ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1972

УДК 62—505

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАЛАГАЮЩИМИСЯ МАКРОПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКОГО ПОДХОДА

В. С. Лернер

Рассматривается оптимальное управление налагающимися макропроцессами при использовании в качестве критерия оптимальности «физического функционала», определяемого на траекториях процесса. Синтезирована оптимальная система управления, реализующая такой критерий.

ВВЕДЕНИЕ

Налагающиеся физико-химические явления: теплопроводность и электропроводность, диффузия, химические реакции и т. п.—характерны для многих объектов управления в металлургии, химии и др. областях. Построение управляемых моделей таких процессов имеет важное значение и для понимания некоторых явлений в биологии. Изучаемые налагающиеся макропроцессы имеют ряд специфических особенностей: тесное взаимодействие совместно протекающих элементарных процессов, появление необратимых потерь преобразования — диссипации; важнейшей из них является макроскопическая необратимость, «перемешивание» [1]. Взаимодействие налагающихся явлений можно рассматривать как управление одним процессом посредством другого, поэтому существование налагающихся процессов объективно связано с управлением в природе, познание которого важно и для совершенствования искусственно создаваемых управляемых систем. Изучаемые процессы связаны с появлением неопределенности в результате наложения заранее неизвестных физических явлений. Можно утверждать, что всякому наложению явлений свойственна некоторая неопределенность*. Поэтому актуальной проблемой исследуемых налагающихся процессов является управление в условиях неопределенности с изменяемыми во времени уравнениями и функционалом процесса. Решение ее для изучаемых налагающихся процессов связано с идентификацией уравнений и функционала процесса по результатам наблюдений. Первая задача рассмотрена в работе [2]; вторая — является предметом настоящей статьи. Для решения ее целесообразно использовать физические закономерности исследуемого класса объектов.

В настоящее время отсутствуют научно-обоснованные методы формулировки критериев оптимальности, что создает принципиальные трудности при решении задачи управления в условиях неопределенности. В качестве функционала процесса предлагается рассматривать интеграл на траекториях системы, аналогичный используемому Р. Фейнманом [3]. В [3] показана связь такого функционала, с одной стороны, с функцией Лагранжа («действием»), с другой, — с вероятностными характеристика-

* Неопределенность возникает, например, при наложении таких явлений, как поведение материальной частицы и изучение ее движения посредством наблюдения (измерения траекторий). Для объекта управления характерно наложение не менее трех процессов: управляющих; реакций других объектов (возмущающие воздействия) и изменений во времени выходных — фазовых координат — реакций объекта на управления и возмущения.

ми исследуемых случайных процессов. Интеграл по траектории — объективный функционал, характеризующий физические свойства конкретного процесса; в результате экстремума его находятся многие уравнения физики [3–5]. Рассматривая ансамбль исследуемых функционалов (получаемых при разных возмущающих и управляющих воздействиях в уравнениях системы), можно сформулировать задачу построения оптимальной системы, минимизирующей функционал в таком ансамбле. Особенность такого подхода — использование «объективного критерия», в силу которого система существует и определены уравнения ее движения. Интерес представляет получение таких обобщенных форм записи функционала и уравнений системы, в которые каждый наблюдаемый процесс вносит свое содержание. При этом в силу вариационного принципа минимума [3] обе эти задачи являются связанными.

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Исследуется открытая физическая макросистема (в смысле [6]), состояние которой в каждый момент характеризуется n-мерным вектором состояния $x^1(x_1, \ldots, x_n)$, r-мерным вектором управления $x^2(x_{n+1}, \ldots, x_{n+r})$ и случайным вектором внешних воздействий $f(f_1, \ldots, f_m)$. Координаты $x_1, \ldots, x_{n+r}$ наблюдаемы и измеряемы. Рассмотрим наблюдаемый процесс $[x^1(t), x^2(t)]$, определенный на интервале времени T и качественно характеризуемый некоторым функционалом

$$J = \int_T \Phi(x^1, x^2, t)\, dt \tag{1.1}$$

— критерием оптимальности, где $\Phi(x^1, x^2, t)$ — непрерывная, ограниченная выпуклая функция, принимающая значения на некотором ограниченном множестве Ω_Φ. Функции $x^1(t)$ и $x^2(t)$ связаны в силу уравнений системы

$$\dot{x}^1 = D(x^1, x^2, f), \tag{1.2}$$

в которые входит случайная функция времени $f(t)$. В силу этого $x^1(t)$ — некоторая случайная функция времени, принадлежащая к классу $\varkappa(T)$, значения которой принадлежат множеству Ω_x; $x^2(t)$ — некоторая функция времени, принадлежащая классу $U(T)$, определенная на множестве Ω_u; $f(t)$ принадлежит некоторому классу функций $F(T)$ и определена на множестве Ω_f. В соответствии с изложенным, функция $\Phi(x^1, x^2\, t)$ также является случайной. Поэтому интеграл (1.1) может рассматриваться в качестве функционала, зависящего от вектора случайных последовательностей — случайного процесса. Из (1.2) видно, что каждой реализации $\hat{x}^2(t)$ и $\hat{f}(t)$ соответствует некоторая функция $\hat{x}^1(t)$; а $\hat{x}^1(t)$, $\hat{x}^2(t)$ — функционал (1.1); множеству реализаций $\hat{x}^1(t)$, $\hat{x}^2(t)$ — ансамбль таких функционалов. Ввиду того, что множество Ω_Φ ограничено и процесс рассматривается на конечном промежутке времени T, множество значений функционала (1.1) Ω_J тоже ограничено. Функционал имеет некоторые наибольшие и наименьшие значения. Будем считать, что улучшению качества процесса соответствует уменьшение J. Тогда самым качественным является процесс, соответствующий наименьшему значению (1.1) J^0_0. Значение функционала J^0_0 получается при некоторых оптимальных $x^2_0(t)$ и $f_0(t)$, которым соответствует оптимальный процесс $x^1_0(t)$. Такой процесс $x^1_0(t)$, $x^2_0(t)$, $f_0(t)$ назовем глобально-оптимальным*. При любом

* Везде предполагаем существование как оптимальных, так и глобально-оптимальных управлений.

другом $f_i(t)$ можно путем подбора $x^2(t)$ добиться получения минимально возможного (при данном $f_i(t)$) значения критерия J_0^i

$$J_0^i = \min_{x^2(t)} \int_T \Phi(x^1(t), x^2(t), t)\, dt. \qquad (1.3)$$

Такие процессы $x_{0i}^1(t)$, $x_{0i}^2(t)$, $f_i(t)$ будем называть локально оптимальными. Теперь J_0^0 можно представить в виде

$$J_0^0 = \inf_{f_i \in \Omega_f} J_0^i. \qquad (1.4)$$

Все процессы в управляемой системе будем рассматривать по отношению к глобально-оптимальному, близость к которому характеризуем положительным критерием

$$\tilde{Q} = \Delta J = J - J_0^0. \qquad (1.5)$$

Тогда задачу приближения процесса $x^1(t)$, $x^2(t)$, $f(t)$ к глобальному оптимуму можно выразить так

$$\tilde{Q}_0^0 = \min_{\substack{x^2(t) \in \Omega_u \\ f(t) \in \Omega_f}} \tilde{Q}(x^1(t), x^2(t), t) \geqslant 0. \qquad (1.6)$$

Это условие можно рассматривать как формулировку задачи оптимального поведения системы, находящейся под воздействием возмущающих сил и управлений. Задача оптимального управления состоит в таком выборе $x_{0i}^2(t)$, при которых функционал

$$\tilde{Q}(x^1(t), x^2(t), t) \qquad (1.7)$$

принимает минимальное значение

$$\tilde{Q}_i^0 = \min_{x^2 \in \Omega_u} \tilde{Q}(x^1(t), x^2(t), t)\Big|_{f(t)=f_i(t)} \geqslant 0. \qquad (1.8)$$

Задача управления формулируется в виде условия минимума отклонения от состояния глобального оптимума, либо как борьба с нежелательными внешними воздействиями, создающими эти отклонения.

