ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 517.942.82

О ПРИМЕНЕНИИ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В. Н. Смирнова

Метод z-преобразования используется для получения необходимых и достаточных условий устойчивости некоторого класса разностных задач.

В [1] предложен метод исследования устойчивости разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения в обыкновенных и частных производных и сформулированы критерии устойчивости для простейших разностных задач. Ниже полученные результаты обобщаются на более общий случай, когда разностное уравнение относительно функции от двух переменных имеет произвольный порядок по обеим переменным.

Рассмотрим в области $D\{0 \leqslant i \leqslant N,\ 0 \leqslant n \leqslant r\}$ разностное уравнение и краевые условия

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{p} \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha^k(\tau, h)\, u_{i+\alpha}^{n+k} = f_i^n, \\ u_i^n\big|_\Gamma = \varphi_i^n, \quad u_i^n\big|_{\Gamma'} = \varphi_i'^n,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\Gamma = \{i = \overline{0, k},\ \overline{N-l, N}\}$, $\Gamma' = \{n = \overline{0, p-1}\}$, $k + l + 2 = m$ $h = \pi/N$, $\tau = T/r$, $a_\alpha^k(\tau, h)$ — полиномы по h и τ с постоянными коэффициентами.

Найдем коэффициент передачи вычислительного процесса, описываемого уравнениями (1). Применяя к (1) z-преобразование и считая, что

$$\varphi_i^n \div \Phi_i(z), \quad f_i^n \div F_i(z), \quad u_i^n \div v_i(z),$$

получим разностную задачу относительно $v_i(z)$

$$\begin{gathered}v_{i+m}(z)\, b_0(z, \tau, h) + \ldots + v_i(z)\, b_m(z, \tau, h) = Q_i(z), \\ v_i\big|_\Gamma = \Phi_i(z),\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$b_i(z, \tau, h) = \sum_{k=0}^{p} a_i^k(\tau, h)\, z^k,$$

$$Q_i(v) = F_i(z) - \sum_{k=0}^{p} c_i^k(\tau, h, z)\, \varphi_i^{1k}.$$

Общее решение (2) ищется в виде

$$v_i = \sum_{k=1}^{m} c_k \lambda_k^i + g_i,$$

где λ_k — корни характеристического уравнения.

$$\lambda^m b_0(z, \tau, h) + \ldots + b_m(z, \tau, h) = 0,$$

g_i — частное решение (1), определяемое формулой

$$g_i = \sum_{l=0}^{i-1} Q_l \frac{D_i^l}{D^l},$$

где

$$D^l = \begin{vmatrix} \lambda_1^{l+1} & \ldots & \lambda_m^{l+1} \\ \lambda_1^{l+2} & \ldots & \lambda_m^{l+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{l+m} & \ldots & \lambda_m^{l+m} \end{vmatrix}, \qquad D_i^l = \begin{vmatrix} \lambda_1^{l+1} & \ldots & \lambda_m^{l+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{l+m-1} & \ldots & \lambda_m^{l+m-1} \\ \lambda_1^i & \ldots & \lambda_m^i \end{vmatrix}.$$

Находя c_i из краевых условий, для $v_i(z)$ получим

$$v_i(z) = \sum_{\alpha=0,\, N-l}^{k,\, N} \Phi_\alpha \frac{\Delta_\alpha^i}{\Delta} + g_i - \sum_{\alpha=N-l}^{N} g_\alpha \frac{\Delta_\alpha^i}{\Delta}, \tag{3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^k & \ldots & \lambda_m^k \\ \lambda_1^{N-l} & \ldots & \lambda_m^{N-l} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^N & \ldots & \lambda_m^N \end{vmatrix}, \qquad \Delta_\alpha^i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^k & \ldots & \lambda_m^k \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^i & \ldots & \lambda_m^i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^N & \ldots & \lambda_m^N \end{vmatrix},$$

причем Δ_α^i получается из Δ заменой строки с номером j

$$j = \begin{cases} \alpha + 1 & (0 \leqslant \alpha \leqslant k), \\ \alpha - N + l + k + 2 & (N - l \leqslant \alpha \leqslant N), \end{cases}$$

на строку $\{\lambda_1^i, \ldots, \lambda_m^i\}$.

