УДК 62—505

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПО УПРАВЛЕНИЮ

В. В. Кондратьев, А. П. Млинник

Решение задачи синтеза основано на замене исходного уравнения стационарного объекта с запаздыванием на эквивалентное в смысле совпадения программных оптимальных управлений нестационарным уравнением без запаздывания. Доказана соответствующая лемма. В качестве примера рассмотрена задача синтеза дискретного регулятора, оптимального по числу шагов дискретности.

1. Постановка задачи. Возмущенное движение многомерного объекта подчиняется разностному уравнению

$$x_{k+1} = Ax_k + B_0 u_k + B_1 u_{k-M} \quad (k = 0, 1,\dots, N-1), \tag{1}$$

где x_k, u_k — соответственно n- и m-мерные векторы состояния и управления в момент времени k; A, B_0, B_1 — известные матрицы соответствующих размерностей, причем A — неособенная; M — заданное натуральное число, характеризующее запаздывание управления на M тактов.

Начальное условие для уравнения (1) задается в виде известной последовательности векторов x_0, $u_{-1},\dots, u_{-M}$. Система (1) определена в открытой области и полностью управляема.

Требуется синтезировать регулятор в виде закона управления $u_k = \varphi_k(x_k, u_{k-1},\dots, u_{k-M})$, чтобы перевести систему (1) из произвольного состояния x_0 в состояние $x_N = 0$ за минимальное число шагов дискретности.

2. Решение задачи. Минимально возможное число шагов для систем без запаздывания в соответствии с [1] определяется так

$$N_0 = \left[\frac{n-1}{m}\right] + 1, \tag{2}$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. А когда в уравнении движения присутствует управление с запаздывающим аргументом, число шагов должно быть на M тактов запаздывания больше, т. е.

$$N = N_0 + M. \tag{3}$$

Необходимость рассчитывать регулятор, используя условие (3), а не (2), видна из следующих рассуждений. Принципиально возможно перевести систему (1) в нулевое состояние за N_0 шагов, но в последующий за этим момент времени запаздывающее управление выведет объект из этого состояния. Чтобы исключить это явление, система (1) переводится в нуль только за N шагов, и на интервале $[N-M,\ N-1]$ управления должны быть нулевыми.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее

$$y_{k+1} = Ay_k + C_k u_k \quad (k = 0, 1,\dots, N-1), \tag{4}$$

где $C_k = \begin{cases} B_0 + A^{-M} B_1 & (N-1-M \geqslant k \geqslant 0), \\ B_0 & (N-1 \geqslant k \geqslant N-M), \end{cases}$ а связь векторов состояния нового уравнения и старого задается в виде

$$y_k = x_k + \sum_{i=k}^{k+M-1} A^{k-i-1} B_1 u_{i-M} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1). \tag{5}$$

Имеет место следующая

Лемма. При произвольной стратегии управления $u_k (k=0, 1, \ldots, N-1)$ вектор состояния x_N системы (1) и вектор состояния y_N системы (4) совпадают.

Сформулированная лемма, доказательство которой приведено в приложении, устанавливает эквивалентность систем (1) и (4) в том смысле, что программные оптимальные по быстродействию управления для обеих систем совпадают. На этом основании первоначально поставленную задачу заменим следующей эквивалентной.

Требуется определить закон управления в виде $u_k = \psi_k(y_k)$ для перевода системы (4) из произвольного начального состояния y_0 в состояние равновесия $y_N = 0$ за минимально возможное число шагов и удержания в этом состоянии на интервале $[N, N+M]$ при отсутствии возмущений на объекте.

Для N-го шага вектор состояния системы (4) имеет вид

$$y_N = A^N \left[y_0 + \sum_{i=0}^{N-M-1} A^{-i-1} (B_0 + A^{-M} B_1) u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i \right]. \tag{6}$$

Используя условие $y_N = 0$, а также тот факт, что на интервале $[N-M, N-1]$ управления должны быть нулевыми, можно записать выражение (6) в виде

$$r_0 u_0 + r_1 u_1 + \ldots + r_{N_0-1} u_{N_0-1} = -y_0, \tag{7}$$

где $r_i = A^{-i-1}(B_0 + A^{-M} B_1)$ $(i = 0, 1, \ldots, N_0 - 1)$, N_0 определяется из (2). Выражение (7) можно записать еще короче в виде

$$RU = -y_0, \tag{8}$$

где $R = [r_0, r_1, \ldots, r_{N_0-1}]$ — матрица размерности $(n \times N_0 m)$, а вектор $U = \operatorname{col}[u_0, u_1, \ldots, u_{N_0-1}]$ (col означает столбец). Здесь возможны два случая.

