

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛИ ТОНКОГО КРЫЛА С ОДНОЙ И ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Г. В. Аронович, П. Л. Жиров

Методом D -разбиения рассматривается устойчивость модели тонкого крыла как дискретной системы с одной и двумя степенями свободы в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изучены случаи изгибно-крутильного флаттера и крутильно-элеронного флаттера при силах, вычисленных по квазистационарной теории, и случай чисто-крутильного флаттера при силах, вычисленных по нестационарной теории

Рассмотрим вопрос о возбуждении флаттера тонкого крыла как дискретной системы в потоке несжимаемой жидкости. В соответствии со способами подсчета аэродинамических сил существует два метода решения этой задачи. При применении квазистационарной теории явно применяют теорию малых колебаний, сводя задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и устойчивость определяют с помощью критерия Раутта—Гурвица [1, 2]. При применении нестационарной теории в уравнения движения сразу подставляют синусоидальное решение и определяют нижнюю (по скорости) границу между нарастающими и затухающими колебаниями (предполагая, что эта граница не соответствует нулевому корню). Таким образом, при нестационарной теории задача об устойчивости движения обычно не ставится [2, 3], а определяются соотношения между параметрами, обеспечивающие существование гармонических колебаний. Получаемый в процессе расчета детерминант анализируется различными способами, в частности, с помощью обобщенного на случай комплексных коэффициентов критерия Раутта — Гурвица. В [4] для анализа условий возбуждения флаттера при нестационарных аэродинамических силах использовались критерии Найквиста.

В данной работе методом D -разбиения рассматривается устойчивость плоского тонкого крыла как дискретной системы с одной и двумя степенями свободы при силах, вычисленных по квазистационарной и нестационарной теориям. Используемый метод позволил сравнительно легко, несмотря на сложность коэффициентов, проанализировать задачу (что обычно достигается путем значительного счета) и получить все логически возможные и практически реализуемые диаграммы устойчивости. В частности, уточнены условия существования чисто-крутильного флаттера по нестационарной теории. Полученные результаты могут быть использованы при решении (способом Галеркина) задачи о флаттере крыла с бесконечным числом степеней свободы.

1. Как известно, дифференциальные уравнения флаттера крыла с элероном бесконечного размаха в несжимаемой жидкости с использованием гипотезы стационарности имеют вид [1]

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{z} + a_{12} \dot{z} + a_{13} z + b_{11} \ddot{\theta} + b_{12} \dot{\theta} + b_{13} \theta + c_{11} \ddot{\beta} + c_{12} \dot{\beta} + c_{13} \beta = 0, \\ a_{21} \ddot{z} + a_{22} \dot{z} + b_{21} \ddot{\theta} + b_{22} \dot{\theta} + b_{23} \theta + c_{21} \ddot{\beta} + c_{22} \dot{\beta} + c_{23} \beta = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$a_{31} \ddot{z} + a_{32} \dot{z} + b_{31} \ddot{\Theta} + b_{32} \dot{\Theta} + b_{33} \Theta + c_{31} \ddot{\beta} + c_{32} \dot{\beta} + c_{33} \beta = 0.$$

Значения коэффициентов следующие:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m, & b_{23} &= h - \pi \rho c^2 V^2 \left(x_0 - \frac{1}{4} \right), \\ a_{12} &= \pi \rho c V, & b_{31} &= c_{21} = I_{\text{тш}} + m_0 \sigma_0 \rho_{\text{ш}} c^2, \\ a_{13} &= k, & b_{32} &= \rho c^3 V \Omega_2, \\ a_{21} &= b_{11} = -m \sigma c, & b_{33} &= \rho c^2 V^2 \Omega_1, \\ a_{22} &= \pi \rho c^2 V \left(x_0 - \frac{1}{4} \right), & c_{31} &= I_{\text{тш}}, \\ a_{31} &= c_{11} = -m_0 \sigma_0 c, & c_{32} &= \rho c^3 V \Omega_4, \\ a_{32} &= \rho c^2 V \Omega_5, & c_{33} &= k_0 + \rho c^2 V^2 \Omega_3, \\ b_{12} &= -\pi \rho c^2 V \left(\frac{3}{4} - x_0 \right), & c_{12} &= -\pi \rho c^2 V H, \\ b_{13} &= -\pi \rho c V^2, & c_{13} &= -\pi \rho c V^2 G, \\ b_{21} &= I_m = m (x^2 + \sigma^2) c^2, & c_{22} &= -\rho c^3 V \left[\pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) H + J \right], \\ b_{22} &= \pi \rho c^3 V \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2, & c_{23} &= -\rho c^2 V^2 \left[\pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) G + I \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь z — вертикальное перемещение крыла, Θ — угол поворота всего крыла около упругой оси, β — угол отклонения элерона, m — погонная масса системы крыло—элерон, c — хорда крыла, σc — расстояние центра тяжести крыла от оси жесткости, χc — радиус инерции профиля крыла относительно центра тяжести, $x_0 c$ — расстояние оси жесткости от передней кромки, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, H, G, J, I$ — известные функции отношения хорды элерона c_1 к хорде крыла c (см. [1]), остальные обозначения обычные (рис. 1). Предполагается, что ось вращения элерона совпадает с его передней кромкой.