В дальнейшем используем обозначение управляемого процесса $x(t)\,(x^1(t), x^2(t))$, где $x(t)$ предполагаем принадлежащим множеству непрерывных и ограниченных функций $C(T)$, на котором определена плотность вероятности $p[x(t)]$.

Исследуемая система является физически реализуемой. Это понятие имеет следующее содержание: а) существует функционал в форме (1.1), (1.5); б) существуют уравнения движения в форме (1.2); в) искомый функционал (1.7) принимает минимальное (либо экстремальное) значение на наиболее вероятных траекториях из $C(T)$.

Основная задача — связать критерий (1.6), (1.8) с некоторой функцией, либо оператором (определенными в силу уравнений ее движения), которые можно восстановить по результатам наблюдений за этой системой (по траекториям системы, либо ее уравнениям). Особенность этой задачи, определяющая и методы ее решения, — использование «физичности» подхода (а, б).

В соответствии с изложенным, реализации функционала (1.5) $\omega_i \in \Omega_I$

являются случайными событиями, а Ω_I — пространством элементарных событий. В Ω_I естественно ввести вероятность

$$P(\omega < \tilde{Q} \leqslant \omega + \Delta\omega). \tag{1.9}$$

Далее рассмотрим множество случайных функций $x(t) \in C(T)$, которое разделим на подмножества $\varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}[x(t)]$, такие, чтобы каждому $\varkappa_i$ соответствовало значение функционала ω_i. Это необходимо, поскольку одно и то же ω_i можно получить при разных функциях $x(t)$. Итак, $x(t) \in \chi_{\omega, \omega+\Delta\omega}$, если

$$\omega < \tilde{Q} = \int_0^T \Phi^0(x^1, x^2, t)\, dt \leqslant \omega + \Delta\omega. \tag{1.10}$$

На множестве $C(T)$ введем некоторую плотность вероятности по траекториям $x(t) \cdot (1.2 : p[x(t)]$, являющуюся функционалом от реализаций $\hat{x}(t)$. Из определения $\varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}$ следует

$$p(\omega < \tilde{Q} \leqslant \omega + \Delta\omega) = p(x(t) \in \varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}), \tag{1.11}$$

где вероятность $x(t)$ принадлежать $\varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}$ можно записать через плотность вероятности $p[x(t)]$ так

$$p(x(t) \in \varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}) = \int_{\varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}} p[x(t)]\, D[x(t)], \tag{1.12}$$

$D[x(t)]$ — дифференциал по траекториям. Тогда плотность вероятности $p(\omega)$

$$p(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \int_{\varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}} p[x(t)]\, D[x(t)]. \tag{1.13}$$

Теперь плотности вероятности на множестве значений функционала связаны с вероятностями по траекториям; $p[x(t)]$ для данного вида функционала $\tilde{Q}$ характеризует $p(\omega)$. В дальнейшем, очевидно, нужно так управлять системой, чтобы приблизить наиболее вероятное значение функционала* к минимуму, который для функционала (1.5) равен нулю.

Эта задача может быть записана в следующей последовательности. Определение максимального по вероятности значения функционала

$$\max_{\omega \in \Omega_I} p(\omega) = \max_{\tilde{Q}} \lim_{\Delta\omega \to 0} \int_{\varkappa_{\omega, \omega+\Delta\omega}} p[x(t)]\, D[x(t)]. \tag{1.14}$$

Минимизация по $x(t)$ наиболее вероятного значения функционала (ω_0)

$$\min_{x(t)} \omega_0 [x(t)]. \tag{1.15}$$

В более общем случае минимизируется математическое ожидание функционала

$$\min_{x(t)} M(\omega) = \min_{x(t)} \int_{\Omega_I} \omega\, p(\omega)\, d\omega. \tag{1.15a}$$

Указанная процедура связана с минимизацией по множеству значений функционала, что требует знания функционала в форме (1.1), либо (1.5).

* Например, для гауссовой $p(\omega)$.

Решение основной задачи во многом упрощается, если использовать условия «физичности» (а—в).

Наиболее вероятные траектории определяются из условия максимума плотности вероятности

$$\max_{x(t) \in C(T)} p[x(t)] = p[x_0(t)]. \tag{1.16}$$

Соответствующее указанным траекториям, наиболее вероятное* значение функционала

$$\max_{\omega \in \Omega_I} p(\omega) = p(\omega_0), \tag{1.17}$$

где ω_0 — значение функционала $\tilde{Q}_0^0$ — является минимальным. Поэтому (1.17) является математическим аналогом критерия (1.6). Теперь задачу вероятностного приближения к глобальному оптимуму можно записать так

$$\max_{\omega \in \Omega_J} p(\omega) = p(\omega_0) \Rightarrow p[x_0(t)] = \max_{x(t) \in C(T)} p[x(t)]. \tag{1.18}$$

Соотношение (1.18) позволяет поставить в соответствие рассмотренному ансамблю функционалов ω_I, определенному в Ω_I, с некоторой $p(\omega)$, функционал плотности вероятности $p[x(t)]$. В итоге искомый критерий оптимальности может быть представлен в следующей, достаточно общей форме записи

$$\max_{x(t) \in C\smile T)} p[x(t)] \geqslant 0, \tag{1.19}$$

где обобщенный функционал $p[x(t)]$ для каждого наблюдаемого процесса имеет свое содержание и подлежит идентификации [2, 5]. Определим далее $p[x(t)]$ для исследуемого класса налагающихся процессов, изучаемого в теории необратимых процессов [6]. Согласно [6], $x(t_1, \dots, t_n)$ является марковским процессом. Для него $p[x(t)]$ в соответствии с формулой Смолуховского [3, 6] записывается в виде произведения условных плотностей вероятности

$$\begin{gathered} p_1(x_0, t_0/x_1, t_1)\, p_2(x_1, t_1/x_2, t_2)\dots \\ \dots p_n(x_{n-1}, t_{n-1}/x_n, t_n)\dots = \prod_{i=1}^{n\to\infty} p_i(x_{i-1}, t_{i-1}/x_i, t_i). \end{gathered} \tag{1.20}$$

