ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 *РАДИОФИЗИКА* *1972*

УДК 533013

О НЕКОТОРЫХ РЕЖИМАХ ВРАЩЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОГО СПУТНИКА-ГИРОСТАТА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. Гончарский, А. А. Хентов

Анализируются некоторые движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) вокруг своего центра масс, которые, по-видимому, могут быть использованы в качестве номинальных для его полупассивной стабилизации в геомагнитном поле.

Известно [1-3], что взаимодействие собственного магнитного поля космического аппарата с магнитным полем Земли можно использовать для его ориентации по вектору геомагнитной напряженности $\boldsymbol{H}$. Однако с точки зрения запросов практики такая система наряду с преимуществами (относительная простота в получении большого магнитного момента) имеет и существенный недостаток: вращение спутника в номинальном режиме, вообще говоря, не является равномерным, что создает трудности при использовании подобных спутников. Это обстоятельство заставляет использовать стабилизацию по геомагнитному полю лишь как промежуточный этап для перехода к другим формам ориентации, например, по градиенту гравитационного поля Земли [2].

Однако, по-видимому, по крайней мере для спутников, рассчитанных на не очень продолжительное время полезной службы, возможно создание полупассивной системы ориентации, в которой некоторые движения космического аппарата в осредненном (по аргументу широты) геомагнитном поле являются равномерными вращениями (номинальные движения), а моменты, возникающие за счет отличия поля от осредненного, компенсируются управляющими воздействиями. Первый этап в исследовании подобной системы — анализ определенных номинальных режимов в осредненном поле — предмет настоящей статьи. Используемая модель магнитного поля предложена авторам В. В. Белецким.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

При аппроксимации магнитного поля Земли диполем, ось которого коллинеарна ее оси вращения, вектор $\boldsymbol{H}$, изменяясь в каждой точке орбиты по величине и направлению, описывает в абсолютном пространстве конус [3], близкий к круговому с углом при вершине $2\nu \leqslant \pi$, $\operatorname{tg}\nu = 1{,}5\sin 2i/(1-3\sin^2 i+\sqrt{1+3\sin^2 i})$. Здесь i — наклонение орбиты. Этот конус замыкается за полоборота спутника по орбите. Модуль $\boldsymbol{H}$ определяется формулой $|\boldsymbol{H}| = \mu_e\sqrt{1+3\sin^2 i\sin^2 u}/R^3$, где u — аргумент широты, а $\boldsymbol{R}$ — радиус-вектор центра масс спутника, μ_e — постоянная земного магнетизма [4].

Пусть центр масс спутника описывает круговую орбиту. В качестве осредненного рассмотрим поле, в котором вектор $\boldsymbol{H}$ постоянной длины $H = \dfrac{\mu_e}{\pi R^3}\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+3\sin^2 i\sin^2 u}\,du$ вращается с постоянной угловой скоростью $2\omega_0$ (ω_0 — скорость обращения спутника) вокруг высоты z_1 (рис. 1) отмеченного выше кругового конуса, оставаясь все время в плоскости $y_1 z_1$ подвижного триедра $x_1 y_1 z_1$ с началом в центре масс G спутника. Предположим далее, что магнитный момент спутника складывается из постоянной $\boldsymbol{I}$ (положение вектора $\boldsymbol{I}$ определим направляющими косинусами β_1, β_2 и β_3 с главными центральными осями инерции x, y и z соответственно) и магнитного момента оболочки, который введем [1] формулой $\zeta (\boldsymbol{H} \boldsymbol{k}) \boldsymbol{k}/H^2$. Здесь $\zeta = (\mu_0 - 1) vH^2/4\pi$, μ_0 — магнитная проницаемость, а v — объем оболочки, $\boldsymbol{k}$ — орт оси z. Пусть спутник вдоль своих главных центральных осей инерции несет симметричные роторы, обладающие постоянным (в теле спутника) моментом количества движения $\boldsymbol{K} = K_1 \boldsymbol{i} + K_2 \boldsymbol{j} + K_3 \boldsymbol{k}$ и не изменяющие при своем вращении распределение массы спутника ($\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — орты осей x и y).

