ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 *РАДИОФИЗИКА* *1972*

УДК 517.9 + 621 396.078.6

О РЕЖИМАХ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ФАП С МАЛОЙ ИНЕРЦИОННОСТЬЮ В ЦЕПИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ АДДИТИВНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ

Л. Н. Белюстина, В. Н. Белых

Рассматривается система ФАП при действии гармонической помехи в случае малой инерционности в цепи управления. Установлено существование возможных режимов и проведена оценка областей захвата. Получено, что изменение режимов работы системы связано с изменением числа вращения на инвариантном торе системы описывающих уравнений.

1. Система ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром, $K(p) = \dfrac{1 + n\tau_0 p}{1 + \tau_0 p}$, при действии аддитивной гармонической помехи описывается системой неавтономных уравнений [1, 2]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= y, \\ \dot{y} &= \gamma - \sin\varphi - \lambda(1 + b\cos\varphi)y + \mu\left[\sin\left(\frac{\beta}{\lambda}t + \varphi\right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda b\left(y + \frac{\beta}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{\beta}{\lambda}t + \varphi\right)\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где φ — разность фаз подстраиваемого (ПГ) и эталонного (ЭГ) генераторов, γ, β, λ, μ, b — параметры: γ и β — соответственно расстройки ПГ относительно ЭГ и ЭГ относительно помехи, $\lambda = \Delta^{-1/2}$, $b = n\Delta$, где $\Delta = \Omega\tau_0$ — постоянная времени фильтра, μ — относительная амплитуда помехи.

В работе [2] установлено, что наличие режимов подстройки ПГ под частоту ЭГ, помехи и др. в системе ФАП связано с существованием устойчивых периодических решений с периодом $p\bar{\tau}_1 \left(\bar{\tau}_1 = 2\pi\dfrac{\lambda}{\beta}\right)$ системы (1) типа Γ_{qp}, которые замыкаются в цилиндрическом фазовом пространстве системы (1) G, сделав p оборотов по t и q оборотов по φ в ту или другую сторону в зависимости от $\operatorname{sign} q$. При этом $\bar{\tau}_1$ — периодическое решение, не делающее в G оборотов по φ, типа Γ_{01}, определяет режим подстройки ПГ под частоту ЭГ, а $\bar{\tau}_1$ — периодическое решение, делающее в G один оборот по φ (в сторону уменьшения φ), типа Γ_{-11}, определяет режим подстройки ПГ под частоту помехи.

В настоящей работе изучается система ФАП в случае малой инерционности в цепи управления, т. е. при $\Delta \ll 1$ ($\lambda^{-2} \ll 1$), $n = \mathrm{const}$ ($\lambda^2 b = \mathrm{const}$), и в случае $n = 1$, сводящемся к безынерционной ФАП.

Рассматриваемые случаи безынерционной и близкой к ней системы интересны тем, что в этих случаях наглядно прослеживается непосредственная зависимость режимов работы системы от параметров помехи — — расстройки β и амплитуды μ.

Задача приводит к исследованию уравнений на торе. В работе дано качественное исследование уравнений. Установлена зависимость числа вращения от параметров.

Изменение с ростом μ числа вращения на торе от 0 до -1 объясняет обнаруженный ранее [2] численно, для частных значений параметров, переход с ростом амплитуды μ от режима подстройки ПГ под эталонный сигнал к режиму подстройки под помеху.

2. При $\varepsilon = \Delta \ll 1$ при помощи замены

$$u = \lambda y + n\left[\sin\varphi - \mu \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} t + \varphi\right)\right] \quad (\tau = t/\lambda),$$

система (1) преобразуется к виду системы с малым параметром при производной

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u - nF(\varphi, \psi, \mu), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \beta,$$
$$\varepsilon \frac{du}{d\tau} = \gamma - u - (1-n) F(\varphi, \psi, \mu) = U(\varphi, \psi, u, \mu), \; F = \sin\varphi - \mu\sin(\varphi+\psi). \tag{2}$$

Исследование системы (2) сводится к изучению в фазовом пространстве быстрых и медленных движений [3—5]. Тороидальная поверхность медленных движений $T: U(\varphi, \psi, u, \mu) = 0$, устойчива по отношению к быстрым движениям, так как $\dfrac{\partial U}{\partial u} = -1 < 0$, а траектории на поверхности T определяются системой на торе

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma - F(\varphi, \psi, \mu), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \beta. \tag{3}$$

Проведем качественное исследование системы (3). Система (3) состояний равновесия не имеет, так как $\dot\psi = \beta$, координата ψ возрастает (убывает) при $\beta > 0$ $(\beta < 0)$.