Это достаточно общая модель случайных процессов, актуальная для многих задач управления. Условные плотности вероятности связаны между собой уравнением Фоккера — Планка — Колмогорова [6, 7]. При заданных уравнениях движения системы и соответствующих начальных условиях это уравнение можно разрешить [6, 8]. В [6] показано, что решением указанного уравнения при условиях, когда переменные x_i удовлетворяют уравнениям теории необратимых процессов, является условная плотность вероятности в форме

$$p(x_0/x_1, \Delta t_1) = \frac{p(x_0, 0)}{p(x_1, \Delta t_1)} \exp[-S(x_1 - x_0, \Delta t_1)]. \tag{1.21}$$

Записывая последовательно все условные плотности вероятности аналогично (1.21), имеем для $p[x(t)]$

---

* Либо математическое ожидание $M(\omega)$, в этом случае задаче (1.17) отвечает $\max_{x_0(t)} M\{p[x(t)]$ (1.19 а).

$$p[x(t)] = p[x_0, 0] \exp - [\Delta S_1 (x_1 - x_0, \Delta t_1) + \dots + \\ + \Delta S_n (x_n - x_{n-1}, \Delta t_n) + \dots],$$

либо

$$p[x(t)] = p(x_0, 0) \exp[- \Delta S(x(t)], \tag{1.22}$$

где

$$\Delta S[x(t)] = \sum_{i=1}^{n \to \infty} \Delta S_i (x_i - x_{i-1}, \Delta t_i). \tag{1.23}$$

Если начальную плотность вероятности записать аналогично (1.21) в форме

$$p(x_0, 0) = \exp - S(x_0, 0), \tag{1.24}$$

то условие максимума (1.19) приобретает вид

$$\max_{x(t)} p[x(t)] => \max_{x(t)} - \{S(x_0, 0) + \Delta S[x(t)]\} = \min_{x(t)} S[x(t)]. \tag{1.25}$$

а (1.19 а) запишется в виде

$$\max M\{p[x(t)]\} = \min M\{S[x(t)]\} = \max M\{-\ln p[x(t)]\}. \tag{1.25a}$$

Задача сводится к минимизации нового функционала $S[x(t)]$ — энтропии гауссова процесса, который выступает в роли обобщенного функционала процесса [5].

Если все условные плотности вероятности (1.20) представлены в форме (1.21), то максимум (1.19) сводится к максимизации плотности вероятности в каждый момент t_i $(i = 0, 1, \dots, \infty)$: начальной $p_0(x_0, 0)$ и всех последующих, а (2.25 а) — к минимизации информационной энтропии.

Задача решается, если минимизировать ΔS_i в каждый момент t_i

$$\max p[x(t)] \to \min \Delta S_i (\Delta x_i, \Delta t_i) \tag{1.26}$$
$$(i = 0, 1, \dots).$$

Приходим к условию минимума энтропии в каждый момент.

Для исследуемых физических процессов существует общее начало отсчета энтропии. На основе теоремы Нернста — Планка [9]*, физическая система имеет нулевую энтропию при полном отсутствии внешних сил $(f(t) \equiv 0)$. Этот режим соответствует абсолютному нулю, прекращению всякого движения $(x(t) \equiv 0)$ и поэтому в точности не может быть осуществим. В соответствии с этим условие

$$\max p(\omega) = \max_{x(t)} p[x(t)]^{**} \tag{1.27}$$

достигает верхнего предела при $f(t) \equiv 0$, т. е. для полностью детерминированного процесса. Для такого процесса $p(\omega)$ является δ-распределением при некотором ω_0. Нетрудно заметить, что указанное ω_0 есть нуль, поскольку при $x_0(t_0) \equiv 0$ (для энтропии абсолютного нуля) функционал (1.1), (1.5) также обращается в нуль. Поэтому состояние $\tilde{S} \equiv 0$, для которого $x_0(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv 0$, $\tilde{Q}_0^0 = 0$ (см. 1.6), будем называть идеальным оптимумом***. Термодинамическая вероятность [4] этого состояния равна 1; и для всех процессов, отличных от идеального оптимума, $\Gamma > 1$, а соответствующие значения энтропии $S > 0$.

---

* 3-е начало термодинамики

** Которое не требует привлечения гипотезы «физичности» (в).

*** Глобальный оптимум, вообще говоря, не совпадает с идеальным; его предполагаем физически реализуемым: идеальный оптимум используется в качестве начала отсчета энтропии. Однако требование обращения $\tilde{Q}_0$ в нуль при $\tilde{S} = 0$, соответствующее выполнению принципа минимума, накладывает определенные ограничения на выбор функционалов (1.1). Для исследуемых физически реализуемых процессов интеграл (1.6) при $S = 0$ $(x^1 = x^2 = 0)$ должен обращаться в нуль (где x^1, x^2 отсчитываются от состояния идеального оптимума).

Итак, использование 3-го начала термодинамики для исследуемых физических процессов позволяет обосновать гипотезу «физичности». Поэтому (1.27) для физической системы действительно является условием минимума функционала (1.5).

В дальнейшем для энтропии физической системы справедливы все соотношения [4, 6, 9]. Энтропия физической системы является функцией координат и времени $S(x, t)$. Поэтому, рассматривая процесс изменения энтропии во времени, (1.26) можно записать так

$$Q_0 = \min\left(S(x, t) + \frac{dS}{dt}\delta t\right), \tag{1.28}$$

где

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{1.29}$$

Для исследуемой системы справедлив принцип макроскопической необратимости, выражаемой H-теоремой Больцмана [4, 6, 9] о положительности макроскопической скорости $\frac{dS}{dt}$. В итоге приходим к следующим условиям оптимальности, реализующим (1.19), (1.28) [5]:

$$\min\frac{dS}{dt}(x, t) = 0; \tag{1.30}$$

$$Q_0 = \min\frac{\partial\Delta S}{\partial x}\dot{x} \geqslant 0, \tag{1.31}$$

где

$$v(x, t) = \exp\Delta S(x, t), \tag{1.32}$$

$$\Delta S = -\frac{1}{2}x'hx, \tag{1.33}$$

$$h = \{M[\hat{x}(t) - m_x)(\hat{x}(t) - m_x)']\}^{-1}. \tag{1.34}$$

С учетом результатов [2, 5] уравнения управляемой макросистемы можно записать в гамильтоновой форме

$$\Delta S = -\frac{1}{2}x'^1(\cdot)X \quad \left(X = -\frac{\partial\Delta S}{\partial x^1(\cdot)}\right) \text{ и}$$
$$x^1(\cdot) = x^1 + x^{21}, \tag{1.35}$$

x^{21} — вектор управления, приведенный к x^1,

$$\Delta S = -\frac{1}{2}x^{1\prime}(\cdot)h_{11}x^1(\cdot); \tag{1.36}$$

$$\dot{x}^1 = \frac{\partial H}{\partial X}; \qquad \dot{X} = -\frac{\partial H}{\partial x^1(\cdot)}, \tag{1.37}$$

