| + S_2}{\gamma_2^2 + \delta_2^2}. \quad (13)$$

Решению дисперсионного уравнения (12) соответствует точка пересечения кривых (6) и (13). Условием существования комплексных решений дисперсионного уравнения является наличие вещественных решений  $(\gamma_1, \delta_1)$  уравнений

$$\frac{\operatorname{sh}(2\delta_1 r_1)}{\sin 2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2}{\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\sin 2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)}{\operatorname{ch}^2(\delta_1 r_1) - \sin^2\left(\gamma_1 r_1 - \frac{3}{4}\pi\right)} = p(\pm |R_2| + S_2), \quad (14)$$

где

$$p = \frac{\gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2}{\gamma_2^2 + \delta_2^2}.$$

Учитывая возможность вариации семи параметров ( $r_1, \epsilon_{1,2}, \mu_{1,2}, \gamma_2, \delta_2$ ) в уравнениях (14) с тем лишь ограничением, что всегда должно выполняться условие  $\gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2$ , нетрудно прийти к заключению о возможности существования комплексных решений дисперсионного уравнения собственных волн в диэлектрическом стержне.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Радиотехника и электроника, 9, вып. 7, 1188 (1964).
- 2 А. М. Белянцев, Диссертация, ГГУ, Горький, 1962.
- 3 И. А. Александров, В. А. Вагин, В. И. Котов, ЖТФ, 34, вып. 11, 1995 (1966)
- 4 М. А. Миллер, ЖТФ, 25, вып. 11, 1972 (1955).
- 5 Т. Тамир, А. А. Оливер, Proc. IEE (Electronics Quarterly), 110, № T-1, 310 (1963)
- 6 P. J. B. Clarricoats, B. C. Taylor, Proc. IEE (Electronics Record), 111 № T-6, 1951 (1964).
- 7 С. Б. Раевский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 1, 112 (1972).
- 8 P. J. B. Clarricoats, Proc. IEE (Electronics Quarterly), 110, № T-1, 261 (1963)
- 9 Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
15 октября 1971 г.

THE EXISTENCE OF COMPLEX WAVES IN SOME TWO-LAYER ISOTROPIC  
STRUCTURES

*S. B. Raevskii*

The possibility is proved of the existence of waves with complex propagation constants (in the absence of energy dissipation) in a two-layer circular screened waveguide and in the isotropic rod placed in the medium with the constant parameters  $\epsilon$  and  $\mu$ . A method of calculating the propagation constants of complex waves in such structures is proposed.

УДК 621.384.63

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОГЕРЕНТНЫХ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ СГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЕГО С РЕЗОНАНСНЫМИ СИСТЕМАМИ

*В. П. Григорьев, В. Ф. Вейнгардт*

В линейном приближении рассматривается задача об устойчивости поперечных колебаний сгустков заряженных частиц при их взаимодействии с резонансными системами. Найдены инкременты и определены критерии устойчивости бетатронных колебаний.

Вопрос об устойчивости поперечных когерентных колебаний сбундрованного пучка в накопителях и циклических ускорителях при его взаимодействии с резонансными системами исследовался ранее в [1, 2]. Однако в этих работах инкременты получены для точечных сгустков, кроме того, не принимались во внимание эффекты, связанные со скоростью поперечного движения, и стабилизирующие факторы, обусловленные радиационным затуханием и наличием разброса по частотам бетатронных колебаний частиц в пучке.

В настоящей работе произведен расчет инкремента неустойчивости поперечных когерентных колебаний для системы одинаковых сгустков конечных размеров, пролетающих через помещенный на орбите цилиндрический резонатор радиуса  $b$  и высоты  $h$ , и определены пороговые значения числа частиц, обусловленные как радиационным затуханием, так и наличием разброса по частотам бетатронных колебаний. При этом предполагается, что в продольном направлении все частицы в сгустке движутся с одинаковой скоростью  $v_0$ .

### 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

В линейном приближении плотность тока, связанного с возмущением поперечного движения пучка, записывается в виде

$$j_1 = N[\rho_1 v_0 e_y - \rho_0 v_1 (\sin(\varphi) e_r + \cos(\varphi) e_\varphi)], \quad (1.1)$$

где  $e_r$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_y$  — единичные векторы в системе координат  $\{r, \varphi, y\}$ , связанной с резонатором,  $N$  — полное число частиц в пучке,  $v_1$  и  $\rho_1$  — соответственно возмущения поперечной скорости пучка и невозмущенной плотности заряда  $\rho_0$ , представленной в форме

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_0(\theta, t) \sigma(r, \varphi), \\ \int \sigma(r, \varphi) r dr d\varphi &= 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для малых поперечных отклонений пучка, рассматривая взаимодействие на частотах, соответствующих длинам волн, превышающих поперечные размеры сгустка, можно полагать, что такие отклонения зависят только от азимута  $\theta$  и времени  $t$ . В этом случае силу, действующую

щую на сгусток, в уравнении, описывающем движение данного сгустка, можно усреднить по поперечному сечению пучка. В частности, для

$$\rho_0 = \frac{1 - H(r - a)}{\pi a^2} \rho_0(\theta, t), \quad (1.3)$$

используя уравнение непрерывности и представляя зависимость от азимута и времени в виде  $\exp[i(n'\theta - \omega t)]$ , получим связь между фурье-амплитудами возмущений плотности заряда  $\rho_{1n'\omega}$  и скорости  $v_{1n'\omega}$  в виде

$$\rho_{1n'\omega} = - \frac{i \sin(\varphi) (v_1 \rho_0)_{n'\omega}}{n'\omega_0 - \omega} \delta(r - a), \quad (1.4)$$

где  $H(r - a)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $\delta(r - a)$  — дельта-функция,  $\omega_0$  — частота обращения,  $a$  — радиус пучка. Поскольку при произвольной зависимости  $\rho_0(\theta, t)$  от  $\theta$  и  $t$  из выражения (1.4) нельзя получить явной зависимости между гармониками  $\rho_{1n'\omega}$ ,  $v_{1n'\omega}$  и  $\rho_{0n'\omega}$ , то для вычисления полей возмущения будем использовать метод, аналогичный методу, изложенному в работе [3]. При этом определим сначала усредненную поперечную силу, создаваемую элементарным зарядом  $e$  в азимутально однородном пучке, для которого

$$(\rho_0 v_1)_{n'\omega} = \frac{ie(n'\omega_0 - \omega)}{2\pi R_0} z_{1n'\omega}, \quad (1.5)$$

где  $z_1$  — координата отклонения пучка от оси резонатора.

