ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 62—507

К ВОПРОСУ КЛАССИФИКАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ

И. В. Котельников

Предлагается алгоритм формирования максимального множества признаков классов и их единичных представителей для двух известных классификаций булевых функций n переменных. В основу алгоритма положено последовательное формирование указанных признаков и представителей из их некоторого опорного множества.

Известно [1], что построение полного множества классов булевых функций даже для небольшого числа переменных представляет собой довольно сложную задачу и часто сопряжено с большим перебором.

В настоящей работе представлен алгоритм формирования полного множества признаков классов и их единичных представителей при произвольном n для классификации по матрицам совпадений значений переменных с единичными значениями функций [2] и СД — классификации [3].

Алгоритм лишен перебора множества функций n переменных. В его основу положено последовательное формирование признаков и единичных представителей классов из их некоторого опорного множества. Результирующее множество классов представляется, таким образом, связанным в единую систему, что может быть полезным для анализа и обобщения результатов по оптимальным схемным реализациям [2—6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Условимся представлять строки таблицы конституентов конкретной булевой функции r наборами ее единичных значений, где r — ранг функции. Тогда число единиц i_μ в отдельных столбцах таблицы будет числом совпадений значений соответствующих переменных с единичными значениями функции. Информацию о числе совпадений во всей таблице конституентов несет матрица совпадений.

Определение 1. Назовем матрицей совпадений числовую $(2 \times k)$-матрицу, где нижняя строка — строка k различных значений i_μ, а верхняя — строка кратностей j_μ соответствующих столбцов в таблице конституентов.

Условимся рассматривать лишь такие матрицы совпадений и таблицы конституентов, элементы i_μ которых удовлетворяют условию неубывания слева направо, а по величине не превосходят значения $m = [r/2]$, где квадратные скобки означают функцию целой части. Оба условия приемлемы, поскольку не выходят за рамки преобразований однотипности, т. е. перестановки и инверсирования аргументов.

Функции различных рангов могут иметь одну и ту же матрицу совпадений. Это заставляет рассматривать ранг функции как обязательную компоненту признака класса, а задачу позволяет рассматривать в пределах лишь одного, хотя и произвольного, значения ранга r.

Условимся представлять матрицу совпадений в виде (1), где для удобства указаны все возможные последовательные значения элементов i_μ, элементы j_μ могут принимать нулевые значения, а

$$j_0 = n - \sum_{\mu=1}^{m} j_\mu$$

$$\begin{pmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \ldots & j_\mu & j_{\mu+1} & \ldots & j_{m-1} & j_m \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & \mu & \mu+1 & \ldots & m-1 & m \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тогда задача формулируется следующим образом:

Для функций ранга r найти максимальное множество различных матриц совпадений вида (1). Для каждой матрицы совпадений построить таблицу конституентов функции—представителя данного класса.

2. ТЕОРЕМЫ, ПОСТРОЕНИЯ, АЛГОРИТМЫ

Определение 2. Назовем R-операцией операцию замещения нуля таблицы конституентов единицей. Результирующую таблицу назовем R-производной от исходной.

Нетрудно видеть, что R-операция над столбцом с i_μ единицами приведет к уменьшению на единицу элемента j_μ и увеличению на единицу элемента $j_{\mu+1}$ соответствующей матрицы совпадений. Указанное изменение элементов j матрицы назовем R-операцией над матрицами.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть дана таблица конституентов функции ранга r. Тогда всегда найдется такой путь замены любого числа ее нулей единицами, лишь бы общее число единиц в отдельных столбцах не превышало m, что в результирующей таблице конституентов не появится тождественных строк, т. е. ранг функции сохранится.

Доказательство. Пусть в произвольном столбце исходной таблицы конституентов имеется i_μ единиц, причем, как условились, $i_\mu \leqslant m$. При замене произвольного нуля данного столбца на единицу могут получиться тождественные строки, если в таблице существуют пары строк, различающиеся только в этом столбце. Таких пар, очевидно, может быть не более i_μ, так как в противном случае существовали бы тождественные строки в исходной таблице. Но тогда существует $r - 2i_\mu$ строк таблицы, в которых в выделенном столбце можно заменить нули единицами без риска получить тождественные строки. Это означает, что в выделенном столбце можно довести число единиц до $r - 2i_\mu + i_\mu = r - i_\mu$, что всегда не меньше m. Теорема доказана.

