

УДК 62—506

## ДИНАМИКА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Н. Н. Леонов

Рассматривается одноканальная экстремальная система с постоянной по величине скоростью поиска. Объект управления имеет аperiodическое звено на выходе. На вход объекта поступает аддитивное возмущение, ограниченное по величине, с ограниченной первой производной. Исследуется устойчивость поиска и характер области стационарных движений системы.

1. Основная задача автоматического оптимизатора—находить и поддерживать экстремальное значение выхода объекта управления при наличии возмущений, приводящих к дрейфу статической характеристики объекта. Исследованию этой задачи посвящено большое количество работ. В одной из них рассматривалась автоколебательная экстремальная система с объектом первого порядка, подверженным воздействию возмущений, изменяющихся с постоянной скоростью [1]. В [1] установлено, что наличие возмущений, изменяющихся с постоянной скоростью, на выходе объекта управления вызывает появление в фазовом пространстве системы области неустойчивости поиска, в которой выход объекта управления неограниченно удаляется от своего экстремального значения с течением времени. Однако дрейф статических характеристик реальных объектов ограничен. Поэтому представляет интерес изучение динамики экстремальных систем с ограниченным дрейфом статической характеристики объекта управления. В настоящей работе эта задача рассматривается для автоколебательной экстремальной системы с объектом первого порядка (рис. 1). Уравнения движения такой системы могут быть записаны следующим образом:

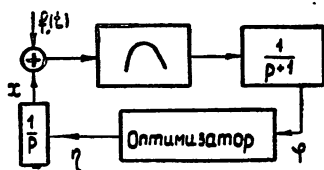


Рис. 1.

$$\dot{\varphi} + \varphi = -[x + f(t)]^2, \quad \dot{x}(t) = \eta(t - \omega), \quad (1)$$

$$\eta = F[\dot{\varphi} + \Delta] \operatorname{sgn} \dot{x},$$

где  $F[\dot{\varphi} + \Delta] = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{\varphi} > -\Delta \\ -1, & \text{если } \dot{\varphi} \leq -\Delta \end{cases}$ ,  $f(t)$  — непрерывная дифференцируемая функция, такая, что  $|f(t)| \leq p$ ,  $|f'(t)| \leq q < 1$ ,  $\Delta$  — параметр, характеризующий величину порога нечувствительности оптимизатора по сигналу  $\varphi$ .

В плоскости  $x \varphi$  статическая характеристика объекта управления представляет собой параболу с вершиной на оси  $x$ , перемещающуюся со временем вдоль оси  $x$ . Введем новую переменную  $u = x + \dot{f}(t)$ . Тогда, в силу условия  $|f'(t)| \leq q < 1$ , получаем, что  $\operatorname{sgn} \dot{x} = \operatorname{sgn} \dot{u}$ , и от системы (1) переходим к системе

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u}(t) = \eta(t - \omega) + f'(t), \quad \eta = F[\dot{\varphi} + \Delta] \operatorname{sgn} \dot{u}. \quad (2)$$

Система (2) описывает автоколебательную экстремальную систему с переменной скоростью поиска. Статическая характеристика объекта управления в плоскости  $u\varphi$  является неподвижной параболой с вершиной в начале координат.

Изучение рассматриваемой системы проводится при  $\omega = 0$ .

Фазовое пространство системы (2) при  $\omega = 0$  для фиксированной функции  $f(t)$  является трехмерным пространством  $\Phi(t, u, \varphi)$ , образованным двумя пространствами  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_{-1}$ , в которых  $\eta = +1$  и  $\eta = -1$  соответственно.

Основной результат работы может быть сформулирован следующим образом:

А. Существует такая область  $G(q)$  пространства  $\Phi$ , что  $(t, u, \varphi) \in G$  при  $t > t_0$ , если  $(t_0, u_0, \varphi_0) \in G$ .