Несколько преобразуем (3)

$$g_i - \sum_{\alpha=N-l}^{N} g_\alpha \frac{\Delta_\alpha^i}{\Delta} = \sum_{s=0}^{i-1} Q_s \frac{D_i^s}{D^s} - \sum_{\alpha=N-l}^{N} \sum_{s=0}^{\alpha-1} Q_s \frac{\Delta_\alpha^i D_\alpha^s}{\Delta D^s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{i-1} Q_s \frac{\Delta D_i^s - \sum\limits_{\alpha=N-l}^{N} D_\alpha^s \Delta_\alpha^i}{\Delta D^s} - \sum_{\alpha=N-l}^{N} \sum_{s=i}^{\alpha-1} Q_s \frac{\Delta_\alpha^i D_\alpha^s}{\Delta D^s}, \tag{4}$$

$$v_i(z) = \sum_{\alpha=0,\, N-l}^{k,\, N} \Phi_\alpha \frac{\Delta_\alpha^i}{\Delta} + \sum_{s=0}^{i-1} Q_s \frac{\Delta D_i^s - \sum\limits_{\alpha=N-l}^{N} D_\alpha^s \Delta_\alpha^i}{\Delta D^s} -$$

$$- \sum_{\alpha=N-l}^{N} \sum_{s=i}^{\alpha-1} \frac{\Delta_\alpha^i D_\alpha^s}{\Delta D^s}.$$

Из (4) следует, что коэффициенты передачи в данном случае представляют собой отношение полиномов по $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и равны [1]

$$K^1_{si} = \frac{\Delta^i_s}{\Delta}, \quad s = \overline{0, k}, \quad \overline{N - l, N},$$

$$K^2_{si} = \begin{cases} \dfrac{\Delta D^s_i - \sum\limits_{\alpha=N-l}^{N} \Delta^i_\alpha D^s_\alpha}{\Delta D^s} & (0 \leqslant s \leqslant i-1), \\ \sum\limits_{\alpha=N-l}^{N} \dfrac{\Delta^i_\alpha D^s_\alpha}{\Delta D^s} & (i \leqslant s \leqslant N-l-1), \\ \sum\limits_{\alpha=s+1}^{N-l} \dfrac{\Delta^i_\alpha D^s_\alpha}{\Delta D^s} & (N-l \leqslant s \leqslant N). \end{cases} \tag{5}$$

Прежде чем устанавливать условия, необходимые и достаточные для устойчивости вычислительных процессов вида (1), покажем, что справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Всякий полюс z_α коэффициента передачи (5) необходимо удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta = 0, \tag{6}$$

$$\lambda^m b_0(z, \tau, h) + \ldots + b_m(z, \tau, h) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Утверждение леммы означает, что коэффициент передачи (5) в плоскости комплексной переменной z никаких полюсов, кроме $z = z_\alpha$, где z_α удовлетворяют (6), (7), иметь не может.

Пусть $\lambda_l = \dfrac{f_l(z, \tau, h)}{g_l(z, \tau, h)}$, где $f_l(z, \tau, h)$ и $g_i(z, \tau, h)$ — ограниченные функции во всей плоскости (z), исключая ∞. Покажем, что любая степень, с которой λ_l входит в числитель, не превышает максимальной степени λ_l в знаменателе, так как в противном случае коэффициент передачи будет иметь полюса, определяемые из уравнения

$$g_l(z, \tau, h) = 0.$$

Рассмотрим

$$K^1_{\alpha i} = \frac{\Delta^i_\alpha}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^i_1 & \ldots & \lambda^i_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^N_1 & \ldots & \lambda^N_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^k_1 & \ldots & \lambda^k_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^N_1 & \ldots & \lambda^N_m \end{vmatrix}}.$$

Из вида $K^1_{\alpha i}$ с очевидностью следует, что максимальная степень, с которой λ_l входит как в числитель, так и в знаменатель, равна N, т. е. утверждение леммы справедливо.

Рассмотрим теперь K^2_{si} при $0 \leqslant s \leqslant i - 1$

$$K_{si}^2=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \lambda_1^{s+2}\ldots\lambda_m^{s+2}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_1^{l}\ldots\lambda_m^{l}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_1\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ \lambda_1^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}-\sum\limits_{\alpha=N-l}^{N}\begin{vmatrix}\lambda_1^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_1^{s+m-1}\ldots\lambda_m^{s+m-1}\\ \lambda_1^{\alpha}\ldots\lambda_m^{\alpha}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \cdots\\ \lambda_1^{l}\ldots\lambda_m^{l}\\ \lambda_1^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_1^{s+m}\ldots\lambda_m^{s+m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_1\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ \lambda_1^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}}.$$

Прежде всего, очевидно, что корни уравнения $D^s=0$ не являются полюсами, так как при этих значениях z числитель обращается в нуль.

