

УДК 534.014.1

## НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ КОНТУРЕ С ВАРИСТОРОМ

*Е. А. Майор, В. В. Спевак, Е. В. Харитонов*

Рассмотрен нелинейный колебательный процесс в контуре с нелинейным сопротивлением со степенной вольт-амперной характеристикой — варистором. Без предположений о малости нелинейности, численными методами и методами качественной теории дифференциальных уравнений показано, что процесс имеет колебательно-апериодический характер, точка равновесия является  $\beta$ -кратным фокусом, асимптотическое поведение системы близко к гармоническому режиму с затуханием, система негрубая. Полученные для различных нелинейностей интегральные кривые и фазовые траектории хорошо согласуются с экспериментальными. Кратко обсуждаются аппроксимационные формулы в связи с применениями контуров с варисторами.

К исследованию свободного колебательного процесса в параллельном контуре с варистором сводится широкий класс задач, связанных с использованием варисторов для ограничения перенапряжений при коммутации тока в цепях с индуктивной нагрузкой. При этом знание количественных характеристик нелинейного процесса позволяет решать вопросы оптимизации параметров варисторов для целей искрогашения, амплитудного ограничения, защиты от напряжений и пр.

Свободный колебательный процесс в колебательном контуре, параллельно которому включено нелинейное сопротивление — варистор, имеющее вольт-амперную характеристику, аппроксимируемую выражением

$$i = \begin{cases} Bu^\beta & (u > 0) \\ -B|u|^\beta & (u < 0) \end{cases},$$

описывается уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\beta B}{C}|u|^{\beta-1} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_k}{C},$$

соответствующими возбуждению контура при выключении тока в цепи катушки индуктивности (рис. 1). Здесь предполагается, что параметры  $L$  и  $C$  сосредоточены и идеальны, а коэффициент нелинейности варистора  $\beta > 1$ .

В выражении (1)  $u$  — напряжение на контуре,  $i_k$  — ток в катушке индуктивности перед коммутацией,  $L$ ,  $C$  — индуктивность катушки и емкость конденсатора,  $B$  — постоянная номинала варистора [1].

Замена переменных

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x(\tau) = \left( \beta B \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^{1/(\beta-1)} u(t) \quad (2)$$

приводит уравнение (1) к безразмерному виду, в котором единственным параметром является показатель нелинейности  $\beta$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + |x|^{\beta-1} \frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad (3)$$

$$x|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{\tau=0} = i_k \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \beta B \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^{1/(\beta-1)} \equiv v_0.$$

При произвольном параметре нелинейности  $\beta > 1$  уравнение (3) не разрешается в квадратурах (исключение составляет случай  $\beta = 2$ ). Поэтому для того, чтобы получить общее представление о характере нелинейного колебательного процесса, уравнение (3) решалось численно по методу Рунге — Кутты для различных значений параметров  $\beta$  и  $v_0$ . Соответствующие кривые приведены на рис. 2 а. Анализ этих кривых показывает, что в общем случае уравнение (3) описывает сложный колебательный процесс, сильно зависящий от величины параметра нелинейности  $\beta$ . На первом «полупериоде» процесс качественно подобен некоторому сложному аperiodическому процессу, а далее — гармоническому процессу с затуханием, причем длина «аperiodического участка» уменьшается с ростом  $\beta$ . Результаты численного интегрирования и качественные выводы подтверждаются экспериментально (пример приведен на рис. 2 б, в).

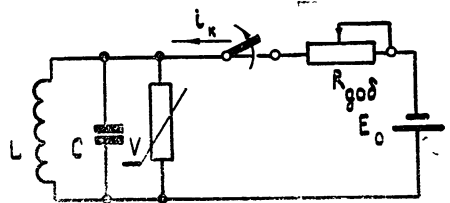


Рис 1. Схема возбуждения свободного колебательного процесса в параллельном контуре с варистором.

Качественные выводы о характере колебательного процесса подтверждаются также рассмотрением поведения системы в фазовом пространстве  $\left( x, y = \frac{dx}{d\tau} \right)$ .