1. $N_0 m = n$ и существует R^{-1}, тогда из (8) однозначно следует решение

$$U = -G y_0, \tag{9}$$

где $G = R^{-1}$. Разобьем матрицу G на подматрицы следующим образом:

$$G = \operatorname{col}[g_1, g_2, \ldots, g_{N_0}],$$

где g_i — подматрицы размера $(m \times n)$.

Если дискретная система (4) полностью управляема, то ранг матрицы R равен порядку системы n [1], поэтому в выражении (9) матрица G существует.

2. $N_0 m > n$, тогда уравнение (8) имеет бесчисленное множество решений и поэтому для однозначности необходимы дополнительные условия. В частности, если $\alpha = N_0 m - n$ свободных координат вектора u положить нулевыми [1] (соответственно α столбца прямоугольной матрицы R также зануляются), то решение получим в виде, аналогичном (9).

Однако такое решение, как можно увидеть из приведенного ниже примера, может оказаться не лучшим в смысле, например, затраты энергии на управление, или качества переходного процесса. Поэтому предлагается искать вектор управления U, удовлетворяющий уравнению (8) и обеспечивающий минимизацию квадратичного функционала

$$I = U^{\mathrm{T}} W U, \tag{10}$$

где W — известная положительно определенная матрица размера $(N_0 m \times N_0 m)$, знак Т означает транспонирование. Используя метод множителей Лагранжа, строим вспомогательный функционал вида

$$I' = U^{\mathrm{T}} M U + 2\lambda^{\mathrm{T}} (RU + y_0), \tag{11}$$

где λ — n-мерный вектор множителей Лагранжа. Дифференцируя (11) по U и приравнивая производную нулю, получим

$$2WU + 2R^{\mathrm{T}}\lambda = 0, \tag{12}$$

откуда определяем

$$U = -W^{-1} R^{\mathrm{T}} \lambda. \tag{13}$$

Подставив (13) в (8), имеем

$$R W^{-1} R^{\mathrm{T}} \lambda = y_0, \tag{14}$$

откуда следует

$$\lambda = (RW^{-1} R^{\mathrm{T}})^{-1} y_0. \tag{15}$$

Подставив (15) в (13), окончательно получим

$$U = -W^{-1} R^{\mathrm{T}} (RW^{-1} R^{\mathrm{T}})^{-1} y_0. \tag{16}$$

Введем обозначение

$$W^{-1} R^{\mathrm{T}} (RW^{-1} R^{\mathrm{T}})^{-1} = Q = \mathrm{col}\,[q_1, q_2, \ldots, q_{N_0}], \tag{17}$$

где q_i — подматрицы размера $(m \times n)$. Тогда решение для 1 и 2 случаев можно записать в единой форме

$$U = -Dy_0, \tag{18}$$

где $D = \begin{cases} G & (N_0 m = n) \\ Q & (N_0 m > n) \end{cases}$, или $D = \mathrm{col}\,[d_1, d_2, \ldots, d_{N_0}]$, причем $d_i = g_i$, если $N_0 m = n$, и $d_i = q_i$, если $N_0 m > n$. От разомкнутого регулятора (18), следуя [2], легко перейти к регулятору замкнутого типа

$$u_k = -d_1 y_k. \tag{19}$$

Учитывая соотношение (5), получим окончательный вид регулятора для дискретной системы (1)

$$u_k = -d_1 \left(x_k + \sum_{i=k}^{k+M-1} A^{k-i-1} B_1 u_{i-M}\right), \tag{20}$$

который переводит систему (1) из произвольного начального состояния в нулевое за минимальное число шагов.

Таким образом, поставленная задача решена.

3. Обобщение результатов. Полученные выше результаты могут быть легко распространены на случай уравнения с несколькими запаздываниями по управлению

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=0}^{l} B_i u_{k-M_i}, \tag{21}$$

где $M_l > M_{l-1} > \ldots > M_1 > M_0 = 0$ — целые числа, характеризующие различные запаздывания; A, B_0, $B_1, \ldots, B_l$ — постоянные матрицы; l — число запаздываний. Начальное условие задано в виде последовательности векторов

$$x_0,\ u_{-1},\ u_{-2}, \ldots,\ u_{-M_l}.$$

Аналогично показывается, что уравнение (21) эквивалентно в указанном выше смысле следующему

$$y_{k+1} = Ay_k + C_k u_k \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{22}$$

