ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 62—506

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО НАКОПЛЕНИЯ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В. Н. Смирнова, М. Л. Тай

Изучены три алгоритма последовательного накопления в экстремальных системах с совмещенными пробными и рабочими шагами. Получены зависимости среднего времени поиска экстремума и стационарного распределения от параметров алгоритмов накопления. Проведено сравнение эффективности рассмотренных алгоритмов управления в экстремальных системах.

Важным методом повышения эффективности экстремальных систем является накопление информации, получаемой в процессе работы системы. Введение накопления позволяет уменьшить неизбежную в реальных условиях неопределенность результатов наблюдений, на основании которых производится управление. В связи с этим в ряде работ исследовались математические модели экстремальных систем с накоплением — системы с фиксированным или случайным числом повторений пробных шагов [1–11]

Заметим, что системы со случайным числом пробных шагов изучались в [3, 5, 9] ввиду применения оптимальной процедуры последовательного анализа для определения оптимальных алгоритмов управления в дискретных экстремальных системах. Интересные результаты, полезные при рассмотрении таких систем, получены в [8, 9]. В [11] предложен статистический метод поиска с последовательным накоплением и приведены экспериментальные результаты отыскания минимума многомерных функций.

В данной работе* изучается эффективность некоторых алгоритмов управления с последовательным накоплением в дискретных экстремальных системах с совмещенными пробными и рабочими шагами. Основной задачей исследования является выяснение особенностей алгоритмов управления с последовательным накоплением и определение некоторых характерных свойств, которыми должен обладать оптимальный по заданному критерию алгоритм накопления. Следуя Фельдбауму, в работе используется статистическая идеализация неопределенности возмущений и характеристики объекта. Стохастическая модель экстремальной системы рассматривается как динамическая система с множеством состояний, представляющим собой совокупность состояний управляемого объекта и управляющего устройства.

Предполагается, что экстремальная система предназначена для отыскания и поддержания минимума показателя качества работы безынерционного объекта с одним управляемым входом x $(-N \leqslant x \leqslant N)$, причем экстремальное значение $x = x^* = 0$ неподвижно, а результат каждого наблюдения есть знак приращения показателя качества по отношению к некоторой его оценке при предшествующих наблюдениях. Состоя-

* Результаты, полученные в работе, были доложены на IV симпозиуме по экстремальным задачам, Каунас, 1969 г [10]

ние объекта в такой системе характеризуется значением управляемого входа x, состояние управляющего устройства σ — последним изменением управляемого входа y и статистикой $s(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Последовательные значения s изменяются в соответствии с алгоритмом накопления и результатами наблюдений. Множество S всех значений s разбито на три области: S_0 — область продолжения наблюдений при фиксированном x, S_1 — область принятия решения об изменении управляемого входа на величину y, S_{-1} — область инверсии, изменения управляемого входа на величину $-y$.

Пусть результатом каждого наблюдения $z(x, y)$ является знак приращения показателя качества, полученного от изменения на y управляемого входа. Пусть вероятности благоприятного $(z(x, y) < 0)$ и неблагоприятного $(z(x, y) > 0)$ результатов соответственно $p_{-1}(x, y)$ и $p_{+1}(x, y)$ не зависят от результатов предшествующих наблюдений и

$$p_{-1}(x, y) = \begin{cases} p, & xy \leqslant 0, \\ q, & xy > 0 \end{cases}$$
$$(q = 1 - p, \quad p_1(x, y) = 1 - p_{-1}(x, y)). \tag{1}$$

Из-за ограниченности области изменения x, результаты наблюдений учитываются внутри области $|x| < N$, а при $|x| = N$ в состояниях $(-N)$ и (N) сразу совершается реверс.

При сделанных предположениях совокупность состояний (x, y, s), $|x| < N$ и $(-N)$, (N) экстремальной системы образует многомерную марковскую цепь и вероятности перехода определяются алгоритмом накопления и вероятностями $p_{-1}(x, y)$ и $p_1(x, y)$.

Изучение этой марковской цепи позволяет исследовать зависимость основных показателей эффективности экстремальной системы от алгоритмов последовательного накопления. В качестве таких показателей в работе рассматриваются среднее время достижения экстремума $D(x, y, s)$ из состояний (x, y, s) и статистическое распределение $u(x, y, s)$ состояний (x, y, s) в установившемся процессе. Заметим, что в силу симметрии условий (1) и $-N \leqslant x \leqslant N$

$$D(x, y, s) = D(-x, -y, s),$$
$$u(x, y, s) = u(-x, -y, s) \tag{2}$$

и можно ограничиться рассмотрением состояний системы с $x \leqslant 0$.