Уравнение (3) эквивалентно канонической системе

$$\frac{dx}{d\tau} = y \equiv p(x, y), \quad (4)$$

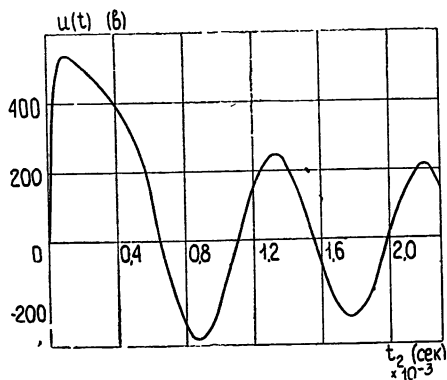
$$\frac{dy}{d\tau} = -|x|^{\beta-1}y - x \equiv q(x, y).$$

Уравнение интегральных кривых этой системы

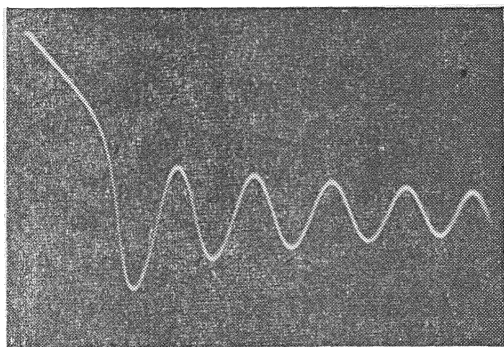
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x - |x|^{\beta-1}y}{y}. \quad (5)$$

Соответствующая сетка изоклин  $y = -x(C + |x|^{\beta-1})^{-1}$  ( $C$  — переменный параметр) позволяет построить семейство фазовых портретов для различных значений  $\beta$ . Рассмотрение фазовых траекторий показывает, что в случае любых  $\beta > 1$  имеет место нелинейный колебательный процесс с затуханием, причем характер полей направлений четко разделяет все возможные решения на три подкласса в зависимости от величины  $\beta$ :  $1 < \beta < 2$  — изоклина при  $C = 0$  является параболой, процесс быстро

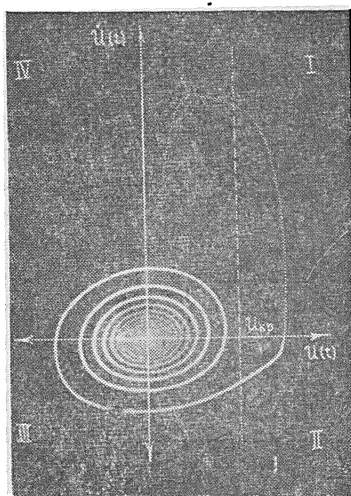
затухает;  $\beta > 2$  — изоклина при  $C = 0$  является гиперболой, система медленно и сильно нелинейно приближается к квазигармоническому режиму с затуханием;  $\beta = 2$  — критический случай, изоклина при  $C = 0$  —  $y = -\text{sign } x$ , явный вид фазовой траектории —  $\pm y - \ln(1 \pm y) + \frac{x^2}{2} = C$  ( $x \geq 0$ ).



а)



б)



в)

Рис. 2 а—Интегральная кривая для коэффициента нелинейности  $\beta > 2$  ( $\beta = 5$ ), б—осциллограмма соответствующего переходного процесса в—осциллограмма фазовой траектории переходного процесса.

При любых  $\beta > 1$  фазовые траектории являют собой сложные спирали, сходящиеся к точке  $(0, 0)$  фазовой плоскости — особой точке уравнения (5). Эта точка является точкой равновесия системы. Расчетные фазовые траектории для различных значений  $\beta$  и пример осциллограммы приведены на рис. 3 и 2в.

Для состояния равновесия системы (4)  $\sigma = \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right)_{(0,0)} = 0$ ,

$\|\Delta\| = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} \right)_{(0,0)} = 1 > 0$ , это означает, что рассматриваемая

система — негрубая, а состояние равновесия — простое [2]. В полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = -r \sin \varphi$  вблизи состояния равновесия  $r(\varphi_0) \equiv r_0 \sim 0$  функция последования [2]  $\psi(r_0) = r(\varphi_0 + 2\pi) - r(\varphi_0)$  разлагается в ряд

$$\psi(r_0) = -2B \left( \frac{\beta}{2}, \frac{3}{2} \right) r_0^\beta \left( 1 - \beta B \left( \frac{\beta}{2}, \frac{3}{2} \right) r_0^{\beta-1} + \dots \right)$$

( $B(x, y)$  — бета-функция), начинающийся с члена  $\sim r_0^\beta$ ; поэтому состояние равновесия является  $\beta$ -кратным фокусом [2]. Этот фокус устойчив, так как для системы (4)  $\frac{d\varphi}{d\tau} > 0$ ,  $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ . Замкнутые траектории и предельные циклы отсутствуют в рассматриваемой системе, так как для (4)  $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = -|x|^{\beta-1}$  не меняет знак (критерий Бендиксона [2]). Поэтому свободные нелинейные колебания в рассматриваемой системе представляют собой, по сути дела, медленный переходный процесс.

