ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 62—507

СИНТЕЗ СХЕМ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В СИСТЕМЕ: МАКСИМУМ, МИНИМУМ, ЦИКЛ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОДНОМЕСТНЫЕ ФУНКЦИИ

А. Е. Бобров, В. А. Журкин

Рассматривается нормальная форма представления функций многозначной логики в системе: максимум, минимум, цикл и k—1 одноместных функций $\Psi_i(x)$, которые для дизъюнктивных нормальных форм принимают значения i при $x \neq 0$ и 0 при $x = 0$.

Вводится специальная операция для минимизации функций МЗЛ — «расширение». Предлагается алгоритм минимизации функций МЗЛ в предлагаемой функционально полной системе, использующий методы минимизации не полностью определенных функций алгебры логики.

В работе рассматривается метод минимизации функций многозначной логики, вводится некоторая операция «расширение» и предлагается алгоритм синтеза схем на многозначных элементах.

Задача синтеза цифровых автоматов с многозначным структурным алфавитом в настоящее время является весьма актуальной. Трудности алгоритмизации упрощения форм функций многозначной логики (МЗЛ) и отсутствие общего решения обусловливают большое разнообразие предлагаемых способов минимизации [1-5]. Результаты, опубликованные в литературе, не позволяют, к сожалению, непосредственно воспользоваться разработанными алгоритмами для автоматизации синтеза в многозначной логике. В связи с этим в предлагаемой работе делается попытка выявления особенностей минимизации функций МЗЛ по сравнению с минимизацией функций двузначной логики. Предлагается алгоритм минимизации функций МЗЛ.

В качестве исходной системы функций используется избыточная функционально полная система (ФПС), содержащая

1. $\max(\overset{\to n}{x}) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$,

2. $\min(\overset{\to n}{x}) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$.

3. Цикл $\tilde{x} = x \oplus 1 = 1^x$ $\quad (x = x \oplus 0 = 0^x)$,

$$a\begin{cases}\overset{\approx}{x} = x \,\tilde{\oplus}\, 1 = x \oplus 2 = 2^x,\\ \approx\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \tilde{x} = x \oplus a = a^x,\end{cases}$$

где $\oplus$ — символ операции сложения по модулю k, k — значность логики, $0 \leqslant a \leqslant k-1$.

4. Специальные одноместные функции $\Psi_i(x)$ для дизъюнктивных нормальных форм

$$\Psi_i(x) = \left| \begin{array}{ll} i & (x \neq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1), \\ 0 & (x = 0). \end{array} \right.$$

5. Специальные одноместные функции $\Psi'_i(x)$ для конъюнктивных нормальных форм

$$\Psi'_i(x) = \left| \begin{array}{ll} i & (x \neq k-1, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2), \\ k-1 & (x = k-1). \end{array} \right.$$

Для вскрытия особенностей минимизации функций МЗЛ целесообразно сформулировать задачу минимизации в общем виде.

По аналогии с двузначной логикой вводятся нормальные формы функций МЗЛ

$$f(\vec{x}^n) = \bigvee_{il} \Psi_{il} \bigwedge_{jr} a_{jil}^{x_r}, \tag{1}$$

$$f(\vec{x}^n) = \bigwedge_{il} \Psi'_{il} \bigvee_{jr} a_{jil}^{x_r}, \tag{2}$$

где $a_{jil}^{x_r}$ — количество циклов над jr-ым аргументом в il-ой импликанте (конъюнкции, либо дизъюнкции), $0 \leqslant i \leqslant k-1$; j — индекс одноименных аргументов с разным числом циклов в il-й импликанте, $j = 1, 2, 3, \ldots, k-1$; r — индекс различных (разноименных) аргументов, входящих в импликанту, $r = 1, 2, \ldots, n$; l — индекс импликант, входящих аргументом в функцию $\Psi_i(x)$ с одинаковым значением i; $l = 0, 1, 2, \ldots, L$; $L \leqslant k^n$; L — количество импликант, входящих в нормальную форму; n — количество аргументов, от которых зависит функция $f(\vec{x}^n)$; x — аргумент, принимающий одно из значений множества $E_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

Если для всех импликант, состоящих из n переменных данной функции $f(\vec{x}^n)$, выполняется условие

$$j = k-1, \quad a_j^{x_r} = k - \alpha_{jr}, \tag{3}$$

где α_{jr} — значение аргумента, на котором соответствующая конституента принимает значение 0, то соответствующая нормальная форма эквивалентна совершенной нормальной форме аналогично двузначной логике: для (1) — дизъюнктивная совершенная нормальная форма многозначной логики (ДСНФМ) и для (2) — конъюнктивная совершенная нормальная форма многозначной логики (КСНФМ).