Пусть A_1 — коэффициент в числителе K_{si}^2 при λ_1^i

$$A_1=(-1)^{m+1}\begin{vmatrix}\lambda_2^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \lambda_2^{s+2}\ldots\lambda_m^{s+2}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_2^{s+m-1}\ldots\lambda_m^{s+m-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_1\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ \lambda_1^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}-$$

$$-\sum_{\alpha=N-l}^{N}(1)^{\alpha+k+l-N+1}\begin{vmatrix}\lambda_1^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \lambda_1^{s+2}\ldots\lambda_m^{s+2}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_1^{\alpha}\ldots\lambda_m^{\alpha}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_2\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ \lambda_2^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{m+1}\begin{vmatrix}\lambda_2^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \lambda_2^{s+2}\ldots\lambda_m^{s+2}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_2^{s+m-1}\ldots\lambda_m^{s+m-1}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_1\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ 0\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}-$$

$$-\sum_{\alpha=N-l}^{N}(-1)^{\alpha+k+l-N+1}\begin{vmatrix}\lambda_1^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \cdots\cdots\\ \lambda_1^{s+m-1}\ldots\lambda_m^{s+m-1}\\ 0\ldots\lambda_m^{\alpha}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_2\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ \lambda_2^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix}.$$

Из полученного выражения для A_1 следует, что максимальная степень λ_1 в A_1 не превышает $s+m$. Приводя подобные члены в сумме

$$\sum_{\alpha=N-l}^{N}(-1)^{\alpha+k+l-N+1}\begin{vmatrix}\lambda_1^{s+1}\ldots\lambda_m^{s+1}\\ \lambda_1^{s+2}\ldots\lambda_m^{s+2}\\ \cdots\cdots\\ 0\ldots\lambda_m^{\alpha}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1\ldots 1\\ \lambda_2\ldots\lambda_m\\ \cdots\\ \lambda_2^{N}\ldots\lambda_m^{N}\end{vmatrix},$$

можно показать, что все слагаемые, содержащие λ_k $(k>1)$ в степенях, превышающих $N+s+m$, взаимно уничтожаются. Приведенные рассуждения будут справедливы для всех λ_k $(k=\overline{1,m})$, т. е. любая степень, с которой λ_k $(k=\overline{1,m})$ входит в числитель K_{si}^2, не превышает максимальной степени λ_k в знаменателе. В случае, когда $i\leqslant s\leqslant N$, доказательство аналогично приведенному выше.

Лемма 2. Если для некоторого полюса z_α коэффициента передачи (5) справедливо

$$\max_{p_l}|\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_{l+1}}|=|\lambda_1\ldots\lambda_{l+1}|,$$

где $\lambda_1(z_a), \ldots, \lambda_m(z_a)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\Delta = \sum_{p_l} (-1)^{\sum\limits_i p_l} (\lambda_{p_1} \ldots \lambda_{p_{l+1}})^{N-l} \Delta_{p_1, \ldots, p_{l+1}} \overline{\Delta}_{p_1, \ldots, p_{l+1}} = 0, \tag{8}$$

$$\lambda^m b_0(z, \tau, h) + \ldots + b_m(z, \tau, h) = 0, \tag{9}$$

то найдется, по крайней мере, еще один такой набор $\{n_1, \ldots, n_{l+1}\} \in \in (1, \ldots, m\}$, что будет выполняться

$$\left| \frac{\lambda_1 \ldots \lambda_{l+1}}{\lambda_{n_1} \ldots \lambda_{n_{l+1}}} \right| = 1 + \varepsilon(N),$$

где $\varepsilon(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Доказательство. При формулировке леммы использованы обозначения: $\Delta_{p_1, \ldots, p_{l+1}}$ — определитель Вандермонда, составленный из элементов $\lambda_{p_1} \ldots \lambda_{p_{l+1}}$, $\overline{\Delta}_{p_1, \ldots, p_{l+1}}$ — определитель Вандермонда, элементами которого являются λ_i, $i \in \{1, \ldots, m\} \diagdown \{p_1, \ldots, p_{l+1}\}$.