Вопрос о существовании периодических решений системы (3) сводится к определению числа вращения на торе T, $\alpha = q/p$ [6, 7]. Пусть $\varphi = \Phi(\eta, \psi, \gamma)$ —решение системы (3) с начальным условием $\eta = \Phi(\eta, 0, \gamma)$, тогда число вращения α определяется равенством [7]*

$$\alpha = \lim_{\psi\to\infty} \frac{\Phi(\eta, \psi, \gamma)}{\psi} \operatorname{sign}\beta, \tag{4}$$

и обладает следующими свойствами [6, 7].

1) Число α есть однозначная и непрерывная функция параметров.

2) $\operatorname{sign} q$ определяет ориентацию вращения на торе.

3) Число α есть рациональное число, $\alpha = q/p$, тогда и только тогда, когда система (3) имеет хотя бы одно $p\tau_1$—периодическое решение, которое замыкается на торе T, сделав q оборотов по φ $(\tau_1 = 2\pi/\beta)$.

4) Число вращения α устойчиво (см. [7], стр. 176—179), тогда и только тогда, когда α рационально и функция

$$g(\eta, \gamma) = \Phi(\eta, 2\pi p, \gamma) - 2\pi q - \eta \tag{5}$$

при $\eta \in (0, 2\pi)$ меняет знак. Система на торе с устойчивым числом вращения является грубой [6, 7], если характеристические показатели всех периодических решений отличны от нуля.

---

* В обозначении $\Phi(\eta, \psi, \gamma)$ для краткости опущена зависимость от μ и β. Сомножитель $\operatorname{sign}\beta$ в (4) имеет место потому, что под p понимается число оборотов по τ, а не по ψ.

Обозначим через d_α область в пространстве параметров системы (3) D: γ, μ, β, в которой число вращения равно α. Тогда из определения устойчивого числа вращения следует, что области d_α только с устойчивым числом вращения имеют положительную меру. При иррациональных числах $\bar{\alpha}$ mes $d_{\bar{\alpha}} = 0$, так как иррациональные числа вращения неустойчивы [7].

Пространство параметров D: γ, μ, β в силу инвариантности системы (3) относительно замены $\bar{\mu} = -\mu$, $\bar{\psi} = \psi - \pi$, а также замены

$$\bar{\beta} = -\beta, \quad \bar{\varphi} = -\varphi, \quad \bar{\gamma} = -\gamma, \quad \bar{\psi} = -\psi, \tag{6}$$

обладает такой симметрией относительно плоскости $\mu = 0$ и прямой $\beta = 0$, $\gamma = 0$, что при смене знака β и γ согласно (6) величина $\alpha \cdot \beta$ знака не меняет. Поэтому, не ограничивая общности, считаем $\mu > 0$, $\beta > 0$.

Рассмотрим разбиение пространства D^+ : γ, $\mu > 0$, $\beta > 0$, на области d_α. Для этого докажем следующее утверждение.

Предложение 1. Число вращения системы (3) есть неубывающая функция параметра γ и удовлетворяет неравенству.

$$|\alpha\beta - \gamma| < 1 + \mu. \tag{7}$$

Для доказательства утверждения предположим противное, что при $\gamma_1 < \gamma_2$ $\alpha(\gamma_1) > \alpha(\gamma_2)$. Тогда согласно (4) имеем

$$\alpha(\gamma_2) - \alpha(\gamma_1) = \lim_{\psi \to \infty} \frac{\Phi(\eta, \psi, \gamma_2) - \Phi(\eta, \psi, \gamma_1)}{\psi} < 0. \tag{8}$$

С другой стороны, в силу поворота векторного поля системы (3) против часовой стрелки с увеличением γ имеем $\Phi(\eta, \psi, \gamma_2) > \Phi(\eta, \psi, \gamma_1)$, что противоречит (8).

Для доказательства неравенства (7) число вращения в соответствии с (3), (4) запишем в виде

$$\alpha = \lim_{\psi \to \infty} \frac{1}{\psi} \int_0^\psi \frac{[\gamma - F(\Phi(0, \xi, \gamma), \xi, \mu)]}{\beta} d\xi, \tag{9}$$

Тогда, учитывая ограниченность подынтегрального выражения в (9)

$$\gamma - (1 + \mu) \leqslant \gamma - F(\varphi, \psi, \mu) \leqslant \gamma + (1 + \mu), \tag{10}$$

устанавливаем (7).