Б. Существует такая область  $G_\varepsilon \supset G$ , что для любой точки  $(t_0, u_0, \varphi_0) \in G_\varepsilon$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\tau(u_0, \varphi_0, \varepsilon) > 0$ , что  $(t, u, \varphi) \in G_\varepsilon$  при  $t > t_0 + \tau$ ,  $G_\varepsilon \rightarrow G$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Перейдем к доказательству указанных утверждений. При этом вместо движения фазовой точки  $(f, u, \varphi)$  в трехмерном пространстве будем рассматривать движение ее проекции в плоскости  $u\varphi$ , вернее, движение точки  $(u, \varphi)$  по двулистной поверхности, образованной двумя плоскостями  $\Pi_{+1}$ ,  $\Pi_{-1}$ , такими, что на  $\Pi_{+1}$  проектируются фазовые траектории с  $\eta = +1$ , а на  $\Pi_{-1}$  — с  $\eta = -1$ . В дальнейшем проекции точки  $(t, u, \varphi)$  и фазовых траекторий на плоскости  $\Pi_{+1}$ ,  $\Pi_{-1}$  будем называть просто фазовой точкой и фазовыми траекториями.

Обозначим через  $A_\Delta$  область значений  $u\varphi$ , для которой  $\varphi \leq \Delta - u^2$ , а через  $B_\Delta$  — область, для которой  $\varphi > \Delta - u^2$ .

2.1. Пусть  $(u_0, \varphi_0) \in B_\Delta$  при  $t = t_0$ . Тогда существует такое  $\tau_1(u_0, \varphi_0) > 0$ , что  $(u, \varphi) \in A_\Delta$  при  $t > t_0 + \tau_1(u_0, \varphi_0)$ .

Действительно, в том случае, когда  $(u_0, \varphi_0) \in B_\Delta$  при  $t = t_0$ , движение рассматриваемой системы в переменных  $x\varphi$  описывается равенствами [2]

$$\dot{x} = x_0, \quad \dot{\varphi} + \varphi = -[x_0 + f(t)]^2, \quad (3)$$

где  $x_0 = u_0 - f(t_0)$ . Соответствующие фазовые траектории в плоском пространстве  $x\varphi$  представляют собой прямые линии, параллельные оси  $\varphi$ . В плоскости  $u\varphi$  движение фазовой точки при  $t > t_0$  описывается в этом случае так:

$$u = x_0 + f(t), \quad \dot{\varphi} + \varphi = -u^2. \quad (4)$$

Из условия  $|f(t)| \leq p$  следует, что  $x_0 - p \leq u(t) \leq x_0 + p$ . А так как  $\varphi < -\Delta$  в области  $B_\Delta$ , то точка  $(u, \varphi)$  попадает, при движении по траектории системы (4), на линию  $\varphi = \Delta - u^2$  за конечный промежуток времени из любой конечной точки области  $B_\Delta$ . Через линию  $\varphi = \Delta - u^2$  фазовая точка переходит из области  $B_\Delta$  в область  $A_\Delta$ .

2.2. Нетрудно проверить, что из области  $A_\Delta$  фазовая точка выйти в процессе движения не может. Следовательно, стационарные движения рассматриваемой системы принадлежат области  $A_\Delta$ .

Для изучения поведения системы в области  $A_\Delta$  полезно ввести некоторые обозначения. Пусть  $\sigma_1 = 1 - q$ ,  $\sigma_2 = 1 + q$ . Наряду с системой (2) рассмотрим две системы:  $S$ , для которой  $|\dot{u}| = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } (u, \varphi) \in A \\ \sigma_2 & \text{при } (u, \varphi) \in B \end{cases}$ , и  $s$ , для которой  $|\dot{u}| = \begin{cases} \sigma_2 & \text{при } (u, \varphi) \in A \\ \sigma_1 & \text{при } (u, \varphi) \in B \end{cases}$ , где  $A, B$  — области  $A_\Delta, B_\Delta$  при

$\Delta=0$ . Обозначим через  $\varphi=\varphi(u, \eta)$  решение системы (2) при фиксированном  $\eta$ , через  $\varphi=\varphi_1(u, \eta)$  — решение системы (2) при  $|u|=\sigma_1$ , через  $\varphi=\varphi_2(u, \eta)$  — решение системы (2) при  $|u|=\sigma_2$ . В этих обозначениях решение системы  $S$  запишется так:  $\varphi_S(u, \eta) = \begin{cases} \varphi_1(u, \eta) & \text{при } (u, \varphi) \in A \\ \varphi_2(u, \eta) & \text{при } (u, \varphi) \in B \end{cases}$ , а решение системы  $s$ :  $\varphi_s(u, \eta) = \begin{cases} \varphi_2(u, \eta) & \text{при } (u, \varphi) \in A \\ \varphi_1(u, \eta) & \text{при } (u, \varphi) \in B \end{cases}$ .