Пусть $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_m|$. Предположим теперь, что лемма не справедлива, т. е. для всех $p_l \in \{1, \ldots, m\}$

$$\left| \frac{\lambda_{p_1} \ldots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \ldots \lambda_{l+1}} \right| \leqslant q < 1.$$

Поделим обе части (8) на $(\lambda_1 \ldots \lambda_{l+1})^{N-l} \Delta_{1, \ldots, l+1} \overline{\Delta}_{1, \ldots, l+1}$

$$1 = \sum_{p_l} (-1)^{\sum\limits_i p_l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \ldots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \ldots \lambda_{l+1}} \right)^{N-l} \frac{\Delta_{p_1, \ldots, p_{l+1}} \overline{\Delta}_{p_1, \ldots, p_{l+1}}}{\Delta_{1, \ldots, l+1} \overline{\Delta}_{1, \ldots, l+1}}. \tag{10}$$

Покажем, что при сделанных предположениях правая часть (10) стремится к 0 при $N \to \infty$. Если $|\lambda_{l+1} - \lambda_i| \geqslant 0(N^{-\alpha})$ при всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, то это очевидно. Предположим теперь, что найдутся такие λ_j, λ_{j+1}, что $\lambda_{j+1} = \lambda_j + \delta(\tau, h)$, где $\delta(\tau, h) \to 0$ при $\tau \to 0$, $h \to 0$. Подставляем $\lambda_{j+1} = \lambda_j + \delta(\tau, h)$ в уравнение (9) и, учитывая только слагаемые, содержащие множителем δ^k $(k = 1, 2)$, получим оценку для δ

$$\delta \simeq \frac{-2 \sum\limits_{k=0}^{m-1} (m-k) \lambda_j^{m-k-1} b_k(z, \tau, h)}{\sum\limits_{k=0}^{m-1} (m-k)(m-k-1) \lambda_j^{m-k-2} b_k(z, \tau, h)}.$$

Отсюда следует, что $\delta = 0(\tau^{k_1} + h^{k_2})$.

Лемма доказана.

Следствие. Из леммы 2 непосредственно следует, что найдутся такие постоянные $m > 0$, $c > 0$, что

$$\left| \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_{l+2}} \right| - 1 \leqslant \left(\frac{n}{\pi} \ln \frac{1}{h} + c \right) h, \tag{11}$$

так как в противном случае все члены в правой части (10) стремятся к 0 при $N \to \infty$.

Теорема. Для того, чтобы вычислительный процесс с коэффициентом передачи (5) был устойчив, достаточно, чтобы полюса коэффициента передачи при всех $0 < \tau \leqslant \tau_0$, $0 < h \leqslant h_0$ удовлетворяли неравенствам и необ-

$$|z_\alpha| \leqslant 1 + \left(\frac{m}{T}\ln\frac{1}{\tau} + c_1\right)\tau, \tag{12}$$

$$||\lambda_i(z_\alpha, \tau, h)| - 1| \leqslant \left(\frac{n}{\pi}\ln\frac{1}{h} + c_2\right)h \qquad (i = l+1, l+2), \tag{13}$$

где $m, n, c_1, c_2 > 0$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — функции z, τ, h, определяемые из характеристического уравнения (9), причем $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_m|$, и необходимо, чтобы выполнялось условие (12).

1. Докажем достаточность условий теоремы

$$u_l^n = \int\limits_\gamma v_l(z)\, z^n\, dz,$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру γ, содержащему внутри себя все полюса $v_l(z)$,

$$v_i(z) = \sum_{j\in\Gamma} K_{jl}^1(z)\,\Phi_j(z) + \sum_{j\in D} K_{jl}^2(z)\,F_j(z) =$$

$$= \sum_{j\in\Gamma} v_{lj}^1(z) + \sum_{j\in D} v_{lj}^2(z).$$

Здесь ради простоты взяты нулевые начальные условия.