Поле, наводимое плотностью тока  $j_1$ , ищем методом разложения по собственным функциям резонатора. При этом, используя выражения для собственных функций цилиндрического резонатора [4] и учитывая (1.1), (1.3) — (1.5), получим для  $E$ - и  $H$ -волн амплитуды разложения  $j_1$ , соответственно равные

$$j_{1\nu\omega}^E = \frac{N\epsilon_m R_0 J_l((a/b)\mu_{ls}) \delta_{|l|,1}}{\sqrt{\pi h} ak \mu_{ls} J_l'(\mu_{ls})} \sum_{n'} \frac{(v_1 \rho_0)_{n'\omega}}{i(n'\omega_0 - \omega)} [-iv_0 x_{ls}^2 I_{n's}^* + k_y(\omega - n'\omega_0) I_{n's}^*]; \quad (1.6a)$$

$$j_{1\nu\omega}^H = \frac{N\epsilon_m R_0 J_l((a/b)\mu_{ls}) \delta_{|l|,1}}{\sqrt{\pi h} (\mu_{ls}^2 - 1) ak J_l'(\mu_{ls})} \sum_{n'} \frac{(v_1 \rho_0)_{n'\omega}}{i(n'\omega_0 - \omega)} \times k(\omega - n'\omega_0) I_{n's}^*, \quad (1.6b)$$

где

$$\nu = (l, m, s), \quad k_y = \frac{m\pi}{h}, \quad k^2 = k_y^2 + \begin{Bmatrix} x_{ls}^2 \\ \Lambda_{ls}^2 \\ x_{ls}^2 \end{Bmatrix},$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} \sqrt{2} & (k_y \neq 0) \\ 1 & (k_y = 0) \end{cases},$$

$R_0$  — радиус равновесной орбиты,  $\mu_{ls} = x_{ls} b$  и  $\Lambda_{ls} = x_{ls} b$  — корни уравнений  $J_l(\mu_{ls}) = 0$  и  $J_l'(\Lambda_{ls}) = 0$  соответственно.

$$I_{nc} = \int_{-h/2R_0}^{h/2R_0} \cos \left[ k_y R_0 \left( \theta + \frac{h}{2R_0} \right) \right] e^{-in\theta} d\theta, \quad (1.7)$$

$$I_{ns} = -i \frac{k_y R_0}{n} I_{nc} \quad (h \ll R_0).$$

Таким образом, при указанных предположениях, в результате поперечного отклонения пучка, происходит возбуждение несимметричных волн с  $|l| = 1$ . Поперечную силу  $F_z$ , действующую на заряд  $e$ , запишем в системе координат  $\{r, \varphi, \theta\}$ , ограничиваясь рассмотрением лишь вертикальных по оси  $z$  колебаний:

$$F_z = -e[(E_r - \beta H_r) \sin(\varphi) + (E_\varphi - \beta H_\varphi) \cos(\varphi)], \quad (1.8)$$

$$\beta = v_0/c.$$

Проводя разложение  $F_z$  по  $\exp[i(n\theta - \omega t)]$  и используя формулы (1.6 а), (1.6 б), получим окончательное выражение для фурье-амплитуды вертикальной силы, усредненной по поперечным координатам:

$$F_{z\omega n}^{E,H} = \frac{8iNR_0 e}{a^2 h} \sum_{m,s} \frac{\epsilon_m^2 J_1^2 \left( \frac{a}{b} \begin{Bmatrix} \mu_{1s} \\ \wedge \\ \mu_{1s} \end{Bmatrix} \right)}{k^2 \Delta_{\nu\omega}^2} \sum_{n'} P_{1n'\omega} A_{\nu nn'}^{E,H}, \quad (1.9)$$

где  $P_1$  — дипольный момент, создаваемый элементарным зарядом на единицу длины,  $\Delta_{\nu\omega}^2 = \omega_\nu^2 - \omega^2 - i\omega\alpha_\nu$ ,  $\alpha_\nu = \frac{\sqrt{\omega\omega_\nu}}{Q_\nu}$ ,  $\omega_\nu$ ,  $Q_\nu$  — собственная частота и добротность резонатора,

$$A_{\nu nn'}^{E,H} = \frac{-ik_y \omega I_{ns} + \beta k \omega_\nu I_{nc}}{\mu_{1s}^2 J_0^2(\mu_{1s})} [-i\nu\omega_\nu^2 I_{n'c}^* + k_y (\omega - n'\omega_0) I_{n's}^*],$$

$$A_{\nu nn'}^H = \frac{-ik\omega I_{ns} + \beta k_y \omega_\nu I_{nc}}{(\mu_{1s}^2 - 1) J_1^2(\mu_{1s})} [k(\omega - n'\omega_0) I_{n's}^*].$$

Остановившись на исследовании неустойчивости, приводящей к колебаниям центра тяжести сгустка, будем считать, что все частицы в сгустках совершают когерентные поперечные колебания с частотой  $\nu_\beta \omega_0$ , где  $\nu_\beta \omega_0$  — частота возмущенных бетатронных колебаний сгустка как целого. Определим в этом случае дипольный момент на единицу длины, создаваемый отдельной частицей номера  $r$ , формулой

$$P_1^r = \frac{e\chi_r}{2\pi R_0} \exp[i(\Phi_r + \nu_\beta \omega_0 t)] \delta(\theta - \theta_r - \omega_0 t), \quad (1.10)$$

где  $\chi_r$ ,  $\Phi_r$ ,  $\theta_r$  — амплитуда, начальная фаза бетатронных колебаний и азимутальная координата  $r$ -й частицы.

Решение уравнения движения  $j$ -й частицы в поле сил, создаваемом  $r$ -й частицей, с учетом (1.9) и (1.10) можно записать в виде

$$\gamma m_0 \omega_0^2 P_{1n\omega} (\nu_j^2 - \nu_\beta^2) =$$

$$= \frac{4ieNR_0}{\pi a^2 h} \sum_{m,s} \frac{\epsilon_m^2 J_1^2 \left( \frac{a}{b} \begin{Bmatrix} \mu_{1s} \\ \wedge \\ \mu_{1s} \end{Bmatrix} \right)}{k^2 \Delta_{\nu\omega}^2} \sum_{n'} P_{1n'\omega} A_{\nu nn'}^{E,H}, \quad (1.11)$$

где  $\nu_j$  — число невозмущенных бетатронных колебаний  $j$ -й частицы на один оборот,  $m_0$  — масса покоя электрона,  $\gamma$  — релятивистский фактор,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Если все частицы сгруппированы в  $q$  равных сгустках с числом частиц  $N_q$  в каждом и равномерным распределением заряда в сгустке, то функция распределения частиц в отдельном сгустке, нормированная на единицу, представляется в виде

$$\psi(\theta_j, \chi_j, \Phi_j, \nu_j) = \frac{2\pi R_0}{L} D(\chi_j, \Phi_j) f(\nu_j), \quad (1.12)$$

где  $L$  — длина сгустка,  $D(\chi_j, \Phi_j)$  и  $f(\nu_j)$  — нормированные на единицу функции.