где

$$H = \frac{d\Delta S_i}{dt} = \dot{x}^{1\prime}X. \tag{1.38}$$

Здесь в роли лагранжиана выступает отклонение энтропии, а гамильтонианом является производство энтропии $\left(\frac{d\Delta S_i}{dt}\right)$, являющееся мерой необратимости процесса. Критерий оптимальности (1.6), (1.19), (1.30), (1.31), (1.38) может быть записан в форме

$$Q_S = \min_{x^2} \Delta S(x^1(\cdot), t) \geqslant 0, \tag{1.39}$$

либо

$$Q = \max_{x^2 \in \Omega_u} H \leqslant 0; \tag{1.40}$$

поэтому задача уменьшения меры неопределенности системы (обычно решаемая при управлении в условиях неопределенности) здесь естественно сводится к минимизации ΔS — собственного лагранжиана системы. Критерий в форме (1.31) для исследуемого класса процессов обеспечивает минимум рассеивания энергии (диссипации) и поэтому максимальную эффективность («полезность») рассматриваемых процессов преобразования. Для замкнутой системы, включающей управляющее устройство (другие налагающиеся процессы), энтропия записывается в виде [5]

$$\Delta S = -\frac{1}{2} x^{1\prime} h_0 x^1, \tag{1.41}$$

где

$$r_0 = h_0^{-1} = M(x^1 x^{1\prime}), \tag{1.42}$$

и гамильтониан в форме

$$H = -\frac{\partial \Delta S}{\partial x^1} \dot{x}^1. \tag{1.43}$$

либо

$$H = -\frac{1}{2} x'^1 \dot{h}_0 (x^{21}) x^1. \tag{1.44}$$

Как и в случае (1.33), (1.34), (1.35) энтропия и H-функция могут быть восстановлены по результатам наблюдений [5]. Условие оптимальности (1.40), (1.44) открывает принципиальную возможность оптимизации налагающихся процессов на основе контроля косвенных физических параметров $h_0(t)$ (1.34), (1.42) (взамен $x^1(t)$). Этот критерий может быть реализован для электротехнологических (электрофизических) процессов, где $h_0(t)$ выступает в роли удельного сопротивления (матрицы диффузии) [5].

Максимум функции $\dfrac{d\Delta S_i}{dt} = -H$ приводит к процессам, оптимальным по быстродействию [5]. При этом соотношения работы [5] позволяют выразить начальные значения сопряженного вектора через статистические характеристики системы

$$X(0) = h_{11}(0) x^1(\cdot)(0), \tag{1.45}$$

где

$$r_{11}(0) = h_{11}^{-1}(0) = M[(x^1(0) + x^{21}(0))(x^1(0) + x^{21}(0)')]. \tag{1.46}$$

Возникает задача реализации рассмотренных условий минимума физического функционала (1.19), (1.25), (1.26), (1.30), (1.31), (1.38), (1.44) с целью построения системы оптимального управления, определения ее структуры и уравнений. Рассмотрение этих вопросов начато в [5], где показано, как решать задачу определения оптимальных управлений из условия минимума и максимума критерия (1.38), (1.39), (1.44) при заданных уравнениях объекта.

В данной работе указанные задачи решаются с более общих позиций, в равной мере применимых как к объекту, так и к управляющим устройствам. Кроме того, получено общее аналитическое решение задачи синтеза оптимальных уравнений, минимизирующих физический критерий, а также задачи дуального управления.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ МИНИМУМ ФИЗИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Построим систему оптимального управления, реализующую условия (1.30), (1.31). Подставляя (1.36) в (1.30), получим

$$(x^1 + x^{2\,1})' \dot{h}_{1\,1} (x^1 + x^{2\,1}) = -2 (\dot{x}^1 + \dot{x}^{2\,1}) h_{1\,1} (x^1 + x^{2\,1}). \tag{2.1}$$

Откуда, требуя выполнения (2.1) при любых $x^1 + x^{2\,1} = x^1(\cdot) \neq 0$, получим

$$\dot{x}^1 + \dot{x}^{2\,1} = -\frac{1}{2} h_{1\,1}^{-1} \dot{h}_{1\,1} (x^1 + x^{2\,1}). \tag{2.2}$$

Это дифференциальное уравнение системы, в которой выполняется (1.30). Рассматривая ту же систему в качестве замкнутой с выходной величиной x^1, применим к последней условие (1.30). Аналогично (2.1), (2.2), получим дифференциальное уравнение замкнутой системы

$$\dot{x}^1 = -\frac{1}{2} h_0^{-1} \dot{h}_0 x^1. \tag{2.3}$$

Обозначив оператор замкнутой системы $A_0 = -\dfrac{1}{2} h_0^{-1} \dot{h}_0$, запишем (2.3) в виде

$$\dot{x}^1 = A_0 x^1. \tag{2.4}$$

Если в той же замкнутой системе в качестве выходной величины взять $x^{2\,1}$, то аналогично (2.3), (2.4) получим

$$\dot{x}^{2\,1} = A_0 x^{2\,1}. \tag{2.5}$$

Поскольку используется одна и та же система, из (2.4), (2.5) и (2.2) имеем

$$A_0 (x^1 + x^{2\,1}) = A (x^1 + x^{2\,1}), \tag{2.6}$$

где оператор системы (2.2)

$$A = -\frac{1}{2} h_{1\,1}^{-1} \dot{h}_{1\,1}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) следует равенство $A_0 = A$, которое приводит к дифференциальному уравнению

$$\dot{r}_0 r_0^{-1} = \dot{r}_{1\,1} r_{1\,1}^{-1}. \tag{2.8}$$

Записывая операторы системы в форме (2.7), получим аналогично (2.8)

$$h_{1\,1}^{-1} \dot{h}_{1\,1} = h_0^{-1} \dot{h}_0. \tag{2.9}$$

Из совместного решения указанных уравнений после интегрирования получим

$$M(x^1(\cdot)\, x^{1\prime}(\cdot)) = M(x^1 x^{1\prime}). \tag{2.10}$$

Матричное соотношение (2.10) может удовлетвориться для всех $x^{2\,1} \neq 0$ лишь при условии

$$x_i^{2\,1} = -2 x_i^1 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.11}$$

Соотношение (2.11) определяет условия выбора таких управлений x_i^{21}, при которых выполняется

$$\Delta S(\tau_i) = \text{const};$$

энтропия замкнутой системы в форме (1.36) и (1.41) совпадает. Кроме того, при этом из уравнения (2.2) непосредственно следуют (2.3)—(2.5). Поскольку величина $\Delta S(\tau_i)$ определяется начальным состоянием системы в момент τ_i $(x^1(\tau_i))$, то

$$\Delta S(\tau_i) = -\frac{1}{2} x'^1(\tau_i) h_0(\tau_i) x^1(\tau_i). \tag{2.12}$$

Например, $\Delta S(\tau_0) = \Delta S(0) = -\frac{1}{2} x'^1(0) h_0(0) x^1(0)$. Ясно, что $\Delta S(\tau_0)$ и будет оптимальным при заданных $x^1(0)$*. Поэтому (2.11) является условием формирования оптимальных в указанном смысле управлений. Записываем $\Delta S(\tau_k)$ для исследуемых эргодических процессов в форме

$$\Delta S(\tau_k) = -\frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{i,k} x_i(\cdot)(t) x_k(\cdot)(t)}{\lim\limits_{t\to\tau_k} \frac{1}{\tau_k} \int\limits_0^t \sum\limits_{i,k} x_i(\cdot)(t) x_k(\cdot)(t) dt} = C_0, \tag{2.13}$$

