ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 *РАДИОФИЗИКА* *1972*

УДК 62—505

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. В. Кондратьев, А. П. Млинник

Решается задача синтеза оптимального в смысле квадратичного функционала дискретного регулятора для многомерного объекта с запаздыванием как по состоянию, так и по управлению Получен закон оптимального управления в замкнутой форме. Для определения коэффициентов закона управления получены рекуррентные соотношения, легко реализуемые на ЦВМ.

Задача построения дискретного регулятора многомерных объектов описываемых разностными уравнениями вида

$$x_{k+1} = Ax_k + Au_k \qquad (k = 0.\ 1, \ldots), \tag{1}$$

где x_k и u_k — n- и m-мерные векторы, соответственно, состояния и управления в k-й момент времени; A, B — известные матрицы соответствующих размерностей, решена, например, в работе [1]. В ней синтезируется закон управления в виде $u_k = u(x_k)$, осуществляющий перевод системы (1) из произвольного начального состояния x_0 в нулевое и доставляющий минимум квадратичному показателю качества

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_{k+1}^T \Phi\, x_{k+1} + u_k^T \Psi\, u_k\right), \tag{2}$$

где Φ и Ψ — положительно определенные симметричные матрицы. Решение, полученное в [1], приводит к необходимости решать систему нелинейных алгебраических уравнений порядка $n^2/2$, что является весьма трудной задачей. В настоящей работе проводится обобщение описанной выше задачи на случай многомерных объектов с запаздывающими аргументами, причем для определения коэффициентов закона управления предлагается рекуррентная процедура, которая легко реализуется на ЦВМ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект, возмущенное движение которого описывается следующей системой линейных разностных уравнений

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^{L_a} A_i x_{k-i} + \sum_{i=0}^{M_c} B_i u_{k-i} \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где x_k, u_k — n-, m-мерные векторы, соответственно, состояния и управления в k-й момент времени; A_i, B_i — известные постоянные матрицы соответствующих размерностей, причем $A_i \neq 0$ только при $i = 0, L_1, \ldots, L_a$, а $B_i \neq 0$ только при $i = 0, M_1, \ldots, M_c$; L_l, M_l — целые положительные числа, характеризующие время запаздывания, причем справедливо $L_a > L_{a-1} > \ldots > L_1 > L_0 = 0$ и $M_c > M_{c-1} > \ldots > M_1 > M_0 = 0$, a и c определяют количество запаздываний. Для уравнения (3) начальные условия задаются в виде последовательности векторов $x_0, x_{-1},\ldots, x_{-L_a}, u_{-1},\ldots, u_{-M_c}$. Считаем, что система (3) определена в открытой области. Требуется решить две задачи.

Задача 1. Получить закон управления в замкнутом виде $u_k=u_k(x_k, x_{k-1},\ldots, x_{k-L_a}, u_{k-1},\ldots, u_{k-M_c})$, минимизирующий на конечном интервале времени квадратичный показатель качества

$$I_N=\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_{k+1}^T\Phi x_{k+1}+u_k\Psi u_k\right), \tag{4}$$

где Φ и Ψ определены в (2).

Задача 2. Получить закон управления в замкнутой форме, минимизирующий на бесконечном интервале времени показатель качества (2).

2. Решение задачи 1. Введем для обозначения минимума (4) функцию

$$\begin{gathered} f_N\left(x_0, x_{-1},\ldots, x_{-L_a}, u_{-1},\ldots, u_{-M_c}\right)= \\ =\min_{u_0,\ldots,u_{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_{k+1}^T\Phi x_{k+1}+u_k^T\Psi u_k\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Для последних $N-n$ шагов N-шагового процесса можно записать

$$\begin{gathered} f_{N-n}\left(x_n,\ldots, x_{n-L_a}, u_{n-1},\ldots, u_{n-M_c}\right)= \\ =\min_{u_n,\ldots,u_{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_{k+1}^T\Phi x_{k+1}+u_k^T\Psi u_k\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно, что

$$f_0\left(x_N,\ldots,x_{N-L_a}, u_{N-1},\ldots, u_{N-M_c}\right)=0. \tag{7}$$

Следуя принципу оптимальности [2], выражение (6) запишем в виде

$$\begin{gathered} f_{N-n}(\cdot)=\min_{u_n}\left[x_{n+1}^T\Phi x_{n+1}+u_n^T\Psi u_n+\right. \\ \left.+f_{N-n-1}\left(x_{n+1},\ldots, x_{n-L_a+1}, u_n,\ldots, u_{n-M_c+1}\right)\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