где

$$C_k = \begin{cases} B_0 + \sum\limits_{j=1}^{l} A^{-M_j} B_j & (N - M_l - 1 \geqslant k \geqslant 0), \\ B_0 + \sum\limits_{j=1}^{l-1} A^{-M_j} B_j & (N - N_{l-1} - 1 \geqslant k \geqslant N - M_l), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ B_0 + A^{-M_1} B_1 & (N - M_1 - 1 \geqslant k \geqslant N - M_2), \\ B_0 & (N - 1 \geqslant k \geqslant N - M_1). \end{cases} \tag{23}$$

При этом связь между векторами y_k и x_k имеет вид

$$y_k = x_k + \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=k}^{k+M_j-1} A^{k-i-1} B_j u_{i-M_j}, \quad k = 0, 1, \ldots N-1. \tag{24}$$

Минимально возможное число шагов дискретности для системы (21) определяется выражением

$$N = N_0 + M_l. \tag{25}$$

Проделав действия, аналогичные (6)—(19), получим уравнение замкнутого регулятора для уравнения (22)

$$u_k = -d_1 y_k. \tag{26}$$

Отличие только что рассмотренного случая от случая, рассмотренного в разделе 2, состоит здесь в том, что управления принимаются нулевыми на интервале $[N - M_l, N-1]$ и в матрице $R = [r_0 r_1 \ldots r_{N_0-1}]$ подматрицы r_i определяются выражением

$$r_i = A^{-i-1}\left(B_0 + \sum_{j=1}^{l} A^{-M_j} B_j\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, N_0 - 1). \tag{27}$$

Наконец, используя (24) переходим к окончательному виду регулятора, который переводит дискретную систему (21) из произвольного начального состояния в нулевое за минимальное время

$$u_k = -d_1\left(x_k + \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=k}^{k+M_j-1} A^{k-i-1} B_j u_{i-M_j}\right). \tag{28}$$

4. Пример. Рассмотрим управляемый объект, подчиняющийся следующему уравнению

$$x_{k+1} = Ax_k + B_0 u_k + B_1 u_{k-1}, \tag{29}$$

где

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix};\quad B_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix};\quad B_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix};\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix};\quad u_{-1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Требуется построить замкнутый регулятор, который переводит систему (29) в нуль за минимальное время.

В рассматриваемом примере $n=3$, $m=2$, $M=1$, поэтому минимально возможное число интервалов дискретности, рассчитанное по формулам (2) и (3), будет $N=3$, причем $N_0=2$.

Здесь $N_0m>n$, т. е. имеем случай 2. Рассмотрим два варианта решения.

1) $\alpha=N_0m-n=1$. Полагаем последнюю координату вектора U нулевой, соответственно зануляется последний столбец матрицы R, и тогда, обращая матрицу R, получим

$$G=\begin{bmatrix}-1&8&1\\0&0&1\\2&-8&-2\end{bmatrix}.$$

Выделив из полученной матрицы подматрицу $g_1=\begin{bmatrix}-1&8&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, получим следуя (20), уравнение регулятора

$$u_k=-g_1\,(x_k+A^{-1}B_1\,u_{k-1}). \tag{30}$$

2) Рассмотрим решение, которое минимизирует выражение (10). Положив матрицу W единичной и произведя вычисления, получим матрицу

$$Q=\begin{bmatrix}7/17&8/17&-5/17\\-6/17&32/17&45/34\\10/17&-8/17&-12/17\\6/17&-32/17&-11/34\end{bmatrix}.$$

Выделим из нее подматрицу $q_1=\begin{bmatrix}7/17&8/17&-5/17\\-6/17&32/17&45/34\end{bmatrix}$ и получим регулятор в виде (20)

$$u_k=-q_1\,(x_k+A^{-1}B_1\,u_{k-1}). \tag{31}$$

На основании исходных данных по уравнениям (30) и (31) был проведен численный расчет управлений на каждом шаге, по уравнению (29) построен переходный процесс, а по формуле (10) подсчитано зна-

Таблица 1

Номер шага	Характеристики											
	Вариант 1						Вариант 2					
	x_k^1	x_k^2	x_k^3	u_{k-1}^1	u_{k-1}^2	I	x_k^1	x_k^2	x_k^3	u_{k-1}^1	u_{k-1}^2	I
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	−7	2	0	−8	−1	65	0,4	0,15	−1,85	−0,6	−2,85	8,48
2	0	−4	0	8	0	129	−1,85	−0,3	0	0,6	1,85	12,26
3	0	0	0	0	0	129	0	0	0	0	0	12,26

чение I для обоих вариантов. Величину I можно считать характеристикой затрат энергии на управление. Результаты расчетов сведены в табл. 1, из которой видны большие преимущества второго варианта решения как по качеству переходного процесса, так и по затратам энергии на управление.