Каждая фазовая траектория системы (2) образована счетным множеством отрезков траекторий листов  $\Pi_{+1}, \Pi_{-1}$ . Пусть в начальный момент движения  $t=t_0$  фазовой точки  $u=u_0, \varphi=\varphi_0, \eta=\eta_1$ . Обозначим отрезок траектории листа  $\Pi_{\eta_1}$ , по которому совершает движение фазовая точка при  $t>t_0$ , через  $\varphi^1(u, \eta_1)$ . Аналогично последующие отрезки траекторий листов  $\Pi_{+1}, \Pi_{-1}$  обозначим через  $\varphi^k(u, \eta_k)$  (очевидно,  $\eta_{k+1}=-\eta_k$ ). Тогда траектория системы (2), выходящая из точки  $(u_0, \varphi_0)$  листа  $\Pi_{\eta_1}$  образована множеством  $\{\varphi^k(u, \eta_k)\} (k=1, 2, \dots)$ . Траектории систем  $S, s$  аналогично образованы множествами  $\{\varphi_S^k(u, \eta_k)\}, \{\varphi_s^k(u, \eta_k)\} (k=1, 2, \dots)$ .

2.3. Имеют место неравенства

$$\varphi_s^k(u, \eta_k) < \varphi^k(u, \eta_k) < \varphi_S^k(u, \eta_k) \quad (k=2, 3, \dots). \quad (5)$$

Иными словами, имеет место аналог ограниченности траектории системы (2) сверху траекторией системы  $S$ , снизу — траекторией системы  $s$ .

Действительно, из первого равенства системы (2) получаем, что  $\eta \frac{d\varphi_1}{du} < \eta \frac{d\varphi}{du} < \eta \frac{d\varphi_2}{du}$  для любой точки области  $B$  в силу того, что  $\varphi + u^2 > 0$  в  $B$ . Если  $\varphi_1(u_0, \eta) = \varphi(u_0, \eta) = \varphi_2(u_0, \eta) = \varphi_0$  и  $(u_0, \varphi_0) \in B$ , то из соотношений для производных получаем, что  $\varphi_1(u, \eta) < \varphi(u, \eta) < \varphi_2(u, \eta)$  в области  $B$  для  $\eta u > \eta u_0$ .

В области  $A$   $\varphi + u^2 < 0$  и  $\eta \frac{d\varphi_1}{du} > \eta \frac{d\varphi}{du} > \eta \frac{d\varphi_2}{du}$ . Если при этом  $\varphi_1(u_0, \eta) = \varphi(u_0, \eta) = \varphi_2(u_0, \eta) = \varphi_0$ ,  $(u_0, \varphi_0) \in A$ , то в области  $A$   $\varphi_1(u, \eta) > \varphi(u, \eta) > \varphi_2(u, \eta)$  для  $\eta u > \eta u_0$ .

Приведенные результаты и тот факт, что  $\frac{d\varphi}{du} = 0$  на линии  $\varphi + u^2 = 0$ , позволяют утверждать, что  $\varphi_s(u, \eta) < \varphi(u, \eta) < \varphi_S(u, \eta)$  при  $\eta u > \eta u_0$ , если  $\varphi_s(u_0, \eta) = \varphi(u_0, \eta) = \varphi_S(u_0, \eta)$ . Из последнего следует неравенство (5) при  $\varphi_s^1(u_0, \eta_1) = \varphi^1(u_0, \eta_1) = \varphi_S^1(u_0, \eta_1)$ .

2.4. Установленное соотношение между траекториями систем (2),  $s, S$  дает возможность оценить область пространства  $u\varphi$ , которой принадлежат предельные движения системы (2).