В настоящей работе изучается эффективность трех алгоритмов управления: с накоплением до перевеса (п. 1), с накоплением по сериям (п. 2), с двумя накоплениями (п. 3). В п. 4 сравниваются полученные оценки статистического распределения установившегося процесса и среднего времени достижения экстремума и приведены соответствующие графические результаты в форме, удобной для практического использования.

1. УПРАВЛЕНИЕ С НАКОПЛЕНИЕМ ДО ПЕРЕВЕСА

Пусть s — одномерная статистика s и множество всех значений s разбито на области*

$$S_0 = \{s: -k_2 < s < k_1\}, \quad S_1 = \{s: s = -k_2\}, \quad S_{-1} = \{s: s = k_1\},$$

причем после m-го наблюдения в области S_0 значение s определяется равенством

$$s(m) = s(m-1) + z_m(x, y), \quad s(0) = 0.$$

* Здесь и всюду ниже k_1 и k_2 — положительные целые числа.

Такой алгоритм управления будем называть управлением с накоплением до перевеса, так как изменение x происходит только после того, как разность числа благоприятных и неблагоприятных результатов достигнет наперед фиксированных чисел k_2 или k_1.

Стационарное распределение $u_1(x, y, s)$ состояний экстремальной системы (x, y, s) удовлетворяет уравнению

$$u_1(x, y, s) = p_1(x, y)\,[1-\delta(s+k_2-1)]\,u_1(x, y, s-1) +$$
$$+ p_{-1}(x, y)\,[1-\delta(s-k_1+1)]\,u_1(x, y, s+1) + \tag{1.1}$$
$$+ [u_1(x-y, y, -k_2)+u_1(x-y, -y, k_1)]\,[p_1(x, y)\,\delta(s-1)+p_{-1}(x, y)\,\delta(s+1)],$$

где

$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & (z=0), \\ 0 & (z\neq 0, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$u_1(-N) \equiv u_1(-N, -1, -k_2) + u_1(-N, 1, k_1) =$$
$$= u_1(1-N, -1, k_2) + u_1(1-N, 1, k_1), \tag{1.2}$$
$$u_1(N) \equiv u_1(N, 1, -k_{\_}) + u_1(N, -1, k_1) = u_1(N-1, 1, -k_2) + u_1(N-1, -1, k_1),$$
$$u_1(x, y, s) = 0, \quad \text{если } s > k_1,\ s < -k_2,\ yx = -N.$$

Решение (1.1) при $-N < x < 0$ есть

$$u(x, y, s) = c\,Y(y, s)\,g_1(s)\,\lambda_1^x, \tag{1.3}$$

где

$$\lambda_1 = \alpha^{k_2}, \quad \alpha = p/q, \quad Y(y, s) = \begin{cases} 1 & (y=1), \\ \alpha^{s+k_2} & (y=-1), \end{cases}$$

$$c = \Big\{\sum_{x, y, s} Y(y, s)\,g(s)\,\lambda_1^x\Big\}^{-1}, \tag{1.4}$$

$$g_1(s) = \begin{cases} (q-p)(1-\lambda_1) & (s=k_1), \\ (1-\alpha^{k_1-s})(1-\lambda_1) & (0<s<k_1), \\ 2p(\alpha^{k_1-1}\lambda_1+1)-\alpha^{k_1}-\lambda_1 & (s=0), \\ (\alpha^{-s}-\lambda_1)(1-\alpha^{k_1}) & (-k_2<s<0), \\ (q-p)(1-\alpha^{k_1})\lambda_1 & (s=-k_2), \end{cases}$$

и

$$u_1(-N) = c\,(1-\alpha^{k_1}\lambda_1)\,\lambda_1^{1-N}\,(q-p). \tag{1.5}$$

Тогда для $u_1(x) = \sum_{y, s} u_1(x, y, s)$ получаем

$$u_1(x) = u_1(-x) = c\,(1-\lambda_1)(1-\alpha^{k_1}\lambda_1)\,\lambda_1^{-|x|} \qquad (x\neq 0,\ |x|\neq N),$$
$$u_1(0) = 2c\,[k_2\lambda_1(\alpha^{k_1}-1) - k_1(\lambda_1-1)]. \tag{1.6}$$

Равенства (1.5)и (1.6) определяют стационарное распределение управляемого параметра x и позволяют оценить точность поддержания экстремума в установившемся режиме работы экстремальной системы.