где τ_k — интервал стационарности, на котором определяются математические ожидания

$$h^{-1}(\tau_k) = \frac{1}{\tau_k} \lim_{t\to\tau_k} \int\limits_0^t x^1(\cdot) x^{1\prime}(\cdot)\, dt.$$

Интегрируя (2.13) внутри фиксированного τ_k, получим

$$\lim_{t\to\tau_k} \int\limits_0^t \sum_{i,k} x_i(\cdot) x_k(\cdot) dt = 2 \lim_{t\to\tau_k} C \exp(-C_0 t/\tau_k).$$

Это выражение в матричной форме имеет вид

$$\lim_{t\to\tau_k} \int\limits_0^t x^{1\prime}(\cdot) x^1(\cdot) dt = \lim_{t\to\tau_k} 2C \exp(-C_0 t/\tau_k). \tag{2.14}$$

Дифференцируя (2.14) по t дважды, имеем

$$\lim_{t\to\tau_k} \frac{d}{dt} (x^{1\prime}(\cdot) x^1(\cdot)) = 2 \lim_{t\to\tau_k} \frac{d}{dt} [-(CC_0/\tau_k) \exp(-C_0 t/\tau_k)].$$

После перехода к пределу получаем

$$\dot{x}^{1\prime}(\cdot)(\tau_k) x^1(\cdot)(\tau_k) = 0. \tag{2.15}$$

Аналогично (2.14)—(2.15) получаем для энтропии замкнутой системы с выходным вектором x^{21} $\left(\Delta S = -\frac{1}{2} x^{21\prime} h_0 x^{21}\right)$ соотношение

$$\dot{x}^{21}(\tau_i) x^{21}(\tau_i) = 0. \tag{2.16}$$

Последнее для всех $x^{21}(\tau_i) \neq 0$ приводит к условию постоянства управлений на некотором интервале времени

* В смысле локального оптимума (см. раздел 1).

$$x^{21}(\tau_l) = C_l(\tau_l). \tag{2.17}$$

Таким же путем для энтропии замкнутой системы с выходным вектором $x^1\left(\Delta S = -\frac{1}{2}\dot{x}^1 h_0 x^1\right)$ получаем

$$\dot{x}^1(\tau_k)\, x^1(\tau_k) = 0. \tag{2.18}$$

Приходим к условию постоянства вектора x^1 в конце интервала τ_k для исследуемой системы

$$x^1(\tau_k) = C_k(\tau_k). \tag{2.19}$$

Полученные соотношения (2.17), (2.19) определяют постоянство x^1 и x^{21} по истечении некоторых интервалов времени (τ_l) и (τ_k) (где, вообще говоря, $\tau_l \neq \tau_k$). Внутри указанных интервалов $x^1(t)$ и $x^{21}(t)$ изменяются во времени, в силу исходных дифференциальных уравнений (2.2)—(2.5). Это означает возможность изменения $x^1(t)$ и $x^{21}(t)$ «внутри» данной физической системы (в процессе «перемешивания») — соответственно как в ОУ, так и в УУ; однако вне системы поступают только кусочно-постоянные значения указанных величин, для которых выполняются условия макроскопической необратимости в форме (1.30).

Аналогично (2.7)—(2.9) после записи r_0 через $M(x^{21}x^{21\prime})$, получим соотношение

$$M(x^{21}x^{21\prime}) = M(x^1(\cdot)\, x^{1\prime}(\cdot)). \tag{2.20}$$

Здесь выходным вектором является $x^{21}(t)$, а управлением $x^1(\tau_k)$ (2.19). Поэтому условие формирования оптимальных управлений (2.11), реализующих

$$\Delta S(x^{21}(\tau_l),\ x^{21\prime}(\tau_l)) = \text{const}, \tag{2.21}$$

имеет вид

$$x^1_j(\tau_k) = -2x^{21}_j(\tau_k) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.22}$$

В итоге, приходим к следующим условиям выполнения (2.15), (2.16), (2.18)

$$x^{21}_l(\tau_l) = C_l(\tau_l), \tag{2.23}$$

где в частности $C_l(\tau_l) = -2x^1_l(\tau_l)$,

$$x^1_k(\tau_k) = C_k(\tau_k), \tag{2.24}$$

где в частности $C_k(\tau_k) = -2x^{21}_k(\tau_k)$*.

Условие (2.15) при этом выполняется автоматически. Действительно, с учетом (2.24)

$$\Delta S\,[x^1(\cdot)(\tau_k)\, x^1(\cdot)(\tau_k)] =$$
$$= -\frac{1}{2}x^{21\prime}(\tau_k)\, h_{11}(x^{21}(\tau_k),\ x^{21\prime}(\tau_k))\, x^{21}(\tau_k) = C_1,$$

и с учетом (2.15)

$$\Delta S(x^1(\tau_l)(\cdot)\, x^{1\prime}(\tau_l)(\cdot)) = -\frac{1}{2}x^{1\prime}(\tau_l)\, h_{11}(x^1(\tau_l),\ x^1(\tau_l'))\, x^1(\tau_l) = C_2.$$

Условие (2.15), вообще говоря, приводит к

$$\dot{x}^1(\tau) = -\dot{x}^{21}(\tau) \tag{2.25}$$

* Кусочно-постоянные управления, удовлетворяющие (2.23), (2.24), в [5] названы «игольчатыми». Условие (2.17) можно получить и непосредственно из вариационного принципа для изучения марковских процессов.

для всех $x^1(\cdot) \neq 0$ и фиксированных τ, не обязательно совпадающих τ_i, τ_k. Поэтому для оптимального процесса, удовлетворяющего условиям макроскопической необратимости объекта управления (ОУ), управляющего устройства (УУ) и системы в целом, условия (2.23)—(2.25) должны быть совместны. Совмещение уравнения (2.2) и (2.23) приводит к уравнению ОУ в форме

$$\dot{x}^1(t) = A_1(x^1(t) + x^{21}(\tau_i)). \tag{2.26}$$

К ОУ при этом приложены кусочно-постоянные (дискретные) оптимальные управления (2.23). На выходе ОУ получаем процесс $x^1(x^1(0), x^{21}(\tau_i), t)$. Совмещение (2.2) и (2.24) приводит к уравнению УУ в форме

$$\dot{x}^{21}(t) = A_2(x^{21}(t) + x^1(\tau_k)). \tag{2.27}$$

К УУ при этом приложены кусочно-постоянные оптимальные управления (2.24); УУ, как и ОУ, является физической системой, в которой реализуются условия «физичности» и оптимальности. На выходе УУ получаем процесс $x^{21}(x^{21}(0), x^1(\tau_k), t)$. Уравнения (2.26), (2.27) приводят к структурной схеме рис. 1, в которой ОУ и УУ образуют замкну-

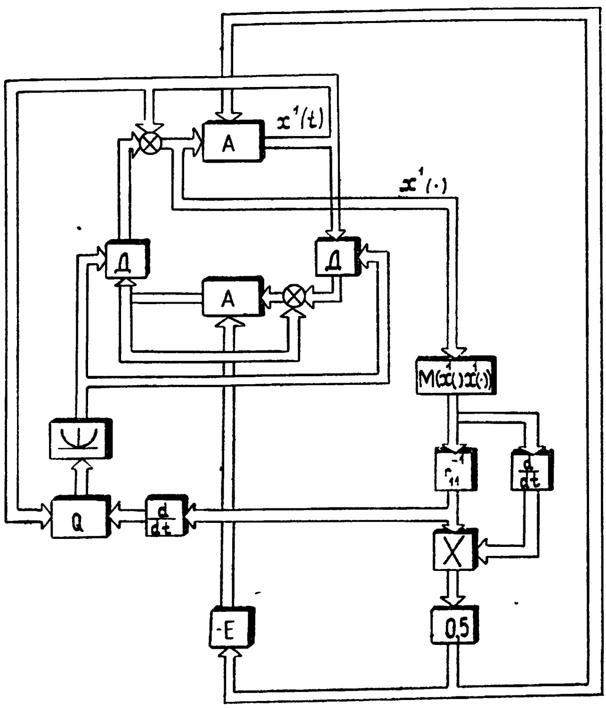

Рис. 1. Модель оптимальной САУ.

