ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 519.2

# ВЛИЯНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА РИТМИЧНОСТЬ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

*С. М. Пьяных, Б. И. Вайсблат*

Рассматривается воздействие систем массового обслуживания на ритмичность транспортных потоков эрланговского, пуассоновского и гиперэкспоненциального характера при эрланговском распределении времени обслуживания

1. При построении математических моделей транспортных процессов в настоящее время широко применяются методы теории вероятностей, массового обслуживания и статистического моделирования, которые позволяют решать ряд задач, связанных с проектированием транспортных узлов обслуживания.

На транспорте в большинстве случаев имеют место процессы многофазного обслуживания, когда поток, выходящий из одной системы, становится входящим потоком для последующей. В результате статистических исследований судовых потоков, встречающихся на речном транспорте, установлено, что судовые потоки с достаточно хорошим приближением могут быть описаны как рекуррентные, причем коэффициент вариации интервалов, который является мерой ритмичности таких потоков, меняется в пределах от 0 до 1,5—2, а распределение времени обслуживания хорошо согласуется с нормированным распределением Эрланга.

Известно [1], что в системе однофазного обслуживания со многими обслуживающими приборами, в которую поступает простейший поток (коэффициент вариации интервалов равен 1) при показательном распределении времени обслуживания, выходящий поток обслуженных требований также является простейшим, т. е. ритмичность выходящего потока совпадает с ритмичностью входящего.

Однако при некоторых параметрах системы обслуживания ритмичность выходящего потока, вообще говоря, отличается от ритмичности входящего потока.

2. Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием, на которую поступает рекуррентный поток с плотностью распределения интервалов [1]

$$a(x) = 2\varphi^2\lambda e^{-2\varphi\lambda x} + 2(1-\varphi)^2\lambda e^{-2(1-\varphi)\lambda x}, \tag{1}$$

математическое ожидание и коэффициент вариации интервалов которого составляют

$$t_u = 1/\lambda, \tag{2}$$

$$v_{вх} = \sqrt{1 + \frac{(1-2\varphi)^2}{2\varphi(1-\varphi)}} \qquad (0 < \varphi < 0{,}5), \tag{3}$$

причем $v_{вх} > 1$. Этим распределением можно описать достаточно широкий класс встречающихся в практике рекуррентных потоков с $v_{вх} > 1$.

Будем полагать, что длительность обслуживания имеет нормированное распределение Эрланга с плотностью

$$S(x) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} e^{-\mu k x} x^{k-1}, \tag{4}$$

математическое ожидание и коэффициент вариации которого равны соответственно

$$t_{об} = 1/\mu, \tag{5}$$

$$v_{об} = 1/\sqrt{k}. \tag{6}$$

Следует отметить, что нормированным распределением Эрланга, которое является довольно простым и гибким, можно аппроксимировать достаточно большое число практических унимодальных распределений с коэффициентом вариации, изменяющимся в пределах от 0 до 1.

В работе [1] получено выражение $B^*(p)$ преобразования Карсона — Лапласа закона распределения $B(x)$ интервалов выходящего потока

$$B^*(p) = 1 - Y^*(p)[1 - S^*(p)], \tag{7}$$

где

$$Y^*(p) = 1 - (1-\psi)\frac{(\alpha p + 2\lambda)p}{p(v_{вх}^2+1)(p+2\lambda)+2\lambda^2}, \tag{8}$$

$$S^*(p) = 1 - \frac{(\mu k)^k}{(p+\mu k)^k}, \tag{9}$$

$\alpha = 2/u_0$, $u_0$ — положительный корень уравнения

$$\frac{u\,[(v_{вх}^2+1)\,u-2]}{2(v_{вх}^2 u - 1)} = 1 - \frac{(\mu k)^k}{(\lambda u + \mu k)^k}. \tag{10}$$

Нетрудно показать, что если $b^*(p)$ — преобразование Карсона — Лапласа для плотности распределения интервалов $\xi_i$ выходящего потока, то

$$M\xi_i = -\frac{1}{2}\frac{d^2 b^*(p)}{dp^2}\Big|_{p=0}, \tag{11}$$

$$D\xi_i = \frac{1}{3}\frac{d^3 b^*(p)}{dp^3}\Big|_{p=0} - \frac{1}{4}\left[\frac{d^2 b^*(p)}{dp^2}\Big|_{p=0}\right]^2, \tag{12}$$

$$b^*(p) = p\,[1 - B^*(p)]. \tag{13}$$

Используя (7), (8), (9), (13) и вычисляя соответствующие производные, получим

$$M\xi_i = t_u, \tag{14}$$

$$v = \frac{\sqrt{D\xi_i}}{M\xi_i} = \sqrt{\psi^2(k^{-1}-1) + 2\psi + (1-\psi)[2(v_{вх}^2+1)-\alpha] - 1}. \tag{15}$$

Выражение (15) позволяет вычислить коэффициент вариации выходящего потока в зависимости от коэффициента вариации интервалов входящего потока ($v_{вх} \geqslant 1$).

Встречающиеся в практике рекуррентные транспортные потоки с коэффициентом вариации интервалов $v_{вх} \leqslant 1$ могут быть достаточно хорошо аппроксимированы нормированным потоком Эрланга, плотность вероятности интервалов которого равна

$$a(x) = \frac{(\lambda l)^l x^{l-1}}{(l-1)!} \exp\{-\lambda l x\}, \tag{16}$$

где $1/\lambda$ — математическое ожидание интервалов; $l = 1/v_{\text{вх}}^2$ — параметр потока.