На основании теоремы о полной вероятности и определения среднего времени достижения экстремума $D_1(x, y, s)$ имеем

$$D_1(x,\ y,\ s) = D_1(x,\ y,\ s+1)\,p_1(x,\ y)\,[1-\delta(k_1-s)] +$$
$$+ D_1(x,\ y,\ s-1)\,p_{-1}(x,\ y)\,[1-\delta\,(k_2+s)] +$$
$$+\,\delta(k_1-s)\,[D_1(x-y,\ -y,\ 1)\,p_1(x-y,\ -y) + D_1(x-y,\ -y,\ -1)\times \quad (1.7)$$
$$\times\, p_{-1}(x-y,\ -y)] + \delta(k_2+s)\,[D_1(x+y,\ y,\ 1)\,p_1(x+y,\ y) +$$
$$+ D_1(x+y,\ y,\ -1)\,p_{-1}(x+y,\ y)] + 1,$$

причем

$$D_1(x,\ y,\ -k_2) = D_1(x,\ -y,\ x_1) = 1 \qquad (x+y=0), \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} D_1(x,\ y,\ -k_2) = D_1(x,\ -y,\ -1)\,p_{-1}(x,\ -y) + \\ + D_1(x,\ -y,\ 1)\,p_1(x,\ y) + 2 \qquad (\,|\,x+y\,|\,=N). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Решая систему разностных уравнений (1.7) при $x<0$, находим

$$D_1(x,\ y,\ s) = \frac{k_1\lambda_1^{1-N}}{q-p}\ \frac{\alpha^{g(x,\ y,\ s)}-1}{\alpha^{k_1}-1} + \frac{g(x,\ y,\ s)}{p-q} + 1, \tag{1.10}$$

где

$$\alpha = p/q, \quad \lambda_1 = (p/q)^{k_2}, \quad g\,(x,\ y,\ s) = \begin{cases} sy - k_2 x & (y=1) \\ k_1 - s - k_2(x+1) & (y=-1). \end{cases} \tag{1.11}$$

2. УПРАВЛЕНИЕ С НАКОПЛЕНИЕМ ПО СЕРИЯМ

Пусть множество значений одномерной статистики $s(m)$, где m — номер наблюдения при фиксированном x, разбито на области

$$S_0 = \{s\colon\ -k_2<s<k_1,\ \ s\neq 0\},\quad S_1 = \{s\colon s=-k_2\},\quad S_{-1}=\{s\colon s=k_1\}.$$

В области S_0 $s(1) = z_1(x, y)$.

И при $m\geqslant 2$,

$$s(m) = \begin{cases} s(m-1) + z_m(x,\ y), & \text{если}\quad z_m(x,\ y)\,s(m-1)>0, \\ z_m(x,\ y), & \text{если}\quad z_m(x,\ y)\,s(m-1)<0. \end{cases}$$

Тогда изменение параметра x происходит только после получения подряд заданного числа одинаковых результатов наблюдения k_2 благоприятных или k_1 неблагоприятных. Ввиду этого назовем такой алгоритм управлением с накоплением по сериям.

Для стационарного распределения $u_2(x, y, s)$ состояний экстремальной системы с накоплением по сериям имеем

$$\begin{gathered} u_2\,(x,\ y,\ s) = p_z(x,\ y)\,u\,(x,\ y,\ s-z)\,[1-\delta\,(\,|\,s\,|\,-1)] + \\ +p_z(x,\ y)\,\delta\,(|\,s\,|-1)\left[u\,(x-y,\ y,\ -k_2) + u(x-y,\ -y,\ k_1) + \sum_{\alpha=1}^{a(s)-1} u(x,\ y, -\alpha z)\right], \end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$z = \operatorname{sign} s, \qquad a(s) = \begin{cases} k_2 & (s>0), \\ k_1 & (s<0) \end{cases} \tag{2.2}$$

и

$$\begin{gathered} u\,(-N) = u\,(1-N,\ -1,\ -k_2) + u\,(1-N,\ 1,\ k_1), \\ u(N) = u\,(N-1,\ 1,\ -k_2) + u\,(N-1,\ -1,\ k_1). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Из (2.1)—(2.3) при $x<0$ находим

$$u_2(x, y, s) = c \frac{Y(y) \lambda_2^x}{1-[p_z(x, y)]^{a(-s)}} [p_z(x, y)]^{|s|-1}, \tag{2.4}$$

где

$$Y(y) = \begin{cases} 1 & (y=1) \\ \frac{1-q^{k_2}}{1-p^{k_2}} \alpha^{k_2-1} & (y=-1) \end{cases}; \quad \lambda_2 = \frac{R(q, k_2, k_1)}{R(p, k_2, k_1)} \frac{1-q^{k_1}}{1-p^{k_1}} \alpha^{k_2-1},$$

$$\alpha = p/q, \quad R(\theta, k, s) = \theta^{k-1} + (1-\theta)^{s-1}(1-\theta^{k-1}), \tag{2.5}$$

и

$$u(-N) = c \frac{R(q, k_2, k_1)}{(1-p^{k_1})(1-p^{k_2})} \alpha^{k_2-1} \lambda_2^{-N}. \tag{2.6}$$