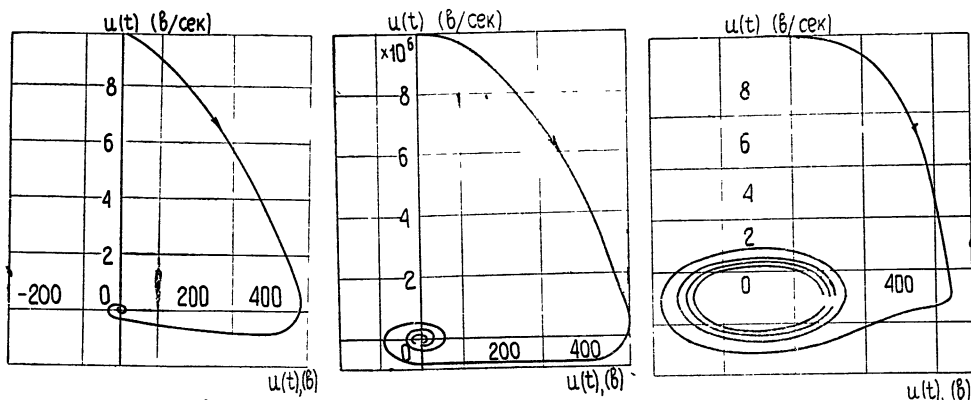


Рис. 3. Расчетные фазовые траектории для коэффициентов нелинейности  
 а —  $1 < \beta < 2$  ( $\beta = \frac{3}{2}$ ), б —  $\beta = 2$ , в —  $\beta > 2$  ( $\beta = 5$ ).

Как видно из характера интегральных кривых и фазовых траекторий, колебательный процесс в системе при  $\tau \rightarrow \infty$  близок к гармоническому с затуханием. Действительно, при  $r \sim r_0 \sim 0$  из (5) можно получить, что

$$r = r_0 [1 - f_1(\beta, \varphi) r_0^{\beta-1} + f_2(\beta, \varphi) r_0^{2\beta-2} - \dots],$$

т. е. траектории близки к окружностям  $r = r_0$ . Период движения по этой траектории близок к периоду колебаний линейной системы

$$T = 2\pi + 2B \left( \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) r_0^{2\beta-2} + \dots$$

(в единицах  $\sqrt{LC}$ , см. (2)). Из этих соотношений очевидно, что выход на линейный режим наступает тем быстрее, чем больше величина нелинейности, т. е. чем больше  $\beta$ . Качественно этот вывод подтверждается экспериментально осциллограммами интегральных кривых и фазовых траекторий.

Результаты проведенного анализа нелинейных свободных колебаний позволяют использовать терминологию линейных систем при качественном описании процесса в рассматриваемой системе. Линейный колебательный контур (рис. 1) зашунтирован варистором, динамическое сопротивление которого  $R_v = (\beta B |u(t)|^{\beta-1})^{-1}$ . На начальном этапе  $u(t)$  велико, и выполняется условие существования колебательного режима

в линейной системе:  $R_b > \frac{1}{2} \rho_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $\rho_0$  — характеристическое сопротивление контура. При дальнейшем повышении напряжения на контуре сопротивление варистора становится меньше критического, и выполняется условие аperiodичности  $R_b < \frac{1}{2} \rho_0$ . В дальнейшем система вновь переходит в колебательный режим, причем величина  $u(t)$  и характер нелинейности обеспечивает сохранение колебательного режима с затуханием:  $|u(t)| < |u_{кр}| = \left( \frac{2}{\beta B} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^{1/(\beta-1)}$ . Таким образом, нелинейный процесс носит колебательно-аperiodический характер.

Такое описание процесса позволяет получить удобные для инженерных расчетов приближенные выражения для характеристик процесса на аperiodическом участке, наиболее важном для практических применений контуров с варисторами [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Караченцев, В. В. Спёвак, Радио, № 11, 87 (1969).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959; В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М., 1947
3. А. Я. Караченцев, В. В. Спёвак, Электронная техника, сер. 8, № 4 (21), 95 (1970).

Поступила в редакцию  
19 июля 1971 г.

#### NONLINEAR NATURAL OSCILLATIONS IN PARALLEL CIRCUIT WITH VARISTOR

*E. A. Mayor, V. V. Spevak, E. V. Kharitonov*

The article considers a nonlinear oscillatory process in a circuit with nonlinear resistance with a varistor-power current-voltage characteristic. Without assumptions on nonlinearity smallness and using numerical methods and methods of the differential equation qualitative theory it is shown that the process is of an oscillatory-aperiodic character, the equilibrium point is a  $\beta$ -multiple focus, the asymptotic behaviour of the system is close to a harmonic regime with damping, the system is nonrough. The integral curves and phase trajectories obtained for various nonlinearities are in good agreement with experimental data. In connection with applications of circuits with varistors approximate formulae are briefly discussed.