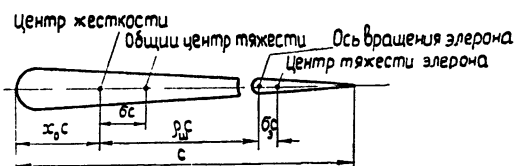


Рис. 1.

Из системы уравнений (1) получим:

- при $k_0 \rightarrow \infty$ ($\beta = \dot{\beta} = 0$) систему уравнений изгибно-крутильного флаттера;
- при $k \rightarrow \infty$ ($z = \dot{z} = 0$) систему уравнений крутильно-элеронного флаттера;
- при $h \rightarrow \infty$ ($\Theta = \dot{\Theta} = 0$) систему уравнений изгибно-элеронного флаттера.

Если $k_3 \rightarrow \infty$, и кроме того $k \rightarrow \infty$, или $h \rightarrow \infty$, то получим уравнения соответственно или чисто-крутильных, или чисто-изгибных движений. Из вида коэффициентов непосредственно следует, что чисто-изгибные движения всегда затухают, а чисто-крутильные или затухают (если $b_{23} > 0$), или могут аperiodически нарастать (если $b_{23} < 0$).

Рассмотрим устойчивость крыла с двумя степенями свободы. Для этого воспользуемся методом D -разбиения и построим все практически реализуемые и логически возможные варианты диаграмм устойчивости.

а) Изгибно-крутильный флаттер. Если ввести безразмерное время $\tau = \frac{2V}{c} t$, то характеристическое уравнение системы может быть представлено в виде

$$\mu (p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2) + \nu (p^2 + b_1 p + b_2) + 1 = 0, \quad (3)$$

где

$$a_1 = \frac{2}{\beta_1 \chi^2} \left[\chi^2 + \left(\sigma + x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] > 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta_1 \chi^2} \left[\frac{1}{4\beta_1} - \left(\sigma + x_0 - \frac{1}{4} \right) \right],$$

$$b_1 = \frac{2 \left[\alpha + \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right]}{\beta_1 (\chi^2 + \sigma^2 + \alpha)} > 0,$$

$$b_2 = - \frac{x_0 - \frac{1}{4}}{\beta_1 (\chi^2 + \sigma^2 + \alpha)},$$

$$\mu \equiv \frac{16 m^2 \chi^2}{k h c^2} V^4 > 0, \quad \nu \equiv \frac{4m(\chi^2 + \sigma^2 + \alpha)}{h} V^2 > 0,$$

$$\alpha = \frac{h}{k c^2}, \quad \beta_1 = \frac{4m}{\pi \rho c^2}.$$

Очевидно, что $\mu = G\nu^2$, где $G = \frac{\alpha \chi^2}{(\chi^2 + \sigma^2 + \alpha)^2}$.

Диаграммы D -разбиения будем строить по двум вещественным параметрам μ и ν , считая их временно независимыми [5]. Полагая в (3) $p = i\omega$ и отделяя действительную и мнимую части, получим параметрическое уравнение кривой D -разбиения.