Пусть $v_{ij}^k \div u_{ij}^{(k)n}$, тогда

$$u_{ij}^{(1)n} = \int\limits_\gamma K_{ji}^1(z)\,\Phi_j(z)\,dz,$$

$$u_{ij}^{(2)n} = \int\limits_\gamma K_{jl}^2(z)\,F_j(z)\,dz.$$

Оценим $u_{ij}^{(1)n}$. По теореме свертки [2]

$$u_{ij}^{(1)n} = \sum_{k=0}^{n} \varphi_j^k \int\limits_\gamma K_{ji}^1(z)\, z^{n-k}\, dz,$$

где внутри замкнутого контура γ лежат все полюса функции $K_{ji}^1(z)$. Контур интегрирования γ выберем таким образом, чтобы расстояние между любой точкой контура и ближайшим к ней полюсом коэффициента передачи было $\varepsilon = 0(\tau^k)$, $k>0$, (если множество полюсов разбивается на ряд подмножеств, расстояние между ближайшими точками которых больше $\delta = 0(\tau^k)$, то контур интегрирования разбивается на ряд контуров так, чтобы выполнялось условие, указанное выше).

Так как полюса коэффициента передачи удовлетворяют уравнению (9), коэффициенты которого являются рациональными функциями z, τ, h, то на контуре интегрирования

$$\lambda_i(z, \tau, h) = \lambda_i(z_\alpha, \tau, h) + 0(\tau^{r_i}). \tag{14}$$

Выберем k так, чтобы $r_i \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$, $i = \overline{1, m}$ (здесь предположим, что $\tau = \omega h^\alpha$). В этом случае

$$\Delta_{p_1, \ldots, p_{l+1}}\Big|_\gamma = \Delta_{p_1, \ldots, p_{l+1}}(z_\alpha) + 0_1(\tau^{1/\alpha}),$$

$$\overline{\Delta}_{p_1, \ldots, p_{l+1}}\Big|_\gamma = \overline{\Delta}_{p_1, \ldots, p_{l+1}}(z_\alpha) + 0_2(\tau^{1/\alpha}),$$

$$\Delta\big|_{\gamma} = (\lambda_1 \dots \lambda_{l+1})^{N-l} \sum_{p_l} (-1)^{\sum_i p_l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \times$$

$$\times \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}} \overline{\Delta}_{p_1, \dots, p_{l+1}}\Big|_{\gamma} \geqslant (\lambda_1 \dots \lambda_{l+1})^{N-l}\Big|_{\gamma} 0_3(\tau^{1/\alpha}).$$

Перейдем к оценке числителя коэффициента передачи. Пусть $j \leqslant k$

$$\Delta_j^l = \sum_{p_l} (-1)^{\sum_i p_l} (\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}})^{N-l} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{l_j} \lambda_{l_j}^l \Delta_{l_1, \dots, l_{k+1}}^{(j)}\right] = (\lambda_1 \dots \lambda_{l+1})^{N-l} \lambda_{l+2}^l \times$$

$$\times \sum_{p_l} (-1)^{\sum_i p_l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{p+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{p+1}}\right)^{N-l} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}} \left[\sum_{=1}^{k+1} (-1)^{l_j} \left(\frac{\lambda_{l_j}}{\lambda_{l+2}}\right)^l \Delta_{l_1, \dots, pk+1}^{(j)}\right],$$

где $\Delta_{l_1, \dots, l_{k+1}}^{(j)} = \Delta_{l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_{k+1}}$

Покажем, что

$$\left|\sum_{p_l} (-1)^{\sum_i p_l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}} \times \right.$$

$$\left.\times \left[\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{l_j} \left(\frac{\lambda_{l_j}}{\lambda_{l+2}}\right)^l \Delta_{l_1, \dots, l_{k+1}}^{l}\right]\right|_{\gamma} \leqslant A_1. \tag{15}$$

При $l_j \geqslant l+1$ это очевидно. Пусть теперь $l_j < l+1$, для простоты положим $l_j = 1$. В этом случае λ_1 не входит в произведение $\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}$, и, следовательно, в него обязательно должно входить λ_k $(k \geqslant l+2)$.

Тогда

$$\left|\left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{l+2}}\right)^l\right| \leqslant \left|\left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \times \right.$$

$$\left.\times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{l+2}}\right)^N\right| = \left|\left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_2 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{l+2}}\right)^l\right| \leqslant a_1,$$

и следовательно, (15) справедливо.