Проводя в (1.11) суммирование по всем частицам  $r$ , затем умножая обе части (1.11) на функцию распределения (1.12) и интегрируя по фазовому объему ( $\Gamma = \int d\theta_j d\Phi_j d\chi_j d\nu_j$ ) внутри сгустков, получим дисперсионное уравнение для определения возмущения  $i\eta\omega_0$  общей для всех частиц в сгустке бетатронной частоты свободных колебаний  $\nu_0\omega_0$ :

$$1 = \sum_{m,s} \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0^2}{\Delta_{\nu_0}^2} \int_0^\infty \frac{f(\nu_j) d\nu_j}{\nu_j^2 - \nu_\beta^2}; \quad (1.13)$$

$$\Lambda_m = \frac{8r_0 R_0^2 \epsilon_m^2}{\pi\gamma\beta^3 h a^2} \prod \frac{n^2 \left[ 1 - (-1)^m \cos \frac{n\hbar}{R_0} \right]}{(n^2 - k_y^2 R_0^2)^2}; \quad (1.14a)$$

$$\prod = \frac{\sin^2(nL/2\pi R_0)}{(nL/2\pi R_0)^2}, \quad (1.14б)$$

$r_0$  — классический радиус электрона,

$$\sigma_{ms}^E = \left( \frac{\nu_0}{n} - \frac{\chi_{1s}^2}{k_y^2} \right)^2 \frac{k_y^4 R_0^2}{k^2} \frac{J_1^2\left(\frac{a}{b} \mu_{1s}\right)}{\mu_{1s}^2 J_0^2(\mu_{1s})}; \quad (1.14в)$$

$$\sigma_{ms}^H = \left( \frac{\nu_0}{n} \right)^2 k_y^2 R_0^2 \frac{J_1^2\left(\frac{a}{b} \mu_{1s}\right)}{(\mu_{1s}^2 - 1) J_1^2(\mu_{1s})}. \quad (1.14г)$$

## 2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим вначале возмущения для пучка с функцией распределения частиц по частотам бетатронных колебаний  $f(\nu_j) = \delta(\nu_j - \nu_0)$ , когда  $\omega_1^2 \approx \omega^2$ . При этом из (1.13), удерживая в сумме по  $m, s$  только резонансный член и представляя решение в виде  $\eta = i(\nu_0 - \nu_\beta)$ , легко получить квадратное уравнение относительно  $\eta$ :

$$\eta^2 + \left( \frac{\alpha_\nu}{2\omega_0} + \frac{i\delta}{\omega_0} \right) \eta \pm \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0^2}{4\nu_0 \omega_0} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\delta = \omega_1 - \omega_0 (n \pm \nu_0)$ ,  $\delta/\omega_0 \ll 1$ ,  $\omega_{1,2} \approx (n \pm \nu_0)\omega_0$ , где верхний знак соответствует «быстрой» волне возмущения с частотой  $\omega_1 \approx (n + \nu_0)\omega_0$ ,



а нижний—«медленной» волне с  $\omega_2 \approx (n - \nu_0) \omega_0$ . Очевидно, решениями (2.1) являются

$$\eta_{1,2}^{E,H} = -\frac{1}{2\omega_0} \left( \frac{\alpha_\nu}{2} + i\delta \right) \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\alpha_\nu}{2\omega_0} + \frac{i\delta}{\omega_0} \right)^2 \mp \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{\nu_0 \omega_0} \right]^{1/2}. \quad (2.2)$$

Исходя из общих решений (2.2), рассмотрим отдельно два предельных случая.

$$1. \quad \alpha_\nu \rightarrow 0 \quad (Q_\nu \rightarrow \infty).$$

Нестабильность поперечных колебаний при этом возникает только тогда, когда в резонанс попадает «медленная» волна с  $\text{Re } \nu_\beta < 0$ , если число частиц  $N$  больше некоторого порогового значения:

$$N_n = \frac{4\nu_0 \omega_0 \delta^2}{\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0^3}. \quad (2.3)$$

При этом инкремент  $\zeta^{E,H}$  и сдвиг  $\xi^{E,H}$  бетатронной частоты  $\nu_0 \omega_0$  равны

$$\zeta^{E,H} = \text{Re } \eta^{E,H} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{\omega_0 \nu_0} - \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right]^{1/2}; \quad (2.4a)$$

$$\xi^{E,H} = \text{Im } \eta^{E,H} = -\frac{\delta}{2\omega_0}. \quad (2.4b)$$

Если  $N < N_n$ , то возмущение приводит лишь к сдвигу бетатронных частот:

$$\xi^{E,H} = -\frac{\delta}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{\nu_0 \omega_0 \delta^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.5)$$

2. В случае точного резонанса ( $\alpha_\nu/2 \gg \delta$ ), как видно из (2.2), возникновение неустойчивости также возможно только на «медленной» волне возмущения с частотой  $\omega_2 \approx \omega_0 (n - \nu_0)$ , причем для сравнительно слабых токов, когда выполняется условие  $\frac{\alpha_\nu}{2\omega_0} \gg \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{\nu_0 \omega_0}$ , инкремент можно записать следующим образом:

$$\zeta^{E,H} = \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0^2}{-2\nu_0 \omega_0 \alpha_\nu}. \quad (2.6)$$

Если считать длину сгустков и высоту резонатора короткими, такими, что  $nL/4\pi R_0 \ll 1$  и  $n\hbar/R_0 \ll 1$ , то для волн с  $m = 0$  можно получить инкремент, выраженный через шунтовое сопротивление  $R_{ш}$ , отнесенное к радиусу  $r = a$ , и обобщить результат на случай резонаторов произвольного сечения:

$$\zeta^E (m = 0) = \frac{I_0 e}{8\pi \gamma m_0 \nu_0} \frac{R_{ш}}{\omega_0 a^2} \frac{1}{\omega_0}, \quad (2.7)$$

где  $I_0$  — ток пучка ( $I_0 = eN\omega_0/2\pi$ );  $\zeta^H (m = 0) = 0$ , поскольку  $\sigma_{0,s}^H = 0$ . Формула (2.7) совпадает с формулой, полученной в работе [1].