Из доказанного предложения следует, что число вращения α системы (3) может принимать любые значения. Действительно, пусть c — любое число, $c \in (-\infty, \infty)$. Тогда, согласно (7) при $\gamma < \bar{\gamma}_1 = c\beta - (1 + \mu)$ имеет место неравенство $\alpha < c$, а при $\gamma > \bar{\gamma}_2 = c\beta + (1 + \mu)$ — неравенство $\alpha > c$. Следовательно, так как в силу предложения 1 $\alpha(\gamma)$ есть неубывающая функция, существуют единственные значения $\gamma_c^+(\mu, \beta)$ и $\gamma_c^-(\mu, \beta)$, $\gamma_c^+(\mu, \beta) \geqslant \gamma_c^-(\mu, \beta)$, $\gamma_c^{+(-)}(\mu, \beta) \subset (\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$, такие, что при $\gamma \in [\gamma_c^-, \gamma_c^+]$ число вращения α равно c. Таким образом, число вращения α системы (3) действительно может принимать любые значения. Области d_α при этом определяются функциями $\gamma_\alpha^+(\mu, \beta)$ и $\gamma_\alpha^-(\mu, \beta)$, $d_\alpha : \gamma_\alpha^- \leqslant \gamma \leqslant \gamma_\alpha^+$, удовлетворяющими условиям

$$\bar{\gamma}_1 < \gamma_\alpha^- \leqslant \gamma_\alpha^+ < \bar{\gamma}_2, \quad \gamma_{\alpha_1}^+ < \gamma_{\alpha_2}^- \quad (\alpha_1 < \alpha_2). \tag{11}$$

Таким образом, система (3) при $\gamma, \mu, \beta \subset d_{\bar{\alpha}}$, где $\bar{\alpha}$ — иррациональные числа, имеет квазипериодические решения, а при γ, μ, $\beta \subset d_{q/p}$, где

q/p—рациональные числа, имеет периодические решения. Мера областей d_α^- в D^+ равна нулю, т. е. имеет место равенство $\gamma_\alpha^\pm(\mu, \beta) = \gamma_\alpha^-(\mu, \beta)$.

Рассмотрим устойчивость рациональных чисел вращения $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$, соответствующих периодическим решениям, важным с физической точки зрения.

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 2. В области параметров $\tilde{d}_0$: $|\gamma| \leqslant 1 - \mu$, число вращения $\alpha = 0$ и устойчиво.

Действительно, при $|\gamma| \leqslant 1 - \mu$ имеют место неравенства $\gamma - F(\pi/2, \psi, \mu) \leqslant 0$ и $\gamma - F(3\pi/2, \psi, \mu) \geqslant 0$. Следовательно, окружности $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$ являются циклами без контакта, и траектории на торе T выходят из кольца K_0^- : $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ и входят в кольцо K_0^+: $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, откуда устанавливаем, что в кольце K_0^- (K_0^+) существует хотя бы одно неустойчивое (устойчивое) τ_1-периодическое решение, соответствующее устойчивому числу вращения $\alpha = 0$.

Предложение 3. В области параметров $\tilde{d}_{-1}$: $|\beta + \gamma| \leqslant \mu - 1$ число вращения $\alpha = -1$ и устойчиво.

Аналогично предложению 2 устанавливаем, что при $|\beta + \gamma| \leqslant \mu - 1$ замкнутые спирали $\varphi = -\psi + \pi/2$ и $\varphi = -\psi + 3\pi/2$ являются циклами без контакта, и траектории системы (3) на торе T выходят из кольца K_{-1}^- : $-\pi/2 - \psi < \varphi < \dfrac{\pi}{2} - \psi$ и входят в кольцо K_{-1}^+ : $\pi/2 - \psi < \varphi < \dfrac{3\pi}{2} - \psi$. Следовательно, в кольце K_{-1}^- (K_{-1}^+) существует хотя бы одно неустойчивое (устойчивое) τ_1 -периодическое решение, соответствующее устойчивому числу вращения $\alpha = -1$.