Исследуем предельные траектории систем  $s, S$ . Рассмотрим для этого нашу систему при условии

$$|\dot{u}| = \begin{cases} r_1 & ((u, \varphi) \in A) \\ r_2 & ((u, \varphi) \in B) \end{cases} \quad (6)$$

и обозначим ее решение при  $|\dot{u}| = r_1$  через  $\varphi = \rho_1(u, \eta)$ , а при  $|\dot{u}| = r_2$  через  $\varphi = \rho_2(u, \eta)$ . Тогда решения этой системы при фиксированном  $\eta$  будут иметь вид:

$$\varphi = \rho(u, \eta) = \begin{cases} \rho_1(u, \eta) & \text{при } (u, \varphi) \in A \\ \rho_2(u, \eta) & \text{при } (u, \varphi) \in B \end{cases}. \quad (7)$$

Покажем, что предельным множеством такой системы является единственный устойчивый предельный цикл.

Нетрудно убедиться в том, что фазовые траектории листа  $\Pi_{-1}$  симметричны, при выполнении условия (6), фазовым траекториям листа  $\Pi_{+1}$  относительно оси  $\varphi$  (рис. 2). Поэтому для отыскания предельных траекторий достаточно рассмотреть движение фазовой точки лишь по траекториям  $\varphi = \rho(u, +1)$  листа  $\Pi_{+1}$ , отождествив соответствующие точки правой и левой ветвей параболы  $\varphi = \Delta - u^2$ , на которой происходит переход фазовой точки с траектории  $\varphi = \rho(u, \eta)$  на траекторию  $\varphi = \rho(u, -\eta)$  при движении ее в области  $A_\Delta$ .

Пусть  $(-u_1, \varphi_1)$ ,  $(-u_2, \varphi_2)$ ,  $(u_3, \varphi_3)$ ,  $(\bar{u}, \bar{\varphi})$  — точки пересечения траектории  $\varphi = \rho(u, +1)$  с параболы  $\varphi = \Delta - u^2$ ,  $\varphi = -u^2$  (рис. 3).

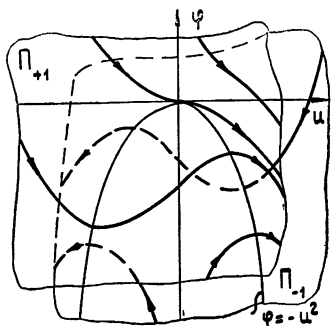


Рис. 2.

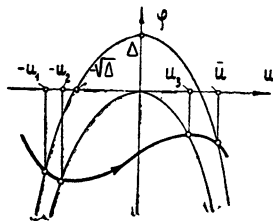


Рис. 3.

Тогда отыскание предельных траекторий, определение их количества и устойчивости может быть сведено к исследованию отображения прямой в прямую  $T$ , такого, что  $\bar{u} = Tu_1$  для  $u_1 > \sqrt{\Delta}$  (действительно,  $\frac{d\varphi}{du} < 0$  при  $\varphi > 0$ , а поэтому при  $u_1 < \sqrt{\Delta}$  отображение  $T$  таково, что  $\bar{u} > u_1$ ; поэтому инвариантное множество отображения  $T$  может быть расположено лишь в области  $u_1 > \sqrt{\Delta}$ ).

Отображение  $T$  может быть представлено в виде произведения отображений  $T = T_3 T_2 T_1$ , где  $T_1, T_2, T_3$  — такие отображения, что  $u_2 = T_1 u_1$ ,  $u_3 = T_2 u_2$ ,  $\bar{u} = T_3 u_3$ .

Согласно уравнениям движения фазовой точки по траекториям  $\varphi = \rho(u, +1)$  листа  $\Pi_{+1}$ , отображения  $T_1, T_2, T_3$  описываются следующими равенствами, соответственно:

$$\exp(-r_2 u_1) (\Delta_1 + r_2^{-1} + u_1) = \exp(-r_2 u_2) (r_2^{-1} + u_2), \quad (8)$$

$$\exp(-r_1 u_2) (r_1^{-1} + u_2) = \exp(r_1 u_3) (r_1^{-1} - u_3), \quad (9)$$

$$\exp(r_2 u_3) (r_2^{-1} - u_3) = \exp(r_2 \bar{u}) (\Delta_1 + r_2^{-1} - \bar{u}), \quad (10)$$

где  $\Delta_1 = 0,5 \Delta r_2$ .