Пусть теперь $j > k$

$$\Delta_j^l = \sum_{p_l} (-1)^{\sum_i p_l} (\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}})^i \overline{\Delta}_{p_1, \dots, p_{l+1}} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=1}^{l+1} (-1)^{p_j} (\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{j-1}} \lambda_{p_{j+1}} \lambda_{p_{l+1}})^{N-l-i} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}}^{(j)}\right] =$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_{l+1})^i (\lambda_1 \dots \lambda_l)^{N-l-i} \sum_{p_l} (-1)^{\sum_i p_l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^i \times$$

$$\times \overline{\Delta}_{p_1, \dots, p_{l+1}} \sum_{j+1}^{l+1} (-1)^{p_j} \left(\frac{\lambda_{p_1} \lambda_{p_{j-1}} \lambda_{p_{j+1}} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_l}\right)^{N-l-i} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}}^{(j)}$$

на контуре γ, в силу (14) будет выполняться

$$\left|\frac{\lambda_{p_1, \dots, p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right| \leqslant 1 + 0_1(\tau^{1/\alpha}), \left|\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{j-1}} \lambda_{p_{j+1}} \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_l}\right| \leqslant 1 + 0_2(\tau^{1/\alpha})$$

и, следовательно,

$$|\Delta_j^l|_\gamma \leqslant |\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}|_\gamma^{N-l} |\lambda_{l+2}^l|_\gamma A_2.$$

Оценим исходный интеграл. Пусть $j \leqslant k$

$$\left|\int_\gamma K_{jl}^1(z) z^n dz\right| \leqslant \int_\gamma \left|\frac{\Delta_j^l}{\Delta}\right| |z^n| \, dz =$$

$$= \int_\gamma \left\{ |\lambda_{l+2}|^l \left| \sum_{p_l} (-1)^{\Sigma p_l}_{l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \Delta_{p_1, \dots p_{l+1}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left[\sum_{j=1}^{l} (-1)^{l_j} \left(\frac{\lambda_{l_j}}{\lambda_{l+2}}\right)^l \Delta^{(j)}_{l_1, \dots, l_{k+1}}\right]\right|\right\} \times$$

$$\times \left[\left|\sum_{p_l} (-1^{\Sigma p_l}_{l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}} \overline{\Delta}_{p_1, \dots, p_{l+1}}\right|\right]^{-1} \times$$

$$\times |z|^n dz \leqslant A_1 0(\tau^{-1/\alpha}) \int_\gamma |\lambda_{l+2}|^l |z|^n dz \leqslant A_1 0(\tau^{-\left(\frac{1}{\alpha}+m+n\right)}).$$

Пусть теперь $j > k$

$$\left|\int_\gamma K_{jl}^1(z) z^n dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\gamma \left| \frac{\sum\limits_{p_l} (-1)^{\Sigma p_l}_{l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^l \overline{\Delta}_{p_1, \dots, p_{l+1}} \sum\limits_{j=1}^{l+1} (-1)^{p_j}}{\lambda_{l+1}^{N-l-l} \sum\limits_{p_l} (-1)^{\Sigma p_l}_{l} \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_{l+1}}\right)^{N-l} \Delta_{p_1, \dots, p_{l+1}} \overline{\Delta}_{p_1, \dots, p_{l+1}}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\lambda_{p_1} \dots \lambda_{p_{j-1}} \lambda_{p_{j+1}} \dots \lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1 \dots \lambda_l}\right)^{N-l-l} \Delta^{(j)}_{p_1, \dots, p_{l+1}} z^n \right| dz \leqslant$$

$$\leqslant A_2 0(\tau^{-1/\alpha}) \int_\gamma \frac{|z^n|}{|\lambda_{l+1}|^{N-l-l}} dz \leqslant A_2 0(\tau^{-\left(\frac{1}{\alpha}+m+n\right)}).$$

Отсюда следует оценка для $u_{ij}^{(1)n}$

$$|u_{ij}^{(1)n}| \leqslant A \; 0(\tau^{-\left(1+m+n+\frac{1}{\alpha}\right)}).$$

Аналогичным образом получаем оценку для $u_{ij}^{(2)n}$

$$|u_{ij\ldots}^{(2)n}| \leqslant A\cdot 0\left(\tau^{-\left(m+n+\frac{1}{\alpha}\right)}\right).$$

Достаточность условий теоремы доказана.

2. Докажем необходимость условий теоремы. Предположим вначале, что найдется такой полюс z_α, что $|z_\alpha| > 1 + \left(\frac{m}{T}\ln\frac{1}{\tau} + c\right)\tau$ какое бы $m > 0$, $c > 0$ ни взяли.