Непосредственно из (2.2) и (2.6) следует, что в случае точного резонанса ( $\delta = 0$ ) не существует порогового числа частиц  $N_n$  и неустойчивость может развиваться на частоте  $\omega = (n - \nu_0 + i\eta) \omega_0$  при сколь-

угодно малой интенсивности пучка. Однако, если учесть тот факт, что в реальных установках за счет радиационных потерь бетатронные колебания затухают, и ввести поправку на излучение в скобках левой части (1.11) в виде дополнительного слагаемого —  $\frac{2\nu_\beta}{\tau_p \omega_0} (\tau_p - \text{постоянная времени радиационного затухания поперечных колебаний})$ , мы получим, аналогично (2.1), квадратное уравнение относительно  $\eta$ , корнями которого являются

$$\eta_{1,2}^{E,H} = - \frac{\left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{\alpha_\nu}{2} + i\delta \right)}{2\omega_0} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{\left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{\alpha_\nu}{2} + i\delta \right)^2}{\omega_0^2} - \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{4\nu_0 \omega_\nu} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

Рассматривая случай  $\alpha_\nu \rightarrow 0$ , из (2.8) легко получить

$$\eta_{1,2}^{E,H} = - \frac{1}{\tau_p \omega_0} + \frac{N\Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0^2}{4\nu_0 \omega_\nu \left( \frac{\alpha_\nu}{2} - \frac{1}{\tau_p} \right)} \quad \left( \frac{\alpha_\nu}{2} > \frac{1}{\tau_p} \right) \quad (2.9)$$

На основании (2.9) нетрудно показать, что наличие радиационного затухания приводит к появлению порогового числа частиц на «медленной» волне даже в случае точного резонанса ( $\delta = 0$ ), причем  $N_n$  определяется из равенства

$$N_n = \frac{2\nu_0 \omega_\nu (\alpha_\nu - (2/\tau_p))}{\tau_p \Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0^3} \quad (2.10)$$

Другим важным стабилизирующим фактором рассматриваемой неустойчивости является наличие разброса по частотам бетатронных колебаний  $\nu_j \omega_0$ , приводящее к «перемешиванию» частиц в фазовом пространстве. Учет влияния этого фактора проведем для гауссова распределения  $f$  по частотам  $\nu_j$ :

$$f(\nu_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu} \exp \left[ - \left( \frac{\nu_j - \nu_0}{\Delta\nu} \right)^2 \right], \quad (2.11)$$

$\Delta\nu$  — полуширина разброса частот  $\nu_j$ .

Исходя из дисперсионного уравнения (1.12), получим систему двух уравнений для определения  $N_n$  и предельного значения сдвига  $\xi_0$  бетатронных частот, соответствующих порогу возникновения неустойчивости ( $\zeta \rightarrow 0$ ):

$$\frac{\delta}{\omega_0} = - \frac{\sqrt{\pi} N_n \Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{4\nu_0 \omega_\nu \Delta\nu} \operatorname{Re} Z(\tilde{\xi}_0, 0); \quad (2.12)$$

$$\frac{\alpha_\nu}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\pi} N_n \Lambda_m \sigma_{ms}^{E,H} \omega_0}{2\nu_0 \omega_\nu \Delta\nu} \operatorname{Im} Z(\tilde{\xi}_0, 0), \quad (2.13)$$

где  $Z(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$  — функция дисперсии плазмы, таблицы значений которой приведены в [5],  $\tilde{\xi} = \xi/\Delta\nu$ ,  $\tilde{\zeta} = \zeta/\Delta\nu$ .

В частности, при  $\delta=0$   $\xi_0=0$ , и мы получим уравнение для определения  $N_n(\Delta\nu, \alpha_\nu, \nu_0)$ ,

$$N_n = \frac{2\nu_0 \omega_0 \alpha_\nu \Delta\nu}{\sqrt{\pi} \Delta_m \sigma_{ms} \frac{E, H}{\omega_0^2}}, \quad (2.14)$$

из сравнения которого с (2.10) следует, что учетом радиационного затухания можно пренебречь по сравнению с учетом разброса по  $\nu_j$ , если

$$\omega_\nu \frac{(\alpha_\nu - 2/\tau_p)}{\omega_0 \tau_p} \ll \frac{\omega_0 \alpha_\nu \Delta\nu}{\sqrt{\pi}}. \quad (2.15)$$

В заключение отметим, что поскольку в (2.10), (2.14) входит параметр  $\nu_0 \alpha_\nu$ , то, очевидно, увеличение добротности резонатора понижает пороговое число  $N_n$ ; к этому эффекту приводит также уменьшение величины фокусирующего магнитного поля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. К. Орлов, А. В. Рябцов, Атомная энергия, 27, № 1, 23 (1969).
2. Н. С. Диканский, М. Н. Карлинер, А. Н. Скринский, В. Е. Шапиро, И. А. Шехтман, Атомная энергия, 22, № 3, 188 (1967).
3. E. D. Courant, A. M. Sessler, Rev. Sci. Instr., 37, № 11, 1579 (1966).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. B. D. Fried, S. D. Conte, The plasma dispersion function. Acad. Press., N. Y.—London, 1961.

Научно-исследовательский институт  
ядерной физики, электроники и автоматики  
при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию  
13 января 1972 г.

#### INSTABILITY OF COHERENT BETATRON OSCILLATIONS OF BUNCHED BEAM IN CIRCULAR-ORBIT ACCELERATORS BY INTERACTION BETWEEN BEAM AND RESONANCE SYSTEMS

*V. P. Grigor'ev, V. F. Weingardt*

The stability of transverse oscillations of charged particles of beam interacting with resonance systems is considered in the linear approximation. The increments are found and the stability criteria of betatron oscillations are determined.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.246

**К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ НА АМПЛИТУДНЫЕ  
ФЛУКТУАЦИИ СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ**

М. Б. Каневский

Флуктуации субмиллиметровых радиоволн в атмосфере исследовались в работах [1-3], причем в [1, 2] было отмечено то обстоятельство, что наличие поглощения может привести к подавлению амплитудных флуктуаций. Однако в определенных условиях возможен и противоположный эффект; это следует, в частности, из результатов проведенного в [3] расчета

Содержанием настоящей работы являются численные оценки, выполненные с целью разграничить области значений параметров (длина волны, масштаб турбулентности, длина трассы), где имеет место тот или иной эффект, а также сравнить эти эффекты по величине.

Пусть интенсивности флуктуаций температуры и влажности таковы, что флуктуации комплексного показателя преломления  $n + ia$  обусловлены главным образом флуктуациями парциального давления водяного пара  $e$ . Первое приближение метода плавных возмущений приводит к следующей формуле для среднего квадрата  $\sigma^2$  флуктуаций уровня плоской волны [2]:

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left( 1 - 2\eta \frac{B_2}{B_1} + \eta^2 \frac{B_3}{B_1} \right), \tag{1}$$

где  $\sigma_0^2 = \sigma^2 (\alpha=0)$ ,  $\eta = \frac{\partial \alpha}{\partial e} / \frac{\partial n}{\partial e}$ , а  $B_1, 2, 3$  — интегральные члены, конкретный вид которых определяется выбором спектра случайной величины  $e$ .

Для описания атмосферной турбулентности естественно использовать тот спектр, который в интервале волновых чисел  $L_0^{-1} \ll x \ll l_0^{-1}$  ( $L_0$  и  $l_0$  — внешний и внутренний масштабы турбулентности) совпадает со следующим из теории Колмогорова—Обухова например кармановский спектр. В этом случае для  $B_1, 2, 3$  справедливы выражения [3]:

$$B_{1,3} = \int_0^\infty \frac{1 \mp (\sin t)/t}{(1+\beta t)^{11/6}} dt, \quad B_2 = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t(1+\beta t)^{11/6}} dt, \tag{2}$$

где  $\beta = kL_0^2/x$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $x$  — длина трассы. Интегралы  $\beta^{11/6} B_{1,2,3}(\beta)$  при различных значениях параметра  $\beta$  вычислены в [3].

