ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 518.6

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

П. Д. Крутько

Излагается эффективный прием приближенного анализа, основанный на представлении искомого решения в виде ряда по функциям чувствительности относительно скалярного параметра, специально вводимого в уравнения движения. Рассмотрен пример.

Пусть движение динамической системы подчиняется дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = x$ — фазовые координаты; $(f_1, f_2, \dots, f_n)^T = f(t, x)$ — нелинейные функции, свойства которых гарантируют существование и единственность решения $x(t, x_0)$. Требуется построить последовательность приближений, сходящуюся к точному решению (1).

Вместо (1) будем рассматривать более общую систему

$$\dot{z}(t, \lambda) = G[t, z(t, \lambda), \lambda], \quad z(t_0, \lambda) = x_0, \tag{2}$$

зависящую от действительного параметра $|\lambda| \leqslant 1$ и такую, что при $\lambda = 0$ система (2) линейна, а при $\lambda = 1$ она тождественна (1). Кроме того, будем считать, что $G(t, z, \lambda]$ допускает разложение в ряд по λ, а по $z(t, \lambda)$ обладает свойствами $f(t, x)$. Для простоты дальнейшего изложения примем

$$G[t, z, \lambda] = A(t) z(t, \lambda) + F[t, z(t, \lambda), \lambda], \tag{3}$$

где $A(t)$ — матрица, имеющая характеристические числа с неположительной вещественной частью, а нелинейная функция $F(t, z, \lambda]$ обладает свойствами $f(t, x)$.

Определим функции чувствительности

$$\eta^{[\nu]}(t) = [\partial^\nu z(t, \lambda)/\partial \lambda^\nu]_{\lambda=0}$$

системы (2) по параметру λ и представим $z(t, \lambda)$ в виде ряда

$$z_k(t, \lambda) = z(t, 0) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \eta^{[\nu]}(t). \tag{4}$$

При этом, в силу известных правил [1, 2], $\eta^{[\nu]}(t)$ могут быть найдены из дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{\eta}^{[\nu]}(t) = A(t) \eta^{[\nu]}(t) + \psi_\nu[t, z(t, 0), \eta^{[1]}(t), \dots, \eta^{[\nu-1]}(t)], \\ \eta^{[\nu]}(t_0) = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

которые получаются дифференцированием (2) по λ при $\lambda = 0$. Кроме того, $z(t, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{z}(t, 0) = A(t) z(t, 0), \quad z(t_0, 0) = x_0. \tag{6}$$

Справедлив следующий результат. Если при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ $f(t, x)$ в (1), $A(t)$ и $G(t, z, \lambda]$ в (3) обладают оговоренными свойствами, и кроме того, $f(t, x)$ в окрестности решения $x(t, x_0)$ допускает неограниченное число непрерывных производных по x, тогда

а) ряд $z_k(t, \lambda)$ сходится равномерно для $t \in [t_0, t_1]$ при $k \to \infty$,

б) функция $z(t, 1) = \lim\limits_{k \to \infty} z_k(t, \lambda)|_{\lambda=1}$ является решением (1), т. е. $z(t_1, 1) = x(t, x_0)$.

Доказательство сформулированных положений может быть выполнено, в основном, с помощью известных приемов, которые используются в теории дифференциальных уравнений [3]. С этой целью вместо (4) достаточно рассмотреть мажорирующий ряд

$$\eta_k(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \| \eta^{[\nu]}(t) \|,$$

где $\|\cdot\|$ есть какая-либо норма. Обозначив через $\Phi(t, \tau)$ фундаментальную матрицу, отвечающую (5), можно записать

$$\| \eta^{[\nu]}(t) \| = \left\| \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) \psi_\nu [\tau, z(\tau, 0), \eta^{[1]}(\tau), \ldots, \eta^{[\nu-1]}(\tau)] \, d\tau \right\| \leqslant \varphi M_\psi (t - t_0).$$

Здесь обозначено

$$\varphi = \max_{t, \tau} \| \Phi(t, \tau) \|, \quad M_\psi = \max_{\tau, \nu} \| \psi_\nu \|, \quad t, \tau \in [t_0, t_1].$$

Имея в виду эти соотношения, приходим к выводу, что на основании признака Даламбера ряд $\eta_k(t)$ сходится при $0 < \lambda \leqslant 1$ и $k \to \infty$. Отсюда вытекает справедливость первого положения.

Точно так же, используя известные приемы [3], можно показать, что $z(t, 1) = x(t, x_0)$.

Отметим, что изложенная процедура построения приближенных решений нелинейных систем основывается на результатах работы [4].

В качестве примера рассмотрим динамическую систему, движение которой подчиняется дифференциальному уравнению

$$S(p) x(t) = f(\varepsilon), \qquad \varepsilon(t) = u(t) - x(t) \tag{7}$$

при соответствующих начальных условиях. Здесь u — входное воздействие; x — выходная переменная, а $S(p)$ — дифференциальный оператор $\left(p \equiv \dfrac{d}{dt}\right)$.