В этом случае контур интегрирования разбиваем на два контура γ' и ε_α таким образом, чтобы контур ε_α представлял собой окружность радиуса $\varepsilon = 0(\tau^k)$ $(k \geqslant 1)$ с центром в точке z_α, а внутри контура γ' лежали все остальные полюса коэффициента передачи.

Оценим $\int\limits_{\varepsilon_\alpha} \frac{\Delta_j^i}{\Delta} z^n\,dz$ при $i = 1$.

Так как

$$A(z_\alpha, \tau) = \left|\sum_{p_i} (-1)^{\sum\limits_i p_i}\left(\frac{\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1\ldots\lambda_{l+1}}\right)^{N-l}\Delta_{p_1,\ldots,p_{l+1}}\overline{\Delta}_{p_1,\ldots,p_{l+1}}\right| = 0,$$

$$B(z_\alpha, \tau) = \left|\sum_{p_i}(-1)^{\sum\limits_i p_i}\left(\frac{\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1\ldots\lambda_{l+1}}\right)^{N-l}\Delta_{p_1,\ldots,p_{l+1}}\times\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{l_j}\frac{\lambda_{l_j}}{\lambda_{l+2}}\Delta_{l_1,\ldots,l_{k+1}}^{(j)}\right| \geqslant a_1,$$

$$C(z_\alpha, \tau) = \left|\sum_{p_i}(-1)^{\sum\limits_i p_i}\left(\frac{\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1\ldots\lambda_{l+1}}\right)\overline{\Delta}_{p_1,\ldots,p_{l+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{p_j}\left(\frac{\lambda_{p_1}\ldots\lambda_{p_{l+1}}}{\lambda_1\ldots\lambda_l}\right)^{N-l-1}\Delta_{p_1,\ldots,p_{l+1}}^{(j)}\right| \geqslant a_2,$$

то, учитывая, что

$$\lambda_i(z)|_{\varepsilon_\alpha} = \lambda_i(z_\alpha) + 0(\tau^{r_i}) \qquad (r_i \geqslant 1/\alpha),$$

легко получим, что

$$A(z, \tau)|_{\varepsilon_\alpha} \leqslant b_1, \quad B(z, \tau)|_{\varepsilon_\alpha} \geqslant \tilde{a}_1, \quad C(z, \tau)|_{\varepsilon_\alpha} \geqslant \tilde{a}_2.$$

Учитывая эти неравенства, находим

$$\left|\int\limits_{\varepsilon_\alpha}\frac{\Delta_j^1}{\Delta}z^n\,dz\right| \geqslant 0(\tau^{-m}),$$

какое бы $m > 0$ ни взяли.

Следовательно, исходная разностная схема неустойчива.

В качестве примера исследуем устойчивость асимметричной разностной схемы [3]

$$u_i^{n+1} = (\omega+\alpha)^{-1}\left[\alpha u_{i-1}^{n+1} + (1-\alpha)u_{i-1}^n + u_{i+1}^n - (2-\omega-\alpha)u_i^n\right] \tag{16}$$
$$\left(u_0^n = \varphi_1^n,\ u_N^n = \varphi_2^n,\ \omega = h^2/\tau,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\right),$$

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 + \lambda(\omega + \alpha - 2 - z(\omega + \alpha)) + \alpha z + 1 - \alpha = 0. \qquad (17)$$

Полагая $\lambda = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, найдем

$$z = \frac{e^{2i\varphi} + e^{i\varphi}(\omega + \alpha - 2) + (1 - \alpha)}{e^{i\varphi}(\omega + \alpha) - \alpha}. \qquad (18)$$

Уравнение (18) описывает в плоскости (z) замкнутую кривую $\Gamma(\omega, \alpha)$, которая при всех $\omega > 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ целиком лежит в некоторой ограниченной области G.

Покажем теперь, что вне области $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$ при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ $\omega > 0$.

Вначале докажем это утверждение при $\alpha = 1$, $\omega = 1$. Кривая $\Gamma(1, 1)$, уравнение которой запишется в виде

$$z = \frac{e^{i\varphi}}{2 - e^{-i\varphi}},$$

пересекает в плоскости (z) действительную ось только в двух точках: $z = 1$, $z = -1/3$. Следовательно, точка $z=0$ лежит внутри области, которую ограничивает Γ. Из характеристического уравнения (17) следует, что $\lambda_1(z = 0) = \lambda_2$ $(z = 0) = 0$, тогда как в точке $z = 2$, внешней по отношению к Γ, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$. Следовательно, во всех точках z, лежащих внутри замкнутой кривой $\Gamma(1, 1)$, $|\lambda_1(z)| < 1$, $|\lambda_2(z)| < 1$, а вне ее — $|\lambda_1(z)| < 1$, $|\lambda_2(z)| > 1$, так как $|\lambda(z)| = 1$ только на Γ.