Рассмотрим интервал длин волн  $0,7 \text{ мм} \lesssim \lambda \lesssim 1 \text{ мм}$  ( $10 \text{ см}^{-1} \lesssim 1/\lambda \lesssim 14 \text{ см}^{-1}$ ), включающий в себя две линии поглощения водяного пара:  $\lambda = 0,921 \text{ мм}$  и  $\lambda = 0,789 \text{ мм}^*$ .

Если учесть, что в этом интервале  $\frac{\partial n}{\partial e} \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ мб}^{-1}$  [4], то, используя связь  $\alpha \sim e$  и данные о поглощении [5], величину  $\eta$  можно вычислить по формуле  $\eta = 0,73 \times 10^{-2} \lambda \cdot (\text{см}) \gamma \text{ (дб/км)}$ , где  $\gamma$  — коэффициент поглощения в стандартных условиях (давление  $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$ , температура  $T = 293^\circ \text{К}$ , абсолютная влажность  $\rho = 7,5 \text{ г/м}^3$ ).

Из (1) и (2) следует, что при различных значениях  $k, L_0, x$  в принципе возможны случаи  $\sigma^2 < \sigma_0^2$  и  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ . На границе, разделяющей соответствующие области параметров, выполняется соотношение

\* Результаты, полученные ниже для линии  $\lambda = 0,789 \text{ мм}$ , по порядку величины справедливы и применительно к линии  $\lambda = 0,667 \text{ мм}$ , а еще более коротковолновые линии в данном случае не представляют интереса из-за большого поглощения в них.

$$\eta(k) = \frac{2B_2}{B_3}(\beta). \quad (3)$$

Правую часть (3) как функцию  $\beta = kL_0^2/x$  можно найти из приведенных в [3] графиков, а затем, сравнив с  $\eta(k)$ , определить значения параметров  $1/\lambda$  и  $x/L_0^2$ , при которых выполнено равенство (3). Полученная таким образом кривая, изображенная на рис. 1, разделяет области, где  $\sigma^2 < \sigma_0^2$  (заштрихованная часть рисунка) и  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ .

Из рис. 1 видно, что в линии поглощения  $\lambda = 0,789$  мм область подавления флуктуаций достигается при  $x/L_0^2 \sim 10$  см<sup>-1</sup>. Поскольку в приземном слое  $L_0$  порядка нескольких метров, граница области подавления в этой линии находится на столь больших расстояниях, что сигнал там из-за большого поглощения практически отсутствует. Поэтому говорить о подавлении флуктуаций в линиях поглощения субмиллиметрового диапазона имеет смысл лишь применительно к слабой линии  $\lambda = 0,921$  мм. Как показал расчет, на этой волне оптимальное ( $x/L_0^2 = 4,2$  см<sup>-1</sup>) подавление составляет 6,4%, т. е.  $\sigma^2/\sigma_0^2 = 0,936$ .

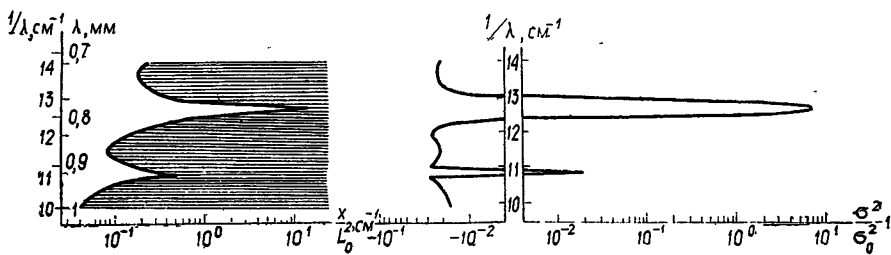


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 1. Области изменения параметров, соответствующие различным эффектам. В заштрихованной области  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ .

Рис. 2. Зависимость интенсивности амплитудных флуктуаций от длины волны при  $x/L_0^2 = 0,425$  см<sup>-1</sup>.

На рис. 2 представлена величина  $\sigma^2/\sigma_0^2 - 1$ , вычисленная как функция  $1/\lambda$  при  $x/L_0^2 = 0,425$  см<sup>-1</sup>. Это значение параметра  $x/L_0^2$  получается, если положить  $L_0 = 4$  м,  $x = 680$  м [2]. Как видно из рис. 2, в данном случае подавление флуктуаций на 2—3% имеет место вне линий поглощения, а в линиях флуктуации возрастают, в частности, на волне  $\lambda = 0,789$  мм почти на порядок; на более короткой трассе отношение  $\sigma^2/\sigma_0^2$  в линиях будет еще большим.

Таким образом, флуктуации поглощения в атмосфере в зависимости от условий распространения приводят либо к подавлению, либо к увеличению амплитудных флуктуаций субмиллиметровых радиоволн, причем первый эффект мал, а второй может быть весьма значительным.

Автор благодарен Н. Г. Денисову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Изюмов, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1156 (1968).
2. Н. А. Арманд, А. О. Изюмов, А. В. Соколов, Радиотехника и электроника, 16, № 8, 1333 (1971).
3. А. С. Гурвич, Радиотехника и электроника, 13, № 11, 1923 (1968).
4. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 12, № 6, 955 (1967).
5. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
19 апреля 1972 г.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН ФАЗОВЫМ КОРРЕКТОРОМ

Р. Б. Ваганов

1. В настоящей работе рассматривается трансформация одной из волн широкого волновода в основную волну (с наименьшим индексом) [1-3] с помощью фазового корректора. Корректор представляет собой слегка изогнутое зеркало, поставленное на пути излучения из косою среза волновода с волной высшего индекса и направляющее это излучение в косою срез волновода с основной волной.

Несложно показать, что излучение косою среза [4] открытого конца волновода близко к излучению равномерно освещенной апертуры. Косою срез — рассмотрим его на примере плоского волновода — выглядит так (рис. 1). Верхняя стенка обрезана при  $z = 0$ , нижняя стенка продолжена вправо. Любая волна порядка  $n$  излучается так же, как из открытого конца волновода удвоенной ширины  $2a_1$ , но излучаемое поле состоит только из одной волны Бриллюэна, уходящей под углом  $\beta_n = \arcsin \frac{\pi n}{ka_1}$  к оси  $z$ . Проекция раскрыва  $2a_1$  на перпендикуляр к направлению излучения дает представление об эквивалентной апертуре, показанной на рисунке жирной линией; распределение поля на этой апертуре равномерное. Такое построение очевидно: отражаем в нижней стенке, как в плоском зеркале, верхнюю стенку и поле набегающей слева волны  $u_n = \cos \frac{\pi n}{a_1}$  либо,

для другой поляризации, поле  $u_n = \sin \frac{\pi n}{a_1}$ . Знак отраженного поля, как обычно, зависит

от поляризации. Затем синусоидальное поле на удвоенном раскрыве представляем в виде двух плоских волн; излучается одна из них, идущая под положительным углом  $\beta_n$  к оси.