Отображение  $T$  имеет по крайней мере одну устойчивую неподвижную точку  $u_1 = u^*$ . Действительно, нетрудно убедиться в том, что траектория  $\varphi = \rho(u, +1)$ , проходящая через точку  $(-\sqrt{\Delta}, 0)$ , пересекается с параболой  $\varphi = \Delta - u^2$  еще в одной точке с ординатой  $\varphi < 0$ ; отсюда следует, что  $T(\sqrt{\Delta}) > \sqrt{\Delta}$ . Далее, из (8) — (10) следует, что  $\bar{u} \rightarrow u_0$  при  $u_1 \rightarrow \infty$ , где  $u_0$  является корнем уравнения

$$(u - \Delta_1 - r_2^{-1}) \exp(r_2 u) = (r_1^{-1} - r_2^{-1}) \exp(r_2 r_1^{-1}), \text{ т. е. } T(\infty) = \bar{u}^0 < \infty.$$

Теперь, очевидно, что отображение  $T$  имеет по крайней мере одну устойчивую неподвижную точку  $u_1 = u^*$ .

Покажем, что  $u^*$  — единственная неподвижная точка отображения  $T$ . Для этого достаточно показать сжимаемость отображения  $T$ . Рассмотрим вместо  $T$  отображение  $H = T_4 T_3 T_2$ , где  $T_4$  — отображение точек правой ветви параболы  $\varphi = \Delta - u^2$  в точки правой ветви параболы  $\varphi = -u^2$ , связанные между собой траекториями  $\varphi = \rho(u, -1)$  листа  $\Pi_{-1}$ . Отображения  $T, H$  имеют одинаковое количество неподвижных точек одинаковой устойчивости. Отображение  $T_4$  описывается равенством ( $u_4 = T_4 \bar{u}$ )

$$(r_2^{-1} + u_4) \exp(-r_2 u_4) = (\Delta_1 + r_2^{-1} + \bar{u}) \exp(-r_2 \bar{u}). \quad (11)$$

Покажем, что отображения  $T_2, T_3, T_4$  сжимающие, а следовательно, сжимающее и  $H$  ( $u_4 = H u_2$ ). Из (9) — (11) получаем

$$\frac{du_3}{du_2} = \frac{u_2}{\bar{u}_3} \exp[-r_1(u_2 + u_1)], \quad \frac{d\bar{u}}{du_3} = \frac{u_3}{\bar{u} - \Delta_1} \exp[r_2(u_3 - \bar{u})],$$

$$\frac{du_4}{d\bar{u}} = \frac{\bar{u} + \Delta_1}{u_4} \exp r_2(u_4 - \bar{u}). \quad \text{Нетрудно убедиться в том, что } \frac{du_3}{du_2} > 0,$$

$$\frac{d\bar{u}}{du_3} > 0, \quad \frac{du_4}{d\bar{u}} > 0.$$

Для сжимаемости  $T_2$  достаточно теперь показать, что  $\frac{du_3}{du_2} < 1$ . При

$$u_2 = 0 \quad \frac{du_3}{du_2} = 1. \quad \text{Обозначим } \left(\frac{du_3}{du_2} - 1\right) u_3 \text{ через } z(u_2). \text{ Тогда } z(u_2) =$$

$$= u_2 \exp[-r_1(u_2 + u_3)] - u_3. \quad \text{Очевидно, } z(0) = 0, \quad \text{а } \frac{dz}{du_2} = \left[1 - \frac{u_2}{u_3} -$$

$$- r_1 u_2 \left(1 + \frac{du_3}{du_2}\right)\right] \exp[-r_1(u_2 + u_3)] < 0, \quad \text{так как } u_2 > u_3 \text{ (действи-$$

$$\text{тельно, } \frac{d\varphi}{du} > 0 \text{ при } (u, \varphi) \in A; \text{ поэтому } \varphi_3 = \rho(u_3, +1) > \varphi_2 = \rho(u_2, +1)$$

$$\text{и } u_2 > u_3). \text{ Таким образом, } z(u_2) < 0 \text{ при } u_2 > 0, \text{ т. е. } \frac{du_3}{du_2} < 1 \text{ при } u_2 > 0.$$