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\Delta_\mu}{\Delta} = \frac{-b_1 \omega}{\omega^3 (d_0 \omega^2 + d_1)} = \frac{-b_1}{\omega^2 (d_0 \omega^2 + d_1)}, \\ \nu &= \frac{\Delta_\nu}{\Delta} = \frac{-a_1 \omega^3}{\omega^3 (d_0 \omega^2 + d_1)} = \frac{a_1}{d_0 \omega^2 + d_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $d_0 = b_1 - a_1$, $d_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Из выражений для a_1 и b_1 следует, что $a_1 > b_1$ и, следовательно, всегда $d_0 < 0$ (см. Приложение I). Итак, $a_1 > 0$, $a_2 \geq 0$, $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$, $d_0 < 0$, $d_1 \geq 0$.

Уравнения особых прямых будут следующими:

$$\mu = 0 \quad (\omega = \infty), \quad \nu b_2 + 1 = 0 \quad (\omega = 0).$$

При построении рассмотрим случаи

- 1) $d_1 < 0, b_2 < 0$; 3) $d_1 > 0, b_2 < 0$;
 2) $d_1 < 0, b_2 > 0$; 4) $d_1 > 0, b_2 > 0$.

На рис. 2 представлен качественный вид диаграмм D -разбиения для указанных случаев. Так как при $\omega \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)_{\infty} = \left[\frac{a_1 d_0 \omega^4}{b_1 (2d_0 \omega^2 + d_1)} \right]_{\infty} \approx \left(\frac{a_1 \omega^2}{2b_1} \right)_{\infty} = \infty,$$

то кривая D -разбиения касается оси ν в начале координат. Направление штриховки особой прямой, соответствующей $\omega = 0$, определим, отобразив

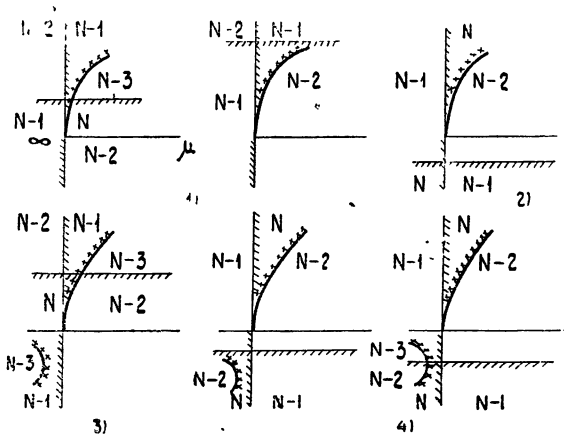


Рис. 2.

D -разбиение плоскости μ, ν на полусферу Пуанкаре (поскольку при $\omega = 0$ общая точка кривой D -разбиения и особой прямой находится в бесконечности). Из уравнения (3) следует, что при $\mu \rightarrow +0$ система устойчива, если удовлетворяет условиям устойчивости вырожденное уравнение $\nu(p^2 + b_1 p + b_2) + 1 = 0$ и если $a_1 - b_1 > 0$ (т. е. $d_0 < 0$) [6]. Последнее выполняется всегда, а первое — в случае, если $\nu b_2 + 1 > 0$, откуда следует, что при $\mu \rightarrow +0$ область N на рис. 2 совпадает с областью устойчивости. Окончательные диаграммы D -разбиения получим, построив в первом квадранте ($\mu > 0, \nu > 0$) рис. 2 параболу $\mu = G\nu^2$. Если парабола, выходя из области N , пересекает кривую D -разбиения, то имеет место флаттер, если особую прямую, — дивергенция. Из рис. 2 следует, что в случаях 2 и 4 дивергенция невозможна.

б) Крутильно-элеронный флаттер. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\mu(p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) + \nu(p^2 + b_1 p + b_2) + 1 = 0, \quad (5)$$