Итак, срез превращает любую волноводную волну в отрезок плоской волны полушириной  $a = a_1 \cos \beta_n$ . Задача состоит в том, чтобы этот прожекторный пучок превратить способом, в каком-то смысле наилучшим, в равномерное же распределение поля на другой апертуре. Если второй волновод шириной  $b_1$ , а трансформация проис-

ходит в основную волну индекса единица, то полуширина приемной апертуры  $b = b_1 \cos \beta_1$ , угол  $\beta_1 = \arcsin \frac{\pi}{kb_1}$ . На пути пучка ставится рефлектор. Небольшой прогиб делает отражающее зеркало фазовым корректором. Задача состоит в том, чтобы найти форму образующей зеркала, или, что то же, фазовую коррекцию. Прогиб  $\Delta(x)$  и коррекция  $\varphi(x)$  связаны известным соотношением  $\varphi(x) = 2k \Delta(x) \sin \gamma$ , где  $\gamma$  есть угол скольжения пучка, падающего на зеркало.

2. Рассмотрим теперь модель преобразователя (рис. 2): две апертуры шириной  $2a$  и  $2b$ , на расстоянии  $L_1$  от первой расположен центр фазового корректора, на расстоянии  $L_2$  от этого центра — вторая апертура. Корректор наклонен под углом  $\gamma$  к оси  $z$ .

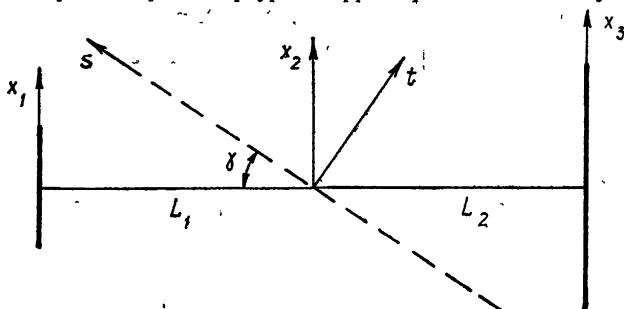


Рис. 2. Модель преобразователя.

Поле на левой апертуре  $u(x_1)$  есть П-функция, где  $\Pi(x) = 1$  при  $|x| \leq a$ ,  $\Pi(x) = 0$  при  $|x| \geq a$ . Напомним, что действие фазового корректора сводится к тому, что поле после корректора отличается от поля до него фазовым множителем  $\exp(i\varphi(x))$ .

Найдем поле, падающее на корректор в точке  $x_2$ , которая отстоит от центра корректора на расстоянии  $s = x_2/\sin \gamma$ , а от левой апертуры на расстоянии  $z = L_1 - x_2 \operatorname{ctg} \gamma$ . Для этого представим излученное из апертуры поле в виде

$$u_0(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a_1) \exp(-i a_1 x_1) d a_1, \quad (1)$$

где

$$f_1(a_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a u_0(x_1) \exp(i a_1 x_1) d x_1 = \frac{\sin a_1 a}{\pi a_1}. \quad (2)$$

Теперь продолжим поле в пространство  $(x, z)$ , умножив каждую компоненту углового спектра на  $\exp(-i \sqrt{k^2 - a_1^2} z)$  и заменив  $x_1$  на  $x_2$ :

$$u(x_2, L_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a_1) \exp[-i a_1 x_2 - i \sqrt{k^2 - a_1^2} (L_1 - x_2 \operatorname{ctg} \gamma)] d a_1. \quad (3)$$

Поле после корректора равно  $u(x_2) \exp(i \varphi(x_2))$ ; оно задано на апертуре корректора  $(s_m, -s_m)$ , и его угловой спектр имеет вид

$$f_2(\bar{a}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} u(s) e^{i \varphi(s)} \exp(i \bar{a}_2 s) d s, \quad (4)$$

где  $\bar{a}_2$  — поперечное волновое число в координатах  $(s, t)$ . Продолжим поле в пространство за корректором

$$u(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\bar{a}_2) \exp(-i a_2 s - i \sqrt{k^2 - \bar{a}_2^2} t) d \bar{a}_2. \quad (5)$$

Поле на правом раскрыве  $u(x_3)$  получается, если в (5) перейти от координат  $(s, t)$  к  $(x, z)$  и от  $\bar{a}_2$  к  $a_2$ :

$$s = x_3 \sin \gamma - L_2 \cos \gamma, \quad (6)$$

$$t = x_3 \cos \gamma + L_2 \sin \gamma;$$

$$\bar{a}_2 = a_2 \sin \gamma - \sqrt{k^2 - a_2^2} \cos \gamma, \quad (7)$$

так что

$$\bar{a}_2 s + \sqrt{k^2 - \bar{a}_2^2} t = a_2 x_3 + \sqrt{k^2 - a_2^2} L_2.$$

Запишем далее функционал, оценивающий, какая часть энергии падающей слева волны перешла в основную волну,

$$|\kappa|^2 = \frac{\left| \int_{-b}^b u(x_3) u_0(x_3) d x_3 \right|^2}{\int_{-a}^a u_0^2(x_1) d x_1 \int_{-b}^b u_0^2(x_3) d x_3}. \quad (8)$$

Разность  $1 - |\kappa|^2$  определяет потери из-за преобразования в волны высших порядков и, если система соединяется со свободным пространством, радиационные потери. Подставив (5) в (8), перепишем функционал в виде

$$|\kappa|^2 = \frac{\left| \int_{-s_m \sin \gamma}^{s_m \sin \gamma} \exp(i \varphi(x_2)) u(x_2, L_1) u(x_2, L_2) d x_2 \right|^2}{\int_{-a}^a u_0^2(x_1) d x_1 \int_{-b}^b u_0^2(x_3) d x_3}, \quad (9)$$

где

$$u(x_2, L_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(-\alpha_2) \exp [i \alpha_2 x_2 - i \sqrt{k^2 - \alpha_2^2} (L_2 + x_2 \operatorname{ctg} \gamma)] d \alpha_2, \quad (10)$$

$$f_2(-\alpha_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b u_0(x_3) \exp(-i \alpha_2 x_3) dx_3.$$

Здесь была произведена приближенная замена

$$d \bar{\alpha}_2 = \sin \gamma d \alpha_2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \operatorname{tg} \gamma \right] \approx \sin \gamma d \alpha_2. \quad (11)$$

Последнее равенство выполняется достаточно хорошо только для волноводов с большими  $ka$ , излучение из которых сосредоточено в узком интервале углов  $\alpha < \alpha_m$ ,  $f(\alpha_m) \ll \ll f(\alpha)$ ,  $\alpha_m < k$ .