5. Приложение.

Доказательство леммы. Решим систему (1) для N-го шага относительно x_0

$$x_N = A^N\left(x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i + \sum_{i=0}^{N-1} A^{-i-1} B_1 u_{i-M}\right) =$$

$$= A^N\left(x_0 + \sum_{i=0}^{N-1-M} A^{-i-1} B_0 u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i + \sum_{i=-M}^{N-1-M} A^{-M-i-1} \times\right.$$

$$\left.\times B_1 u_i\right) = A^N\left(x_0 + \sum_{i=0}^{N-1-M} A^{-i-1} B_0 u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i +\right.$$

$$\left.+ \sum_{i=-M}^{-1} A^{-M-i-1} B_1 u_i + \sum_{i=0}^{N-1-M} A^{-M-i-1} B_1 u_i\right).$$

Приведя подобные, получим

$$\begin{gathered} x_N = A^N\left(x_0 + \sum_{i=0}^{M-1} A^{-i-1} B_1 u_{i-M} +\right. \\ \left.+ \sum_{i=0}^{N-1-M} A^{-i-1}(B_0 + A^{-M} B_1) u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i\right). \end{gathered} \tag{П.1}$$

Рассуждая аналогично, можно записать решение системы (1) относительно произвольного x_k

$$\begin{gathered} x_N = A^{N-k}\left[x_k + \sum_{i=k}^{k+M-1} A^{k-i-1} B_1 u_{i-M} +\right. \\ \left.+ \sum_{i=k}^{N-1-M} A^{k-i-1}(B_0 + A^{-M} B_1) u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{k-i-1} B_0 u_i\right]. \end{gathered} \tag{П.2}$$

Запишем решение системы (4) относительно y_0 для N-го шага

$$y_N = A^N\left(y_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{-i-1} C_i u_i\right) =$$

$$= A^N\left[y_0 + \sum_{i=0}^{N-1-M} A^{-i-1}(B_0 + A^{-M} B_1) u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i\right].$$

Заменим y_0 через x_0 по формуле (5), получим

$$\begin{gathered} y_N = A^N\left[x_0 + \sum_{i=0}^{M-1} A^{-i-1} B_1 u_{i-M} +\right. \\ \left.+ \sum_{i=0}^{N-1-M} A^{-i-1}(B_0 + A^{-M} B_1) u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{-i-1} B_0 u_i\right]. \end{gathered} \tag{П.3}$$

Решение системы (4) относительно y_k будет

$$y_N = A^{N-k}\Big[y_k + \sum_{i=k}^{N-1-M} A^{k-i-1}(B_0 + A^{-M}B_1)\,u_i + \sum_{i=N-M}^{N-1} A^{k-i-1} B_0 u_i\Big]. \tag{П.4}$$

Отсюда видно, что при

$$y_k = x_k + \sum_{i=k}^{k+M-1} A^{k-i-1} B_1 u_{i-M}$$

решения (П.1), (П.2) системы (1) совпадают с решением (П.3), (П.4) системы (4), что доказывает лемму.

Таким образом, в работе получены следующие результаты:

1. Сформулированы условия эквивалентной замены стационарного уравнения с запаздываниями по управлению нестационарным уравнением без запаздывания.

2. Решена задача синтеза дискретного регулятора, обеспечивающего переход объекта с запаздыванием из произвольного состояния в нулевое за минимальное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Барковский, В. Н. Захаров, А. С. Шаталов, Методы синтеза систем управления, изд. Машиностроение, М., 1969.
2 Ю. Т. Ту, Современная теория управления, изд. Машиностроение, М., 1971.

Поступила в редакцию
16 августа 1971 г.

SYNTHESIS OF CONTROL OPTIMAL DISCRETE SYSTEM WITH CONTROL DELAY

V. V. Kondratjev, A. P. Mlinnik

The synthesis problem solution is based on the replacement of the delay stationary plant original equation by an equation equivalent to it in terms of coincident program optimal controls of a nonstationary equation without delay. The appropriate lemma is proved. As an example a problem of synthesis of a discrete regulator optimal as to the discreteness step number is considered.