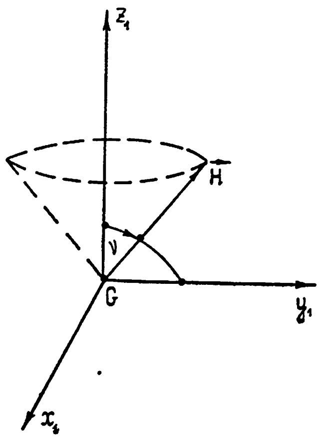

Рис. 1.

Выпишем систему дифференциальных уравнений, описывающих вращение такого спутника в осредненном геомагнитном поле в ограниченной задаче

$$
\begin{aligned}
&A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr + qK_3 - rK_2 = M_x, \\
&B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr + rK_1 - pK_3 = M_y, \\
&C \frac{dr}{dt} + (B - A) qp + pK_2 - qK_1 = M_z,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dm}{dt} = 2\omega_0 n + m_1 r - m_2 q, \\
&\frac{dm_1}{dt} = 2\omega_0 n_1 + m_2 p - mr, \\
&\frac{dm_2}{dt} = 2\omega_0 n_2 + mq - m_1 p,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt} = -2\omega_0 m + n_1 r - n_2 q, \\
&\frac{dn_1}{dt} = -2\omega_0 m_1 + n_2 p - nr, \\
&\frac{dn_2}{dt} = -2\omega_0 m_2 + nq - n_1 p,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\frac{dl}{dt} = l_1 r - l_2 q, \quad \frac{dl_1}{dt} = l_2 p - lr, \quad \frac{dl_2}{dt} = lq - l_1 p. \tag{4}
$$

Здесь A, B, C — моменты инерции спутника относительно осей x, y и z соответственно; p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости на те же оси; m, m_1 и m_2; n, n_1 и n_2; l, l_1 и l_2 — направляющие косинусы осей x_1, y_1 и z_1 соответственно с осями x, y и z. Проекции M_x, M_y, M_z момента внешних сил имеют следующие значения

$$M_x = IH\left[\beta_2(n_2\sin\nu + l_2\cos\nu) - \beta_3(n_1\sin\nu + l_1\cos\nu)\right] - $$
$$- \zeta(n_2\sin\nu + l_2\cos\nu)(n_1\sin\nu + l_1\cos\nu),$$
$$M_y = IH\left[\beta_3(n\sin\nu + l\cos\nu) - \beta_1(n_2\sin\nu + l_2\cos\nu)\right] +$$
$$+ \zeta(n_2\sin\nu + l_2\cos\nu)(n\sin\nu + l\cos\nu),$$
$$M_z = IH\left[\beta_1(n_1\sin\nu + l_1\cos\nu) - \beta_2(n\sin\nu + l\cos\nu)\right].$$

Система уравнений (1)—(4) обладает интегралом энергии типа Якоби, который можно привести к виду

$$\frac{1}{2}(A\tilde{p}^2 + B\tilde{q}^2 + C\tilde{r}^2) - 2\omega_0^2(Al^2 + Bl_1^2 + Cl_2^2) -$$
$$- (I\,H) - \frac{\zeta}{2}(n_2\sin\nu + l_2\cos\nu)^2 - 2\omega_0(K_1 l + K_2 l_1 + K_3 l_2) = C_1. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ и $\tilde{r}$ — проекции на главные центральные оси инерции спутника угловой скорости его относительно осей $x_1y_1z_1$. Имеем также, например, следующие тривиальные интегралы

$$l^2 + l_1^2 + l_2^2 - 1 = C_2, \tag{6}$$
$$n^2 + n_1^2 + n_2^2 - 1 = C_3, \tag{7}$$
$$ln + l_1n_1 + l_2n_2 = C_4. \tag{8}$$

2. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Как отмечалось ранее, в качестве номинальных режимов при осуществлении ориентации спутника в геомагнитном поле желательно использовать режимы его равномерного вращения. Таковыми будут, например, положения относительного равновесия спутника в осях $x_1y_1z_1$, к рассмотрению которых теперь и переходим. Эти частные решения удовлетворяют уравнениям

$$2\omega_0(l_1K_3 - l_2K_2) = 4\omega_0^2(B - C)\,l_1 l_2 + M_x,$$
$$2\omega_0(l_2K_1 - lK_3) = 4\omega_0^2(C - A)\,ll_2 + M_y, \tag{9}$$
$$2\omega_0(lK_2 - l_1K_1) = 4\omega_0^2(A - B)\,l_1 l + M_z.$$

Легко видеть, что если систему (9) рассматривать как систему уравнений относительно величин K_1, K_2 и K_3, то ее определитель равен нулю. Поэтому для совместности этой системы должно быть выполнено условие

$$\beta_1 m + \beta_2 m_1 + \left[\beta_3 + \frac{\zeta}{IH}(n_2\sin\nu + l_2\cos\nu)\right] m_2 = 0, \tag{10}$$

которое физически означает, что в положении относительного равновесия полный магнитный момент спутника лежит в плоскости y_1z_1. Таким образом, это условие накладывает определенное ограничение на выбор номинальных режимов.

Предположим теперь, что нас интересует какое-либо решение системы (9), удовлетворяющее условию (10). Исследуем его устойчивость. В возмущенном движении положим $\tilde{p} = \xi_1$, $\tilde{q} = \xi_2$ $\tilde{r} = \xi_3$, $l = l_0 + \eta_1$, $l_1 + l_{10} + \eta_2$, $l_2 = l_{20} + \eta_3$, $n = n_0 + \eta_4$, $n_1 = n_{10} + \eta_5$, $n_2 = n_{20} + \eta_6$ Здесь l_0, l_{10}, l_{20}, n_0, n_{10}, n_{20} — значения направляющих косинусов в невозмущенном движении, а ξ_i и η_j — возмущения.

Для исследования устойчивости невозмущенного движения по Ляпунову будем искать функцию Ляпунова в виде связки первых интегралов [5], а именно

$$V = V_1 + \sum_{i=2}^{4} (\mu_i V_i + \lambda_i V_i^2). \tag{11}$$

Здесь V_i — интегралы (5)—(8), записанные для возмущенного движения, а μ_i и λ_i — постоянные.

Выберем в качестве μ_i следующие выражения (выписаны μ_i для случая, когда направляющие косинусы в невозмущенном движении отличны от нуля)

$$\mu_3 = IH \sin\nu (\beta_1 l_{10} - \beta_2 l_0)/2m_{20},$$

$$\mu_4 = IH \sin\nu (\beta_2 n_0 - \beta_1 n_{10})/m_{20},$$

$$\mu_2 = (4A\omega_0^2 l_0 + IH \beta_1 \cos\nu + 2\omega_0 K_1 - \mu_4 n_0)/2l_0.$$

Здесь m_{20} — значение m_2 в невозмущенном движении. Тогда функция (11) будет начинаться с квадратичной формы переменных ξ_i, η_j вида

$$V = A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2 + \sum_{i,j=1}^{6} a_{ij}\eta_i\eta_j + o(\eta_j^2). \tag{12}$$

Коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ имеют такие значения

$$a_{11} = (\mu_2 - 2A\omega_0^2 + 4\lambda_2 l_0^2 + \lambda_4 n_0^2),\quad a_{12} = 4\lambda_2 l_0 l_{10} + \lambda_4 n_0 n_{10},$$

$$a_{13} = \lambda_4 n_0 n_{20} + 4\lambda_2 l_0 l_{20},\quad a_{14} = \lambda_4 l_0 n_0 + \mu_4/2,$$

$$a_{15} = \lambda_4 n_0 l_{10},\qquad a_{16} = \lambda_4 n_0 l_{20},$$

$$a_{22} = (\mu_2 - 2B\omega_0^2 + 4\lambda_2 l_{10}^2 + \lambda_4 n_{10}^2),\quad a_{23} = \lambda_4 n_{10} n_{20} + 4\lambda_2 l_{10} l_{20},$$

