ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 62—50

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МОДУЛЯЦИЕЙ

С. В. Шильман

В работе разрабатывается ряд новых методов и даются обобщения известных способов исследования линейных систем с модуляцией. Все они основаны на использовании z-преобразования и интегральных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Под линейными системами с модуляцией понимаются системы, в которых наряду с линейными стационарными преобразованиями осуществляются умножения сигналов на величины, периодически меняющиеся во времени с периодом, равным T_0 или T_0/k. К этому классу систем относятся линейные параметрические цепи и системы, линейные следящие системы, частично или полностью работающие на переменном токе, многие автоматические системы с амплитудной модуляцией, ряд самонастраивающихся систем и др. Наконец, задача исследования устойчивости в «малом» периодических режимов нелинейных систем во многих случаях сводится к анализу линейных систем с модуляцией.

Хотя перемножения сигналов нередко осуществляются с помощью нелинейных устройств, реализуемые ими операции могут быть выражены линейными соотношениями с периодически меняющимися параметрами. В силу этого рассматриваемые системы описываются линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Известны различные методы исследования систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами: метод возмущений в различных его формах [1—3], метод интегральных уравнений [4, 5], методы Хилла и Айнса [6, 7] и др. Применительно к указанным уравнениям получили широкое развитие операционные методы [7, 8].

В связи с практической важностью в работе изучается специальный класс автоматических систем, названный выше линейными системами с модуляцией. Применительно к ним развивается метод, основанный на совместном использовании производящих функций комплексного переменного (в частности, z-преобразования [9]) и интегральных уравнений. Показывается, что этот подход является достаточно общим, позволяющим рассмотреть различные методы исследования с единой точки зрения, получить ряд обобщений известных методов и разработать новые способы исследования.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С МОДУЛЯЦИЕЙ

Большинство линейных автоматических систем с модуляцией могут быть структурно представлены в виде различных соединений определенного типа цепочек, которые будем называть элементарными. В качестве элементарной цепочки возьмем последовательное соединение умножителя на ограниченную периодическую функцию $v(t)$ и линейного стационарного звена. Дифференциальное уравнение последнего пусть имеет вид

$$b_0 y^{(n)} + \ldots + b_n y = c_0 u^{(m)} + \ldots + c_m u$$
$$(u = v(t)\, x(t),\ m < n).$$

Относительно изображений по Лапласу этому уравнению соответствует следующее равенство:

$$Y(p) = \frac{c_0 p^m + \ldots + c_m}{b_0 p^n + \ldots + b_n} U(p) +$$
$$+ \frac{b_0 a_0 p^{n-1} + \ldots + [b_0 a_{n-1} - c_0 u^{(n-1)}(0) + \ldots]}{b_0 p^n + \ldots + b_n},$$

где

$$y^{(n-1)}(0) = a_{n-1}, \ldots, y(0) = a_0.$$

Разложим дробно-рациональные функции, входящие в выражение для $Y(p)$, на дроби

$$H(p) = \frac{c_0 p^m + \ldots + c_m}{b_0 p^n + \ldots + b_n} = \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{m_\gamma} \frac{c_{\gamma,\,k-1}}{(p - \rho_\gamma)^k},$$

$$\frac{b_0 a_0 p^{n-1} + \ldots + [b_0 a_{n-1} - c_0 u^{(n-1)}(0) + \ldots + b_{n-1} a_0 - c_{n-1} u(0)]}{b_0 p^n + \ldots + b_n} =$$
$$= \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{m_\gamma} \frac{d_{\gamma,\,k-1}}{(p - \rho_\gamma)^k}.$$

Здесь ρ_γ — нули полинома $b_0 p^n + \ldots + b_n$.