где

$$a_1 = \frac{\Omega_4 + E_1 f_1 + E_2 f_2}{2\delta d}, \quad a_2 = \frac{\Omega_3 + E_1 f_3 + E_2 f_4 + f_5/\delta}{4\delta d},$$

$$a_3 = \frac{f_6}{8\delta^2 d}, \quad a_4 = \frac{f_7}{16\delta^2 d}, \quad b_1 = \frac{\pi\alpha + \Omega_4}{2\delta(E_1 + \alpha)} > 0,$$

$$b_2 = \frac{\Omega_3 - \pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) \alpha}{4\delta (E_1 + \alpha)}, \quad \alpha = \frac{k_3}{h}, \quad E_1 = \frac{I_{\text{тш}}}{I_\tau},$$

$$E_2 = \frac{I_{\text{ш}}}{I_\tau}, \quad \delta = \frac{I_\tau}{\rho c^4}, \quad d = E_1 - (E_1 + E_2)^2,$$

$$\mu = \frac{16 I_\tau^2 d}{c^4 k_3 h} V^4, \quad \nu = \frac{4 I_\tau}{c^2 k_3} (E_1 + \alpha) V^2 > 0,$$

$$\mu = G\nu^2, \quad G = \frac{\alpha d}{(E_1 + \alpha)^2}.$$

Считаем $d > 0$, следовательно, $\mu > 0$. Величины $f_i = f_i \left(x_0, \frac{c_1}{c} \right)$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) — известные функции (см. Приложение II).

Полагая в (5) $p = i\omega$, получим параметрическое уравнение кривой D -разбиения (считая временно μ и ν независимыми)

$$\mu = \frac{\Delta_\mu}{\Delta} = \frac{-b_1}{\Delta_1}, \quad \nu = \frac{\Delta_\nu}{\Delta} = \frac{-a_1\omega^2 + a_3}{\Delta_1},$$

$$\Delta = \omega\Delta_1 \equiv \omega(d_0\omega^4 + d_1\omega^2 + d_2), \quad (6)$$

$$d_0 = b_1 - a_1, \quad d_1 = a_1b_2 - a_2b_1 + a_3, \quad d_2 = a_4b_1 - a_3b_2.$$

Уравнения особых прямых будут следующими:

$$\mu = 0 \quad (\omega = \infty); \quad a_4\mu + b_2\nu + 1 = 0 \quad (\omega = 0).$$

При $\mu \rightarrow +0$ система устойчива, если уравнение $\nu(p^2 + b_1p + b_2) + 1 = 0$ удовлетворяет условиям устойчивости и если $a_1 > b_1$, т. е. $a_1 > 0$ и $d_0 < 0$. В дальнейшем ограничимся этим единственно реальным случаем (так как при малых скоростях система должна быть устойчива). Для построения диаграмм D -разбиения определим качественный вид зависимости $\Delta_1 = d_0\omega^4 + d_1\omega^2 + d_2$ от ω . Здесь возможны случаи:

- I. $d_1 < 0, \quad d_2 < 0$;
- II. $d_1 < 0, \quad d_2 > 0$;
- III. $d_1 > 0, \quad d_2 < 0$;
- IV. $d_1 > 0, \quad d_2 > 0$.

В случае I $\Delta_1 < 0$; в случаях II, IV $\Delta_1 > 0$ при $\omega < \omega_1$ и $\Delta_1 < 0$ при $\omega > \omega_1$, где ω_1 — корень (единственный) уравнения $\Delta_1(\omega) = 0$; в случае III возможны варианты: III а, когда при любых ω $\Delta_1 < 0$ (как в случае I); III б, когда уравнение $\Delta_1(\omega) = 0$ имеет два корня ($\omega_1 < \omega_2$), при $\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$ $\Delta_1 < 0$, при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ $\Delta_1 > 0$.

Далее, строим кривые $\mu = \mu(\omega)$, $\nu = \nu(\omega)$ и $\nu = \nu(\mu)$ для двух вариантов: 1. $a_1 > 0, a_3 > 0$; 2. $a_1 > 0, a_3 < 0$.

Здесь ω_* — корень уравнения $\Delta_\nu(\omega) = 0$; ω_1 и ω_2 — корни уравнения $\Delta_1 = 0$. При построении кривых $\nu = \nu(\mu)$ следует иметь в виду, что при $\omega = \infty \frac{d\nu}{d\mu} = \infty$, а при ω , соответствующих $\frac{d\mu}{d\omega} = 0$ (случай III б),

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{8a_1d_0}{d_1^2 - 4d_0d_2} < 0 \quad (\text{так как } d_1^2 - 4d_0d_2 > 0 \text{ как дискриминант уравне-}$$

ния $\Delta_1 = 0$, имеющего действительные корни). Всего получим 9 различных кривых $\nu = \nu(\mu)$ (рис. 3).