Тогда при $|x| < N$ получаем

$$u(x) = \sum_{y, s} u(x, y, s) = \begin{cases} c\lambda_2^{-|x|} \frac{R(p, k_2, k_1)}{q^{k_2-1}(1-p^{k_2})} & (x \neq 0) \\ 2c & (x=0) \end{cases}. \tag{2.7}$$

Для среднего времени первого достижения экстремума из состояния (x, y, s) при $-N < x < 0$ имеем

$$D_2(x, y, s) = D_2(x, y, -z) p_{-z}(x, y) + D_2(x, y, s+z) p_z(x, y) + 1 \quad (-k_2 < s < k_1),$$

$$D_2(x, y, -k_2) = D_2(x, -y, k_1) =$$
$$= D_2(x+y, y, 1) p_1(x+y, y) + D_2(x+y, y, -1) p_{-1}(x+y, y) + 1 \tag{2.8}$$

и

$$D_2(-1, 1, -k_2) = D_2(-1, -1, k_1) = 1,$$
$$D_2(1-N, 1, k_1) = D_2(-N) + 1 = qD_2(1-N, 1, 1) + pD_2(1-N, 1, -1) + 2. \tag{2.9}$$

Из (2.8) находим

$$D_2(x, y, s) R[p_{-1}(x, y), k_2, k_1] =$$
$$= D_2(x, yz, -k_2) p_{-z}^{a(s)-1}(x, y)[1 - p_z^{b(s)}(x, y)] +$$
$$+ D_2(x, -yz, k_2) \{p_z^{a(-s)-1}(x, y)[1 - p_{-z}^{a(s)-1}(x, y)] + \tag{2.10}$$
$$+ p_z^{b(s)}(x, y) p_{-z}^{a(s)-1}(x, y)\} + \frac{1}{pq}[1 - p_{-z}^{a(s)}(x, y)][1 - p_z^{b(s)}(x, y)]$$
$$(b(s) = a(-s) - |s|)$$

и, решая (2.10) при $x < 0$ совместно с (2.8) и (2.9), получаем

$$D_2(x, 1, -k_2) = -\mu_2 x - \mu_2 + 1 + B(\lambda^{-x} - \lambda),$$
$$D_2(x, -1, -k_2) = -\mu_2 x - \mu_2 + 1 + \frac{\Delta_1}{pq\Delta} + B(\rho\lambda^{-x} - \lambda), \tag{2.11}$$

где

$$\mu_2 = \frac{(1-p^{k_2})(1-q^{k_2})}{pq\Delta} R(q, k_1, k_1),$$

$$\Delta = R(p, k_2, k_1) p^{k_1-1}(1-q^{k_2}) - R(q, k_2, k_1) q^{k_1-1}(1-p^{k_2}), \tag{2.12}$$

$$\rho = \alpha^{k_1+k_2-2} \frac{(1-q^{k_1})(1-q^{k_2})}{(1-p^{k_1})(1-p^{k_2})},$$

$$\Delta_1 = (1-p^{k_2})(1-q^{k_1}) R(q, k_2, k_1) + (1-q^{k_2})(1-p^{k_1}) R(p, k_2, k_1),$$

$$B = \lambda_2^{-N} \frac{R(q, k_2, k_1)\, q^{k_1-1}(1-p^{k_2})}{\Delta} \left(\mu_2 - \frac{\Delta_1}{pq\Delta} + 1\right).$$

3. УПРАВЛЕНИЕ С ДВУМЯ НАКОПЛЕНИЯМИ

Перейдем к алгоритму управления с двумерной статистикой

$$s = \{s_1, s_2 \colon 0 \leqslant s_1 \leqslant k_1, \quad 0 \leqslant s_2 \leqslant k_2\}$$

и

$$S_0 = \{s_1, s_2 \colon s_1 < k_1, \ s_2 < k_2\}, \qquad S_1 = \{s_1, s_2 \colon s_1 < k_1, \ s_2 = k_2\},$$

$$S_{-1} = \{s_1, s_2 \colon s_1 = k_1, \ s_2 < k_2\}.$$

В области S_0 значения s_1 и s_2 изменяются так, что

$$s_1(m) = s_1(m-1) + \frac{1}{2}(1 + z_m(x, y)), \tag{3.1}$$

$$s_2(m) = s_2(m-1) + \frac{1}{2}(1 - z_m(x, y)), \quad m \geqslant 1$$

$$s_1(0) = s_2(0) = 0. \tag{3.2}$$

Согласно (3.1), рассматриваемый алгоритм заключается в раздельном накоплении благоприятных (s_2) и неблагоприятных (s_1) результатов, причем все результаты берутся с одинаковым весом. Назовем такой алгоритм управления управлением с двумя накоплениями. Стационарное распределение $u_3(x, y, s_1, s_2)$ удовлетворяет уравнению

$$u_3(x, y, s_1, s_2) = p_{-1}(x, y)\, u_3(x, y, s_1, s_2-1) + p_1(x, y)\, u_3(x, y, s_1-1, s_2) \tag{3.3}$$

$$(s_1 + s_2 \geqslant 2),$$

$$u_3(x, y, 1, 0) = p_1(x, y) V(x, y), \quad u_3(x, y, 0, 1) = p_{-1}(x, y) V(x, y), \tag{3.4}$$