Заметим, что некоторые из коэффициентов $c_{\gamma,\,k}$ могут обратиться в нули. Переходя снова к оригиналам, получим уравнение «вход—выход—начальное состояние» цепочки [10]

$$y(t) = y_0(t, a) + \int_0^t h(t - \tau)\, v(\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

где

$$y_0(t, a) = \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{m_\gamma} \frac{d_{\gamma,\,k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{d^{k-1} e^{pt}}{dp^{k-1}} \right)_{p = \rho_\gamma},$$

$$h(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{m_\gamma} \frac{c_{\gamma,\,k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{d^{k-1} e^{pt}}{dp^{k-1}} \right)_{p = \rho_\gamma} & (t > 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

Разобьем интервал интегрирования в (1) на отрезки длины T, где $T = NT_0$, N — фиксированное натуральное число. Далее, положив $t = nT + \varepsilon$, $\tau = mT + \lambda$, где $n, m = 0, 1, \ldots, \varepsilon, \lambda \in [0, T)$, получим

$$y(nT + \varepsilon) = \sum_{m=0}^{n} \int_0^T h(nT - mT + \varepsilon - \lambda) \times$$
$$\times v(\lambda)\, x(mT + \lambda)\, d\lambda + y_0(nT + \varepsilon, a).$$

Подвергая левую и правую части этого соотношения z-преобразованию [9], найдем уравнение для изображений

$$Y^*(z, \varepsilon) = \int_0^T G(z, \varepsilon, \lambda) X^*(z, \lambda) d\lambda + Y_0^*(z, \varepsilon, a), \tag{2}$$

где

$$Y^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT + \varepsilon) z^{-n}, \quad X^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT+\varepsilon) z^{-n},$$

$$Y^*(z, \varepsilon, a) = \sum_{n=0}^{\infty} y_0(nT + \varepsilon, a) z^{-n}.$$

Будем искать выражение для ядра $G(z, \varepsilon, \lambda)$. Для элементарной цепочки

$$G(z, \varepsilon, \lambda) = H^*(z, \varepsilon - \lambda) v(\lambda),$$

где

$$H^*(z, \varepsilon - \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} h(nT + \varepsilon - \lambda) z^{-n} & (\varepsilon > \lambda), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} h(nT + \varepsilon - \lambda) z^{-n} & (\varepsilon < \lambda) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} z \sum\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{m_\gamma} \dfrac{c_{\gamma, k-1}}{(k-1)!} \left(\dfrac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \dfrac{e^{p(\varepsilon-\lambda)}}{z - e^{pT}} \right)_{p=\rho_\gamma} & (\varepsilon > \lambda), \\ \sum\limits_{\gamma} \sum\limits_{k=1}^{m_\gamma} \dfrac{c_{\gamma, k-1}}{(k-1)!} \left(\dfrac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \dfrac{e^{p(T+\varepsilon-\lambda)}}{z - e^{pT}} \right)_{p=\rho_\gamma} & (\varepsilon < \lambda). \end{cases} =$$

$$= h(\varepsilon - \lambda) + \sum_{\gamma} \sum_{k=1}^{m_\gamma} \frac{c_{\gamma, k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \frac{e^{p(T+\varepsilon-\lambda)}}{z - e^{pT}} \right)_{p=\rho_\gamma}.$$

Нетрудно убедиться, что параллельное и последовательное соединение элементарных цепочек можно также описать уравнением (2). При параллельном соединении элементарных цепочек ядра складываются, при последовательном соединении двух элементарных цепочек ядро определяется по формуле

$$G(z, \varepsilon, \lambda) = \int_0^T G_2(z, \varepsilon, \gamma) G_1(z, \gamma, \lambda) d\gamma.$$

Отметим основые свойства ядра $G(z, \varepsilon, \lambda)$:

a) ядро $G(z, \varepsilon, \lambda)$ является дробно-рациональной функцией относительно z,

b) функция $G(z,\varepsilon, \lambda)$ не может иметь полюса́ на плоскости z, отличные от полюсов $Y_0^*(z, \varepsilon, a)$,

c) интегральный оператор с ядром $G(z, \varepsilon, \lambda)$ можно разбить на сумму двух: интегрального оператора Вольтерра и вырожденного интегрального оператора.

Можно проверить, что эти свойства сохраняются при последовательном и параллельном соединениях цепочек.