Примем в дальнейшем, что нелинейная функция

$$f(\varepsilon) = k \varepsilon \exp(-\alpha \varepsilon^2), \tag{8}$$

где k, α — положительные постоянные. Вид нелинейной функции (8) при $k = 10$ и $\alpha = 0{,}5$ показан на рис. 1. Такими характеристиками обладают дискриминаторы радиотехнических устройств, которые при больших сигналах представляют собой существенно нелинейные элементы.

Возвращаясь к анализу рассматриваемой системы, запишем ее уравнение в виде

$$S(p) x(t) = k(u - x) \exp[-\alpha(u - x)^2]. \tag{9}$$

В соответствии с изложенной процедурой вместо (9) будем изучать новую систему

$$S(p)z(t, \lambda) = G[z(t, \lambda),\ u, \lambda], \tag{10}$$

определив функцию G следующим образом:

$$G\,[z\,(t, \lambda),\ u, \lambda] = \lambda\,k\,(u - z)\exp\,[-\alpha\,(u - z)^2]. \tag{11}$$

Имея в виду (10) и (11), получим дифференциальные уравнения для функций чувствительности

$$\begin{aligned} S\,(p)\,\eta^{[1]}\,(t) &= k\,(u - z_0)\exp\,[-\alpha\,(u - z_0)^2];\\ S\,(p)\,\eta^{[2]}\,(t) &= 2k\,\eta^{[1]}\,(t)\,[2\,\alpha\,(u - z_0)^2 - 1]\exp\,[-\,\alpha\,(u - z_0)^2] \end{aligned} \tag{12}$$

и т д. Эти уравнения должны интегрироваться при нулевых начальных условиях. При этом $z_0(t) = z(t, 0)$ определяется из уравнения

$$S(p)\,z_0\,(t) = 0 \tag{13}$$

при начальных условиях, соответствующих начальным условиям переменной $x(t)$ в исходном уравнении (7).

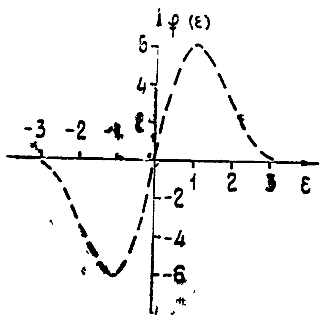

Рис. 1.

На рис. 2 приведено точное решение $x(t)$ и приближенное $z_2(t, 1) = \eta^{[1]}\,(t) + \dfrac{1}{2}\,\eta^{[2]}\,(t)$ для случая, когда $S(p) = p+1$ и $x(0) = 0$. Процессы построены при значительном входном сигнале $u(t) = 15\sin t$, при котором система заведомо работает в существенно нелинейном режиме.

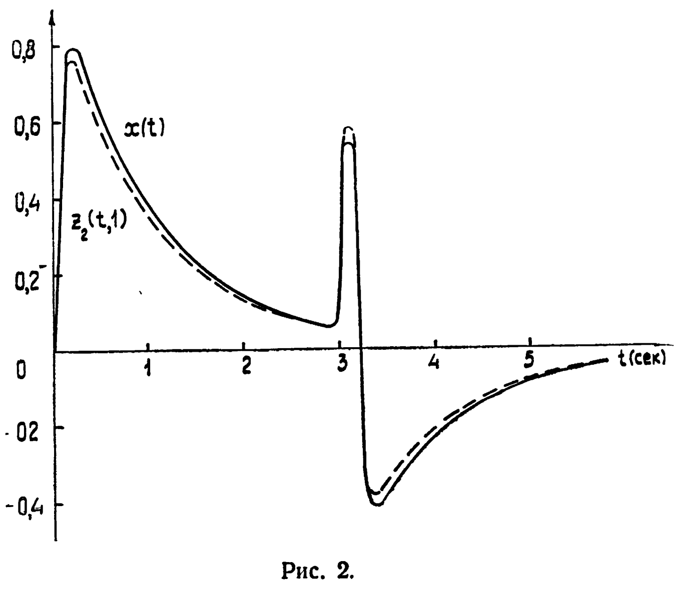

Рис. 2.

Приведенные результаты свидетельствуют о быстрой сходимости ряда (4), поскольку только учет функций чувствительности первого $\eta^{[1]}$ и второго $\eta^{[2]}$ порядков приводит к практическому совпадению процессов z_2 и x.

В заключение отметим, что условия применимости изложенной процедуры значительно шире сформулированных условий сходимости ряда (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, М, 1958.
2. М. Л. Быховский, Основы динамической точности электрических и механических систем, изд. АН СССР, М., 1958
3. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М, 1954.
4. П. Д. Крутько, ДАН СССР, 191, № 4, 766 (1970).

Поступила в редакцию
24 августа 1971 г.

GONSTRUCTION OF APPROXIMATE SOLUTIONS FOR NONLINEAR SYSTEMS

P. D. Krootko

The article presents an efficient method of approximate analysis based on representing the sought solution as a series in functions of sensitivity relative to a scalar parameter specially introduced into the motion equations. An example is considered.