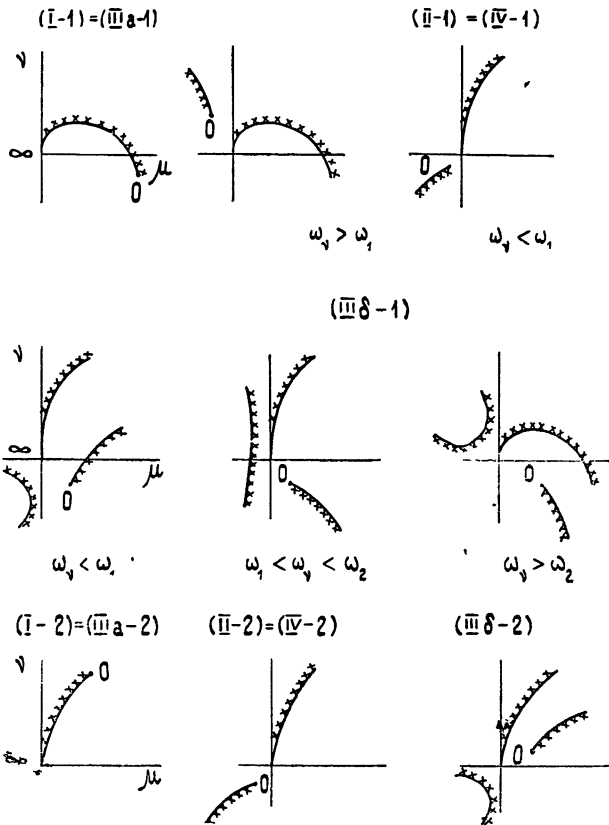


Рис. 3.

При построении особой прямой $a_4\mu + b_2\nu + 1 = 0$, соответствующей $\omega = 0$, будем различать случаи

- | | | |
|-------------------------|--------------|---------------|
| 1') $a_4 > 0, b_2 > 0,$ | } $a_3 > 0,$ | $d_2 \geq 0,$ |
| 2') $a_4 > 0, b_2 < 0,$ | | $d_2 > 0,$ |
| 3') $a_4 < 0, b_2 > 0,$ | | $d_2 < 0,$ |
| 4') $a_4 < 0, b_2 < 0,$ | | $d_2 \geq 0,$ |
| 5') $a_4 > 0, b_2 > 0,$ | } $a_3 < 0,$ | $d_2 > 0,$ |
| 6') $a_4 > 0, b_2 < 0,$ | | $d_2 \geq 0,$ |
| 7') $a_4 < 0, b_2 > 0,$ | | $d_2 \geq 0,$ |
| 8') $a_4 < 0, b_2 < 0,$ | | $d_2 < 0.$ |

Последние два столбца определяют положение на рассматриваемой особой прямой точки кривой D -разбиения, соответствующей $\omega=0$: $\mu = -\frac{b_1}{d_2}$.

$\nu = \frac{a_3}{d_2}$. Всего возможно 12 вариантов расположения особой прямой

и положения на ней указанной точки.

Наконец, комбинируя кривые $\nu = \nu(\mu)$ рис. 3 с возможными вариан-

тами расположения особой прямой $a_4\mu + b_2\nu + 1 = 0$, получим соответствующие диаграммы D -разбиения.

Так как $\mu > 0, \nu > 0$, то интерес представляет лишь картина D -разбиения первого квадранта плоскости μ, ν . В этом квадранте будет 29 различных вариантов диаграмм (рис. 4). Отметим, что часть диаграмм рис. 4 будут топологически эквивалентными (3,5; 1,8; 9,14; 6,23; 10,24; 15,25; 18,26 и др.).