Параметры выходящего потока для системы, на которую поступает эрланговский поток с параметрами $\lambda$, $l$ и эрланговским распределением длительности обслуживания с параметрами $\mu$, $k$, могут быть получены аналитическим методом [1, 3]. Однако реализация этих методов связана с определенными вычислительными трудностями. Поэтому параметры выходящего потока были получены путем статистического моделирования.

Реализация интервалов $\tau_i$ входящего потока и реализации $t_i^{\text{об}}$ длительности обслуживания вычислялись по формулам

$$\tau_i = -1/\lambda l \sum_{j=1}^{l} \ln Z_j, \tag{17}$$

$$t_i^{\text{об}} = -\frac{1}{\mu k} \sum_{j=1}^{k} \ln Z_j, \tag{18}$$

где $Z_j$ — случайные числа, равномерно распределенные в интервале [0,1]. Моделирование производилось на ЭВМ «Раздан—2».

В табл. 1 приведены некоторые параметры модели и соответствующие им характеристики выходящего потока.

Таблица 1

| № варианта | Параметры модели | | | | | Характеристики выходящего потока | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda$ | $l$ | $\mu$ | $k$ | $\psi$ | $M\xi_i$ | $v$ |
| 1 | 1 | $\infty$ | 3,33 | 7 | 0,3 | 0,988 | 0,156 |
| 2 | 1 | $\infty$ | 2 | 7 | 0,5 | 0,973 | 0,272 |
| 3 | 1 | $\infty$ | 1,43 | 7 | 0,7 | 0,974 | 0,321 |
| 4 | 1 | $\infty$ | 1,11 | 7 | 0,9 | 0,927 | 0,368 |

Для каждого варианта рассматривался поток, состоящий из $n = 200$ требований. Статистическое моделирование с потоками из большого числа требований показало, что $n = 200$ обеспечивает удовлетворительную точность. На рис. 1 приведены графики зависимости $v$ от $v_{\text{вх}}$ при некоторых, наиболее распространенных параметрах входящих потоков и систем обслуживания. Аппроксимация полученных зависимостей приводит к следующей формуле.

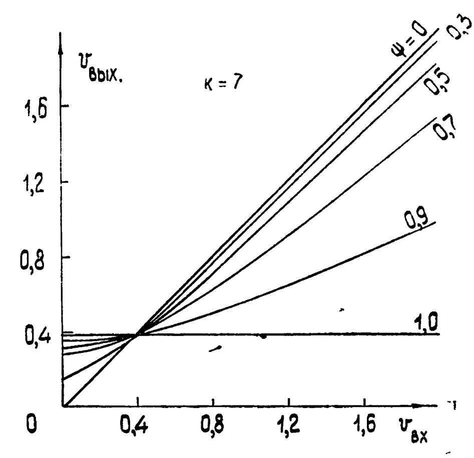


Рис. 1.

$$v = v_{\text{вх}} \left[1 - \psi^{(0,5+1,5\,v_{\text{вх}})}\right] + v_{\text{об}}\, \psi^{(0,5+1,5\,v_{\text{вх}})}. \tag{19}$$

Выражение (19) дает возможность с незначительной погрешностью определить коэффициенты вариации выходящих после обслуживания потоков при эрланговском обслуживании и входящих на обслуживание потоков с $v_{\text{вх}} = 0 \div 2$.

На основании выполненных расчетов можно сделать вывод о том, что система обслуживания всегда стремится трансформировать обслуживаемый поток «по своему образу и подобию», причем, чем загрузка системы больше, тем ее воздействие на входящий поток сильнее.

При $v_{\text{об}} > v_{\text{вх}}$ система обслуживания ухудшает ритмичность входящего потока. В этом случае выходящий поток всегда хуже (менее ритмичен) потока входящего, т. е. $v > v_{\text{вх}}$.

При $v_{\text{об}} < v_{\text{вх}}$ система обслуживания улучшает ритмичность входящего потока. В этом случае имеем $v < v_{\text{вх}}$.

Если вариация интервалов входящего потока равна вариации интервалов обслуживания ($v_{\text{вх}} = v_{\text{об}}$), то система обслуживания на ритмичность входящего потока не воздействует и имеет место случай $v = v_{\text{вх}}$.

При очень большой загрузке системы ($\psi \to 1$) ритмичность выходящего потока близка к ритмичности обслуживания независимо от характеристик входящего потока, т. е. система обслуживания «навязывает» выходящему потоку свой ритм.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман, Р. Крюон, Массовое обслуживание, изд. Мир, М., 1965.
2. Д. Кокс, У. Смит, Теория очередей, изд. Мир, М., 1966.
3. Т. Саати, Элементы теории массового обслуживания и ее приложения, изд. Сов. радио, М., 1965.

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию 11 июня 1971 г.

## MASS SERVICE SYSTEM INFLUENCE ON TRAFFIC FLOW RHYTHM

*S. M. Pjyanykh, B. I. Weisblat*

The article considers the influence of mass service systems on the rhythm of the Erlang, Poisson, and hyperexponential traffic flows under the Erlang distribution of service time.