По отношению к матрицам совпадений теорема 1 означает, что R-операция над ненулевыми j-элементами матрицы совпадений вида (1) всегда возможна.

Отметим существование таблиц конституентов, которые не являются результатом R-преобразования. Они, очевидно, должны обладать тем свойством, что в них не существует единиц, которые можно было бы заменить нулем без появления тождественных строк.

Обозначим через v число едниц в отдельной строке таблицы конституентов и введем следующую операцию.

Определение 3. Назовем L-операцией операцию перестановки единицы v-строки таблицы конституентов с произвольным нулем той же строки, расположенным слева от единицы.

Перестановке единицы в v-строке из столбца с i_q единицами в столбец с i_p единицами будет соответствовать уменьшение на единицу элементов j_p и j_q и увеличение на единицу элементов j_{p+1} и j_{q-1} в матрице совпадений. Если при этом $i_q - i_p = 2$, то $j_{q-1} \equiv j_{p+1}$ и элемент увеличивается на две единицы. При $i_q - i_p < 2$ с учетом принятого упорядочения столбцов в порядке неубывания i_μ результат операции будет противоречить определению 3, поскольку он будет либо совпадать по составу столбцов с исходной таблицей ($i_q - i_p = 1$), либо соответствовать перестановке единицы с нулем, расположенным справа от нее ($i_q - i_p = 0$). Поэтому элементы, участвующие в L-операции должны удовлетворять условию

$$i_q - i_p \geqslant 2. \tag{2}$$

Рассмотренные выше изменения j-элементов матрицы при условии (2) назовем L-операцией над матрицами.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть дана матрица совпадений функции ранга r и над ней можно осуществить L-операцию. Тогда всегда найдется такой путь осуществления L-операции над соответствующей матрице таблицей конституентов, что в результате получится функция того же ранга.

Доказательство. В общем случае в таблице конституентов можно выделить четыре группы строк со следующими кодами в столбцах i_p и i_q: 1) 0 0; 2) 0 1; 3) 1 0; 4) 1 1. Очевидно, что L-операцию можно произвести лишь во второй группе строк, причем в результате получим строки третьей группы. Предположим, что для каждой из строк третьей группы существует строка второй группы, которая отличается от нее лишь в столбцах i_p и i_q. Но тогда существует $i_p - i_q \geqslant 2$ строк второй группы, которые отличаются от строк третьей вне столбцов i_p и i_q. Производя операцию именно в этих строках никогда не получим тождественных строк, что и доказывает справедливость теоремы.

Отметим существование множества таблиц конституентов, которые не являются L-производными от каких-то других таблиц. Таблицы этого множества должны удовлетворять условию максимального сдвига всех своих единиц вправо. Этим свойством, очевидно, должны обладать все таблицы конституентов, которые могут быть приняты за исходные для L-преобразования. Естественно объединить требования к исходным таблицам для L и R-преобразований.

Определение 4. Назовем опорной матрицу совпадений, таблица конституентов которой удовлетворяет следующим двум требованиям:

1) в таблице конституентов содержится возможный минимум единиц, т. е. не существует единицы, которую можно было бы заменить на нуль без появления тождественных строк;

2) группы v-строк начинаются строками из v единиц, примыкающих друг к другу и к правой границе таблицы; последующие строки группы формируются в порядке последовательного убывания сдвига единиц вправо. Сдвиг единиц считается больше у той из двух сравниваемых строк, у которой при последовательном просмотре элементов строк справа раньше встретится единичный элемент при нулевом элементе во второй строке.

Таблицу конституентов, удовлетворяющую этим требованиям, тоже назовем опорной.

Рассмотрим некоторые свойства возможного построчного состава опорных таблиц конституентов, обусловленные двумя требованиями определения 4.

Свойство 1. Если опорная таблица конституентов содержит v-строку с каким-то набором из v единиц, то она должна содержать максимальное число строк с меньшим v, включая нулевое, наборы единиц которых полностью включает указанный v-набор.

Свойство 2. Если в опорной таблице конституентов отсутствует v-строка с каким-либо набором единиц, то в ней отсутствуют все строки с бóльшим v, наборы единиц которых полностью включают отсутствующий v-набор.