Используя (7), для последнего шага запишем

$$\begin{gathered} f_1\left(x_{N-1},\ldots, x_{N-1-L_a}, u_{N-2},\ldots, u_{N-1-M_c}\right)= \\ =\min_{u_{N-1}}\left[x_N^T\Phi x_N+u_{N-1}^T\Psi u_{N-1}\right]. \end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя (3) в правую часть выражения (9) и приведя подобные, получим

$$\begin{gathered} f_1(\cdot)=\min_{u_{N-1}}\left[\sum_{i,j=0}^{L_a}\|x_{N-1-i}\|^2_{P_1(i,j)}+\right. \\ \left.+\sum_{i=0}^{L_a}\sum_{j=0}^{M_c}x_{N-1-i}^T R_1(i,j)u_{N-1-j}+\sum_{i,j=0}^{M_c}\|u_{N-1-i}\|^2_{S_1(i,j)}\right], \end{gathered} \tag{10}$$

где введено обозначение $\|\varphi_i\|^2_S=\varphi_i^T S\varphi_j$, а неизвестные матрицы определяются из следующих соотношений

$$P_1(i,j) = A_i^T \Phi A_j;\ R_1(i,j) = 2A_i^T \Phi B_j;\ S_1(i,j) = B_i^T \Phi B_j + \Psi \delta_i^0 \delta_j^0. \quad (11)$$

Здесь δ_i^0 — символ Кронекера.

Дифференцируя по u_{N-1} функцию внутри квадратных скобок выражения (10) и приравнивая производную нулю, получим оптимальное управление на последнем шаге.

$$u_{N-1}^* = -\frac{1}{2} S_1^{-1}(0,0) \Big[\sum_{i=0}^{L_a} R_1^T(i,0)\, x_{N-1-i} + \sum_{i=1}^{M_c} \tilde{S}_1(0,i)\, u_{N-1-i} \Big]. \quad (12)$$

Здесь $\tilde{S}_1(0,i) = S_1(0,i) + S_1^T(i,0)$, звездочка означает оптимальное управление. Предположим, что выражения (10) и (12) верны для $(N-n-1)$ шага, т. е. можно записать

$$\begin{aligned} f_{N-n-1}(\cdot) = \min_{u_{n+1}} \Big[&\sum_{i,j=0}^{L_a} \|x_{n+1-i}\|^2_{P_{N-n-1}}(i,j) + \\ &+ \sum_{i=0}^{L_a} \sum_{j=0}^{M_c} x_{n+1-i}^T R_{N-n-1}(i,j)\, x_{n+1-i} + \sum_{i,j=0}^{M_c} \|u_{n+1-i}\|^2_{S_{N-n-1}}(i,j) \Big], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}^* = -\frac{1}{2} S_{N-n-1}^{-1}(0,0) \Big[&\sum_{i=0}^{L_a} R_{N-n-1}^T(i,0)\, x_{n+1-i} + \\ &+ \sum_{i=1}^{M_c} \widetilde{S}_{N-n-1}(0,i)\, u_{n+1-i} \Big]. \end{aligned} \quad (14)$$

Докажем, что они верны для $(N-n)$ шага. Подставим выражение (13) в правую часть формулы (8) и, используя (3) и (14) и приведя подобные, получим

$$\begin{aligned} f_{N-n}(\cdot) = \min_{u_n} \Big[&\sum_{i,j=0}^{L_a} \| x_{n-i} \|^2_{P_{N-n}}(i,j) + \\ &+ \sum_{i=0}^{L_a} \sum_{j=0}^{M_c} x_{n-i}^T R_{N-n}(i,j)\, u_{n-i} + \sum_{i,j=0}^{M_c} \| u_{n-i} \|^2_{S_{N-n}(i,j)} \Big], \end{aligned} \quad (15)$$

причем, неизвестные матрицы (15) выражаются через матрицы выражения (13) следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{N-n}(i,j) &= A_i^T \Theta_{N-n-1} A_j + A_i^T W_{N-n-1}(0,j)\,(1-\delta_j^{L_a}) + W_{N-n-1}(i,j) \times \\ &\times (1-\delta_i^{L_a})(1-\delta_j^{L_a}), \\ R_{N-n}(i,j) &= A_i^T \widetilde{\Theta}_{N-n-1} A_j + \widetilde{W}_{N-n-1}(i,0) B_j (1-\delta_i^{L_a}) + \\ &+ A_i^T \Lambda_{N-n-1}(0,j)(1-\delta_j^{M_c}) + \Lambda_{N-n-1}(i,j)(1-\delta_i^{L_a})(1-\delta_j^{M_c}), \\ S_{N-n}(i,j) &= B_i^T \Theta_{N-n-1} B_j + B_i^T \Lambda_{N-n-1}(0,j)(1-\delta_j^{M_c}) + \Gamma_{N-n-1}(i,j) \times \\ &\times (1-\delta_i^{M_c})(1-\delta_j^{M_c}) + \Psi \delta_i^0 \delta_j^0, \\ \Theta_{N-n-1} &= \Phi + P_{N-n-1}(0,0) - \frac{1}{4} R_{N-n-1}(0,0)\, S_{N-n-1}^{-1}(0,0)\, R_{N-n-1}^T(0,0), \end{aligned} \quad (16)$$