причем $u_3(x, y, s_1, s_2) = 0$, если $s_1 < 0$ или $s_2 < 0$, а

$$V(x, y) = \begin{cases} u_3(x-y) & (|x-y| = N) \\ \sum\limits_{\alpha=0}^{k_1-1} u_3(x-y, y, \alpha, k_2) + \sum\limits_{\beta=0}^{k_2-1} u_3(x-y, -y, k_1, \beta) & (|x-y| < N). \end{cases} \tag{3.5}$$

Граничные условия для (3.3) есть

$$u_3(-N) = \sum_{\alpha=0}^{k_1-1} u_3(1-N, -1, \alpha, k_2) + \sum_{\beta=0}^{k_2-1} u_3(1-N, 1, k_1\, \beta) \equiv V(-N, -1). \tag{3.6}$$

Из (3.3)—(3.6) при $-N < x < 0$ и $y = 1$, $x = 0$ находим

$$u_3(x, y, s_1, s_2) = A p_{-1}^{s_2}(x, y)\, p_1^{s_1}(x, y)\, \lambda_3^x\, Y_s(y)\, g_3(s_1, s_2), \tag{3.7}$$

где

$$g_3(s_1, s_2) = \begin{cases} C_{s_1+s_2}^{s_1} & (s_1 < k_1, \ s_2 < k_2) \\ C_{s_1+k_2-1}^{s_1} & (s_2 = k_2) \\ C_{s_2+k_1-1}^{s_2} & (s_1 = k_1) \end{cases}, \tag{3.8}$$

$$\lambda_3 = \frac{Q(q, k_1, k_2)}{Q(p, k_1, k_2)}, \quad Q(\theta, k, s) = (1-\theta^s)\sum_{\alpha=0}^{k-1} C_{\alpha+s-1}^{\alpha}\theta^{\alpha},$$

$$Y_3(y) = \begin{cases} Q(p, k_1, k_2) & (y=1) \\ Q(q, k_1, k_2) & (y=-1) \end{cases}.$$

Тогда для $u_3(x) = \sum\limits_{y, s_1, s_2} u_3(x, y, s_1, s_2)$ при $-N < x < 0$ получаем

$$\frac{u_3(x+1)}{u_3(x)} = \lambda. \qquad (3.9)$$

Среднее время достижения экстремума $D_3(x, y, s_1, s_2)$ из состояния (x, y, s_1, s_2) удовлетворяет уравнениям

$$D_3(x, -y, y, \alpha, k_2) = D_3(x-y, -y, k_1, \beta) =$$
$$= p_{-1}(x, y) D_3(x, y, 0, 1) + p_1(x, y) D_3(x, y, 1, 0) + 1, \qquad (3.10)$$
$$D_3(x, y, s_1, s_2) = p_1(x, y) D_3(x, y, s_1+1, s_2) + p_{-1}(x, y) D_3(x, y, s_1, s_2+1) + 1$$

с граничными условиями

$$D_3(-1, 1, \alpha, k_2) = 1,$$
$$D_3(1-N, 1, k_1, \beta) = D_3(1-N, 1, 0, 1)\, p + D_3(1-N, 1, 1, 0)\, q + 2. \qquad (3.11)$$

Из (3.10) находим при $s_1 < k_1$ и $s_2 < k_2$

$$D_3(x, y, s_1, s_2) =$$
$$= \sum_{m=0}^{k_2-s_2-1} [D_3(x, y, k_1, s_1+m) + m + k_1 - s_1]\, p_1^{k_1-s_1}(x, y)\, p_{-1}^{m}(x, y)\, C_{k_1+m-s_1-1}^{m} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{k_1-s_1-1} [D_3(x, y, s_1+n, k_2) + n + k_2 - s_2]\, p_{-1}^{k_2-s_2}(x, y)\, p_1^{n}(x, y)\, C_{k_2-s_2+n-1}^{n}. \qquad (3.12)$$