Чтобы потери были минимальны, требуется подобрать фазовую коррекцию  $\varphi(x_2)$  таким образом, чтобы функционал (9) принимал максимальное значение. Для этого фазовая коррекция должна быть равна сумме аргументов  $u(x_2, L_1)$  и  $u(x_2, L_2)$ , взятой с обратным знаком:

$$\varphi(x_2) = -[\arg u(x_2, L_1) + \arg u(x_2, L_2)]. \quad (12)$$

При условии (12) потери определяются максимальным значением функционала

$$|x|_m^2 = \frac{\int_{-a}^a u_0^2(x_1) dx_1 \int_{-b}^b u_0^2(x_3) dx_3}{\int_{-s_m \sin \gamma}^{s_m \sin \gamma} |u(x_2, L_1)| |u(x_2, L_2)| dx_2}. \quad (13)$$

Таким образом, корректор выполняет функцию согласования волновых фронтов — излучения, падающего из левой апертуры, и излучения, уходящего в правую. Выбор углового спектра для описания полей в такой ситуации не случаен. Разложение в угловой спектр, по-видимому, больше соответствует физике передачи излучения на расстояния, сравнимые или меньшие размеров апертуры.

3. Приведем простой пример. Требуется преобразовать основную волну  $H_{10}$  прямоугольного волновода в волну  $H_{20}$ . Задача сводится к двумерной. Пусть для простоты размеры волновода увеличиваются вдвое:  $b_1 = 2a_1$ . Поэтому углы Бриллюэна в передающем и приемном волноводах одинаковы. Расстояния между апертурами и центром зеркала  $L_1 = L_2 = 2a/\sin \gamma$ .

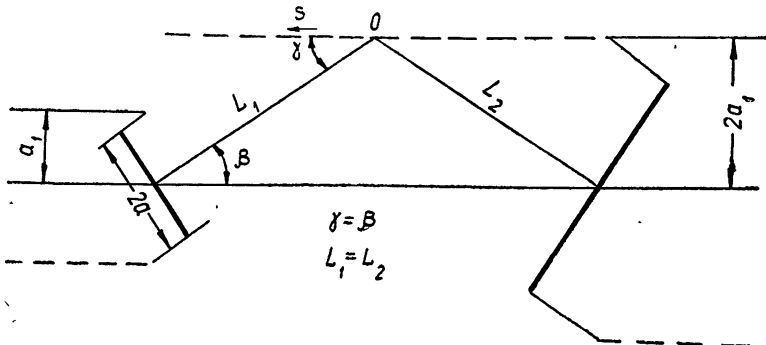


Рис. 3. Преобразователь волн.

Схема устройства показана на рис. 3. Расчеты, проведенные на ЭВМ, позволили найти потери при изменении  $ka$  от 5 до 20, они оказались порядка  $0,3 \div 0,2$ . Величина этих потерь определяется характером трансформируемого поля,  $H$ -функцией со скачком амплитуды на краю апертуры. Диффузия поля поперек направления распространения



частично компенсируется фазовым корректором, однако полностью, разумеется, не может быть устранена. Поле на приемной апертуре оказывается непохожим на равномерное распределение, величина  $1 - |x|^2$  дает представление о степени этого несоответствия.

На рис. 4 приведен пример фазовой коррекции. Форма зеркала достаточно сложна. Тем не менее можно ожидать, что ошибка первого порядка в задании  $\varphi(x)$  приведет к ошибке второго порядка в  $|x|^2$  из-за стационарности функционала (9). Иными словами, если

$$\varphi(x_2) = -\arg u(x_2, L_1) - \arg u(x_2, L_2) - \varepsilon x(x_2) \quad (\varepsilon \ll 1), \quad (14)$$

то

$$|x|^2 = |x|_m^2 + O(\varepsilon^2). \quad (15)$$

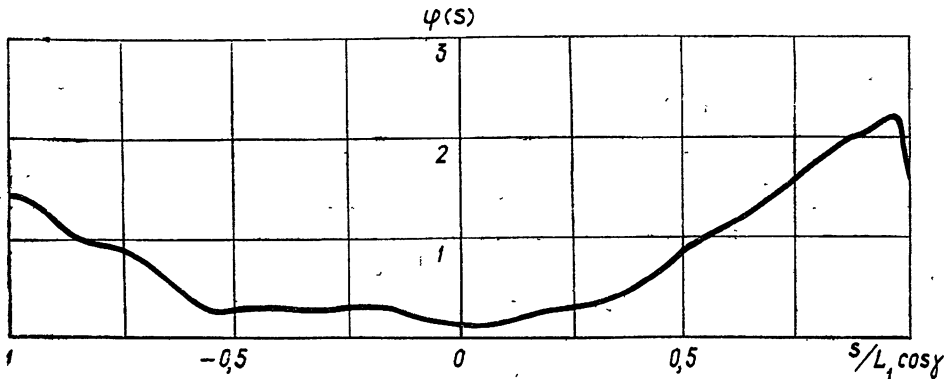


Рис. 4. Форма синтезированного фазового корректора ( $ka=5,5$ ).

Заметим, что корректоры-линзы для преобразования П-функции в П-функцию были синтезированы в работе [5]. Линзы накладывались на обе апертуры, их форма подбиралась таким образом, чтобы минимизировать потери передачи. Разумеется, эти линзы могут быть использованы и в рассматриваемом случае. Параметр задачи  $s$  для устройства рис. 3 равен примерно  $\frac{\pi}{2} \cos^2 \alpha$ . Потери передачи изменяются в пределах от 0,7 до 0,45 при изменении  $ka$  от 5 до 20, т. е. даже больше, чем в рассмотренном трансформаторе с синтезированным зеркалом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. E. Miller, Bell System Techn. J., 48, 7, 2189 (1969).
2. Н. Ф. Ковалев, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 783 (1968).
3. С. Н. Власов, Л. И. Загрядская, Н. Ф. Ковалев, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Тезисы докладов 5-го Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, 1970, стр. 91.
4. Л. И. Пангонис, М. В. Персиков, Радиотехника и электроника, 15, № 12, 2300 (1970).
5. Н. Н. Войтович, В. В. Семенов, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1213 (1968).

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
5 марта 1972 г.

УДК 621.372.8.09

## ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

С. А. Новиков

Обычно для передачи энергии с помощью нормальных волноводов используется волна  $H_{01}$  круглого волновода, коэффициент затухания которой уменьшается с увеличением отношения рабочей частоты к критической, в связи с тем, что для нормальных

металлов поверхностный импеданс пропорционален  $\sqrt{f}$ . Частотная зависимость поверхностного импеданса для сверхпроводников имеет более сложный характер, поэтому и коэффициенты затухания при распространении волн в сверхпроводящих волноводах будут иметь другой вид.

Любая деформация круглого волновода приводит к тому, что он становится эллиптическим. Даже в обычных волноводах это вызывает сильные изменения частотной зависимости коэффициентов затухания. Если волновод является сверхпроводящим, то вследствие более сильной зависимости поверхностного импеданса от частоты эллиптического будет оказывать более существенное влияние.