Теперь покажем сжимаемость произведения  $T_4 T_3$ , т. е. покажем, что

$$\frac{du_4}{du_3} < 1. \quad \text{Так как } \frac{du_4}{du_3} = \frac{u_3}{u_4} \frac{\bar{u} + \Delta_1}{\bar{u} - \Delta_1} \exp[r_2(u_3 + u_4 - 2\bar{u})], \text{ то } \frac{du_4}{du_3} < 1,$$

$$\text{если } \frac{u_3}{u_4} \frac{(\bar{u} + \Delta_1) \exp[r_2(u_3 - \bar{u})]}{(\bar{u} - \Delta_1) \exp[r_2(\bar{u} - u_4)]} < 1. \quad \text{Из (10), (11)}$$

$$u_3 = r_2^{-1} + (\bar{u} - \Delta_1 - r_2^{-1}) \exp[r_2(\bar{u} - u_3)], \quad u_4 = -r_2^{-1} + (\bar{u} + \Delta_1 + r_2^{-1}) \times$$

$$\times \exp[r_2(u_4 - \bar{u})]. \quad \text{Подставляя полученные выражения для } u_3, u_4 \text{ в}$$

$$\text{последнее неравенство, приходим к эквивалентному ему неравенству}$$

$$(\bar{u} + \Delta_1) \exp[r_2(u_3 - \bar{u})] < 2\bar{u} - (\bar{u} - \Delta_1) \exp[r_2(\bar{u} - u_4)]. \quad \text{Так как}$$

$$u_3 < \bar{u}, \quad u_4 < \bar{u}, \quad \text{то } \exp[r_2(u_3 - \bar{u})] < \exp[r_2(\bar{u} - u_4)], \text{ и для}$$

$$\text{справедливости требуемого неравенства достаточно показать}$$

$$\text{справедливость неравенства } \exp[r_2(u_3 - \bar{u})] + \exp[r_2(\bar{u} - u_4)] < 2. \quad \text{А так}$$

$$\text{как } u_3 < u_4, \text{ то } \exp[r_2(u_3 - \bar{u})] + \exp[r_2(\bar{u} - u_4)] < 2 \exp[0,5 r_2(u_3 - u_4)] <$$

$$< 2. \quad \text{Следовательно, } \frac{du_4}{du_3} < 1.$$

Итак,  $0 < \frac{du_4}{du_3} < 1$ , т. е. отображение  $H$  сжимающее. Следовательно,

оно имеет не более одной неподвижной точки. Поэтому отображение  $T$  имеет в области  $u_1 > \sqrt{\Delta}$  единственную неподвижную точку  $u_1 = u^*$ ,

устойчивую, а соответствующая система имеет единственный устойчивый предельный цикл. При  $r_1 = \sigma_1$ ,  $r_2 = \sigma_2$  этот цикл образован отрезками кривых  $\varphi = \varphi_S(u, +1)$ ,  $\varphi = \varphi_S(u, -1)$  (обозначим его через  $\Gamma$ ), а при  $r_1 = \sigma_2$ ,  $r_2 = \sigma_1$  — отрезками кривых  $\varphi = \varphi_s(u, +1)$ ,  $\varphi = \varphi_s(u, -1)$  (его обозначим через  $\gamma$ ), см. рис. 4.

2.5. Обозначим через  $g$  область двулистной поверхности  $\Pi_{+1}$ ,  $\Pi_{-1}$ , для которой  $(u, \varphi) \in A_\Delta$ ,  $\varphi_\Gamma < \varphi < \varphi_\Gamma$ . Область  $g$  является проекцией области  $G(q)$  пространства  $\Phi$  на координатную плоскость  $u\varphi$ , т. е.  $(u, \varphi) \in g$  при  $t > t_0$ , если  $(u_0, \varphi_0) \in g$  при  $t = t_0$ . Действительно предельные циклы  $\Gamma$  и  $\gamma$  являются предельными траекториями системы  $S$  и  $s$ , т. е. предельными траекториями множеств  $\{\varphi_S^k(u, \eta_k)\}$ ,  $\{\varphi_s^k(u, \eta_k)\}$  ( $k=1, 2, \dots$ ).