$$W_{N-n-1}(i,j) = P_{N-n-1}(i+1, j+1) - \frac{1}{4} R_{N-n-1}(i+1,0) S_{N-n-1}^{-1}(0,0) \times$$
$$\times R_{N-n-1}^{T}(j+1,0), \tag{16}$$
$$\Lambda_{N-n-1}(i,j) = R_{N-n-1}(i+1, j+1) - \frac{1}{2} R_{N-n-1}(i+1,0) S_{N-n-1}^{-1}(0,0) \times$$
$$\times \widetilde{S}_{N-n-1}(0, j+1),$$
$$\Gamma_{N-n-1}(i,j) = S_{N-n-1}(i+1, j+1) - \frac{1}{4} \widetilde{S}_{N-n-1}^{T}(0, i+1) S_{N-n-1}^{-1}(0,0) \times$$
$$\times \widetilde{S}_{N-n-1}(0, j+1)$$
$$(n = N-1, \ldots, 0).$$

Таким образом, методом математической индукции доказано, что функция (8) для произвольного n имеет вид (15), а следовательно, оптимальный регулятор имеет вид для n-го шага

$$u_n^* = -\frac{1}{2} S_{N-n}^{-1}(0,0) \Big[\sum_{i=0}^{L_a} R_{N-n}^{T}(i,0)\, x_{n-i} + \sum_{i=1}^{M_c} \widetilde{S}_{N-n}(0,i)\, u_{n-i} \Big]. \tag{17}$$

Матрицы, входящие в (17), вычисляются на каждом шаге по выражениям (16) с начальным условием (11), т. е. в данном случае имеет место нестационарный регулятор.

3. Решение задачи 2. При $N \to \infty$ основное функциональное уравнение (8) задачи 1 сводится к виду

$$f(\cdot) = \min_{u_n} \left[x_{n+1}^{T} \Phi\, x_{n+1} + u_n^{T} \Psi\, u_n + f\left(x_{n+1}, \ldots, x_{n-L_a+1}, u_n, \ldots, u_{n-M_c+1}\right) \right]. \tag{18}$$

Решая аналогично, получим уравнение (15) в виде

$$f(\cdot) = \min_{u_n} \Big[\sum_{i,\,j=0}^{L_a} \| x_{n-i} \|_{P(i,j)}^2 + \sum_{i=0}^{L_a} \sum_{j=0}^{M_c} x_{n-i}^{T} \times$$
$$\times R(i,j)\, x_{n-i} + \sum_{i,\,j=0}^{M_c} \| u_{n-i} \|_{S(i,j)}^2 \Big], \tag{19}$$

а оптимальное управление на n-м шаге будет иметь вид

$$u_n^* = \frac{1}{2} S^{-1}(0,0) \Big[\sum_{i=0}^{L_a} R^{T}(i,0)\, x_{n-i} + \sum_{i=1}^{M_c} \widetilde{S}(0,i)\, u_{n-i} \Big]. \tag{20}$$

Неизвестные матрицы в выражениях (19) и (20) должны удовлетворять следующей системе нелинейных уравнений

$$P(i,j) = A_i^{T} \Theta A_j + A_i^{T} W(0,j) \left(1 - \delta_j^{L_a}\right) + W(i,j) \left(1 - \delta_i^{L_a}\right)\left(1 - \delta_j^{L_a}\right),$$
$$R(i,j) = A_i^{T} \widetilde{\Theta} B_j + \widetilde{W}(i,0) B_j \left(1 - \delta_i^{L_a}\right) + A_i^{T} \Lambda(0,j) \left(1 - \delta_j^{M_c}\right) +$$
$$+ \Lambda(i,j) \left(1 - \delta_i^{L_a}\right)\left(1 - \delta_j^{M_c}\right),$$

$$S(i, j) = B_i^T \Theta B_j + B_i^T \Lambda(0, j)\left(1 - \delta_j^{M_c}\right) + \Gamma(i, j)\left(1 - \delta_i^{M_c}\right)\left(1 - \delta_j^{M_c}\right) + \Psi \delta_i^0 \delta_j^0.$$

$$\Theta = \Phi + P(0, 0) - \frac{1}{4} R(0, 0) S^{-1}(0, 0) R^T(0, 0),$$

$$W(i, j) = P(i+1, j+1) - \frac{1}{4} R(i+1, 0) S^{-1}(0, 0) R^T(j+1, 0), \tag{21}$$

$$\Lambda(i, j) = R(i+1, j+1) - \frac{1}{2} R(i+1, 0) S^{-1}(0, 0) \tilde{S}(0, j+1),$$

$$\Gamma(i, j) = S(i+1, j+1) - \frac{1}{4} \tilde{S}^T(0, i+1) S^{-1}(0, 0) \tilde{S}(0, j+1).$$