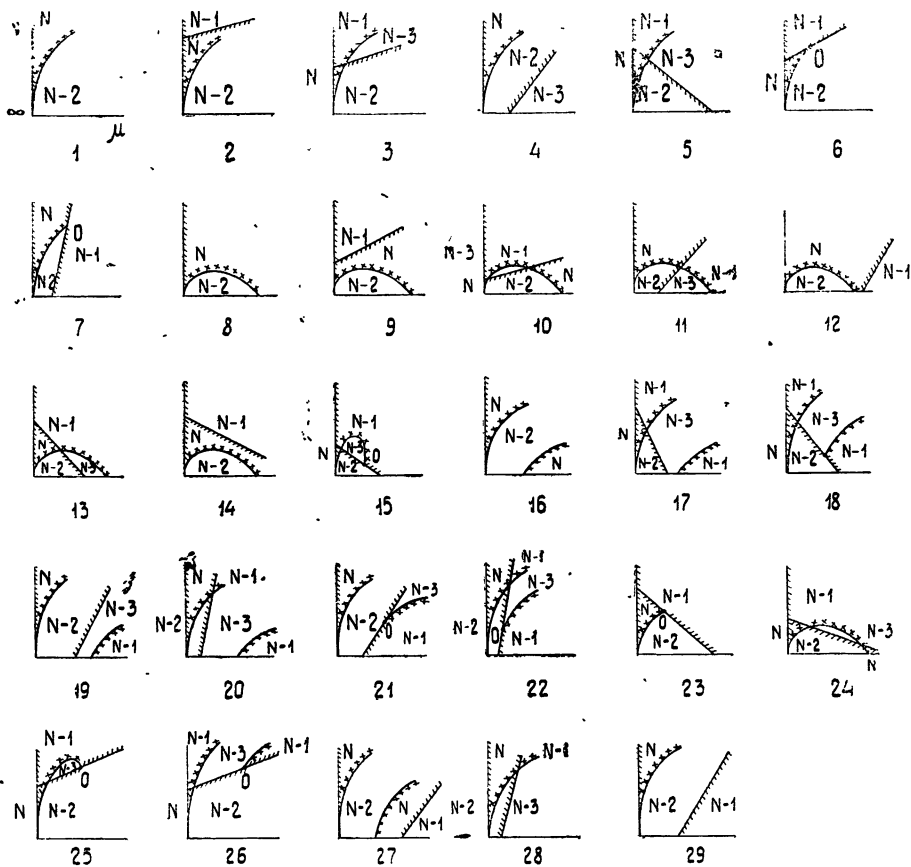


Рис. 4.

Соответствие между диаграммами рис. 4 и различными значениями коэффициентов характеристического уравнения можно установить с помощью таблицы

Таблица

Случай I (IIIa)	№ варианта рис. 4	Случай (IIIб)	№ варианта рис. 4	Случай II (IV)	№ варианта рис. 4
1-1'	8	1-1'	1, 8, 16	1-1'	8, 1
1-3'	12	1-3'	4, 11, 12, 19, 20, 27, 28	1-2'	2, 3, 9, 10
1-4'	13, 14	1-4'	5, 13, 14, 17, 24	1-4'	5, 13, 14, 24
2-6'	6, 25	2-6'	26	2-5'	1
2-7'	7	2-7'	21, 22	2-6'	2, 3
2-8'	15, 23	2-8'	18	2-7'	29

Область N и в данном случае является областью устойчивости. Окончательные диаграммы D -разбиения получим, построив в первом квадранте ($\mu > 0$, $\nu > 0$) параболу $\mu = G\nu^2$.

в) Изгибно-элеронный флаттер. Характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$\mu(p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p) + \nu(p^2 + b_1 p + b_2) + 1 = 0. \quad (7)$$

Анализ устойчивости может быть проведен аналогично предыдущему. По сравнению с анализом крутильно-элеронного флаттера этот анализ будет проще, так как $a_4 = 0$ и $b_2 > 0$.

Попутно отметим, что если система имеет три степени свободы при условии, что один из коэффициентов жесткости значительно больше двух других (например, $k \gg h$, $k \gg k_3$), то характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$\omega(B_0 p^6 + B_1 p^5 + \dots) + \mu(p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) + \nu(p^2 + b_1 p + b_2) + 1 = 0,$$

где ω очень мало, так как пропорционально (в нашем случае) $1/k$. Система устойчива в малом, если коэффициенты вырожденного характеристического уравнения удовлетворяют уравнениям устойчивости (при $\omega \rightarrow 0$) и если [6] $B_1/B_0 > a_1$.