Оба свойства справедливы, поскольку в противном случае в опорной таблице конституентов v-строку, указанную в свойстве 1, и строку с бóльшим v, указанную в свойстве 2, можно будет заменить на отсутствующие строки с меньшим v, что эквивалентно замене некоторых единиц в таблице на нули при сохранении ранга и, следовательно, противоречит определению 4.

Из свойства 1 следует

Свойство 3. Опорная таблица конституентов обязательно содержит 0-строку и максимальное множество 1-строк с единицами в ненулевых столбцах таблицы конституентов.

Определение 5. Назовем v-группой строк опорной таблицы конституентов множество ее v-строк. Подмножество строк v-группы с тождественным расположением в них $v-1$ правых единичных элементов назовем v-подгруппой строк.

Обозначим через n_{v-1} число правых столбцов таблицы, ограниченных крайним левым непустым столбцом тождественной части v-подгруппы. Тогда в соответствии со вторым требованием определения 4 единичные элементы строк, не вошедшие в тождественную часть, необходимо расположить по неосновной диагонали, примыкающей к n_{v-1} столбцам. Назовем число $N_{v,\,i}$ правых столбцов таблицы, ограниченных крайним левым непустым столбцом i-й сверху подгруппы в v-группе, числом занимаемых подгруппой столбцов.

Тогда из свойства 2 следует

Свойство 4. $N_{v,\,i}$ — не больше числа столбцов, занятых $(v-1)$-подгруппой с тем же расположением единичных элементов, какое имеют $v-1$ левых единичных элемента в строках рассматриваемой v-подгруппы.

Свойство 5. $N_{v,\,i} \leqslant N_{v,\,i-1}$. Свойство 5 является следствием второго требования определения 4, поскольку в противном случае нарушается требование последовательности убывания сдвига, оговоренное в определении.

Перечисленные свойства опорных таблиц дают возможность получить некоторые количественные оценки. Так, если через Δl обозначить число строк, занимаемых построенной частью таблицы, то для очередной строящейся v-подгруппы справедливо

$$N_{v,\,i\,\max} = \min\,(N_{v-1,\,j};\ N_{v,\,i-1};\ n_{v-1} + r - \Delta l), \tag{3}$$

где $N_{v-1,\,j}$ — число столбцов $(v-1)$-подгруппы, которое по свойству 4 сверху ограничивает значение $N_{v,\,i}$ строящейся v-подгруппы, а последнее выражение в скобках — $N_{v,\,i\,\max}$, если v-подгруппа — последняя в таблице и нет никаких ограничений на число ее столбцов. Полагаем также, что при $v=1$ $N_{v-1,\,j} = N_{0,\,j} = \infty$, при $i=1$ $N_{v,\,i-1} = N_{v,\,0} = \infty$.

Явное выражение для $N_{v,\,i\,\min}$ получить не удалось. Однако, легко подсчитать максимально возможное число ΔL строк в таблице, если уже построено Δl ее строк. Тогда внутри Δl строк возможно существование v-подгрупп только с такими параметрами $N_{v,\,i}$, при которых выполняется соотношение

$$\Delta L \geqslant r. \tag{4}$$

Определим значение ΔL.

Условимся выделять внутри v-группы ее части с $n_0 = 1, 2, 3, \ldots, n_{0\,\max}$, примыкающими друг к другу и к правой границе таблицы нулевыми столбцами. Нетрудно показать, что $(v+1)$-группу любой опорной матрицы можно представить как $n_{0\,\max}$-кратное повторение v-группы с последовательным заполнением в ней 1-го, 2-го, ..., $n_{0\,\max}$-го справа места столбцом из сплошных единиц и вычеркиванием тех строк v-группы, которые вышли за пределы заданных значений $N_{v+1,\,i}$ для $(v+1)$-подгрупп. Отсюда очевидно, что $(v+1)$-группа будет содержать максимальное число строк, если ее $N_{v+1,\,i}$ будут равны соответствующим значениям для v-подгрупп. Из сказанного следует также, что каждая n_0-часть v-группы может участвовать максимум n_0 раз в образовании $(v+1)$-группы и максимум $2^{n_0}-1$ раз в образовании таблицы без ограничения на число ее строк.