Известно, что конъюнкция всех возможных циклов аргумента равна нулю

$$\bigwedge_{i=1}^{k} a_i^{x_r} = 0 \qquad (a = 0, 1, 2, \ldots, i, \ldots, k-1). \tag{4}$$

В выражении (1) в каждой il-ой импликанте содержится J_{ilr} количество индексов циклов (k—1) каждого аргумента. Обозначим через $b_{jil}^{x_r}$ значения количеств циклов, отсутствующих в il-ой импликанте по r-му аргументу. Тогда выражение (1) можно упростить

$$\begin{gathered} f(\vec{x}^n) = \bigvee_{il} \Psi_{il} \bigwedge_{j'r} \bar{b}_{j'il}^{x_r}, \\ 1 \leqslant J'_{ilr} \leqslant k - J_{il}, \end{gathered} \tag{5}$$

где J'_{ilr} (J_{ilr}) — количество r-ых аргументов с разным числом циклов в k—1 раз уменьшить ранг импликанты и упростить аналитическую запись дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) функции. Численно $\bar{b}$ определяется следующим образом:

$$\bar{b}^x_{j'r} = \alpha_{j'r}, \tag{6}$$

где $\alpha_{j'r}$ — значение r-го аргумента, на котором соответствующая конституента не равна нулю.

Пример 1. Записать в ДСНФМ функцию $f(x, y)$, заданную табл. 1 ($n = 2$, $k = 4$).

Таблица 1

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	2
2	1	0	0	1
3	3	2	1	1

В виде, соответствующем (1) и (3), ДСНФМ запишется следующим образом:

$$D = \Psi_1(0^x 1^x 2^x 1^y 2^y 3^y) \vee \Psi_1(0^x 1^x 2^x 0^y 1^y 3^y) \vee$$
$$\vee \Psi_1(0^x 1^x 3^x 1^y 2^y 3^y) \vee \Psi_1 (0^x 1^x 3^x 0^y 2^y 3^y) \vee$$
$$\vee \Psi_1(0^x 2^x 3^x 0^y 1^y 3^y) \vee \Psi_1 (0^x 2^x 3^x 0^y 2^y 3^y) \vee$$
$$\vee \Psi_2(0^x 1^x 2^x 0^y 2^y 3^y) \vee \Psi_2 (0^x 2^x 3^x 0^y 1^y 2^y) \vee$$
$$\vee \Psi_3(0^x 2^x 3^x 1^y 2^y 3^y).$$

В виде (5) ДСНФМ запишется

$$D = \Psi_1(3^{-x} 0^{-y}) \vee \Psi_1(3^{-x} 2^{-y}) \vee \Psi_1(2^{-x} 0^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_1(2^{-x} 1^{-y}) \vee \Psi_1 (1^{-x} 2^{-y}) \vee \Psi_1(1^{-x} 1^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_2(3^{-x} 1^{-y}) \vee \Psi_2(1^{-x} 3^{-y}) \vee \Psi_3 (1^{-x} 0^{-y}).$$

Аналогично можно записать и КСНФМ.

Очевидно, что сложность Q нормальной формы функции многозначной логики, представленной в форме (1), в общем случае равна

$$Q = Q_\Psi + Q_\vee + Q_\wedge, \tag{7}$$

где Q_Ψ, $Q_\vee$, $Q_\wedge$ — соответственно сложность реализации Ψ_i-функции, максимума и минимума.

