ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 517.949

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. И. Коган

Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ — полином с целочисленными коэффициентами. Ниже рассматриваются функциональные уравнения вида

$$P(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), f_1(t+1), \quad (1)$$
$$f_2(t+1), \dots, f_n(t+1)) = 0,$$

называемые нами полиномиальными разностными уравнениями. Решением именуем набор $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ всюду определенных функций типа $N \to D$ (здесь D — множество всех действительных, а N — натуральных чисел), удовлетворяющий требованию

$$(\forall t)\,[P(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), f_1(t+1),$$
$$f_2(t+1), \dots, f_n(t+1)) = 0].$$

Начальными условиями назовем вектор $C = (f_1(0), f_2(0), \dots, f_n(0))$; в данном случае нас не интересует вопрос о единственности решения уравнения (1) при заданном векторе C. Будет построено уравнение вида (1), такое, что лишь при некоторых начальных условиях оно имеет решения, причем неразрешима проблема определения по вектору C ($C \in N^n$), имеет ли построенное уравнение решения, если заданный вектор взять за начальные условия.

Базисом для доказательства неразрешимости служит следующее предложение.

Предложение А. Существует автономный автомат с тремя счетчиками Σ такой, что неразрешима проблема определения по начальной позиции $(q_1, (x, 0, 0))$ (т. е. автомат находится в состоянии q_1, имеет содержимым первого счетчика x, второй и третий счетчики пусты), будет ли третий счетчик все время оставаться пустым.

Определения понятий автомата со счетчиками и позиции автомата описаны, например, в [1] Известно, что существует двухсчетчиковый автономный автомат Σ^0, с неразрешимой проблемой определения по начальной позиции $(q_1, (x, 0))$, окажется ли когда-либо Σ^0 в состоянии q_m (см. [2], § 15 2, теорема 2). Прямым следствием этого факта является верность Предложения А. Действительно, автомат Σ легко получается из Σ^0: прибавляется новый (третий) счетчик, который не оказывает никакого влияния на остальные компоненты автомата (состояния и первые два счетчика), но становится непустым, как только автомат оказывается в состоянии q_m.

С автоматом Σ сопоставим следующие семь функций натурального аргумента

$$f(t), \quad s_1(t), \quad s_2(t), \quad s_3(t), \quad g_1(t), \quad g_2(t), \quad g_3(t).$$

Функция $f(t)$ будет кодировать состояние Σ в момент t. Пусть $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ — список состояний, тогда $f(t)$ принимает значения на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$ Функции $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ — содержимые счетчиков в момент t Роль функций $g_1(t), g_2(t), g_3(t)$ будет видна из дальнейшего Обозначим через φ функцию действия автомата Σ (см. [1]), она определена при $8 \cdot m$ различных значениях аргумента. Каждому из этих значений следующим образом поставим в соответствие полином. Пусть $\varphi(q_i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (q_{i'}, (z_1, z_2, z_3))$; здесь, как это следует из определения функции действия, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ принимают значения на множестве $\{0, 1\}$, а z_1, z_2, z_3 — на множестве $\{-1, 0, 1\}$. Соответствующий полином запишем так: $Q_{8(i-1)+4\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3+1} = \{(f(t)-i)^2 + \sum_{l=1}^{3} [s_l(t) -$

$$-(g_i(t)+1)\,\varepsilon_i]^2+\{(f(t+1)-f)^2+\sum_{i=1}^{3}[s_i(t+1)-s(t)-z_i]^2\}.$$

Таким образом, введены полиномы

$$Q_i(f(t),\ s_1(t),\ s_2(t),\ s_3(t),\ g_1(t),\ g_2(t),$$
$$g_3(t),\ f(t+1),\ s_1(t+1),\ s_2(t+1),\ s_3(t+1)).$$

Рассмотрим полиномиальное разностное уравнение ($i=1, 2, \ldots, 8\cdot m$)

$$\prod_{i=1}^{8m} Q_i=0. \tag{2}$$

Легко видеть, что при $C=(1,x,0,0,x-1,0,0)$ $(x\in N)$ и при $C=(1,0,0,0,0,0,0)$ существуют однозначно определяемые вектором C функции $f^C(t)$, $s_1^C(t)$, $s_2^C(t)$, $s_3^C(t)$, такие, что при некоторых $\tilde{g}_1(t)$, $\tilde{g}_2(t)$, $\tilde{g}_3(t)$ система $\{f^C(t)\ s_1^C(t),\ s_2^C(t),\ s_3^C(t),\ \tilde{g}_1(t),\ \tilde{g}_2(t),\ \tilde{g}_3(t)\}$ является решением уравнения (2). Теперь становится ясной роль функций $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$. В случае $\varepsilon_i\neq 0$ $g_i(t)$ равно уменьшенному на единицу содержимому i-го счетчика; в случае $\varepsilon_i=0$ значение $g_i(t)$ становится безразличным Функции $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ служат для проверки, действительно ли содержимое первого, второго или третьего счетчика отлично от нуля. Функции $f^C(t)$, $s_1^C(t)$, $s_2^C(t)$, $s_3^C(t)$ описывают поведение автомата Σ, начавшего работу в позиции $(g_1, (x,0,0))$, $x>0$ $(C=(1,x,0,0,x-1,0,0))$, или в позиции g_1 $(0,0,0))$ $(C=(1,0,0,0,0,0,0))$,

Теперь запишем уравнение

$$\left(\prod_{i=1}^{8m} Q_i\right)+s_3^2(t)=0. \tag{3}$$

Очевидно, что при $C=(1,x,0,0,x-1,0,0)$ уравнение (3) имеет решения тогда и только тогда, когда третий счетчик автомата Σ, начавшего работу в позиции $(g_1, (x, 0, 0))$, все время остается пустым.

Теорема. Существует полиномиальное разностное уравнение вида (1) с неразрешимой проблемой определения по начальным условиям, имеется ли удовлетворяющее им решение.

Действительно, допустив, что Σ удовлетворяет Предложению А, получаем, что уравнение (3) имеет неразрешимой проблему, сформулированную в тексте теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Гаврилова, Д. И. Коган, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 4, 534 (1970).
2. А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, Физматгиз, М., 1965.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 апреля 1971 г.