Пусть теперь внутри Δl строк построена часть опорной таблицы конституентов вплоть до подгруппы с параметром $N_{v+1,\,i}$. Пусть, далее, при ее построении v-группа повторялась $\mu+1$ раз, как это было рассмотрено выше, причем в $(\mu+1)$-ом повторении приняло участие лишь ν из η возможных младших v-подгрупп. Тогда можно показать, что

$$\Delta L = \sum_{n_0=1}^{n_{0\,\max}} \Delta l_{n_0}\left(2^{n_0}-1-n_0+\max\left(0,\ n_0-\mu-1\right)\right)+$$

$$+\sum_{j=\nu+1}^{\eta}\Delta l_j+\Delta l,$$

где Δl_{n_0} — число строк в n_0-части v-группы, не выходящих за пределы $N_{v+1,\,i}$ столбцов, Δl_j — число строк в j-й v-подгруппе с тем же ограничением.

Соотношение (3) вместе с (4) позволяет, таким образом, определить максимальный набор значений $N_{v,\,i}$ для любой из v-подгрупп таблицы.

Приведенные выше соображения легли в основу алгоритма формирования множества опорных таблиц конституентов, который в операторной форме может быть представлен следующим образом:

$$M(0)\,V(r)\,C(<N_{1\,1}>)\,V(N_{1\,1\max})\,C(N_{1\,1}=N_{1\,1\max}+1)$$

$$\overset{2}{\downarrow} p(N_{1\,1}\neq N_{1\,1\max}+1)\overset{1}{\uparrow} Z(T)\overset{1}{\downarrow} C(N_{1\,1}=N_{1\,1}-1)\,p(N_{1\,1}\geqslant N_{1\,1\min})\overset{\text{стоп}}{\uparrow}$$

$$M(N_{1\,1})\,C(\Delta l(N_{1\,1}))\,p(\Delta l(N_{1\,1})\neq 0)\overset{2}{\uparrow} C(v=v+1;\ i=1)\,C(\langle N_{v,\,i}\rangle)$$

$$\vdots\, V(N_{v,\,i\max})\,C(N_{v,\,i}=N_{v,\,i\max}+1)\overset{6,\,7,(1)}{\downarrow} p(N_{v,\,i}>N_{v,\,i\min})\overset{3\,9}{\uparrow\downarrow} C(N_{v,\,i}=N_{v,\,i}-1)$$

$$p(N_{v,\,i}\geqslant N_{v,\,i\min})\overset{4}{\uparrow} p(i\text{-подгруппа}\neq\varnothing)\overset{4}{\uparrow} M(N_{v,\,i})\,C(\Delta l(N_{v,\,i})) \qquad (5)$$

$$p(\Delta l(N_{v,\,i})=0)\overset{5}{\uparrow} Z(T)\overset{6\,4}{\uparrow\downarrow} C(v=v+1;\ i=1)\,p(v\text{-группа}\neq\varnothing)\overset{7}{\uparrow}$$

$$C(\langle N_{v,\,i}\rangle)\,p(\langle N_{v,\,i}\rangle\neq\varnothing)\overset{7}{\uparrow}\ \overset{8}{\uparrow}\ \overset{5}{\downarrow} C(v=v;\ i=i+1)\,p(i\text{-подгруппа}\neq\varnothing)\overset{9}{\uparrow}$$

$$C(\langle N_{v,\,i}\rangle)\overset{8}{\downarrow} Z(\widetilde{M}(N_{v,\,i}))\,\widetilde{M}(N_{v,\,i})\overset{3}{\downarrow} C(v=v+1;\ i=1)$$

$$p(v\text{-група}\neq\varnothing)\overset{1}{\uparrow} C(\langle N_{v,\,i}\rangle)\,p(\langle N_{v,\,i}\rangle\neq\varnothing)\overset{1}{\uparrow}\ \overset{8}{\uparrow}\,\vdots$$