Определение значения Q_Ψ и $Q_\vee$ не вызывает затруднений. Считая, что Ψ_i-функция будет реализована на соответствующем входе максимума, куда через специальный максимум будут собраны все импликанты с Ψ_i,

$$
\begin{gathered}
\Psi_i=[\varphi_1(\overset{\to m}{x})] \vee \Psi_i[\varphi_2(\overset{\to m}{x})] \vee \ldots \vee \Psi_i[\varphi_l(\overset{\to m}{x})]= \\
=\Psi_i[\varphi_1(\overset{\to m}{x}) \vee \varphi_2(\overset{\to m}{x}) \vee \ldots \vee \varphi_l(\overset{\to m}{x})], \\
\Psi_i[\varphi_1(\overset{\to m}{x})] \Psi_i[\varphi_2(\overset{\to m}{x})] \ldots \Psi_i[\varphi_l(\overset{\to m}{x})]= \\
=\Psi_i[\varphi_1(\overset{\to m}{x}) \varphi_2(\overset{\to m}{x}) \ldots \varphi_l(\overset{\to m}{x})],
\end{gathered} \tag{8}
$$

можно записать

$$0 \leqslant N_\Psi \leqslant k-1, \tag{9}$$

где N_Ψ — число операторов Ψ_i.

Сложность $Q_\vee$ пропорциональна количеству двувходовых операторов максимума (или количеству импликант).

Несколько сложнее определяется значение $Q_\wedge$, которое зависит от сложности реализации операторов цикла и минимума. В общем случае $Q_\wedge$ можно представить как сумму

$$Q_\wedge=k_\wedge \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{L} \sum_{r=1}^{m} j_{ilr}^{\max}+Q_{\text{ц}}, \tag{10}$$

где $k_\wedge$ — коэффициент относительной сложности реализации операторов минимум; $Q_{\text{ц}}$ — сложность реализации операторов «цикл»; значения остальных символов совпадают с их значением в (1).

Очевидно, что сложность реализации всех циклов зависит от наибольшего числа циклов одного аргумента в импликантах и от числа аргументов. Однако, допуская коэффициент разветвления k_b, элементов, реализующих цикл, много большим единицы ($k_b \gg 1$), можно получить число элементов $N_{\text{ц}}$, реализующих все циклы

$$0 \leqslant N_{\text{ц}} \leqslant n(k-1). \tag{11}$$

Тогда равенство (7) принимает вид

$$Q=k_\Psi N_\Psi+k_\vee N_\vee+k_{\text{ц}} N_{\text{ц}}+k_\wedge \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{L} \sum_{r=1}^{m} j_{ilr}^{\max}, \tag{12}$$

где k_Ψ, $k_\vee$, $k_{\text{ц}}$, $k_\wedge$ — коэффициенты относительной сложности реализации соответствующего оператора на один вход.

Первое слагаемое слабо зависит от вида функции МЗЛ, второе и третье слагаемые косвенно входят в последнее слагаемое (через параметры L и j), и с увеличением четвертого слагаемого увеличиваются и второе и третье слагаемые. Следовательно, стремясь уменьшить значение Q, в первую очередь следует уменьшать значение четвертого слагаемого.

Таким образом, в качестве критерия q минимизации можно принять

$$q=\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{L} \sum_{r=1}^{m} j_{ilr}^{\max}, \tag{13}$$

что полностью соответствует критерию минимизации функций двузначной логики (сумма рангов импликант).

Оптимизация функции по критерию q может быть выполнена за счет уменьшения ранга импликант (за счет уменьшения J и r) и за счет выбора тупиковой формы, содержащей определенное количество импликант при минимальной сложности. Это достигается с помощью аппарата минимизации двузначных функций (определенная последовательность выполнения операций склеивания, поглощения и перебора тупиковых форм).

Задача минимизации в общем случае может быть сформулирована следующим образом: некоторую полностью определенную функцию МЗЛ преобразовать так, чтобы результат в виде

$$\bigvee_{il} \Psi_{il} \bigwedge_{jr} a_{jil}^{x_r} \quad (0 \leqslant l \leqslant k^n),$$

где l — импликанты, служащие аргументом для функции Ψ_i с одинаковым i, остальные обозначения одинаковы с обозначениями формулы (1), имел минимальное значение критерия q.