2. Сложнее обстоит дело, если аэродинамические силы подсчитаны по нестационарной теории. В этом случае ограничимся для простоты рассмотрением чисто-крутильных движений. Вводя безразмерное время $\tau = \frac{2V}{c} t$, запишем уравнение задачи в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{4V^2}{c^2} I_\tau \Theta'' + h\theta = \pi \rho c^2 V^2 \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) \int_0^\infty \Phi(\tau - \tau_0) \left[\Theta'(\tau_0) + \left(\frac{3}{2} - 2x_0 \right) \times \right. \\ \left. \times \Theta''(\tau_0) \right] d\tau_0 - \pi \rho c^2 V^2 \left[\left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{32} \right] \Theta'' - \frac{\pi \rho c^2 V^2}{2} \left(\frac{3}{4} - x_0 \right) \Theta', \end{aligned} \quad (8)$$

где штрихом обозначены производные по τ . Здесь функция $\Phi(\tau)$ под знаком интеграла — функция Вагнера. Применим к уравнению (8) преобразование Лапласа. Используя правило свертки, получим (начальные условия считаем нулевыми)

$$E(s) L\{\Theta\} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} E(s) = \mu_1 r_\theta^2 + \frac{4h}{\pi \rho c^2 V^2} \frac{1}{s^2} + \left(2x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 + \\ + \left(\frac{3}{2} - 2x_0 \right) \frac{1}{s} + \frac{1}{8} - \left(2x_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{2C(-is)}{s^2} \left[1 + \left(\frac{3}{2} - 2x_0 \right) s \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа, $L\{\Phi\} = \int_0^\infty \Phi(\tau) d^{-s\tau} d\tau = \frac{C(-is)}{s}$, $C(k)$ — функция Теодорсена, $\mu_1 = \frac{4m}{\pi \rho c^2}$, $I_\tau = \frac{m c^2}{4} r_\theta^2$.

Обозначим $w \equiv \frac{4h}{\pi r_0^2 V^2}$ и построим D -разбиение плоскости параметра w , считая его временно комплексным. Тем самым, вопрос об устойчивости системы, т. е. вопрос об асимптотическом поведении функции $\Theta(t)$ при $t \rightarrow \infty$, решается путем исследования ее изображения [7].

Из (10) имеем

$$w + \left[\mu_1 r_0^2 + \left(2x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \right] s^2 + \left(\frac{3}{2} - 2x_0 \right) s - (4x_0 - 1) C(-is) \left[1 + \left(\frac{3}{2} - 2x_0 \right) s \right] = 0. \quad (11)$$

Полагая $s = ik$ ($k \equiv \frac{\omega c}{2V}$) и $C(k) = F(k) + iG(k)$, получим

$$\operatorname{Re} w = ak^2 + bF(k) - bckG(k),$$

$$\operatorname{Im} w = -ck + bG(k) + bckF(k) \quad (-\infty \leq k \leq +\infty),$$

где $a = \mu_1 r_0^2 + (2x_0 - 1)^2 + \frac{1}{8}$, $b = 4x_0 - 1$, $c = \frac{3}{2} - 2x_0$.

Учитывая, что $a > 0$, $c = 1 - \frac{b}{2}$ и что $C(-k) = F - iG$, ($F(k) > 0$, $G(k) < 0$), получим, зная численные значения функций $F(k)$ и $G(k)$, следующие диаграммы D -разбиения (рис. 5)*. При $b < 0$ ($x_0 < 1/4$) и очень

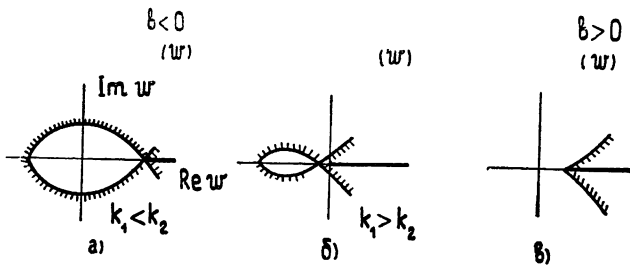


Рис. 5.