тую систему управления; для создания кусочно-постоянных значений x^1 и x^{21} использованы дискретизаторы D_1 и D_2, выделяющие из $x^1(t)$ и $x^{21}(t)$ соответствующие дискреты $x^1_y = x^1(\tau_k)$ и $x^{21}_y = x^{21}(\tau_i)$, которые поступают в качестве соответствующих управлений в уравнения (2.26) и (2.27). Определим далее операторы в уравнениях (2.26) и (2.27) соответственно. Уравнение (2.26) при оптимальных управлениях $x^{21}(\tau) = -2x'(\tau)$ и $x^{21}(0) = 0$ для ОУ записывается так

$$\dot{x}^1(\tau_0) = -A_1 x^1(0).$$

Уравнение (2.27) при $x^{21} = 0$ имеет вид

$$\dot{x}^{21}(\tau_0) = A_2 x^1(0).$$

С учетом выполнения условия (2.25) приходим к связи операторов в форме

$$A_1 = - A_2. \tag{2.27a}$$

Это означает, что одно из уравнений (2.26), (2.27) при $x^{21} = 0$ (либо $x^1(0) = 0$) имеет неустойчивые свободные решения.

Рассмотренная модель физической системы при устойчивом ОУ имеет неустойчивое УУ и наоборот. Изложенная двойственность при анализе ОУ и УУ связана с тем, что в замкнутой системе управления x^{21}, приложенные к объекту, являются независимыми координатами другой физической системы — ОУ, в которой в качестве управлений приложены $x^1(\tau)$ — независимые координаты объекта. Дифференциальные уравнения (2.26), (2.27) учитывают условия физической реализуемости как ОУ, так и УУ; в силу принципа причинности, изменение выходной величины ($x^{21}(t)$ и $x^1(t)$) происходит не скачком, а в течение конечного времени. Замкнутая система (2.2), (2.3), (2.26), (2.27), в которой выполняется условие $\Delta S = \text{const}$ (1.30), в соответствии с [5] имеет все предельно-ограниченные, т. е. устойчивые решения. Условие (1.30) адекватно ограничению объема фазового пространства, занимаемому ансамблем траекторий системы. Последнее, с физической точки зрения, приводит к выполнению условия статистического перемешивания [1], т. е. к расцеплению во времени корреляций переменных, характеризующих состояние системы*. При выполнении условия перемешивания обеспечивается эргодичность случайного процесса [1].

Оптимальные управления, удовлетворяющие (1.31), (1.41), (1.43), должны определяться на основе достаточного условия. Последнее для замкнутой системы имеет вид

$$\dot{Q}_0 = \min - \frac{1}{2} x^{1\prime} r^{-1} \dot{r} r^{-1} x^1. \tag{2.28}$$

При этом из множества дискретных управлений $x^{21}(\tau_i)$, $x^1(\tau_k)$ должны выбираться оптимальные, удовлетворяющие (2.28). Поскольку величины x^1_i и x^{21}_i выбираются на основе соотношений (2.11), (2.22), условие (2.28) может быть использовано для определения точек переключения τ_i, τ_k — интервалов дискретизации. Это реализуется посредством вычислительного устройства (ВУ) (Q) (рис. 1).

3. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ЕЕ ОПИСАНИЕ

Векторные переменные x^1 и x^{21}, характеризующие состояние объекта и УУ, в силу соотношений раздела 2, принимают как непрерывные, так и дискретные значения. Это существенно затрудняет математическое описание рассматриваемой дискретно-непрерывной системы автоматического управления (САУ). Пусть на вход УУ в течение фиксированного интервала τ_1 подается некоторое начальное $x^1(0) = C_1$, вызванное, например, возмущающимися силами $f(0)$. УУ в течение τ_1 вырабатывает непрерывные управления $x^{21}(t)/\tau_1$. В ОУ в течение этого же интервала совершается процесс $x^1(t)/\tau_1$. Дискретизатор в момент τ_1 выделяется и запоминает соответственно x^{21}_1 и x^1_1, которые будут приложены к объекту и регулятору соотвественно — в течение интервала τ_2 и т. д.

* Для обеспечения этого качества в динамической системе, как показано в [1 и др.], должны существовать неустойчивые свободные движения.

Внутри интервала дискретизации процесс в ОУ описывается дифференциальным уравнением (2.26), решение которого при постоянных x^{21} имеет вид:

$$x_k^1 = \exp(A_k \tau_k)\left(x_{k-1}^1 + x_{k-1}^{21}\right) - x_{k-1}^{21} \qquad (k = 1,\dots, n,\dots), \tag{3.1}$$

где $A_k = -\dfrac{1}{2} r_{k-1}^{-1} \dot{r}_{k-1}$.

Аналогично для УУ решение уравнения (2.24) при постоянных x_{k-1}^1 записывается в форме

$$x_k^{21} = \exp(-A_k \tau_k)\left(x_{k-1}^{21} + x_{k-1}^1\right) - x_{k-1}^1 \qquad (k = 1,\dots, n,\dots). \tag{3.2}$$

Если уравнения УУ имеет устойчивые свободные решения, то вместо (3.2) имеем

$$x_k^{21} = \exp(A_k \tau_k)\left(x_{k-1}^{21} + x_{k-1}^1\right) - x_{k-1}^1 \qquad (k = 1,\dots, n,\dots), \tag{3.3}$$

Поскольку коэффициенты уравнений r_{11} и $\dot{r}_{11}$ вычисляются на основе решений (3.1), (3,2), согласно (2.10), (1.42), (1.46), в процессе функционирования системы изменяются матрицы A_k и поэтому сами решения.