Очевидно, что поставленную задачу можно решить успешно только в том случае, если будут использованы особенности операции максимум. Эта операция позволяет минимизацию функции МЗЛ вести по частям, начиная с $\Psi_{i_{\min}}$ ($i_{\min}$ — минимальное значение индекса функций Ψ_i, входящих в заданную функцию МЗЛ $f(\vec{x}^n)$, или минимальное значение самой функции $f(\vec{x}^n)$ МЗЛ). При этом импликанты с большим индексом s при Ψ ($s > i$, $s \in E_k \setminus 0$, $E_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$) можно рассматривать как функцию s импликант

$$\begin{gathered} \Psi_s[\varphi(\vec{x}^m)] = \Psi_s[\varphi(\vec{x}^m)] \vee \Psi_{s-1}[\varphi(\vec{x}^m)] \vee \ldots \\ \ldots \vee \Psi_{i\,\min}[\varphi(\vec{x}^m)] \vee \ldots \vee \Psi_1[\varphi(\vec{x}^m)]. \end{gathered} \tag{14}$$

Для первого этапа из этих s импликант необходимо взять импликанту с $\Psi_{i_{\min}}$. Выборку импликанты с $\Psi_{i_{\min}}$ необходимо выполнить для всех импликант, принадлежащих заданной функции $f(\vec{x}^n)$, для которых $s > i_{\min}$. Все импликанты с $\Psi_{i_{\min}}$ объединяются в отдельную $i_{\min}$-ую часть. Эта часть рассматривается как недоопределенная функция двузначной алгебры логики, причем неопределенность проявляется на импликантах, полученных из Ψ_s-ых выражений. Введение частей из Ψ_s-ых выражений позволяет в общем случае получать более простые выражения для $\Psi_{i_{\min}}$-ой части. Простые импликанты, покрывающие только значения из Ψ_s-ых частей, могут быть полностью исключены из сокращенной нормальной формы $\Psi_{i_{\min}}$-ой части, так как, во-первых, они будут учитываться при рассмотрении следующих i-ых частей функции $f(\vec{x}^n)$ $(i > i_{\min})$, во-вторых, для $i_{\min}$-ой части они не содержат существенной информации.

Упрощение $\Psi_{i_{\min}}$-ой части ведется с использованием операций склеивания и поглощения.

Склеивание допустимо только для соседних импликант. Под соседними понимаются импликанты, отличающиеся лишь по одному аргументу. Отличие может быть по числу вхождений аргумента в импликанту и по числу циклов, с которыми аргумент входит в импликанту. Результат склеивания содержит лишь общую для склеиваемых импликант часть

$$\begin{gathered} \Psi_i[a_1^{x_l} a_2^{x_l} \ldots a_n^{x_l} \varphi(\vec{x}^m)] \vee \\ \vee \Psi_i[b_1^{x_l} b_2^{x_l} \ldots b_l^{x_l} \varphi(\vec{x}^m)] = \Psi_i[c_1^{x_l} c_2^{x_l} \ldots c_\rho^{x_l} \varphi(\vec{x}^m)], \end{gathered} \tag{15}$$

где c_j существует лишь в том случае, когда $c_j = a_t = b_u$ ($j = 1, 2, \ldots, \rho$; $t = 1, 2, \ldots, n$; $u = 1, 2, \ldots, l$).

В частном случае, когда $\rho = 0$, выражение (15) описывает работу операции склеивания как операции поглощения.

Последовательное применение (15) позволяет известным способом [5] получить сокращенную, а затем и минимальную нормальную форму $i_{\min}$-ой части.

После этого необходимо перейти к следующему этапу обработки функции, заменив $i_{\min}$ на $i'_{\min}$ ($i'_{\min}$ — минимальное значение индекса функций Ψ без $i_{\min}$).

Процедура повторяется столько раз, сколько значений $f(\vec{x}^n) \neq 0$ принимает заданная функция $f(\vec{x}^n)$.

Если частные минимальные формы обозначить через μ_i, то общая минимальная нормальная форма M определится следующим образом:

$$M = \bigvee_i \mu_i \quad (i \neq 0). \tag{16}$$

Тогда, алгоритм C_0 получения минимальной нормальной формы функции многозначной логики с обязательным использованием Ψ-функций для конечных n и k имеет следующий вид.

