

УДК 62—504

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. В. Шильман

Рассматриваются нелинейные импульсные системы, в которых нелинейное звено и импульсный элемент могут быть разделены. Выводятся точные уравнения для определения периодических режимов и анализа их устойчивости. Изучаются при этом резонансные и нерезонансные случаи. Дается приближенный способ нахождения периодических режимов, обобщающий дискретный аналог метода гармонического баланса.

В работе рассматриваются нелинейные импульсные системы со схемой, изображенной на рис. 1. На схеме НЭ—нелинейный элемент, линей-

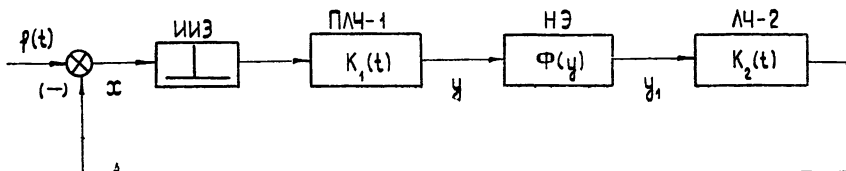


Рис. 1.

ная часть разделена идеальным импульсным элементом ИИЭ на две независимые стационарные линейные части ПЛЧ-1 и ЛЧ-2.

Известен целый ряд методов исследования периодических режимов нелинейных импульсных систем (см., например [1—5]). Однако в большинстве работ рассматриваются системы, которые могут быть приведены к импульсной системе, в ней ИЭ и НЭ непосредственно следуют друг за другом. Этот факт существенно используется в большинстве известных методов. В данной работе разработан новый точный метод исследования динамики подобных систем, не связанный с указанным условием и применимый к системе со схемой, изображенной на рис. 1. В работе выводятся точные уравнения для определения периодических режимов в резонансных и нерезонансных случаях. Дается приближенный метод их решения, обобщающий дискретный аналог метода гармонического баланса в форме Я. З. Цыпкина [2]. Излагается точный метод анализа устойчивости периодических режимов «в малом».

1. ТОЧНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

А. Нерезонансный случай. Пусть входное воздействие $f(t)$ будет периодическим с периодом $T = NT_0$, где N —натуральное число, T_0 —период повторения импульсного элемента. Будем искать периодический режим системы периода T . В случае разрывных $\Phi(y)$ будем рассматривать только режимы без скользящих движений.

Заменим ИИЭ с периодом повторения T_0 эквивалентным ему параллельным соединением N несинфазных ИИЭ с периодом повторения T

и с взаимным смещением фазы их работы на T_0 . Такое преобразование схемы позволяет использовать z -преобразование [6] переменных в виде

$$X^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + \varepsilon) z^{-n},$$

$$Y^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT + \varepsilon) z^{-n},$$

$$Y_1^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y_1(nT + \varepsilon) z^{-n}.$$

С помощью указанного z -преобразования уравнения системы в изображениях будут иметь вид [6, 7]

$$Y^*(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_1^*(z, \varepsilon - kT_0) X^*(z, kT_0) + Y_0(z, \varepsilon, B), \quad (1)$$

$$X^*(z, \varepsilon) = - \int_0^T \bar{K}_2^*(z, \varepsilon - \lambda) Y_1(z, \lambda) d\lambda + F^*(z, \varepsilon) + X_0(z, \varepsilon, A). \quad (2)$$

Здесь $F^*(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} f(\varepsilon)$; $X_0(z, \varepsilon, A)$, $Y_0(z, \varepsilon, B)$ — члены, учитывающие начальные условия и поэтому зависящие от семейства неопределенных постоянных $A(A_1, \dots, A_c)$, $B(B_1, \dots, B_d)$,

$$\bar{K}_1^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1(nT + \varepsilon - \lambda) z^{-n} = \begin{cases} \bar{K}_1^*(z, \varepsilon - \lambda) & (\varepsilon > \lambda), \\ z^{-1} K_1^*(z, T + \varepsilon - \lambda) & (\varepsilon \leq \lambda), \end{cases}$$

$$\bar{K}_2^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} k_2(nT + \varepsilon - \lambda) z^{-n} = \begin{cases} K_2^*(z, \varepsilon - \lambda) & (\varepsilon > \lambda), \\ z^{-1} K_2^*(z, T + \varepsilon - \lambda) & (\varepsilon \leq \lambda). \end{cases}$$

Если нелинейное звено следует непосредственно за ИИЭ, то нужно принять, что

$$Y^*(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\varepsilon - kT_0) X^*(z, kT_0), \quad (3)$$

где $\delta(t)$ — обобщенная функция Дирака.