Из доказанных предложений 2—3 получаем, что область d_0, содержащая $\tilde{d}_0$, при $\mu \leqslant 1$ и область d_{-1}, содержащая $\tilde{d}_{-1}$, при $\mu \geqslant 1$ имеют положительную меру и соответствуют устойчивым числам вращения $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$. При этом однозначные функции $\gamma_0^{+(-)}$ и $\gamma_{-1}^{+(-)}$, кроме (11), согласно условиям предложений 2 и 3 удовлетворяют неравенствам

$$
\begin{aligned}
&\gamma_0^+ > 1 - \mu, \quad \gamma_0^- < \mu - 1 \qquad (\mu \leqslant 1),\\
&\gamma_{-1}^+ > \mu - 1 - \beta, \quad \gamma_{-1}^- < 1 - \mu - \beta \qquad (\mu \geqslant 1).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Рассмотрим поведение поверхностей $\gamma_0^{+(-)}$ и $\gamma_{-1}^{+(-)}$ в пространстве D^+ при $\mu \to 0$ и при $\mu = 1$.

При $\mu = 0$ система (3) имеет вид

$$\dot{\varphi} = \gamma - \sin\varphi, \quad \dot{\psi} = \beta. \tag{13}$$

При $|\gamma| < 1$ система на торе (13) имеет два периодических решения: устойчивое $\varphi_1 = \arcsin\gamma$, $\psi_1 = \beta\tau$ и неустойчивое $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, $\psi_2 = \psi_1$; а при $|\gamma| = 1$ — одно полуустойчивое $\varphi_{12} = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign}\gamma$, $\psi_{12} = \beta\tau$, а при $|\gamma| > 1$ — семейство решений вида

$$
\begin{aligned}
&\varphi(t, c) = 2 \operatorname{arc\,tg} \{(\gamma - 1)^{1/2}(\gamma + 1)^{-1/2} \operatorname{tg}[1/2(\gamma^2 - 1)^{-1/2}(t + c)]\},\\
&\psi(t, c) = \beta(t + c).
\end{aligned}
$$

Отсюда устанавливаем, что число вращения α системы (3) при $\mu = 0$ определяется равенством

$$
\alpha = \begin{cases} 0 & (|\gamma| \leqslant 1),\\ \beta^{-1}\sqrt{\gamma^2 - 1} & (|\gamma| > 1). \end{cases} \tag{14}
$$

Таким образом, в силу (14) поверхности $\gamma_0^{+(-)}$ и $\gamma_{-1}^{+(-)}$ при $\mu = 0$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_0^+(0, \beta) = 1; \quad \gamma_0^-(0, \beta) = -1, \quad \gamma_{-1}^+(0, \beta) = \gamma_{-1}^-(0, \beta) = -\sqrt{1+\beta^2}. \tag{15}$$

При $\mu = 1$ и $\gamma = -\beta/2$ система (3) с помощью замены $\tilde{\varphi} = \varphi + \psi/2$ преобразуется к виду

$$\dot{\tilde{\varphi}} = 2\cos\tilde{\varphi}\cdot\sin\psi/2, \quad \dot{\psi} = \beta. \tag{16}$$

Система (16) инвариантна относительно замены $\bar{\psi} = -\psi$, $\bar{\tau} = -\tau$. Следовательно, все ее решения $2\tau_1$ — периодичны. Тогда, учитывая замену $\tilde{\varphi} = \varphi + \psi/2$, получаем, что при $\mu = 1$ и $\gamma = -\beta/2$ число вращения системы (3) $\alpha = -1/2$ и неустойчиво, так как функция (5) при этом есть тождественный нуль, $g(\eta, -\beta/2) \equiv 0$. Отсюда в силу предложения 1 получаем, что функции γ_0^- и $\gamma_{-1}^{\pm}$ при $\mu = 1$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_0^-(1, \beta) > -\beta/2, \quad \gamma_{-1}^{\pm}(1, \beta) < -\beta/2. \tag{17}$$

Качественный вид сечения $\beta = \mathrm{const}$ областей d_0 и d_{-1}, построенного на основании неравенств (11), (12), (15) и (17), представлен на рис. 1.

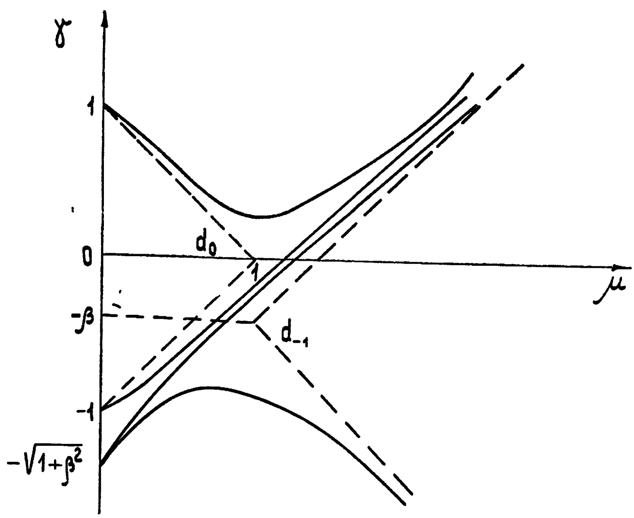

Рис. 1.