Особенность рассмотренной модели—одновременное протекание непрерывных процессов в ОУ и УУ в соответствии с уравнениями (2.26), (2.27) и одновременное переключение дискретов на их входах. При этом к ОУ и УУ в момент τ_0 приложены начальные $x^1(0)$ и $x^{21}(0)$. Оптимальные начальные управления на каждом интервале должны вычисляться согласно (2.11). Предполагая начальные значения x^1 и x^{21} на $(k-1)$-ом интервале известными, суммируя решения (3.1), (3.2), имеем

$$x_k^1 + x_k^{21} = \left(x_{k-1}^1 + x_{k-1}^{21}\right)[\exp(A_k \tau_k) + \exp(-A_k \tau_k) - E] \tag{3.4}$$

$$(k = 1,\dots, n,\dots).$$

Используя многократно соотношение (3.4), получаем следующее рекуррентное соотношение

$$x_n^1 + x_n^{21} = (x^1(0) + x^{21}(0)) \prod_{k=1}^{n} [\exp(A_k \tau_k) + \exp(-A_k \tau_k) - E]. \tag{3.5}$$

Вычитая из (3.3), (3.1), получим

$$x_k^1 - x_k^{21} = x_{k-1}^1 - x_{k-1}^1 \qquad (k = 0, 1,\dots, n), \tag{3.6}$$

что в общем случае приводит к

$$x_n^1 - x_n^{21} = \dots x_k^1 - x_k^{21} = \dots = x^1(0) - x^{21}(0). \tag{3.7}$$

Аналогично, рассматривая совместно решения (3.1), (3.3), получим

$$x_n^1 + x_n^{21} = (x^1(0) + x^{21}(0)) \prod_{k=1}^{n} [2\exp(A_k \tau_k) - E]. \tag{3.8}$$

Приведенные решения дифференциальных уравнений (2.26), (2.27) записаны в конце интервалов дискретизации (τ_k). Поэтому правомерным является совмещение их с соотношениями (2.17), (2.19); это и приводит к матричным выражениям (3.5)—(3.8). Заметим, что равенство произведений в (3.5), (3.8) нулю после k шагов является условием приведения исходной системы в начало координат. Действительно, условие абсолютного минимума ΔS в форме $\Delta S(x^1(\cdot), t) \equiv 0$ выполняется в состоянии идеального оптимума, когда

$$x_n^1 = -x_n^{21}.* \tag{3.9}$$

С учетом соотношений (3.5), (3.6), (2.11) это возможно при условии

$$x^1(0)\prod_{k=1}^{n}\left[\exp(A_k\tau_k)+\exp(-A_k\tau_k)-E\right]=0, \tag{3.10}$$

если система описывается уравнениями (3.1), (3.2) и когда

$$x^1(0)\prod_{k=1}^{n}\left[2\exp(A_k\tau_k)-E\right]=0 \tag{3.11}$$

при описании ОУ и УУ соответственно уравнениями (3.1), (3.3). В обоих случаях предполагается выполнение условий (2.11), (2.22). В рассмотренной системе достигается оптимизация процессов как в ОУ, так и в УУ, вообще говоря, при произвольных начальных состояниях (раздел 2). Этот наиболее общий случай, однако, не всегда интересен в технических приложениях. Иногда актуальна задача оптимизации процессов в УУ путем присоединения к нему «безынерционного» УУ. В этом случае уравнения системы остаются в форме (2.2); управления выбираются из условия (2.11), которое и определяет уравнение УУ. Для создания оптимальных управлений (2.11), прикладываемых непосредственно к объекту в дискретные интервалы τ_i, необходимо выбрать интервалы дискретизации из условия минимума критерия (2.28). С этой целью подставляем управления (2.11) в (2.2). Получим

$$x^1(t)=x^1(0)\prod_{i=1}^{n}\left[\exp(A_i\tau_i)-2E\right]. \tag{3.12}$$

Идеальный оптимум достигается при условии

$$x\left(t=\sum_i\tau_i\right)=x^1(0)\prod_{i=1}^{n}\left[\exp A_i\tau_i-2E\right]=0. \tag{3.13}$$

Решения уравнений (2.7), 2.10)—(3.13) дают моменты переключения оптимальных управлений (2.11), а также (2.22). Например, в случае (3.12) приходим к системе уравнений (в матричной форме) вида

$$x(0)\prod_{i=1}^{n}\left[\Sigma f_i(\lambda_i)\,z_i-2E\right]=0, \tag{3.13a}$$

где λ_i — характеристические числа матрицы $\sum_{i=1}^{n}A_i(\tau_i)\tau_i$;

$$Z_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i(\tau_i)-\lambda_j E}{\lambda_i-\lambda_j}.$$

Из множества возможных решений каждого из уравнений (3.13a)—(3.12) отбираются такие τ_i^0, которым соответствует минимум критерия (2.28). Рассматриваемая модель системы автоматического управления (САУ) показана на рис. 2*. Матрицы $h_{11}(t)$ непрерывно вычисляются в процессе управления и вводятся в качестве коэффициентов в дифференциаль-

* Заметим, что равенство (3 9) справедливо лишь в состоянии идеального оптимума. Для синтеза локального оптимума необходимо выполнить при каждом τ_i ($i=0, 1, \ldots, n$) соотношение (2.22); при этом остаются справедливыми условия (3 10), (3.11) Последнее при $x^{2\,1}(0)=-2x^1(0)$; $x_n^{2\,1}=-2\,x_n^1$; $x_n^1=0$ очевидно.

ные уравнения объекта и УУ. Из соотношения (2.11) следует необходимость включения УУ по схеме с отрицательной обратной связью. При

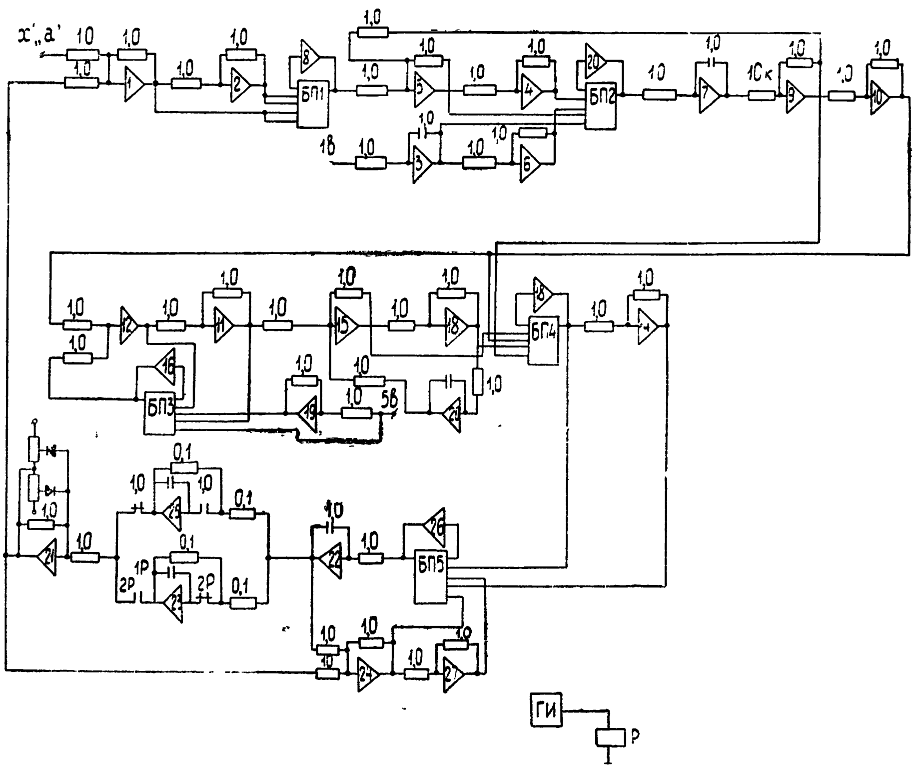

Рис. 2. Модель простейшей оптимальной системы на АВМ. БП1,..., БП5—блоки перемножения, 1 Р, 2 Р—реле, входящие в состав дискретизатора, x_M^{21}, x_M^1 — переменные модели; 1,.... 25—усилители; ГИ—генератор импульсов.