Правые части равенства (3.12) имеют очень простую интерпретацию: сумма по m представляет собой среднее время достижения экстремума из состояния (x, y, s_1, s_2) при условии, что накопление привело к неблагоприятному результату, а сумма по n — при условии, что наблюдения из состояния (x, y, s_1, s_2) дали благоприятный результат. В обоих случаях среднее время разбивается на среднее время наблюдения при фиксированном значении x и на среднее время достижения до экстремума из полученного после этого состояния. Тогда для

$$D_3(x-y, -y) \equiv D_3(x-y, y, \alpha, k_2) = D_3(x-y, -y, k_1 \beta) \qquad (3.13)$$

при $x < 0$ получаем

$$D_3(x, 1) = B_3\left[\rho\lambda_3^{-x} - \lambda\right] + \sigma + 1 - \mu_3(x+1),$$
$$D_3(x, -1) = B_3\left[\lambda_3^{-x} - \lambda\right] + 1 - \mu_3(x+1), \qquad (3.14)$$

где

$$\rho = \lambda_3 \frac{Q(q, k_2, k_1)}{Q(p, k_2, k_1)}, \quad \mu_3 = \frac{a(q) Q(p, k_2, k_1) + a(p) Q(q, k_2, k_1)}{Q(q, k_2, k_1) - Q(p, k_2, k_1)},$$
$$a(\theta) = \frac{k_2}{\theta} Q(1-\theta, k_1, k_2+1) + \frac{k_1}{1-\theta} Q(\theta, k_2, k_1+1), \qquad (3.15)$$

$$\sigma = \frac{a(p)+a(q)}{Q(q,k_2,k_1)-Q(p,p_2,k_1)},$$

$$B = (\sigma-\mu_3-1)\lambda_3^{-N}\frac{Q(p,k_2,k_1)}{Q(p,k_2,k_1)-Q(q,k_2,k_1)}.$$

4. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО НАКОПЛЕНИЯ

Рассмотрим зависимости статистического распределения установившегося процесса и среднего времени достижения экстремума от параметров k_1 и k_2 для изученных алгоритмов последовательного накопления. Такое исследование позволяет определить некоторые характерные особенности, которыми должен обладать оптимальный алгоритм накопления в экстремальной системе с совмещенными пробными и рабочими шагами. Согласно результатам п. п. 1—3 статистическое распределение $u(x) = \sum_{y,s} u(x,y,s)$ значений управляемого входа в установившемся процессе при введенных предположениях и $x\neq 0$, $|x|\neq N$ имеет вид

$$u(x) = A\lambda^{-|x|}, \tag{4.1}$$

причем

1) для управления с накоплением до перевеса

$$\lambda = (p/q)^{k_2}, \tag{4.2}$$

2) для управления с накоплением по сериям

$$\lambda = \frac{1-q^{k_1}}{1-p^{k_1}}\,\frac{q^{k_2-1}+p^{k_1-1}-q^{k_2-1}p^{k_1-1}}{p^{k_2-1}+q^{k_1-1}-p^{k_2-1}q^{k_1-1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{k_2-1}, \tag{4.3}$$

3) для управления с двумя накоплениями

$$\lambda = \left(\frac{p}{q}\right)^{k_2}\frac{\sum_{\alpha=0}^{k_1-1} C_{\alpha+k_2-1}^{\alpha}\, q^{\alpha}}{\sum_{\alpha=0}^{k_1-1} C_{\alpha+k_2-1}^{\alpha}\, p^{\alpha}}. \tag{4.4}$$

Следовательно, λ определяет убывание распределение $u(x)$ с ростом $|x|$ и тем самым характеризует точность поддержания экстремума.

Пусть $p>q$. Тогда при управлении с накоплением до перевеса

$$\lambda(k_1,\ k_2+1)-\lambda(k_1,\ k_2)>0 \tag{4.5}$$

и λ не зависит от k_1.

При управлении с накоплением по сериям

$$\operatorname{sign}\{\lambda(k_2,\ k_1+1)-\lambda(k_1,\ k_2)\} = \operatorname{sign} A, \tag{4.6}$$

где

$$A = p[a(p)+q^{k_2}]\,[a(q)+p^{k_2-1}] - q[a(q)+p^{k_2}]\,[a(p)+q^{k_2-1}],$$
$$a(\theta) = \frac{\theta^{k_1-1}}{1-\theta^{k_1-1}} \qquad (k_1\neq 1). \tag{4.7}$$

Поскольку при $0<\theta<1$ $a(\theta)$ монотонно возрастает,

$$A = (p-q)\,a(p)\,a(q) + p^{k_2+1}a(p) - q^{k_2+1}a(q) > 0 \tag{4.8}$$

и неравенство (4.5) верно и в этом случае. Разность $\lambda(k_1+1, k_2)-\lambda(k_1, k_2)$ отрицательна, если $k_2 = 1, 2$, и может быть положительной или отрицательной при других значениях k_2.