Таким образом, из предыдущего ясно, что всякую комбинацию из параллельно и последовательно соединенных элементарных цепочек можно описать уравнением (2). Если эта комбинация охвачена обратной связью, то, добавив уравнение «замыкания»

$$X^*(z, \varepsilon) = F^*(z, \varepsilon) - Y^*(z, \varepsilon),$$

получим интегральное уравнение

$$X^*(z, \varepsilon) + \int_0^T G(z, \varepsilon, \lambda) X^*(z, \lambda)\, d\lambda = F^*(z, \varepsilon) - Y_0^*(z, \varepsilon, a). \tag{3}$$

Здесь $F^*(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \varepsilon) z^{-n}$, $f(t)$ — входное воздействие.

2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МОДУЛЯЦИЕЙ

Различные методы анализа линейных систем с модуляцией, на наш взгляд, можно разбить на три группы. К первой группе А отнесем методы, характеризуемые заданием вида «несущих» с последующим анализом «огибающих». В группе В объединим методы, основанные, наоборот, на задании вида «огибающих» и нахождении соответствующих «несущих». Наконец, в группу С включим методы приближенного вычисления $X^*(z, \varepsilon)$ путем преобразований ядра $G(z, \varepsilon, \lambda)$. Все эти методы будем рассматривать с единой точки зрения, именно, как разные способы решения интегрального уравнения (3).

Группа А.

Метод Хилла. Метод Хилла применительно к системам с модуляцией разрабатывался в [11, 12] и был использован в целом ряде исследований (см., например, [13]). Здесь он излагается для более общего класса систем.

Согласно методу Хилла $x(t)$ ищется в виде суммы модулированных гармоник

$$x(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} x_s(t) \exp(-sj\omega_0 t), \qquad \omega_0 = 2\pi/T_0. \tag{4}$$

При вычислениях ограничиваются конечным отрезком ряда (4). Решение в таком виде можно получить с помощью преобразования Лапласа. Для этого воспользуемся связью z-преобразования с преобразованием Лапласа для $x(t)$

$$X^*(e^{pT_0}, \varepsilon) \exp(-p\varepsilon) = \frac{1}{T_0} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X(p + rj\omega_0) \exp(rj\omega_0 \varepsilon). \tag{5}$$

Выражение (5) по существу является разложением $T_0 e^{-p\varepsilon} X^*(e^{pT_0}, \varepsilon)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям от ε. Уравнение (3) позволяет найти систему алгебраических уравнений для неизвестных $X(p + rj\omega_0)$. Для этого, положив $T = T_0 (N = 1)$, умножим левую и правую части (3) на $e^{-p\varepsilon}$. Затем, используя (5), методом разложения ядра по тригонометрическим функциям [14], получим

$$X(p + rj\omega_0) + \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_{r,s}(p) X(p + sj\omega_0) = \Phi(p + rj\omega_0) \tag{6}$$
$$(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Здесь

$$\Phi(p) \div \Phi(t) = f(t) - y_0(t, a),$$

$$A_{rs}(p) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \exp[-p(\varepsilon - \lambda)]\, G(e^{pT_0}, \varepsilon, \lambda) \times$$
$$\times \exp[-(r\varepsilon - s\lambda) j\omega_0]\, d\varepsilon\, d\lambda.$$

Решая систему (6) с помощью бесконечных определителей, найдем

$$X(p) = \frac{1}{D(p)} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} D_s(p) \Phi(p + sj\omega_0), \tag{7}$$

где $D(p)$ — определитель Хилла.

Выражению (7) соответствует оригинал в виде (4), где

$$x_s(t) \div \frac{D_s(p - sj\omega_0)}{D(p)} \Phi(p).$$

Можно указать такое $R > 0$, что при $\mathrm{Re}\, p > \frac{1}{T_0} \ln R$ ядро $e^{-p(\varepsilon-\lambda)} G(e^{pT_0}, \varepsilon, \lambda)$ будет ограничено по модулю. Отсюда с помощью метода Е. Шмидта в теории интегральных уравнений [14] можно доказать абсолютную сходимость ряда (7) в указанной области на плоскости p.