Здесь: $M(0)$ — оператор формирования 0—строки таблицы; $V(x)$ — оператор выборки x; $C(f)$ — оператор вычисления функции f; $\langle N_{v,\,i}\rangle$ — набор возможных значений параметра $N_{v\,i}$; $p(A)$ — логическое условие A, в случае невыполнения — переход по стрелке; $Z(T)$ — оператор записи в память сформированной таблицы; $M(N_{v,\,i})$ — оператор формирования i-й подгруппы v-группы внутри $N_{v,\,i}$ столбцов в соответствии с определением 4; $\Delta l(N_{v,\,i})$ — число строк таблицы, недостающее до r, после построения i-й подгруппы v-группы; $\widetilde{M}(N_{v,\,i})$ — оператор—алгоритм—часть алгоритма (5), выделенная пунктиром, с заменой $N_{v,i}$ вновь образованным значением; $Z(\tilde{M},\ (N_{v,i}))$ — запись в оперативную память алгоритма $\tilde{M}(N_{v,i})$; очередная v-группа пуста, если она не может существовать в силу свойства 1; очередная i-я v-подгруппа пуста, если уже сформированы все подгруппы рассматриваемой группы; выход из $\tilde{M}(N_{v,i})$ — по переходу 1 в (1) предшествующего $\tilde{M}(N_{v,i})$.

Рассмотрим два свойства алгоритма (5).

Свойство 1. Не существует опорной таблицы конституентов заданного ранга r, которая не была бы сформирована алгоритмом.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует опорная таблица конституентов ранга r, которая не совпадает ни с одной из сформированных по алгоритму таблиц. Однако, как опорная, она в силу свойства 3 обязана иметь 0-строку. Выделенная таблица будет, кроме того, совпадать с рядом из сформированных по параметру N_{11}, поскольку в противном случае, т. е. при $N_{11} > N_{11\,\max}$ или $N_{11} < N_{11\,\min}$, она в силу (3) или (4), соответственно, должна обладать большим или меньшим, чем r рангом, что противоречит предположению.

Пусть это свойство совпадения выделенной таблицы на начальном участке распространяется на множестве сформированных таблиц до некоторой подгруппы с параметром $N_{v\,i}$. Тогда факт дальнейшего несовпадения выделенной таблицы ни с одной из сформированных должен соответствовать одному из следующих случаев:

1) ни одна из сформированных таблиц не имеет подгруппы с параметром $N_{v,i+1}$, которая существует в выделенной таблице;

2) подгруппы с параметром $N_{v,i+1}$ существуют в сформированных таблицах, но значения этих параметров не совпадают со значением $N_{v,i-1}$ для выделенной таблицы;

3) выделенная таблица продолжается подгруппой с параметром $N_{v+1,1}$, что не справедливо ни для одной из сформированных по алгоритму таблиц.

Покажем, что ни один из этих случаев невозможен. Первый случай невозможен, поскольку после формирования подгруппы с параметром $N_{v,i}$ по переходу 5 алгоритма $(\Delta l(N_{v,i}) \neq 0$ в силу существования $(i+1)$-ой v-подгруппы в выделенной таблице) необходимо перейти к формированию подгруппы с параметром $N_{v,i+1}$, что и будет сделано, так как она не пуста в выделенной таблице. Второй случай невозможен, поскольку:

1) при $N_{v,i+1} > N_{v,i+1\,\max}$ выделенная таблица в силу (3) не будет удовлетворять либо свойству 4, либо свойству 5, либо должна иметь ранг больше r, что противоречит предположению;

2) при $N_{v,i+1} < N_{v,i+1\,\min}$ в силу (4) выделенная таблица должна иметь ранг меньше r, что также противоречит предположению.

Третий случай невозможен, поскольку по переходу 3 алгоритма после формирования всех таблиц, включающих подгруппы с параметром $N_{v,i+1}$, или по переходу 4 при пустоте указанной подгруппы по алгоритму необходимо перейти к формированию подгруппы с параметром $N_{v-1,1}$, что и будет сделано, так как она не пуста в силу существования в выделенной таблице. Этим свойство доказано.

Свойство 2. Среди множества опорных таблиц конституентов, сформированных при помощи алгоритма, не существует двух таблиц с одной и той же матрицей совпадений.

Доказательство. Части очередной v-группы можно образовать из предыдущей $(v-1)$-группы заполнением сплошными единицами одного из n_0 ее столбцов. Это приводит к тому, что любая v-строка в последующей части таблицы встречается с обязательными дополнительными единицами справа от основных. Поэтому, если в таблице возникло некоторое перераспределение единиц по столбцам и в процессе формирования таблицы делается попытка скомпенсировать его за счет включения или исключения последующих строк, то это необходимо приведет к новому перераспределению единиц, расположенному правее прежнего. Таким образом, полная компенсация перераспределения единиц недостижима, что и доказывает свойство.