При управлении с двумя накоплениями также справедливо (4.5), причем

$$\lambda(k_1 + 1,\ k_2) - \lambda(k_1,\ k_2) < 0 \tag{4,9}$$

при любых значениях k_2.

Таким образом, для $p > q$ при всех рассмотренных алгоритмах последовательного накопления точность поддержания экстремума в установившемся режиме увеличивается с увеличением параметра k_2, определяющего область принятия решения об изменении x на величину y, и может увеличиваться или уменьшаться при увеличении k_1. Сравнение значений λ для различных управлений при фиксированных параметрах k_1 и k_2 показывает, что наибольшее из них имеет управление с накоплением до перевеса.

Перейдем к анализу среднего времени достижения экстремума — показателя быстродействия экстремальной системы при $p > q$. После перехода к пределу при $N\to\infty$ в соответствующих формулах п.п. 1—3 для среднего времени достижения экстремума $D(x, y, s)$ из состояния (x, y, s) системы при всех рассмотренных алгоритмах управления получаем

$$D(x,\ y,\ s) = \mu \mid x \mid + a(y,\ s), \tag{4.10}$$

где μ и $a(y, s)$ зависят от алгоритма накопления.

Поскольку при достаточно большом $|x|$ слагаемым $a(y, s)$ можно пренебречь, зависимость μ от параметров k_1, k_2 характеризует эффективность экстремальной системы в режиме поиска экстремума.

Для управления с накоплением до перевеса

$$\mu_1 = \frac{k_2}{p-q}, \tag{4.11}$$

для управления с накоплением по сериям

$$\mu_2 = \frac{R(p,\ k_1,\ k_1)\,(1-q^{k_2})\,(1-p^{k_2})}{qp^{k_1} R(p,\ k_2,\ k_1)\,(1-q^{k_2}) - pq^{k_1}(1-p^{k_2})\,R(q,\ k_2,\ k_1)}, \tag{4.12}$$

для управления с двумя накоплениями

$$\mu_3 = \frac{Q(q,\ k_2,\ k_1)\,a(p) + Q\,(p,\ k_2,\ k_1)\,a(q)}{Q(q_1,\ k_2,\ k_1) - Q\,(p,\ k_2,\ k_1)}, \tag{4.13}$$

где

$$R(\theta,\ k,\ s) = \theta^{k-1} + (1-\theta)^{s-1}\,(1-\theta^{k-1}),$$

$$Q(\theta,\ k,\ s) = (1-\theta)^s \sum_{\alpha=0}^{k-1} C^{\alpha}_{\alpha+s-1}\,\theta^{\alpha}, \tag{4.14}$$

$$Q(\theta) = \frac{k_2}{\theta}\,Q\,(1-\theta,\ k_1,\ k_2+1) + \frac{k_1}{1-\theta}\,Q\,(\theta,\ k_2,\ k_1+1).$$

Анализ показывает, что во всех случаях

$$\begin{aligned} \mu\,(k_1,\ k_2+1) - \mu\,(k_1,\ k_2) &> 0,\\ \mu\,(k_1+1,\ k_2) - \mu\,(k_1,\ k_2) &\leqslant 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

т. е. увеличение k_2 уменьшает, а увеличение k_1 увеличивает быстродействие.

Заметим, что при $k_1 = 1$

$$\mu_3 = \mu_2 = \frac{(1-q^{k_2})(1-p^{k_2})}{pq\,(p^{k_2}-q^{k_2})}, \qquad \mu_1 = \frac{k_2}{p-q}, \tag{4.16}$$

а при $k_2 = 1$

$$\mu_3 = \mu_2 = \frac{p^{k_1-1}+q^{k_1-1}-(pq)^{k_1-1}}{p^{k_1}-q^{k_1}}, \qquad \mu_1 = \frac{1}{p-q}, \tag{4.17}$$

и, следовательно, при всех $k_1 > 1$ $\quad (k_2 = 1,\ p > q)$

$$\mu_2 = \mu_3 < \mu_1. \tag{4.18}$$

Таким образом, при сделанных идеализациях последние два алгоритма управления обладают лучшим быстродействием.

В прикладных задачах, как правило, требуется построить управляющее устройство, обеспечивающее наперед заданные точность поддержания экстремума в установившемся режиме и быстродействие в режиме поиска. Эти два показателя характеризуются величинами $1/\lambda$ и μ. Поэтому на рис. 1—3 приведены графики, полученные в результате вычислений, для рассмотренных алгоритмов последовательного накопления и управления с фиксированным числом накоплений в экстремаль-

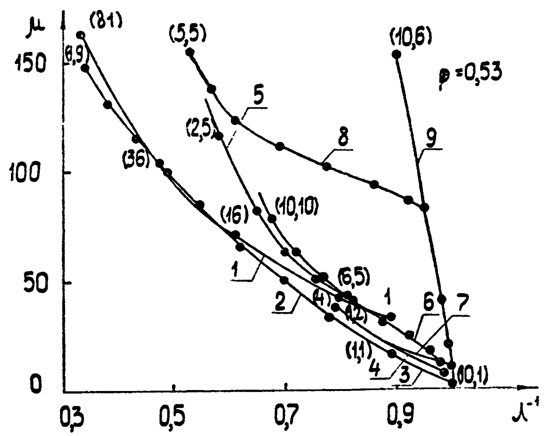

Рис. 1.