Ограничиваясь в (5) конечным числом членов, получим вместо (6) конечную систему алгебраических уравнений и приближенное решение, которому соответствует конечное число модулированных гармоник.

В целом ряде работ задача исследования систем с модуляцией сводится к нахождению немодулированной составляющей $x_0(t)$, без учета гармоник (см. литературу в [15]). Такой метод может быть обоснован при выполнении определенных условий, налагаемых на динамические характеристики системы и действующих на нее возмущений [12]. Описанная здесь методика позволяет находить $x_0(t)$ при негармонической «несущей» $v(t)$.

Обобщения метода Хилла. Предлагается следующее обобщение метода Хилла.

Возьмем полную систему функций $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$, ортонормированных с весом $\rho(\varepsilon)$. Разложим ядро $\exp[-p(\varepsilon - \lambda)]\, G[\exp(pT_0), \varepsilon, \lambda]$ в обобщенный ряд Фурье по ε и λ вида

$$\exp[-p(\varepsilon - \lambda)]\, G(e^{pT_0}, \varepsilon, \lambda] = \tag{8}$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_{r,k}(p) \varphi_r(\varepsilon) \varphi_k(\lambda).$$

Умножим левую и правую части (3) на $e^{-p\varepsilon}$, положив $T = T_0$. Затем с помощью (8) найдем

$$X_r(p) + \sum_{k=0}^{\infty} B_{r,k}(p) X_k(p) = \Phi_r(p), \tag{9}$$

где

$$X_r(p) = \int\limits_0^{T_0} \exp(-p\varepsilon)\,\rho(\varepsilon)\,X^*(e^{pT_0}, \varepsilon)\,\varphi_r(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Решая систему (9), найдем

$$X_r(p) = \frac{1}{D(p)} \sum_{k=0}^{\infty} H_{r,k}(p)\,\Phi_k(p), \tag{10}$$

$$X^*(e^{pT_0}, \varepsilon) = \exp(p\varepsilon) \sum_{r=0}^{\infty} X_r(p)\,\varphi_r(\varepsilon). \tag{11}$$

Теперь воспользуемся формулой обращения

$$x(nT, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\Gamma} X^*(z, \varepsilon)\,z^{n-1}\,dz.$$

После замены $z = \exp(pT_0)$ эта формула примет вид

$$x(nT, \varepsilon) = \frac{T_0}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\frac{\pi}{T_0}}^{\sigma + j\frac{\pi}{T_0}} X^*[\exp(pT_0), \varepsilon]\,\exp(pT_0 n)\,dp. \tag{12}$$

Подставив в (12) $X^*(s, \varepsilon)$ в виде (11) и осуществив допустимую смену порядка суммирования и интегрирования, получим

$$x(nT, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(nT, \varepsilon)\,\varphi_r(\varepsilon),$$

где

$$x_r(nT, \varepsilon) = \frac{T_0}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\frac{\pi}{T_0}}^{\sigma + j\frac{\pi}{T_0}} X_r(p)\,\exp[p(nT_0 + \varepsilon)]\,dp.$$

С учетом равенства $t = nT_0 + \varepsilon$ найдем

$$x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r(t)\,\varphi_r(t), \tag{13}$$

где

$$x_r(t) = \frac{T_0}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\frac{\pi}{T_0}}^{\sigma + j\frac{\pi}{T_0}} X_r(p)\,e^{pt}\,dp,$$

$\varphi_r(t)$ есть периодическое продолжение функции $\varphi_r(\varepsilon)$ на полуось $t > 0$.

Формула (13) дает представление решения в виде ряда модулированных сигналов, причем роль несущих выполняют функции $\varphi_r(t)$. Вычисление $x_r(t)$ при $\sigma = 0$ удобно осуществить, используя частотные методы.

Сведение к физически реализуемой импульсной системе первого рода. Один из методов, применяемых для исследования систем с модуляцией, заключается в приближенном сведении последней к некоторой физически реализуемой импульсной системе первого рода. Некоторые способы получения эквивалентной импульсной системы даны в [16–18]. Здесь излагается иной подход к этой задаче.