Z -преобразование для периодических функций (с периодом T) $x(t)$, $y(t)$, $y_1(t)$ равны соответственно

$$X^*(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} x(\varepsilon), \quad Y^*(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} y(\varepsilon), \quad Y_1^*(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} y_1(\varepsilon).$$

Такое представление z -преобразования от периодических функций позволяет легко найти уравнения для их определения. Умножим (1) и (2) на z^{-1} и вычислим вычеты в точке $z=1$ от левых и правых частей полученных выражений. При отсутствии резонанса точка $z=1$ не является особой для функций $K_1^*(z, \varepsilon)$, $K_2^*(z, \varepsilon)$ и $Y_0(z, \varepsilon, b)$, $X_0(z, \varepsilon, A)$. В силу этого получаем

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_1^*(1, \varepsilon - kT_0) x(kT_0), \quad (4)$$

$$x(\varepsilon) = - \int_0^T \bar{K}_2^*(1, \varepsilon - \lambda) y_1(\lambda) d\lambda + f(\varepsilon),$$

$$y_1(\lambda) = \Phi [y(\lambda)]. \quad (5)$$

Равенство (4) позволяет выразить $y_1(\lambda)$ через $x(kT_0)$ ($k = 0, \dots, N-1$)

$$y_1(\lambda) = \Phi \left[\sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_1^*(1, \lambda - kT_0) x(kT_0) \right].$$

Подставим $y_1(\lambda)$ в этом виде в (5), а затем, принимая в полученном выражении $\varepsilon = \nu T_0$ ($\nu = 0, 1, \dots, N-1$), найдем систему из N нелинейных алгебраических уравнений относительно $x(\nu T_0)$

$$x(\nu T_0) = - \int_0^T \bar{K}_2^*(1, \nu T_0 - \lambda) \Phi \left[\sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_1^*(1, \lambda - kT_0) x(kT_0) \right] d\lambda +$$

$$+ f(\nu T_0) \quad (6)$$

$$(\nu = 0, 1, \dots, N-1).$$

Система (6) вместе с уравнениями (4) и (5) определяет искомые периодические режимы. В частном случае, когда НЭ следует непосредственно за ИИЭ, получаем

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\varepsilon - kT_0) x(kT_0),$$

$$y_1(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(\varepsilon - kT_0) \Phi [x(kT_0)].$$

Отсюда система (6) имеет вид

$$x(\nu T_0) = - \sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_2^*(1, \nu T_0 - kT_0) \Phi [x(kT_0)] +$$

$$+ f(\nu T_0) \quad (\nu = 0, 1, \dots, N-1). \quad (7)$$

Б. Резонансный случай. В этом случае точка $z = 1$ может быть особой точкой для функций $K_1^*(z, \varepsilon)$, $K_2^*(z, \varepsilon)$ и, соответственно $Y_0(z, \varepsilon, B)$, $X_0(z, \varepsilon, A)$.

Примем, что $z = 1$ является полюсом порядка μ_1 для функций $K_1^*(z, \varepsilon)$, $Y_0(z, \varepsilon, B)$ и порядка μ_2 для функций $K_2^*(z, \varepsilon)$, $X_0(z, \varepsilon, A)$.

Тогда в проколотой окрестности точки $z=1$ $\bar{K}_1^*(z, \varepsilon - \lambda)$ и $\bar{K}_2^*(z, \varepsilon - \lambda)$ можно представить в виде

$$\bar{K}_1^*(z, \varepsilon - \lambda) = \sum_{\gamma=1}^{\mu_1} \frac{D_{1,\gamma}(\varepsilon - \lambda)}{(z-1)^\gamma} + \bar{K}_{1,0}^*(z, \varepsilon - \lambda),$$

$$\bar{K}_2^*(z, \varepsilon - \lambda) = \sum_{\gamma=1}^{\mu_2} \frac{D_{2,\gamma}(\varepsilon - \lambda)}{(z-1)^\gamma} + \bar{K}_{2,0}^*(z, \varepsilon - \lambda).$$

Здесь $\bar{K}_{1,0}^*(z, \varepsilon - \lambda)$, $\bar{K}_{2,0}^*(z, \varepsilon - \lambda)$ голоморфны в точке $z = 1$, причем

$$\bar{K}_{i,0}^*(1, \varepsilon - \lambda) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\mu_i!} \frac{\partial^{\mu_i}}{\partial z^{\mu_i}} [(z-1)^{\mu_i} \bar{K}_i^*(z, \varepsilon - \lambda)] \right\} \quad (i=1, 2). \quad (8)$$