Как обычно, коэффициенты затухания  $\alpha^{(E)}$  и  $\alpha^{(H)}$  для  $E$ - и  $H$ -волн соответственно определим через значение поверхностного импеданса  $R$  [1].

В наиболее интересном для техники СВЧ диапазоне частот  $\hbar\omega \ll k_B T_{кр} \ll \Delta$   $R$  пропорционален  $\omega^2$  [5]. Здесь  $\hbar$  — постоянная Планка,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $\Delta$  — полуширина энергетической щели,  $T_{кр}$  — критическая температура,  $\omega$  — круговая частота.

В настоящее время в литературе подробно подсчитано с учетом конечности фактора когерентности поверхностное сопротивление для свинца и ниобия на частоте  $f = 11,2$  Гц. Сопротивление на любой частоте можно выразить через его сопротивление при  $f = 11,2$  Гц:  $R = R'_s(f/f_1)^2$ , где  $R'_s$  — поверхностное сопротивление металла при  $f = f_1$ . В [3] было показано, что для ниобия при  $T/T_{кр} = 0,454$  для  $f = 11,2$  Гц  $R'_s = 3,29 \cdot 10^{-5}$  ом.

Если пользоваться понятием относительной частоты  $\nu = \frac{k}{k_{\perp}} = \frac{f}{f_{кр}}$ , то

$$R_s = \frac{R'_s}{\left[ \frac{k(11,2)}{k_{\perp}} \right]^2} \quad (1)$$

и выражения для  $\alpha^{(E)}$  и  $\alpha^{(H)}$  запишутся следующим образом:

$$\frac{\alpha^{(E)} a}{\left[ \frac{k_{\perp}}{k(11,2)} \right]^2} = \frac{cR'_s}{4\pi} \frac{C_1^{(E)} \nu^3}{2\sqrt{\nu^2 - 1}}; \quad (2)$$

$$\frac{\alpha^{(H)} a}{\left[ \frac{k_{\perp}}{k(11,2)} \right]^2} = \frac{cR'_s}{4\pi} \frac{C_1^{(H)} \nu(\nu^2 - 1) + C_2^{(H)} \nu}{2\sqrt{\nu^2 - 1}}. \quad (3)$$

Коэффициенты  $C_1^{(E)}$ ,  $C_1^{(H)}$ ,  $C_2^{(H)}$  учитывают геометрию системы и для эллиптического волновода имеют вид

$$C_1^{(E)} = \frac{h^2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 \oint \left| \frac{d\Pi_z^E}{dx_0} \right|^2 \frac{d\eta}{(1 - e^2 \cos^2 \eta)^{1/2}}}{\int |\Pi_z^E|^2 d\eta d\xi}; \quad (4)$$

$$C_1^{(H)} = \frac{h^2 \oint \left| \frac{d\Pi_z^H}{dx_1} \right|^2 \frac{\sin^2 \eta d\eta}{(1 - e^2 \cos^2 \eta)^{1/2}}}{\int |\Pi_z^H|^2 d\eta d\xi}; \quad (5)$$

$$C_2^{(H)} = \frac{a^2 \oint |\Pi_z^H|^2 (1 - e^2 \cos^2 \eta)^{1/2} d\eta}{\int |\Pi_z^H|^2 d\eta d\xi}. \quad (6)$$

Здесь  $\Pi_z$  — вектор Герца,  $\xi$ ,  $\eta$  — эллиптические координаты,  $h$  — полуфокусное расстояние эллипса,  $x_0$  и  $x_1$  — безразмерные аргументы функций Бесселя; в ряд по которым раскладывается  $\Pi_z$  [2],  $\xi_0$  — координата внутренней поверхности волновода,  $a$  — большая полуось эллипса.

На рис. 1—4 построены графики частотных зависимостей коэффициентов затухания соответственно волн  $E_{01}$ ,  $H_{01}$ ,  $E_{11}^e$ ,  $E_{11}^0$ , для ниобиевых волноводов при  $T = 4,2^\circ\text{K}$  для трех значений эксцентриситета  $e_1 = 0,35$ ;  $e_2 = 0,50$ ;  $e_3 = 0,65$ ,  $E_{11}^e$  и  $E_{11}^0$  — четные и нечетные типы колебаний [4]. Аналогично могут быть построены графики для других температур и для других материалов.

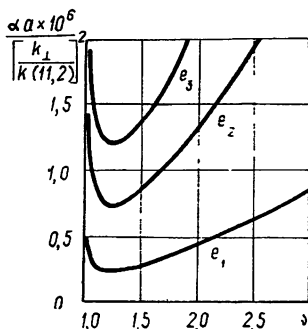


Рис. 1.

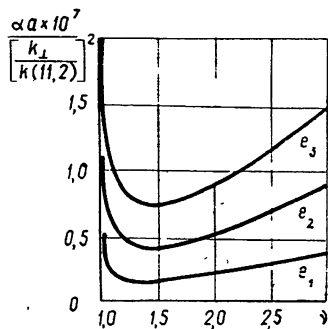


Рис. 2.

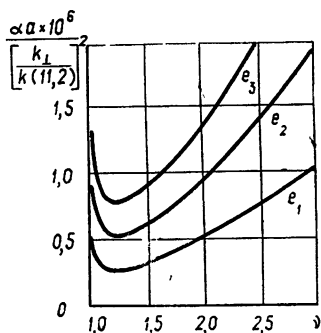


Рис. 3.

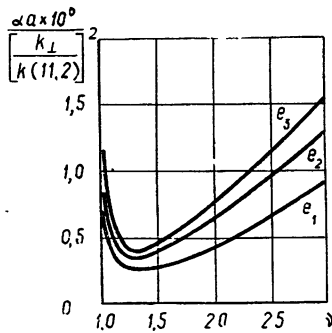


Рис. 4.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. Н. Диденко за предложенную тему и многочисленные консультации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
2. Таблицы для вычисления функций Матье, ВЦ АН СССР, М., 1967.
3. J. P. Turneaury, J. Weissman, J. Appl. Phys., **39**, № 9, 4417 (1968).
4. И. В. Мак Лаклан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
5. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. М. Халатников, ЖЭТФ, **37**, 187 (1959).

Научно-исследовательский институт  
ядерной физики, электроники и автоматики  
при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию  
15 ноября 1971 г.

В статье В. Я. Рядова и Н. И. Фурашова «Исследование спектра поглощения радиоволн атмосферным водяным паром в диапазоне 1,15 ÷ 1,5 мм» (№ 10, 1972 г.) на рис. 2 в области  $\lambda < 1,1$  мм по техническим причинам оказались «марашки», по виду сходные с обозначением экспериментальных точек. Ввиду этого уточняется, что рис. 2 экспериментальных данных для  $\lambda < 1,1$  мм не содержит.