Аппроксимируем $x(t)$ на интервале $[nT_0, (n+1)T_0)$ прямоугольными импульсами постоянной амплитуды. Такая аппроксимация эквивалентна искусственному введению в систему нескольких несинфазных импульсных элементов с периодом T_0. Тогда

$$X^*(z, \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\nu} X^*(z, \gamma_k)\,[1(\varepsilon - \gamma_k) - 1(\varepsilon - \gamma_{k+1})], \tag{14}$$

где $1(\varepsilon)$ — единичная функция.

Подставив выражение (14) в (3) под знак интеграла, придем к равенству

$$X^*(z, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{\nu} \int\limits_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} G(z, \varepsilon, \lambda)\, d\lambda\, X^*(z, \gamma_k) + \Phi(z, \varepsilon). \tag{15}$$

В частности, полагая $\varepsilon = \gamma_0, \gamma_1 \ldots, \gamma_\nu$, получим систему алгебраических уравнений относительно $X^*(z, \gamma_k)$ $(k=0,1,\ldots,\nu)$. Решив эту систему, можно найти $X^*(z, \varepsilon)$ либо интерполированием, либо подстановкой в (15).

Точность этого метода может быть повышена за счет введения импульсов более сложной формы.

Общий случай сведения к импульсной системе первого рода. Выполнение условия физической реализуемости эквивалентной системы не является необходимым при ее использовании для аналитических расчетов. Если отказаться от этого условия, то можно построить динамически более точные методы исследования. В этой постановке задача получения эквивалентной импульсной системы первого рода сводится к линейной интерполяции непрерывной функции, заданной на отрезке $[nT_0, (n+1)T_0)$, по дискретным ее значениям на этом же интервале. Существует много способов такой интерполяции. Любой из них позволяет получить приближенное выражение вида

$$x(nT + \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\nu} \varphi_k(\varepsilon)\, x(nT + \gamma_k).$$

Для изображений отсюда получаем

$$X^*(z, \varepsilon) \approx \sum_{k=0}^{\nu} \varphi_k(\varepsilon)\, X^*(z, \gamma_k).$$

Далее, повторяя выкладки предыдущего пункта, придем к системе алгебраических уравнений. Однако, в данном случае эквивалентная импульсная система может не удовлетворять условию физической реализуемости.

Заметим, что при применении изложенных методов, вычисление функциональных определителей можно заменить вычислением числовых, используя разложение на дроби.

Группа В.

При исследовании вынужденных движений систем с модуляцией, как правило, известен вид «огибающих» вынужденной составляющей. Проблема в этом случае сводится к нахождению «несущих». Эта задача решалась в [19] для гармонической «огибающей», в [20, 21] для ее решения привлекались интегральные уравнения.

Этот последний подход развивается в данной работе.

Пусть $f(t) = e^{\mu t}\chi(t)$, где $\chi(t+T) = \chi(t)$, тогда $F^*(z, \varepsilon) = \dfrac{z}{z - e^{\mu T}}\, e^{\mu\varepsilon}\chi(\varepsilon)$.

Будем искать частное решение $x_b(t)$ в виде

$$x_b(t) = e^{\mu t}\eta(t),$$

считая, что $\eta(t+T) = \eta(t)$. Очевидно, $X_b^*(z, \varepsilon) = \dfrac{ze^{\mu\varepsilon}}{z-e^{\mu T}}\eta(\varepsilon)$. При этом будем различать два случая: основной, когда $z_\mu = e^{\mu T}$ не является полюсом $G(z, \varepsilon, \lambda)$, и особый, в противном случае.

Основной случай. Подставим $F^*(z,\varepsilon)$ и $X_b^*(z, \varepsilon)$ в уравнение (3) Далее, умножим левую и правую части (3) на $z^{-1}e^{-\mu\varepsilon}$ и вычислим вычеты от обеих частей в точке $z = z_\mu$. Тогда получим

$$\eta(\varepsilon) + \int_0^T G(z_\mu, \varepsilon, \lambda)e^{-\mu(\varepsilon-\lambda)}\eta(\lambda)\,d\lambda = \chi(\varepsilon).$$

Это уравнение определяет «несущую», для его решения можно использовать различные приближенные методы решения интегральных уравнений.