Алгоритм формирования множества L-производных матриц от опорной. Операторная форма алгоритма имеет вид

$$V(T_0)Q(T_0\to T)\overset{6}{\downarrow}V(i_m)Q(i_m\to i_q)\overset{2}{\downarrow}V(j_q)p(j_q=0)\overset{1}{\uparrow}C(i_q=i_q-1)\overset{2\,1}{\uparrow\downarrow}C(i_p=i_q-2)$$

$$p(i_p\geqslant 0)\overset{\text{стоп}}{\uparrow}\overset{4}{\downarrow}V(j_p)p(j_p=0)\overset{3}{\uparrow}C(i_p=i_p-1)\overset{4\,3}{\uparrow\downarrow}p(i_p\geqslant i_p(t-1))\overset{5\,7}{\uparrow\downarrow}L(j_p,\, j_q)\,C(s=s+1)$$

$$Q(L^*(j_p,\, j_q)\to T_s;\, T)\overset{6\,5}{\uparrow\downarrow}V(T_{sm}(i_p))\,C(i_q=i_p+2)\overset{8}{\downarrow}V(j_q)\,p(j_q=0)\overset{7}{\uparrow}C(i_q=i_q+1)\overset{8}{\uparrow}.$$

Здесь: $V(x)$ — оператор выборки x: T_s — матрица совпадений с порядковым номером s, ячейка этой матрицы; T_0 — опорная матрица, T — оперативная ячейка для хранения матрицы — объекта L-операции, сама эта матрица; $T_{sm}(i_p)$ — матрица с минимальным s, для которой $j_\nu(T_{sm}) = j_\nu(T)$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots, p)$; $Q(x\to y)$ — оператор передачи x в y; $p(A)$ — логическое условие; i_ν, j_μ — элементы матрицы совпадений; $C(f)$ — оператор вычисления функции f; $L(j_p;\, j_q)$ — оператор L-операции над элементами j_p; j_q; $L^*(j_p;\, j_q)$ — результат выполнения L-операции; t — шаг.

Рассмотрим два свойства приведенного алгоритма.

Свойство 1. Множество L-производных матриц, полученное при помощи алгоритма, максимально.

Доказательство. Возьмем произвольный член ряда $T_s(i_\nu,\ i_\mu)$ и произведем L-операцию над элементами j_ν, j_μ. Результирующую матрицу обозначим через L^*. Покажем, что L^* будет получена по алгоритму, что в силу произвольности матрицы $T_s(i_\nu,\ i_\mu)$ и выбранных в ней элементов послужит доказательством свойства.

Выберем из множества T_s матрицу $T_{sm}(i_\nu)$ для $T_s(i_\nu,\ i_\mu)$. У $T_{sm}(i_\nu)$ будет не меньшее, чем у последующих матриц значение элемента $j_{\nu+1}$, поскольку над ним могли произвести L-операцию. Поэтому, если над матрицей $T_{sm}(i_\nu)$ произвести свойственную для нее по алгоритму операцию, то у полученной матрицы значение элемента $j_{\nu+1}$ будет не меньше, чем у L^*. Если же оно окажется строго больше, то над ним и ближайшим справа элементом операция выполняется столько раз, сколько необходимо для выравнивания этих значений. При этом, очевидно, всегда получится матрица $T_{sm}(i_{\nu+1})$ для L^*. В силу этого элемент $j_{\nu+2}$ у нее будет не меньше, чем у последующих, и возможно выравнивание элементов $j_{\nu+2}$. Очевидно, что подобная ситуация будет сохраняться на всем протяжении процесса выравнивания j-элементов и приведет к полному их выравниванию с j-элементами матрицы L^*.

Свойство 2. Среди множества L-производных матриц, полученного приведенным алгоритмом от произвольной опорной матрицы, не существует тождественных матриц совпадений.

Доказательство. Справедливость утверждения очевидна для любого ряда матриц T_s с последовательными номерами, в котором каждый последующий член получен из предыдущего. По алгоритму такие ряды матриц начинаются L-производной матрицей от $T_{sm}(i_p)$ и, следовательно, имеют совокупность j_ν $(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ p)$, отличную от любых других рядов матриц T_s. Свойство доказано.

Замечено, что L-производные одной опорной матрицы могут быть получены из L-производных другой опорной матрицы R-операцией. Для исключения возможности указанного повторения матриц на этапе R-преобразования введем следующее понятие.