$$a_{24} = \lambda_4 l_0 n_{10},\quad a_{25} = \lambda_4 l_{10} n_{10} + \mu_4/2,\quad a_{26} = \lambda_4 n_{10} l_{20},$$

$$a_{33} = (\mu_2 - 2C\omega_0^2 + 4\lambda_2 l_{20}^2 + \lambda_4 n_{20}^2) - \zeta\cos^2\nu/2,\quad a_{34} = \lambda_4 l_0 n_{20},$$

$$a_{35} = \lambda_4 l_{10} n_{20},\quad a_{36} = \lambda_4 n_{20} l_{20} + (\mu_4 - \zeta\cos\nu\sin\nu)/2,$$

$$a_{44} = (\mu_3 + \lambda_4 l_0^2 + 4\lambda_3 n_0^2),\quad a_{45} = \lambda_4 l_0 l_{10} + 4\lambda_3 n_0 n_{10},$$

$$a_{46} = \lambda_4 l_0 l_{20} + 4\lambda_3 n_0 n_{20},\quad a_{55} = (\mu_3 + \lambda_4 l_{10}^2 + 4\lambda_3 n_{10}^2),$$

$$a_{56} = \lambda_4 l_{10} l_{20} + 4\lambda_3 n_{10} n_{20},$$

$$a_{66} = (\mu_3 + \lambda_4 l_{20}^2 + 4\lambda_3 n_{20}^2) - \zeta\sin^2\nu/2.$$

Если матрица (a_{ij}) удовлетворяет критерию Сильвестра [6] (для этого можно пытаться определенным образом распорядиться коэффициентами λ_i, которые пока остаются произвольными), то невозмущенное движение устойчиво.

Варьируя параметры K_i, I и ζ, можно получить набор решений, удобных для выбора в качестве номинальных при стабилизации.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих результаты предыдущего раздела.

а) Одно из возможных решений системы (9) соответствует положению относительного равновесия, при котором оси xyz совпадают с осями $x_1y_1z_1$. Условие (10) дает $\beta_1 = 0$. Тогда из уравнений (9) находим

$$K_1 = 0, \; K_2 = [IH(\beta_3 \sin\nu - \beta_2\cos\nu) + \zeta \sin\nu\cos\nu] \,|\, 2\omega_0,$$

K_3 остается произвольным. Выражения ядра μ_i таковы:

$$\mu_2 = (4C\omega_0^2 + IH\beta_3\cos\nu + 2\omega_0 K_3 + \zeta\cos^2\nu)/2,$$

$$\mu_3 = IH\beta_2\sin\nu/2, \quad \mu_4 = IH\beta_3\sin\nu + \zeta\sin\nu\cos\nu.$$

Достаточное условие устойчивости изучаемого движения имеет вид

$$(\mu_2 - 2A\omega_0^2)\,\mu_3 - (\mu_4/2)^2 > 0. \tag{13}$$

Поскольку без ограничения общности можно считать, что все величины β_1, β_2 и β_3 не отрицательны, то, как легко видеть, неравенство (13) всегда можно выполнить за счет выбора достаточно большого K_3. Это значит, что рассматриваемое движение можно использовать в качестве одного из номинальных при стабилизации.

б) Предположим, что спутник динамически симметричен и постоянно намагничен вдоль оси динамической симметрии ($A = B$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$, $\zeta = 0$). В этом случае установка роторов на борту спутника не требуется, так как необходимый кинетический момент можно создать, определенным образом закрутив спутник вокруг оси z. Действительно, если ввести углы Эйлера: нутации θ (между осями z и z_1), прецессии ψ и собственного вращения φ, то уравнения вращения спутника в проекциях на полусвязанные с ним оси Резаля [7] имеют вид

$$\begin{gathered} A\frac{d^2\theta}{dt^2} - A\left(\frac{d\psi}{dt} + 2\omega_0\right)^2 \sin\theta\cos\theta + Cr\left(\frac{d\psi}{dt} + 2\omega_0\right)\sin\theta = \\ = -IH(\cos\psi\cos\theta\sin\nu + \sin\theta\cos\nu), \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} A\frac{d^2\psi}{dt^2}\sin\theta + 2A\left(\frac{d\psi}{dt} + 2\omega_0\right)\frac{d\theta}{dt}\cos\theta - Cr\frac{d\theta}{dt} = \\ = IH\sin\psi\sin\nu, \qquad r = r_0. \end{gathered}$$