Для решения системы (21) предлагается следующий вычислительный алгоритм. Из сравнения (15) и (19) видно, что матрицы выражения (19) являются пределом, к которому стремятся соответствующие матрицы выражения (15) при $N \to \infty$. Поэтому для решения системы (21), а следовательно, и для определения матриц регулятора (20), будем использовать рекуррентные выражения (16) с начальными условиями (11). Рекуррентная процедура легко реализуется на ЦВМ и с заданной точностью дает коэффициенты стационарного регулятора (20).

Из рассмотренного ниже примера видно, что расчет матриц регулятора (20) по соотношениям (16) быстро сходится с достаточно высокой степенью точности.

4. Пример. Передаточная матрица объекта задана в виде

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{4{,}6\, e^{-0{,}2 s}}{1{,}7 s + 1} & -\dfrac{12{,}4\, e^{-s}}{4{,}8 s + 1} \\ \dfrac{4\, e^{-0{,}2 s}}{1{,}33 s + 1} & \dfrac{40\, e^{-s}}{4 s + 1} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Требуется синтезировать регулятор, доставляющий минимум показателю качества (2), в котором матрицы Φ и Ψ выбираем единичными.

Используя методику, описанную в [1], получим разностное уравнение объекта для случая, когда интервал дискретности равен единице

$$x_{k+1} = A x_k + B_0 u_k + B_1 u_{k-1}, \tag{23}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1{,}367 & -0{,}451 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}564 & 1{,}25 \end{bmatrix}; \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1{,}725 & 0 \\ 0{,}027 & -2{,}331 \\ -1{,}808 & 0 \\ -1{,}16 & 8{,}84 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}262 & 1{,}294 \\ 0 & 0 \\ 0{,}24 & -4{,}164 \end{bmatrix}.$$

Расчет по соотношениям (16) с начальным условием (11) через восемь шагов приводит к следующим результатам (с точностью до 0,0001). Оптимальный регулятор имеет вид

$$u_k = G x_k + Q u_{k-1}, \tag{24}$$

где

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}1995-0{,}4773-0{,}0245 & 0{,}1854 \\ 0{,}0198-0{,}0752 & 0{,}0606-0{,}1257 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0{,}0278 & 0{,}0079 \\ -0{,}0296 & 0{,}04663 \end{bmatrix}.$$

Используя уравнение (23) и полученный регулятор (24), построен переходный процесс для единичных начальных условий, результаты которого для измеряемых координат представлены в табл. 1.

Таблица 1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k^1	1	0,798	0,360	0,153	0,086	0,037	0,021	0,009	0,005	0,002
x_k^3	1	1,211	0,630	0,175	0,156	0,043	0,039	0,011	0,010	0,003
u_{k-1}^1	0	−0,117	−0,483	−0,182	−0,122	−0,046	−0,031	−0,012	−0,008	−0,003
u_{k-1}^2	0	−0,120	−0,023	0,033	0,020	0,020	0,41	0,08	0,004	0,002

Таким образом, в работе получены следующие результаты:

1. Для многомерного объекта с запаздываниями в случае квадратичного критерия качества получен в замкнутой форме закон оптимального управления как функция текущего состояния системы и предыстории по состоянию и управлению. В случае конечного времени регулирования имеет место нестационарный регулятор, а в случае бесконечного интервала — стационарный регулятор.

2. Коэффициенты закона оптимального управления определяются по рекуррентным соотношениям, которые легко реализуются на ЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Д Крутько, Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами, изд. Сов. радио, М, 1967.
2. Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, М, 1960.

Поступила в редакцию
16 августа 1971 г.

OPTIMIZATION OF DELAY MULTIDIMENSIONAL PLANT DISCRETE CONTROL

V. V. Kondratjev, A. P. Mlinnik

A problem of the synthesis of a discrete regulator, optimal in terms of the quadratic functional, for a multidimensional plant with state and control delay is solved. The principle of a closed optimal control is obtained. DC-realizable recurrence relations are obtained for the determination of the control principle coefficients.