Следовательно, существует такое  $K$ , что при  $k > K$   $\varphi_\Gamma < \varphi_S^k(u, \eta_k) < \varphi_\Gamma$ ,  $\varphi_\gamma < \varphi_s^k(u, \eta_k) < \varphi_\gamma$ , откуда получаем, на основании (5), что при  $k > K$   $\varphi_\gamma < \varphi^k(u, \eta_k) < \varphi_\Gamma$ .

2.6. Обозначим через  $g_\varepsilon$  область, построенную аналогично области  $g$  для значения параметра системы  $q_1 = q + \varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon > 0$ . Можно показать, что область  $g$  содержится в области  $g_\varepsilon$ , т. е.  $g \subset g_\varepsilon$  и что  $g_\varepsilon \rightarrow g$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Пусть  $(u_0, \varphi_0) \in g_\varepsilon$  при  $t = t_0$ . Если  $(u_0, \varphi_0) \in B_\Delta$ , то, согласно п.2.1, фазовая точка системы (2) попадает через конечное время  $\tau_1(u_0, \varphi_0)$  в область  $A_\Delta$ . Если  $(u_0, \varphi_0) \in A_\Delta$ , но  $(u_0, \varphi_0) \notin g_\varepsilon$ , т. е.  $(u_0, \varphi_0) \in A_\Delta/g_\varepsilon$ , то можно показать, что конечная часть траектории системы (2), проходящей через точку  $(u_0, \varphi_0)$ , принадлежит области  $A_\Delta/g_\varepsilon$  и что остальная часть этой траектории в направлении положительного времени, т. е. целая положительная полутраектория, принадлежит области  $g_\varepsilon$ . Это говорит о том, что для любой точки  $(u_0, \varphi_0) \in A_\Delta/g_\varepsilon$  при  $t = t_0$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\tau_2(u_0, \varphi_0, \varepsilon)$ , что  $(u, \varphi) \in g_\varepsilon$  при  $t > t_0 + \tau_2(u_0, \varphi_0, \varepsilon)$ .

В общем случае справедливо утверждение: для любой точки  $(u_0, \varphi_0) \in g_\varepsilon$  при  $t = t_0$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует конечное  $\tau_2(u_0, \varphi_0, \varepsilon) > 0$ , такое, что  $(u, \varphi) \in g_\varepsilon$  при  $t > t_0 + \tau_2(u_0, \varphi_0, \varepsilon)$ .

Существование описанной области  $g_\varepsilon$  свидетельствует о существовании соответствующей области  $G_\varepsilon$  пространства  $\Phi$ , о которой шла речь в пункте 1.

3. Выше рассматривалась система с объектом, в котором нелинейное безынерционное звено предшествовало инерционному линейному звену. Аналогичные результаты имеют место и для системы с объектом, в котором линейное инерционное звено предшествует нелинейному звену. Схема доказательства сохраняется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Арефьев, Об устойчивости систем экстремального регулирования с постоянной скоростью поиска, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 6, 1249 (1963).
2. Г. А. Новинская, Динамика простейшего экстремального регулятора с автоколебательным типом поиска, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 568 (1961).

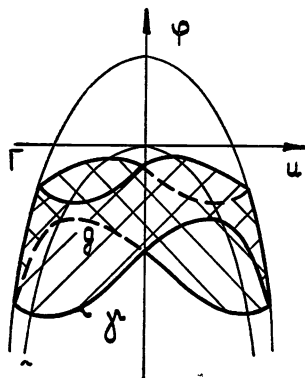


Рис. 4.

**DYNAMICS OF AUTO- OSCILLATORY EXTREMAL SYSTEM  
WITH DISTURBANCES***N. N. Leonov*

A one-channel extremal system with a constant search rate is considered. The output of the plant has an aperiodic link. An additive disturbance limited by its value and by derivative enters the input of the plant. The search stability and the character of the system stationary motions region are investigated.

---