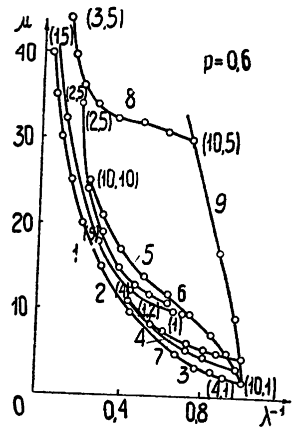

Рис. 2.

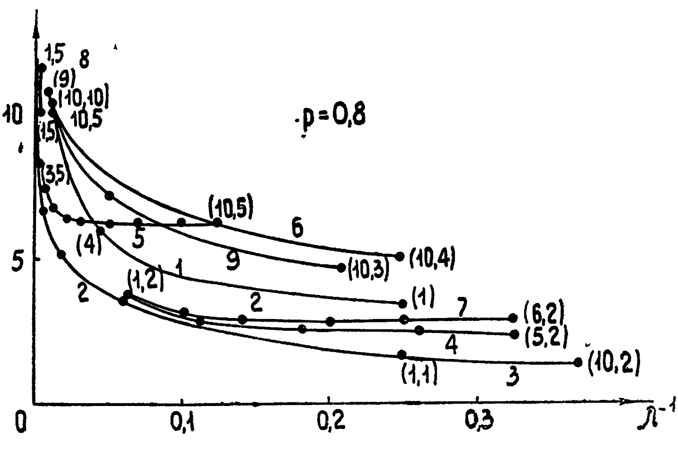

Рис. 3.

ной системе с раздельными пробными и рабочими шагами [1, 2]. На всех рисунках кривые 1, 2, 3—6, 7—9 относятся соответственно к управлениям с фиксированным числом накоплений m, с накоплением до перевеса, накоплением по сериям и двумя накоплениями. Отдельные значения k_2 указаны на кривой 1, отметки (k_1, k_2) всюду обозначают значения k_1 и k_2, изменяющиеся по одному вдоль кривых 3—9.

Для отыскания алгоритма накопления (вместе с параметрами k_1 и k_2), обеспечивающего заданные точность и быстродействие при некотором уровне помех (множество значений p) достаточно рассмотреть пересечения кривых, построенных при этом p, с прямыми, соответствующими заданным точности и быстродействию.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум, Вычислительные устройства в автоматических системах, Физматгиз, М., 1959.
2. А. А. Фельдбаум, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 5, 1961, стр. 107.
3. Г. А. Медведев, В. П. Тарасенко, Вероятностные методы исследования экстремальных систем, изд. Наука, М., 1967.
4. В. П. Тарасенко, К вопросу об оптимальных методах экстремального регулирования в присутствии помех, Труды СФТИ, вып. 40, Томск, 1961.
5. В. М. Мохов, В. П. Тарасенко, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 115 (1963).
6. Н. Е. Маджаров, в сб. Самообучающиеся автоматические системы, изд. Наука, М., 1966, стр. 266.
7. А. Н. Кабалевский, Задача оптимального накопления и способ ее приближенного решения, в сб. Самообучающиеся автоматические системы, изд. Наука, М., 1966, стр. 273.
8. Б. А. Беседин, Л. М. Стексов, Автоматика и вычислительная техника, 1968, 1, стр. 4.
9. Г. А. Медведев, Автоматика и телемеханика, № 2, 1968, стр. 102.
10. В. Н. Смирнова, М. Л. Тай, Тезисы докл. IV симпозиума по экстремальным задачам, Каунас, 1969, стр. 18.
11. А. К. Зуев, Л. А. Растригин, Статистический поиск экстремума с последовательным накоплением, Докл. II Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления, изд. Наука, М., 1970.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 апреля 1971 г.

SOME ALGORITHMS OF SEQUENTIAL ACCUMULATION IN EXTREMAL SYSTEMS

V. N. Smirnova, M. L. Tay

Three algorithms of sequential accumulation in extremal systems with simultaneous trial and operation steps are studied. Dependencies of average extremum search time and stationary distribution vs accumulation algorithm parameters are obtained. Efficiency comparison of the considered control algorithmsin extremal systems is carried out.