Определение 6. Матрица совпадений с номером q называется покрывающей для матрицы с номером p (покрываемая матрица), если выполняется соотношение

$$\sum_{\nu=0}^{z} (j_\nu(q) - j_\nu(p)) \geqslant 0 \tag{5}$$

для каждого z от 0 до $m-1$ и выполняется равенство в (5) для $z=m$.

Смысл понятия покрытия состоит в том, что из покрывающей матрицы при помощи R-преобразования можно получить покрываемую матрицу.

Теорема 3. Пусть матрица $L(q)$ покрывает матрицу $L(p)$. Тогда для любой из L-производных матрицы $L(p)$ найдется покрывающая матрица среди L-производных матрицы $L(q)$.

Доказательство. Нарушение условия покрытия (5) в процессе производства над матрицами L-операции будет состоять в переходе через границу каких-то i_l и i_{l+1} элементов покрываемой матрицы числа единиц, хотя бы на единицу больше разности $\Delta = \sum_{\nu=0}^{l} (j_\nu(q) - j_\nu(p))$. Поскольку для исходных матриц условие (5) выполняется, покрывающая матрица будет обладать не меньшими возможностями для переноса единиц через границу между указанными элементами. Но тогда условие покрытия будет нарушено лишь в том случае, если найдется такое число w элементов справа от i_l, что $\sum_{\nu=l+1}^{w} (j_\nu(p) - j_\nu(q)) \geqslant \Delta + 1$. Но это противоречит условию (5) для исходных матриц и, следовательно, невозможно. Теорема доказана.

Благодаря теореме 3 пропадает необходимость в получении L-производных от покрываемых матриц на этапе L-преобразования.

Укажем еще на одно свойство опорных матриц.

Свойство 6. Среди множества опорных матриц не существует двух матриц, которые находились бы в отношении покрытия.

Доказательство. Одна из двух матриц, находящихся в отношении покрытия (5), может быть получена от другой при помощи R-операции. Ни для какой пары опорных матриц это не справедливо в силу первого требования определения 4.

Из свойства 6 следует, что каждая опорная матрица дает свой вклад в множество L-производных матриц от опорных.

Свойство покрывающих матриц. Покрывающую матрицу следует искать среди матриц, для которых $\sum_{\nu=0}^{m} j_\nu$ тождественна с аналогичным параметром матрицы, исследуемой на покрываемость, а внутри выделенных матриц — среди тех, которые на большем числе столбцов слева совпадают с последней.

Доказательство. Первое требование обусловлено (5). Второе — следует из алгоритма получения L-производных матриц, по которому элементы матриц включаются в операцию последовательно, начиная с крайних правых, что приводит к самому раннему вхождению в отношение покрытия с исследуемой матрицей именно матриц указанного в свойстве вида.

Отметим еще, что использовать свойство покрываемости наиболее удобно, если расположить опорные матрицы в порядке неубывания значений их j-элементов при сравнительном просмотре слева направо и именно в этом порядке производить над ними L-преобразование. Это утверждение следует из условия (5).

После получения максимального множества взаимнонепокрывающихся L-производных матриц от всего множества опорных следует перейти к его R-преобразованию. Установлено, что при этом могут быть получены тождественные матрицы от различных L-производных одной опорной матрицы. Однако, характер алгоритма получения L-производных матриц от опорных позволяет сделать следующий вывод, который с целью экономии места и ввиду простоты приводится без доказательства.

Теорема 4. Для исключения тождественных матриц совпадения при R-преобразовании в любой L-производной матрице R-преобразованию подлежит не более двух крайних правых ненулевых элементов. При этом, если элементов два, то они — соседние по i_μ. R-преобразованию в L-производной матрице подлежит один правый крайний элемент, если L-производная от этого члена ряда получается по алгоритму осуществлением L-операции над правой парой элементов, между которыми нет промежуточного ненулевого элемента.