Если $f(t) = t^\nu e^{\mu t}\chi(t)$, то для нахождения «несущей», как показано в [21], потребуется решить систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Особый случай. Пусть $z = z_\mu$ является полюсом $Y_0^*(z, \varepsilon, a)$ порядка l. Тогда из изложенного в разделе 1 следует, что $G(z, \varepsilon, \lambda)$ также будет иметь полюс в точке z_μ порядка не меньшего l.

Представим $G(z, \varepsilon, \lambda)$ и $z^{-1}Y_0^*(z, \varepsilon, a)$ в виде разложений

$$G(z, \varepsilon, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{l}\frac{D_\nu(\varepsilon, \lambda)}{(z-z_\mu)^\nu} + G_0(z, \varepsilon, \lambda), \tag{16}$$

$$z^{-1}Y_0^*(z, \varepsilon, a) = \sum_{\nu=1}^{l}\frac{Y_{0\nu}(\varepsilon, a)}{(z-z_\mu)^\nu} + Y_{00}(z, \varepsilon, a). \tag{17}$$

Здесь $G_0(z, \varepsilon, \lambda)$, $Y_{00}(z, \varepsilon, a)$ регулярны в точке $z = z_\mu$.

Теперь вновь подставив $X_b^*(z, \varepsilon)$ и $F^*(z, \varepsilon)$ в (3), после вычисления вычетов от левой и правой частей, предварительно умноженных на $z^{-1}e^{-\mu\varepsilon}$, получим

$$\eta(\varepsilon) + \int_0^T G_0(z_\mu, r, \lambda)e^{-\mu(\varepsilon-\lambda)}\eta(\lambda)\,d\lambda = \chi(\varepsilon) + Y_{01}(\varepsilon, a)e^{-\mu\varepsilon}. \tag{18}$$

Из полученного уравнения следует, что в особом случае $\eta(\varepsilon)$ зависит от семейства произвольных постоянных. Количество их будет определяться числом линейно-независимых функций, входящих в $Y_{0\nu}(\varepsilon, a)$. Для определения этих постоянных можно получить l дополнительных соотношений. С этой целью левую и правую части (3) будем последовательно умножать на $z^{-1}(z-z_\mu)^m$ $(m = l, \dots, 1)$. Затем, считая что $X^*(z, \varepsilon)$ и $F^*(z, \varepsilon)$ имеют простой полюс в точке $z = z_\mu$ будем вычислять вычеты в этой точке. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^T D_e(\varepsilon, \lambda)e^{\mu\lambda}\eta(\lambda)\,d\lambda = 0,\\ &\int_0^T D_m(\varepsilon, \lambda)e^{\mu\lambda}\eta(\lambda)\,d\lambda = Y_{0,m+1}(\varepsilon, a)\\ &\qquad (m = l-1, \dots, 1). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Слева и справа от соотношений (19) — линейные комбинации одних и тех же функций. Налагая условия на a, всегда можно удовлетворить этим равенствам. Таким образом, дополняя уравнение (18) соотношениями, определяющими постоянные, получаем полную систему уравнений.

Группа методов С.

Приближенное решение уравнения (3) можно получить за счет аппроксимации ядра более простым. Именно так можно трактовать метод, предложенный в [22], который основан на замене периодических коэффициентов кусочно-постоянными. Рассмотрим другой путь преобразования ядра.

В разделе 1 было показано, что интегральный оператор уравнения (3) можно разбить на сумму двух операторов: оператора Вольтерра, не зависящего от z, ядро его обозначим через $h(\varepsilon-\lambda, \lambda)$, и вырожденного оператора с ядром, являющимся дробно-рациональной функцией от z. Если найти резольвенту Вольтерра, то задачу можно свести к решению более простого вырожденного интегрального уравнения второго рода.