В силу отмеченной симметрии пространства D поверхности $\gamma_\alpha^{+(-)}(\mu, \beta)$ удовлетворяют условиям

$$\gamma_\alpha^{+(-)}(\mu, \beta) = \gamma_\alpha^{+(-)}(-\mu, \beta), \quad \gamma_\alpha^{+(-)}(\mu, \beta) = -\gamma_{-\alpha}^{+(-)}(\mu, -\beta). \tag{18}$$

Следовательно, при $\beta < 0$ существует область $\bar{d}_0$, $\bar{d}_0$: $-\gamma_0^+(\mu, -\beta) \leqslant \gamma \leqslant -\gamma_0^-(\mu, -\beta)$, и область $\bar{d}_1$, $\bar{d}_1$: $-\gamma_{-1}^+(\mu, -\beta) \leqslant \gamma \leqslant -\gamma_{-1}^-(\mu, -\beta)$, соответствующие устойчивым числам вращения $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. При $\beta = 0$ система (3) вырождается в систему

$$\dot{\varphi} = \gamma - F(\varphi, \psi_0, \mu) \quad (\psi_0\text{—параметр}). \tag{19}$$

Система (19) при значениях параметров из областей $\tilde{d}_0$ и $\tilde{d}_{-1}|_{\beta=0}$ при любых $\psi_0 \in [0, 2\pi)$ имеет два состояния равновесия: одно устойчивое

O_1, другое неустойчивое O_2. Состояния равновесия O_1 и O_2 на торе $\widetilde{(\varphi, \psi)}$ образуют замкнутые кривые, непериодические по φ в области $\tilde{d}_0$ (при $\mu < 1$) и 2π — периодические в области $\tilde{d}_{-1}|_{\beta=0}$ (при $\mu > 1$). Следовательно, при $\beta = 0$ области d_0 и $\bar{d}_0$ представляют собой область $\tilde{d}_0$, а области d_{-1} и $\bar{d}_1$ — область $\tilde{d}_{-1}|_{\beta=0}$.

Характеристические показатели периодических решений системы (3) при значениях γ, μ, β из $d_0, d_{-1}, \bar{d}_0, \bar{d}_{-1}$ могут обращаться в нуль лишь на множестве меры нуль δ в пространстве D. Следовательно, система (3) при значениях параметров из областей d_0, d_{-1}, $\bar{d}_0$, $\bar{d}_1$ без множества δ является грубой.

Согласно [3–5] при $0 < \Delta \ll 1$, $n = \text{const}$ система (2) имеет тороидальную инвариантную поверхность $\tilde{T}$, близкую к поверхности медленных движений $\tilde{T}$, устойчивую во всем фазовом пространстве G. При значениях параметров из областей d_0 и d_{-1} ($\bar{d}_0$ и $\bar{d}_1$) числа вращения на торе $\tilde{T}$ остаются соответственно равными $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$ ($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$), так как при $0 < \Delta \ll 1$ грубые предельные циклы, существующие в системе (3), сохраняются [4]. Следовательно, при $0 < \Delta \ll 1$, $n = \text{const}$ система (2), а с ней и система (1), при значениях параметров, принадлежащих областям d_0 и $\bar{d}_0$ (d_{-1} и $\bar{d}_1$) имеет периодическое решение типа Γ_{01} (Γ_{-11}), устойчивое во всем пространстве G. Поэтому область $d_0 \cup \bar{d}_0$ в пространстве D есть область захвата ПГ частотой ЭГ, а область $d_{-1} \cup \bar{d}_1$ — область захвата ПГ частотой помехи. Из рассмотренного следует, что область захвата ПГ частотой ЭГ (помехи) совпадает с областью подстройки ПГ под частоту ЭГ (помехи). Это свойство эквивалентно свойству системы ФАП без помехи при $\mu = 0$, $0 < \Delta \ll 1$, $n = \text{const}$, у которой полоса захвата совпадает с полосой синхронизма.