Теорема 4 сразу позволяет написать формулу для подсчета R-производных матриц любой из L-производных, если известно число элементов, подвергающихся R-преобразованию. Пусть дана L-производная матрица

$$\begin{pmatrix} j_0 & j_1 & j_2 & \dots & j_{i-1} & j_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & m \end{pmatrix}.$$

Тогда при изменяющемся одном элементе формула числа ее производных запишется как $\sum\limits_{\nu=1}^{m-i+1} \binom{m-i+1}{\nu} C(j_i, \nu)$, а при изменяющихся двух элементах — как $\sum\limits_{k=0}^{j_{i-1}} \sum\limits_{\nu=1}^{m-i+1} \binom{m-i+1}{\nu} C(j_i+k, \nu)$, где $C(q, p) = \binom{q-1}{p-1}$ — число композиций числа q, имеющих точно p частей [7]. Второе суммирование по k во второй формуле обусловлено возможностью пополнения за счет изменения элемента j_{i-1} единиц элементов первой строки, распределяемых по ν местам. Из смысла формул предельно ясно следует алгоритм получения множества R-производных матриц.

Теорема 5. Множество R-производных матриц от L-производных множества опорных матриц является максимальным множеством возможных матриц совпадений булевых функций ранга r.

Доказательство. Операцией замены ряда единиц на нули и сдвигом всех единиц в v-подгруппах максимально вправо таблицу конституентов любой булевой функции можно привести к опорной. Для этого нужно только произвести указанные операции, что всегда возможно. Но тогда для любой булевой функции можно указать такую опорную матрицу из их максимального множества и такую последовательность L- и R-операций над ней, что в результате получим матрицу совпадений выбранной булевой функции. Теорема доказана.

3. ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА СД-КЛАССОВ

Поскольку множество матриц совпадений можно построить для функций любого ранга, можно говорить об алгоритме построения максимального множества матриц совпадений для функций любого числа переменных.

Используя формулу (5) из [3] для подсчета индекса по переменной x_i, легко получить связь между этим индексом и соответствующей компонентой второй строки матрицы совпадений

$$I_{x_i} = 2(r - 2i), \tag{6}$$

$$i = \frac{r - I_{x_i}/2}{2}. \tag{7}$$

Определение 7. Назовем собственной матрицу совпадений функций ранга r, если в своем СД-классе ранг представленных этой матрицей функций минимален. Подмножество собственных матриц назовем собственным подмножеством матриц функций этого ранга.

Теорема 6. Множество матриц совпадений, объединяющее собственные подмножества матриц функций всех рангов заданного n, по мощности будет совпадать с максимальным множеством СД-классов и их индексов и через соотношение (6) представлять собой множество последних.

Доказательство. Если каждый СД-класс представлять максимальным набором представителей всех его рангов, то в результате получим множество функций, соответствующее максимальному множеству матриц совпадений. Ограничением, указанным в теореме, оставляется только по одному представителю с минимальным рангом для каждого СД-класса. Этим теорема доказана.

Алгоритм выделения объединения собственных подмножеств теоремы 6 довольно прост и состоит в реализации ограничения, указанного в ее доказательстве. Определение представителей СД-класса старших рангов можно осуществить, рассматривая поочередно различные индексы переменных как индексы дополнительной переменной x_0 и находя затем по формуле (4) из [3] значение ранга r для каждого такого рассмотрения. Соответствующие выделенному рангу матрицы совпадений находятся вслед за этим по формуле (7) из совокупности оставшихся индексов.

Алгоритм формирования максимального множества матриц совпадений и индексов СД-классов является также и алгоритмом формирования конкретных представителей классов, если все операции производить непосредственно над таблицами конституентов. Это свойство алгоритма позволяет избежать громоздкого перебора при выделении максимального множества единичных представителей и сделать это, по существу, минимальными средствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шестаков, Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, ИЛ, М., 1954.
2. И. В. Котельников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 815 (1965).
3. Н. Н. Немшилов, Проблемы передачи информации, 2, № 1, 74 (1966).
4. Г. Н. Поваров, Диссертация, ИАТ АН СССР, М., 1954.
5. Higonnet R., Grêa R. Etude logique des circuits electriques et des systemes binaires. Berger-Levrault, Paris, 1955.
6. Higonnet R Gréa R. Logical Design of Electrical Circuit, Mc Grow-Hill, New-York-Toronto-London, 1958.
7. Дж Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.

Исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 3 июля 1970 г.

ON CLASSIFICATION OF BOOLEAN FUNCTIONS OF n VARIABLES

I. V. Kotelnikov

For two known classifications of Boolean functions of n variables an algorithm is proposed for formation of the maximal set of attributes of classes and their unitary representatives. The algorithm is based on a sequential formation of the indicated attributes and representatives of some of their reference set.