Функции $D_{1,\gamma}(\varepsilon - \lambda)$ и $D_{2,\gamma}(\varepsilon - \lambda)$ можно найти по формулам

$$D_{l,\gamma}(\varepsilon - \lambda) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{(\mu_l - \gamma)!} \frac{\partial^{\mu_l - \gamma}}{\partial z^{\mu_l - \gamma}} [(z - 1)^{\mu_l} \bar{K}_l^*(z, \varepsilon - \lambda)] \right\}. \quad (9)$$

Применим теперь метод получения уравнений для периодического режима, описанный в пункте А. Тогда вместо уравнений (4), (5) получим

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_{1,0}^*(1, \varepsilon - kT_0) x(kT_0) + Y_{0,1}(\varepsilon, B), \quad (10)$$

$$x(\varepsilon) = \int_0^T \bar{K}_{2,0}^*(1, \varepsilon - \lambda) y_1(\lambda) d\lambda + f(\varepsilon) + X_{0,1}(\varepsilon, A),$$

$$y_1(\lambda) = \Phi[y(\lambda)],$$

где

$$Y_{0,1}(\varepsilon, B) = \operatorname{res}_{z=1} [z^{-1} Y_0(z, \varepsilon, B)],$$

$$X_{0,1}(\varepsilon, A) = \operatorname{res}_{z=1} [z^{-1} X_0(z, \varepsilon, A)].$$

Эти уравнения можно использовать для определения периодических режимов точно так же, как и при отсутствии резонанса. Однако здесь возникает дополнительная трудность, связанная с тем, что в (10) входят неопределенные постоянные A_k, B_k . Причем число независимых постоянных будет определяться числом линейно-независимых собственных движений линейных частей с характеристическими показателями p_k , удовлетворяющими условию $z_k = \exp(p_k T) = 1$. Для определения указанных констант можно получить $\mu_1 + \mu_2$ дополнительных соотношений. Будем последовательно умножать левые и правые части уравнений (1) и (2) на $z^{-1}(z - 1)^\gamma$ (для уравнения (1) $\gamma = 1, \dots, \mu_1$, для уравнения (2) $\gamma = 1, \dots, \mu_2$) и вычислять вычеты в точке $z = 1$.

Тогда найдем

$$\sum_{k=0}^{N-1} D_{1,\gamma}(\varepsilon - kT_0) x(kT_0) = Y_{0,\gamma+1}(\varepsilon, B) \quad (\gamma = 1, \dots, \mu_1), \quad (11)$$

$$\int_0^T D_{2,\gamma}(\varepsilon - \lambda) y_1(\lambda) d\lambda = X_{0,\gamma+1}(\varepsilon, A)$$

$$(\gamma = 1, \dots, \mu_2).$$

Здесь

$$Y_{0,\gamma+1}(\varepsilon, B) = \operatorname{res}_{z=1} [z^{-1} (z - 1)^\gamma Y_0(z, \varepsilon, B)],$$

$$X_{0,\gamma+1}(\varepsilon, A) = \operatorname{res}_{z=1} [z^{-1} (z - 1)^\gamma X_0(z, \varepsilon, A)].$$

Заметим, что функции $D_{1,\gamma}(\varepsilon)$ и $Y_{0,\gamma+1}(\varepsilon, A)$ точно так же, как $D_{2,\gamma}(\varepsilon)$ и $X_{0,\gamma+1}(\varepsilon, A)$, представляют собой линейные комбинации одних и тех же собственных составляющих, соответствующих $p_k, \exp(p_k T) = 1$.

В силу этого из (11) нетрудно получить выражения для определения неопределенных констант.

Рассмотрим частный случай. Пусть линейная часть ПЛЧ-1 содержит интегрирующее звено, а ЛЧ-2 не содержит резонансных звеньев. В окрестности $z = 1$ $\bar{K}_1^*(z, \varepsilon - \lambda)$ можно представить в виде

$$\bar{K}_1^*(z, \varepsilon - \lambda) = \bar{K}_{1,0}^*(z, \varepsilon - \lambda) + k \begin{cases} \frac{z}{z-1} & (\varepsilon > \lambda) \\ \frac{1}{z-1} & (\varepsilon < \lambda) \end{cases}$$

Функция $Y_0(z, \varepsilon, B)$ будет также иметь полюс первого порядка в точке $z = 1$, в окрестности последней.