1. Получение ДСНФМ.
2. Расширение ДСНФМ путем уменьшения всех s-ых индексов до значения текущего индекса.
3. Минимизация частично определенной функции двузначной логики.
4. Исключение из ДСНФМ значений, равных текущему индексу.
5. Увеличение текущего индекса на $+1$, и если $i+1 \in v$, где v — множество неравных нулю значений функции $f(\vec{x}^n)$, то переход на пункт 2, а если $i+1 \bar{\in} v$, то переход на пункт 6.
6. Если $i+1 = k$, то переход на пункт 7, если $i+1 < k$, то переход на пункт 5.
7. Запись результата, переход на пункт 8.
8. Конец выполнения алгоритма.

Пример 2. Найти минимальную дизъюнктивную нормальную форму (МДНФМ) в рассматриваемой ФПС для функции, заданной табл. 1 ($n = 2$, $k = 4$).

С целью уменьшения громоздкости записи лучше воспользоваться ДСНФМ в форме (5).

$$\text{ДСНФМ } f(x, y), \quad D = \Psi_1(3^{-x}0^{-y}) \vee \Psi_1(3^{-x}2^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_1(2^{-x}0^{-y}) \vee \Psi_1(2^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_1(1^{-x}2^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_1(1^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_2(3^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_2(1^{-x}3^{-y}) \vee \Psi_3(1^{-x}0^{-y}).$$

Поскольку наименьшее значение, отличное от нуля, для данной функции равно единице, на первом этапе следует расширить D до Ψ_1 при всех импликантах.

$$D_1 = \Psi_1(3^{-x}0^{-y}) \vee \Psi_1(3^{-x}2^{-y}) \vee \Psi_1(2^{-x}0^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_1(2^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_1(1^{-x}2^{-y}) \vee \Psi_1(1^{-x}1^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_2(3^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_2(1^{-x}3^{-y}) \vee \Psi_3(1^{-x}0^{-y}).$$

Применяя последовательно операцию склеивания и поглощения, получим сокращенную ДНФМ (СДНФМ) для D_1.

$$\text{СДНФМ } D_1 = \Psi_1(1^{-x}) \vee \Psi_1(1^{-x}2^{-x}3^{-x}0^{-y}1^{-y}) \vee$$
$$\vee \Psi_1(1^{-x}3^{-x}0^{-y}1^{-y}2^{-y}).$$

В соответствии с видом (1) можно записать

$$\text{СДНФМ } D_1 = \Psi_1(0^x 2^x 3^x) \vee \Psi_1(0^x 2^y 3^y) \vee \Psi_1(0^x 2^x 3^y).$$

Далее, используя соотношение склеивания и поглощения, находим МДНФМ D_1.

$$\text{МДНФМ } D_1 = \mu_1 = \Psi_1(0^x 2^y 3^y) \vee \Psi_1(0^x 2^x 3^y).$$

В соответствии с пунктом 4 алгоритма C_0 исключаем из ДСНФМ исходной функции D конституенты с Ψ_1. В результате получается

$$D'_2 = \Psi_2(3^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_2(1^{-x}3^{-y}) \vee \Psi_3(1^{-x}0^{-y}).$$

Поскольку увеличение i меньше 4, следует расширить D'_2 до D_2.

$$D_2 = \Psi_2(3^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_2(1^{-x}3^{-y}) \vee \Psi_2(1^{-x}0^{-y}).$$

СДНФМ D_2 совпадает с единственной МДНФМ D_2.

$$\mu_2 = \Psi_2(3^{-x}1^{-y}) \vee \Psi_2(2^{-x}0^{-y}3^{-y}) =$$

$$= \Psi_2(0^x1^x2^x0^y2^y3^y) \vee \Psi_2(0^x2^x3^x1^y2^y).$$

Далее остается D'_3.

$$D'_3 = \Psi_3(1^{-x}0^{-y}).$$

При $i = k - 1 = 3$, расширенная форма D_3 совпадает с D'_3.