Решениям $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0$ этих уравнений соответствуют равномерные вращения спутника в осях $x_1y_1z_1$ с угловой скоростью $\Omega = d\varphi/dt$ или регулярные прецессии в абсолютном пространстве. Из уравнений (14) находим два семейства таких решений:

$$\begin{gathered} \psi = 0, \; \Omega(\psi = 0) = [4\omega_0^2(A - C)\sin\theta\cos\theta - \\ - IH\sin(\nu + \theta)]/2C\omega_0\sin\theta, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \psi = \pi, \; \Omega(\psi = \pi) = [4\omega_0^2(A - C)\sin\theta\cos\theta + \\ + IH\sin(\nu - \theta)]/2C\omega_0\sin\theta. \end{gathered} \tag{16}$$

Поскольку, как известно, движение по циклической координате φ, вообще говоря, неустойчиво, рассмотрим задачу об устойчивости по части [8] переменных: углам ψ и θ и угловым скоростям $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ и $\tilde{r}$. В возмущенном движении имеем $\tilde{p} = \xi_1$, $\tilde{q} = \xi_2$, $\tilde{r} = \Omega + \xi_3$, $l_2 = l_{20} + \eta_1$, $m_2 = \eta_3$, $n_2 = n_{20} + \eta_2$, где ξ_i и η_j — невозмущения. Интегралы системы (14) таковы:

$$\frac{1}{2} A (\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2) + \frac{1}{2} C\tilde{r}^2 - (IH) - 2\omega_0^2 (C - A) l_2^2 = C_1, \tag{17}$$

$$\tilde{r} + 2\omega_0 l_2 = C_5, \tag{18}$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 - 1 = C_6. \tag{19}$$

Функцию Ляпунова строим в виде

$$V = V_1 + \mu V_6 - \Omega C V_5 + \lambda V_5^2 \tag{20}$$

где V_1, V_5 и V_6 — соответственно интегралы (17), (18) и (19) в возмущенном движении. Выбирая $\mu = IH \sin \nu / 2 \sin \theta$, легко доказать, что функция (20) будет положительно определенной функцией своих переменных для всех решений однопараметрического семейства (16), и, следовательно, решения этого семейства устойчивы по части переменных.

Как показывает анализ уравнений в вариациях, среди решений семейства (15) могут быть неустойчивые. Например, если $4 A\omega_0^2 \sin^3 \theta < IH \sin \nu$ (это неравенство определенно выполнено, по крайней мере, при малых углах нутации), решения семейства (15) неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Белецкий, Движение искусственного спутника относительно центра масс, изд. Наука, М., 1965.
2. Р. Е. Фишел, Ф. Ф. Мобли, в сб. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли, изд. Наука, М., 1966, стр. 106.
3. А. А. Хентов, Космические исследования АН СССР, 5, вып. 4, 540 (1967).
4. Б. М. Яновский, Земной магнетизм, изд. ЛГУ, Л., 1964.
5. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, изд. Наука, М., 1965.
6. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, М., 1959.
7. П. Аппель, Теоретическая механика, 2, Физматгиз, М., 1960.
8. В. В. Румянцев, Вестник МГУ, сер Математики, механики, № 4, 9 (1957).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 10 июня 1971 г.

ON SOME ROTATION REGIMES OF MAGNETIZED GYROSTAT-SATELLITE IN GEOMAGNETIC FIELD

A. A. Goncharsky, A. A. Khentov

The article presents an analysis of some motions of an artificial earth satellite round its center of mass that are likely to be used as nominal motions for its semi-passive stabilization in the geomagnetic field.