больших a ($a > a_{кр}$) возможен флаттер (при $x_0 = 0$, $a_{кр} \approx 575$), если $a < a_{кр}$, то флаттера нет, при $b > 0$ возможна дивергенция. Необходимо отметить следующее. Функция Теодорсена $C(k)$ определена на границе области устойчивости, когда система совершает гармонические колебания, и в области неустойчивости; она не определена в области устойчивости (где $C(k)$ представляет собою отношение двух расходящихся интегралов [8]). Поэтому использовать полученные диаграммы D -разбиения для исследования поведения системы в области устойчивости (например, для определения степени устойчивости) нельзя. Однако сами кривые D -разбиения (представляющие собою отображение мнимой оси плоскости корней на плоскость комплексного параметра w) не зависят от неопределенности $C(k)$ в области устойчивости.

Отметим, что когда система находится на границе устойчивости и совершает гармонические колебания, то в полученных диаграммах

* Здесь k_1 — положительный корень уравнения $\operatorname{Re} w = 0$, k_2 — положительный корень уравнения $\operatorname{Im} w = 0$; $a_{кр}$ определяется из уравнения $\operatorname{Re} w(k_2) = 0$.

D -разбиения легко учесть конструктивное демпфирование (в форме, принятой в теории флаттера). Для этого достаточно в выражение ω вместо h ввести $h(1 + ig)$ и считать в окончательном результате ω комплексным.

Возможность флаттера в одной степени свободы при условии, что ось кручения лежит от передней кромки на расстоянии, меньшем четверти хорды и малых частот, была отмечена еще Карманом и Бюргерсом [9], стр. 342) и проанализирована в работе [10]. Здесь этот результат (обычно опускающийся) получен другим путем, причем дополнительно выяснено влияние параметра a .

В заключение отметим, что аналогичное исследование показывает, что чисто-изгибный флаттер невозможен.

Приложение

I) Условие $\frac{a_1}{b_1} > 1$ имеет вид

$$\frac{\left[\chi^2 + \left(\sigma + x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] (\chi^2 + \sigma^2 + \alpha)}{\left[\left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 + \alpha \right] \chi^2} > 1,$$

$$\text{откуда всегда } \chi^2(\chi^2 + \sigma^2) + (\alpha + \sigma^2) \left(\sigma + x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 + \chi^2 \left[\left(\sigma + x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] > 0.$$

$$\text{II. } f_1 = f_2 + \pi \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2, \quad f_2 = \pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) H + J - \Omega_2,$$

$$f_3 = f_4 - \pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right), \quad f_4 = \pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) G + I - \Omega_1,$$

$$f_5 = \pi \Omega_4 \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 + \Omega_2 \left[\pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) H + J \right],$$

$$f_6 = \pi \left(x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \Omega_3 - \pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) \Omega_4 + \Omega_1 \left[\pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) H + J \right] + \Omega_2 \left[\pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) G + I \right],$$

$$f_7 = -\pi \Omega_3 \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) + \Omega_1 \left[\pi \left(x_0 - \frac{1}{4} \right) G + I \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Гроссман, М. В. Келдыш, Я. М. Пархомовский, Тр. ЦАГИ, № 337, М., 1937.
2. Я. Ц. Фын, Введение в теорию аэроупругости, М., 1959.
3. T. Theodorsen. General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. N. A. C. A. Rep, № 496 (1935).
4. I. A. Dugundji, J. Aeronaut, Sci. 19, Reader Forum, 422 (1952).
5. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, изд. ЛКВВИА, 1949.
6. М. В. Мееров, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.

7. Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, изд. Наука, М., 1965.
8. Р. Л. Бисплингофф, Х. Эшли, Р. Л. Халфман, Аэроупругость, ИЛ, М., 1958.
9. Аэродинамика, под ред. В. Ф. Дюренда, т. II, Оборонгиз, М., 1939.
10. Г. В. Аронович, Ученые записки ГГУ, вып. 16, Горький, 1950, стр. 37.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
5 июля 1971 г.

ON STABILITY OF THIN WING MODEL WITH ONE AND TWO FREEDOM DEGREES

G. V. Aronovich, P. L. Zhiron

Stability of a thin wing model as a discrete system with one and two freedom degrees in the perfect incompressible liquid flow is considered using the D -decomposition method. The cases of a flexure-torsion flutter and an aileron flutter in torsion under forces calculated by the quasi-stationary theory and the case of a purely torsion flutter under forces calculated by the nonstationary theory are studied.