$$Y_0(z, \varepsilon, B) = \frac{z}{z-1} B_1 + \tilde{Y}_0(z, \varepsilon, B),$$

где $\tilde{Y}_0(z, \varepsilon, B)$ — правильная часть разложения Лорана от $z^{-1} Y_0(z, \varepsilon, B)$. Уравнения (10) примут вид

$$y(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} [\bar{K}_{1,0}^*(1, \varepsilon - kT_0) + k1(\varepsilon - \lambda)] x(kT_0) + B_1,$$

$$x(\varepsilon) = - \int_0^T \bar{K}_2^*(1, \varepsilon - \lambda) y_1(\lambda) d\lambda + f(\varepsilon),$$

где $1(\varepsilon)$ — единичная функция.

Дополнительные соотношения (11) сведутся к равенству

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0) = 0. \quad (12)$$

Равенство (12) свидетельствует о симметризирующей роли интегратора в системе. На это свойство интегратора в системе впервые было указано Я. З. Цыпкиным, в работе [5] содержится доказательство для простейшей импульсной системы. Здесь получен тот же результат для системы более общего вида.

2. О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Для решения систем алгебраических уравнений можно использовать различные вычислительные методы. Ясно, однако, что процесс решения существенно осложняется с ростом числа неизвестных и, следовательно, числа уравнений. В связи с этим ниже предлагается способ приближенного решения путем решения меньшего числа уравнений.

Рассмотрим периодическую решетчатую функцию $x(kT_0)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1, \dots$) с периодом $T = NT_0$. Примем, что функция $x(kT_0)$ близка к одной гармонической решетчатой функции с частотой $l \frac{2\pi}{NT_0}$ разложения по гармоникам, т. е.

$$x(kT_0) \approx a_l \cos \left(l \frac{2\pi}{N} k + \varphi \right),$$

где $l < \{N/2\}$.

Как известно [6], комплексная амплитуда соответствующей гармоники $x(kT_0)$ определяется формулой

$$a_l e^{i\varphi} = \frac{2}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} x(\nu T_0) e^{-j \frac{2\pi}{N} l \nu}. \quad (13)$$

Подставим $x(\nu T_0)$ из (6) в (13) и одновременно в аргументе $\Phi(\cdot)$ величины $x(kT_0)$ заменим на приближенные значения $a_l \cos\left(l \frac{2\pi}{N} k + \varphi\right)$.

Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2e^{-i\varphi}}{a_l N} \int_0^T \sum_{\nu=0}^{N-1} \bar{K}_2^*(1, \nu T_0 - \lambda) e^{-j l \frac{2\pi}{N} \nu} \times \\ \times \Phi \left[a_l \sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_1(1, \lambda - kT_0) \cos\left(\frac{2\pi}{N} l k + \varphi\right) \right] d\lambda = \quad (14) \\ = \frac{2}{a_l N} \sum_{\nu=0}^{N-1} f(\nu T_0) e^{-j \left(l \frac{2\pi}{N} \nu + \varphi \right)}. \end{aligned}$$

Это уравнение в комплексной форме содержит два неизвестных a_l и φ .

Изложенный здесь метод по существу является дискретным аналогом метода гармонического баланса.

Покажем теперь, что если НЭ следует за ИИЭ, то при $l=1$ и $f(\varepsilon) \equiv 0$ из (14) можно получить уравнение, полученное иным методом Я. З. Цыпкиным [2]. В этом случае уравнение (14) в силу (7) принимает при $l=1$ вид

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2e^{-i\varphi}}{a_1 N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} \bar{K}_2^*(1, \nu T_0 - kT_0) e^{-j \frac{2\pi}{N} \nu} \times \\ \times \Phi \left[a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} k + \varphi\right) \right] = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Заметим, что заменой переменных можно получить

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{K}_2^*(1, \nu T_0 - kT_0) \Phi \left[a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} k + \varphi\right) \right] = \\ = \sum_{m=1}^N K_2^*(1, mT_0) \Phi \left[a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} (m - \nu) + \varphi\right) \right]. \end{aligned}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{2e^{-i\varphi}}{a_1 N} \sum_{m=1}^N K_2^*(1, mT_0) \sum_{\nu=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} \nu} \Phi \left[a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} (m - \nu) + \varphi\right) \right] = \\ = \sum_{m=1}^N K_2^*(1, mT_0) e^{-j \frac{2\pi}{N} m} C_1, \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \frac{2}{a_1 N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi \left[a_1 \cos \left(k \frac{2\pi}{N} + \varphi \right) \right] e^{-j \left(\frac{2\pi}{N} k + \varphi \right)}.$$