Решение последнего, как известно, сводится к решению системы алгебраических уравнений. Отсюда ясно, что решение уравнения (3) связано, в основном, с трудностью вычисления резольвенты Вольтерра для ядра $h(\varepsilon-\lambda, \lambda)$. Можно указать на два приближенных метода определения этой резольвенты.

Первый основан на аппроксимации $h(\varepsilon-\lambda, \lambda)$ другим ядром, зависящим на конечном числе отрезков интервала $[0, T_0)$ только от разности аргументов. Такая аппроксимация позволяет использовать преобразование Лапласа для определения резольвенты [23].

Второй способ хорошо известен как метод последовательных приближений, позволяющий находить резольвенту в виде ряда, сходящегося при всех конечных ε и λ. Однако, нахождение членов второго и более высокого порядка этого ряда связано с трудностью вычисления кратных интегралов. Это ограничивает применение метода. Во многих случаях ядро $h(\varepsilon-\lambda, \lambda)$ можно разбить на сумму двух ядер

$$h(\varepsilon-\lambda, \lambda) = h_1(\varepsilon-\lambda) + h_2(\varepsilon-\lambda, \lambda).$$

Тогда вычисление резольвенты целесообразно осуществить в два этапа. Сначала операционным методом найти резольвенту, соответствующую ядру $h_1(\varepsilon-\lambda)$, а затем применить метод последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, изд. АН БССР, Минск, 1963.
2. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
3. В. Н. Фомин, В. А. Якубович, Методы вычислений, вып. 3, изд. ЛГУ, 76 (1966).
4. М. Г. Крейн, Г. А. Любарский, Изв. АН СССР, серия математическая, **26**, № 4, 549 (1962).
5. Е. Н. Розенвассер, ПММ, **25**, вып. 2, 284 (1961).
6. Р. Л. Костгриф, Тр. 1 Междунар. конгресса международной федерации по автоматическому управлению, 1, изд. АН СССР, М., 1961, стр. 611.
7. К. Г. Валеев, ПММ, **24**, вып. 4, 585, вып. 6, 976 (1960).
8. И. З. Штокало, Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, изд. АН УССР, Киев, 1961.
9. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, ГИФМЛ, М., 1963.
10. Л. Заде, И. Дезоер, Теория линейных систем, изд. Наука, М., 1970.
11. В. А. Тафт, Основы спектральной теории и расчет цепей с переменными параметрами, изд. Наука, М., 1964.
12. С. В. Шильман, Изв высш уч зав. — Радиофизика, **6**, № 1, 179 (1963).

13 К. И. Куракин, Следящие системы малой мощности, изд. Машиностроение, М, 1965.
14. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, ГИТЛ, М.—Л., 1951.
15. К. А. Ивей, Системы автоматического регулирования на несущей переменного тока, изд. Машиностроение, М., 1968.
16. В. И. Гостев, Изв. высш. уч. зав —Электромеханика, № 10, (1964).
17. А. С. Шаталов, в сб. Современные методы проектирования систем автоматического управления, изд. Машиностроение, М, 1967, стр. 295.
18. С. Г. Сапфиров, Некоторые методы расчета следящих систем с двухфазными асинхронными двигателями, диссертация, Горьковский политехнический институт, 1966.
19. А. А. Синицкий, Автоматика и телемеханика, **26**, № 7, 1289 (1965).
20. Е. Н. Розенвассер, Колебания нелинейных систем, изд. Наука, М., 1969.
21. А. Н. Алексеева, С. В. Шильман, Автоматика и телемеханика, № 11, 82 (1970).
22. Тагава Риозабуро, Миура Рионги, Метод исследования систем с обратной связью, содержащих элемент с периодически изменяющимся коэффициентом передачи, Mem. Fac. Engng Hokkaido, May, 1963.
23. П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, Интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1968, стр. 275.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
21 мая 1971 г.

METHODS FOR INVESTIGATION INTO DYNAMICS OF LINEAR AUTOMATIC SYSTEMS WITH MODULATION

S. V. Shilman

A number of new approaches are developed and generalizations of known methods are given for the investigation of linear systems with modulation. All these are based on the use of z-transformation and integral equations.