Перейдем теперь к случаю, когда $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\omega > 0$ любые. Тогда можно утверждать, что если во всех точках z, лежащих вне ограниченной области G, при некотором $\alpha = \alpha^*$, $\omega = \omega^*$, $|\lambda_1(z)| < 1$, $|\lambda_2(z)| > 1$, то это будет выполняться при всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\omega > 0$. Справедливость этого утверждения следует из того, что $|\lambda(z)| = 1$ только на $\Gamma(\omega, \alpha)$, которые целиком лежат внутри G.

Перейдем теперь к оценке полюсов коэффициента передачи разностной задачи (16).

Если z_α — полюс, то необходимо должно выполняться $|\lambda_1(z_\alpha)| = |\lambda_2(z_\alpha)|$. Следовательно, полюса могут располагаться только внутри области, ограниченной кривой Γ. Поэтому для нахождения условий, при которых разностная схема (16) будет устойчивой, необходимо потребовать, чтобы кривая Γ, описываемая уравнением (18), при всех ω и α целиком лежала внутри единичного круга. Это будет выполняться при $\omega \geqslant 2(1 - \alpha)$.

Рассмотрим разностную схему

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \alpha\left(u_{i-2}^n - 4u_{i-1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i+2}^n\right) = 0 \qquad (19)$$

$$(\alpha = \tau/h^2),$$

аппроксимирующую уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

с точностью $e = 0(h^2)$.

Характеристическое уравнение

$$z - 1 + \lambda^{-2}(\lambda - 1)^4 \alpha = 0 \qquad (20)$$

при $\lambda = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ имеет множество корней

$$z(\varphi) = 1 - 16\,\alpha \sin^2(\varphi/2). \qquad (21)$$

В данном случае кривая Г, описываемая уравнением (21), представляет собой отрезок действительной оси $[1-16\alpha, 1]$, пробегаемый дважды. Подставляя найденные значения $z(\varphi)$ в уравнение (20), найдем, что для $z \in \Gamma$

$$\lambda_1 = 1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$\lambda_2 = e^{i\varphi}, \qquad \lambda_3 = e^{-i\varphi},$$

$$\lambda_4 = 1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Пусть граничные условия имеют вид

$$u_0^n = \varphi_0^n, \quad u_1^n = \varphi_1^n,$$

$$u_{N-1}^n = \varphi_{N-1}^n, \quad u_N^n = \varphi_N^n.$$

В этом случае на множестве полюсов необходимо должно выполняться $|\lambda_2| = |\lambda_3|$. Тогда очевидно, что полюса могут лежать только на Г. Требуя, чтобы $|z|_\Gamma \leqslant 1 + c\tau$, найдем достаточное условие устойчивости $\alpha \leqslant 1/8$.

Рассмотрим теперь случай, когда граничные условия заданы следующим образом

$$u_0^n = \varphi_0^n, \quad u_1^n = \varphi_1^n, \quad u_2^n = \varphi_2^n, \quad u_N^n = \varphi_N^n.$$

В этом случае в силу леммы 2, для полюсов z_α должно выполняться

$$|\lambda_1(z_\alpha)| = |\lambda_2(z_\alpha)|.$$

Но это возможно только при $z \in \Gamma$, так как во всей плоскости z, исключая Г, $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| > 1$, $|\lambda_4| \leqslant |\lambda_3| < 1$. Следовательно, при любых α найдутся полюса z_{α_1} $|z_\alpha| > 1$, т. е. не выполняется необходимое условие устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, В. Н. Смирнова, А. М. Стерлин, Ж. выч. мат. и мат. физики, 8, № 3, 517 (1968).
2. Э. Джури, Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1963.
3. В. К. Саульев, Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, Физматгиз, М., 1960.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию 14 апреля 1971 г.

ON APPLICATION OF z-TRANSFORMATION TO INVESTIGATION OF DIFFERENCE SCHEME STABILITY

V. N. Smirnova

The method of z-transformation is made use of to obtain the necessary and sufficient conditions for stability of some class of difference problems.