Если ввести $K_{2,N}^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} k_2(nT_0 + \varepsilon) z^{-n}$ ($\varepsilon \in [0, T_0)$), то непосредственной подстановкой можно установить, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N K_2^*(1, mT_0) e^{-j \frac{2\pi}{N} m} &= K_{2,N}^*(e^{-j \frac{2\pi}{NT_0}}, T_0) = \\ &= K_{2,N}^*(e^{-j \frac{2\pi}{NT_0}}, -0). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (15) превращается в следующее:

$$1 + K_{2,N}^*(e^{-j \frac{2\pi}{NT_0}}, -0) C_1 = 0.$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ

Примем сначала, что функция $\Phi(y)$ дифференцируема по y . Пусть, кроме того, вычислена функция $y(\varepsilon)$. Будем исследовать устойчивость найденных периодических решений «в малом». Путем линеаризации эта задача сведется к исследованию устойчивости линейной импульсной системы, содержащей умножитель на периодическую функцию $v(t) = \Phi'_y(y(t))$ (рис. 2).

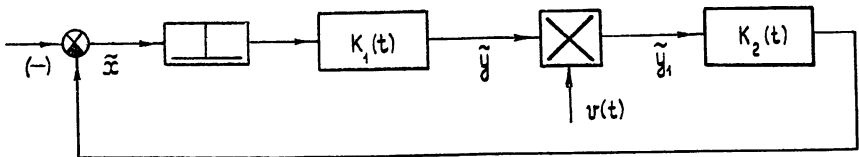


Рис. 2.

Уравнения этой системы в изображениях имеют вид

$$\tilde{Y}^*(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{K}_1^*(z, \varepsilon - kT_0) \tilde{X}^*(z, kT_0) + Y_0(z, \varepsilon), \quad (16)$$

$$\tilde{X}^*(z, \varepsilon) = - \int_0^T \tilde{K}_2^*(z, \varepsilon - \lambda) v(\lambda) \tilde{Y}(z, \lambda) + X_0(z, \varepsilon). \quad (17)$$

Подставив $\tilde{Y}^*(z, \varepsilon)$ из (16) в (17) и положив в полученном уравнении последовательно $\varepsilon = \nu T_0$, $\nu = 0, 1, \dots, N-1$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{X}^*(z, \nu T_0) = & - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}^*(z, kT_0) \int_0^T \tilde{K}_2^*(z, \nu T_0 - \lambda) \times \\ & \times \tilde{K}_1^*(z, \lambda - kT_0) d\lambda + \tilde{\psi}_0(z, \varepsilon) \quad (\nu = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned}$$

Определитель этой системы будет характеристическим многочленом, определяющим устойчивость исследуемых периодических режимов. Более подробно вопрос об исследовании устойчивости систем с умножителями рассмотрен в [7]. Если $\Phi(y)$ — разрывная функция, а исследуемый режим не содержит скользящих движений, то согласно [8], вопрос об устойчивости периодического режима сведется к исследованию также линейной импульсной системы.

Только в этом случае на схеме рис. 2 наряду с умножителем могут быть параллельно соединенные с ним линейные импульсные элементы с частотой повторения, равной или кратной $\omega_0 = 2\pi/T$. Характеристический многочлен в этом случае может быть найден тем же способом [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Кондо, С. Иваи, Дискретные и самонастраивающиеся системы, изд. Наука, М., 1965, стр. 104.
2. Метод Гольфарба в теории регулирования, сб. статей, Госэнергоиздат, М., 1962.
3. Я. З. Цыпкин, Автоматика и телемеханика, № 6, 711 (1961).
4. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1217 (1966).
5. А. С. Алексеев, Т. Б. Макарова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, 1664 (1968).
6. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, ГИФМЛ, М., 1963.
7. А. Н. Алексеева, С. В. Шильман, Автоматика и телемеханика, № 11, 82 (1970).
8. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, ПММ, № 5, 658 (1957).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 июня 1971 г.

INVESTIGATION INTO DYNAMICS OF NONLINEAR PULSE AUTOMATIC SYSTEMS

S. V. Shilman

Nonlinear pulse systems are considered where the nonlinear link and the pulse element may be separated. Precise equations are derived for the determination of periodic modes and their stability analysis. Resonance and nonresonance cases are studied therewith. An approximate method for the periodic modes determination is given that generalizes a discrete analog of the describing function method.