$$D_3 = D'_3 = \mu_3 = \Psi_3(1^{-x}0^{-y}) = \Psi_3(0^x2^x3^x1^y2^y3^y).$$

После исключения конституент с Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 и прибавления единицы к i получаем $i + 1 = 4$, следовательно, совокупность полученных μ_i определяет искомую МДНФМ заданной функции

$$M = \bigvee_i \mu_i = \Psi_1(0^x2^y3^y) \vee \Psi_2(0^x1^x2^x0^y2^y3^y) \vee \Psi_1(0^x2^y3^y) \vee$$

$$\vee \Psi_2(0^x2^x3^x1^y2^y) \vee \Psi_3(0^x2^x3^x1^y2^y3^y).$$

Минимальная форма имеет значение $q = 23$ и может быть реализована с помощью схемы, приведенной на рис. 1.

На основании рассмотренного можно сделать вывод, что синтез схем на многозначных элементах может быть формализован и выполнен с помощью универсальных ЭЦВМ.

Особенность обработки функций многозначной логики, связанная с тем, что $k > 2$, требует следующей последовательности преобразований.

1. Расширение совершенной нормальной формы функции на основании свойств операции максимум.

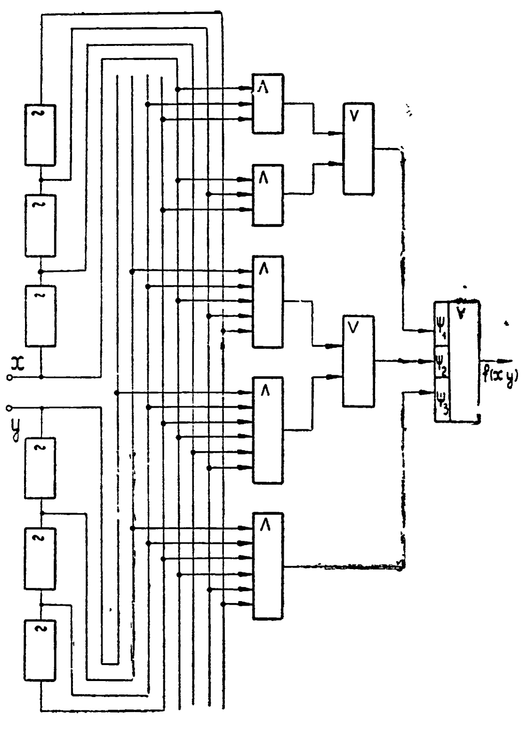

Рис. 1. Схема реализации $f(x, y)$ с $q = 23$.

2. Выделение i-ых ($i \in \{1, 2, \ldots, k - 1\}$) частей расширенной формы функции многозначной логики и представление каждой i-й части в виде недоопределенной функции двузначной алгебры логики.

3. Минимизация каждой i-ой части одним из известных способов.

4. Представление полученных минимальных нормальных двоичных форм i-ых частей в многозначной логике и на основании свойств операций максимум и Ψ_i объединение их через максимум.

Полученный результат является искомой минимальной нормальной формой полностью определенной фукции многозначной логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Романкевич, Кибернетика, № 4, 38 (1965).
2 Ю. Л. Иваськив, Д. А. Поспелов, Ж Тошич, Кибернетика, № 2, 35 (1969).
3. А М. Романкевич, Кибернетика, № 3, 49 (1969).
4. С. В. Яблонский, Тр. МИАН СССР, 51, 5 (1958).
5. Д. А. Поспелов, Логические методы анализа и синтеза схем, изд. Энергия, М, 1968.

Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию 11 июня 1971 г.

MANY-VALUED LOGIC CIRCUIT SYNTHESIS IN SYSTEM: MAXIMUM, MINIMUM, CYCLE AND SPECIAL ONE-PLACE FUNCTIONS

A. E. Bobrov, V. A. Zhurkin

The article presents a consideration of a normal form of representation of many-valued logic functions in the system: maximum, minimum, cycle and $k-1$ one-place functions $\Psi_i(x)$, that for disjunctive normal forms assume values i for $x \neq 0$ and 0 for $x = 0$.

A special operation, „expansion", for the minimization of many-valued logic functions is introduced An algorithm is proposed for the minimization of many-valued logic functions in a suggested functionally complete system; this algorithm makes use of the minimization methods for incompletely defined functions of logic algebra.