При значениях параметров, принадлежащих областям $d_\alpha (\bar{d}_{-\alpha})$ отличным от областей d_0, d_{-1} ($\bar{d}_0$, $\bar{d}_1$), в рассматриваемой системе ФАП происходит подстройка ПГ под комбинационные частоты биений, определяемые коэффициентом вращения на торе $\tilde{T}$.

Укажем на изменение режимов в системе ФАП с ростом параметра μ. При $\gamma \in (-1, 1)$ с ростом μ от нуля до значений μ_1, $\mu_1 \in d_0 (\bar{d}_0)$ (рис. 1), в системе (2) при $0 < \Delta \ll 1$, $n = \text{const}$ от состояний равновесия происходит рождение двух периодических решений типа Γ_{01} — одного устойчивого Γ^+ и одного седлового Γ^-, расположенных на торе $\tilde{T}$. При дальнейшем увеличении μ от значений μ_1 до значений μ_2, $\mu_2 \in d_{-1} (\bar{d}_1)$ (рис. 1) происходит бифуркация, определяемая изменением числа вращения на торе $\tilde{T}$, при которой решения типа Γ_{01} исчезают, а периодические решения типа Γ_{-11} рождаются. При этом в рассматриваемой системе ФАП режим захвата ПГ частотой ЭГ сменяется режимом захвата ПГ частотой помехи.

3. При $n = \lambda^2 b = 1$ система (2) преобразуется к виду

$$\dot{\varphi} = u - \boldsymbol{F}(\varphi, \psi, \mu), \quad \dot{\psi} = \beta, \quad \dot{u} = \lambda^2 (\gamma - u). \tag{20}$$

Система (20) имеет единственную тороидальную интегральную поверхность $\tilde{T}$: $u = \gamma$, устойчивую во всем пространстве G, движения на которой определяются системой (3).

Случай $n = 1$ отличается от рассмотренного случая системы (2) при $0 < \Delta \ll 1, n = \text{const}$ тем, что при $n = 1$ структура разбиения тора $\overline{T}$ на траектории полностью определяется системой $\underline{(3)}$, тогда как при $0 < \Delta \ll 1$, $n = \text{const}$ структура разбиения тора $\tilde{T}$ на траектории определяется системой (3) только при тех значениях параметров, когда система (3) является грубой.

Используя результаты качественного исследования системы (3), устанавливаем, что система (1) при $\lambda^2 b = 1$, $\gamma, \mu, \beta \in d_\alpha$ при иррациональных α имеет квазипериодические, а при рациональных α, $\alpha = q/p$ — периодические решения на торе $\overline{T}$, типа Γ_{qp}. Причем решениям типа Γ_{01} соответствует область $d_0 \cup \bar{d}_0$, а решениям типа Γ_{-11} — область $d_{-1} \cup \bar{d}_1$ (рис. 1).

Следовательно, согласно [2] при $\lambda^2 b = 1$ при $\gamma, \mu, \beta \in d_\alpha$ в бесфильтровой системе ФАП происходит захват ПГ частотой $\overline{\omega_{\text{ПГ}}(t)} = \alpha(\omega_{\text{ЭГ}} - \omega_{\text{П}}) + \omega_{\text{ЭГ}}$, где $\omega_{\text{ЭГ}}$ и $\omega_{\text{П}}$ — частоты ЭГ и помехи соответственно. При этом область d_0 $(\bar{d}_0)$ есть область захвата ПГ частотой ЭГ, а область d_{-1} $(\bar{d}_1)$ — область захвата ПГ частотой помехи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
2. Л. Н. Белюстина, В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, О захвате системы ФАП при действии аддитивной гармонической помехи, Сб. Прикладная Математика, ГГУ (в печати)
3. Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 605 (1957).
4. Д. В. Аносов, Мат. сб., **50**, № 3, 299 (1960).
5. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 3, 321 (1967).
6. А. Г. Майер, Уч. зап. ГГУ, вып. 12, 1939, стр. 215.
7. В. А. Плисс, Нелокальные проблемы теории колебаний, изд. Наука, М.—Л., 1964.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 июля 1971 г.

ON OPERATING MODES OF PHASE-LOCK SYSTEM WITH SMALL TIME LAG IN CONTROL CIRCUIT UNDER ADDITIVE HARMONIC NOISE

L. N. Beljustina, V. N. Belykh

A phase-lock system under a harmonic noise is considered in ihe case of a small time lag in the control circuit. The existence of possible modes is found and the entrainment regions are estimated. It is found that the change of the operating modes of the system is connected with the change of rotation number on an invariant torus of the describing equations set.