этом уравнение УУ (в форме (2.27) имеет неустойчивые свободные решения. Оптимальное управление рассмотренной САУ состоит в формировании таких интервалов дискретизации τ_k (моментов переключения), при которых критерий Q (2.28) принимает наименьшие значения. Входящие в (2.28) величины вычисляются на основе (3.1), (3.2), (1.42) по формулам

$$r_k = x_{k-1} x_{k-1} T_k^{-1} \int\limits_0^{T_k} [\exp(-A_k \tau_k) + \exp(A_k \tau_k) - E]' \times$$

$$\times [\exp(-A_k \tau_k) + \exp(A_k \tau_k) - E] \, d\tau_k, \tag{3.14}$$

$$\dot{r}_k = \frac{1}{T_k}\left(x'_k x_k - r_k\right), \tag{3.15}$$

где

$$A_k = \frac{1}{2} r_k \dot{r}_k^{-1}. \tag{3.16}$$

Соотношения (2.11), (3.10)—(3.12) дают решение задачи синтеза оптимальных управлений, минимизирующих физический функционал (1.18).

* Модель рис. 2, в частности, реализует на АВМ схему рис. 1 для случая одной переменной. τ_k — интервалы расцепления временных корреляций, $T_k \gg \tau_k$ — интервалы усреднения.

Формируемые при этом оптимальные управления определяют также оператор замкнутой системы $(A_0(x^{21}(\tau_i)))$ и обеспечивают максимальное по вероятности приближение решений $x^1(x^{21}, \tau_i)$ к наблюдаемому процессу. Мерой близости указанных процессов является энтропия (1.36), имеющая также информационное содержание, т. е. такое управление является оптимальным и в смысле «познания» управляемого процесса. С другой стороны, указанные оптимальные управления одновременно минимизируют обобщенную функцию потерь $Q = -H$, т. е. направляют процесс к идеальному оптимуму (в указанном смысле). Поэтому управления, минимизирующие физический функционал, приводят также к оптимальному решению задачи дуального управления [10]. Это связано с тем, что задачи изучения (идентификации) [2, 5] и управления имеют для исследуемых процессов общий критерий качества, имеющий физическое и информационное содержание [11].

В связи с этим рассмотрим задачу оптимизации объекта управления с n наблюдаемыми координатами вектора состояния $x^1(t)$ $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Для удобства формульной записи конечных соотношений предположим, что наблюдаемый процесс $x^1(t)$ является решением некоторого матричного уравнения

$$\dot{x}^1 = A(\tau_i)\, x, \tag{3.17}$$

коэффициенты которого, «замороженные» (при τ_i), могут, вообще говоря, изменяться в процессе наблюдения. Тогда при некотором постоянном управлении $x^{21}(\tau_i)$ матрица r определится из соотношения

$$\begin{gathered} r(\tau_i) = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T (x^1(\tau_i) + x^{21}(\tau_i)) \times \\ \times \exp\{[A'(\tau_i) + A(\tau_i)]\, t\}\, (x'(\tau_i) + x^{21}(\tau_i))'\, dt, \end{gathered} \tag{3.18}$$

из которого получаем

$$\begin{gathered} r(\tau_i) = \lim_{T\to\infty} T^{-1} (x^1(\tau_i) + x^{21}(\tau_i)) \times \\ \times (x^1(\tau_i) + x^{21}(\tau_i))' [A'(\tau_i) + A(\tau_i)]^{-1} [\exp\{[A'(\tau_i) + \mathrm{A}(\tau_i)]\, T\} - E] \ldots \end{gathered} \tag{3.19}$$

Теперь определяем

$$\begin{gathered} \dot{r}(\tau_i) = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T (x^1(\tau_i) + x^{21}(\tau_i))\, A'(\tau_i) + A(\tau_i) \times \\ \times \exp\{[A'(\tau_i) + A(\tau_i)]\, t\}\, (x'(\tau_i) + x^{21}(\tau_i)'\, dt, \end{gathered}$$

откуда получаем

$$\begin{gathered} \dot{r} = \lim_{T\to\infty} T^{-1} (x^1(\tau_i) + x^{21}(\tau_i))\, (x'(\tau_i) + x^{21}(\tau_i))' \times \\ \times A'(\tau_i)\, A(\tau_i)\, [A'(\tau_i) + A(\tau_i)]\, \{\exp[A'(\tau_i) + A(\tau_i))\, T] - E\}. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Исходный критерий (1.43), (1.44) с учетом уравнений теории необратимых процессов

$$\dot{x}^1 = LX \tag{3.21}$$

можно записать также в форме

$$H = -XLX, \tag{3.22}$$

либо, с учетом $L = -\dfrac{1}{2}\dot{r}$ [2, 5], в виде

$$H = \frac{1}{2} X' \dot{r} X. \tag{3.23}$$

Критерий (3.23) достигает абсолютного максимума, равного нулю, (для всех $X \neq 0$) при условии $r = 0$. Как следует из (3.20), это условие может быть выполнено (для всех $x^1(\tau_i) \neq 0$, $x^{2\,1}(\tau_i) \neq 0$), когда

$$A(\tau_i) = -A'(\tau_i). \tag{3.24}$$

Это матричное соотношение раскрывается так

$$a_{jj}(\tau_k) = 0; \quad a_{kj}(\tau_i) = -a_{jk}(\tau_i).$$

С учетом уравнений (3.16), (3.17) оптимум исходного критерия приводит к максимальному взаимодействию процессов ($x_j(t)$ и $x_k(t)$) и минимальному влиянию собственных процессов (x_j) на решения уравнения

$$\ddot{x}_j = \Sigma\, a_{jj} x_j + \Sigma\, a_{jk} x_k \qquad (j,\, k = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, для рассматриваемых объектов с налагающимися явлениями исходный критерий содержателен и приводит к наибольшему взаимному влиянию указанных явлений. В [5] обоснована возможность рассмотрения физического объекта с налагающимися макропроцессами в качестве физического преобразователя с управляемыми внешними потоками энергии и вещества. Мерой процессов преобразования в таком объекте является производство энтропии $\dfrac{d\,\Delta S_i}{dt}$ и критерий (3.23). При минимизации последнего, приходим к наиболее эффективным процессам преобразования процесса $x_j(t)$ в процесс $x_k(t)$ с минимальными собственными преобразованиями ($x_j(t)$ в $x_j(t)$). С энергетической точки зрения система переводится в такое оптимальное состояние, для которого вся энергия трансформируется в другие ее виды без потерь. При максимизации исходного критерия, напротив, достигается минимальное взаимное влияние налагающихся процессов; подведенная энергия рассеивается в данном процессе (x_j) при минимальной передаче ее другим процессам ($x_k(t)$). Процессы, для которых выполняется условие максимума производства энтропии, оптимальны по быстродействию [5]. Раскрывая условие (3.24), можно сформулировать также требования к оптимальной конструкции объекта, в котором реализуется минимум физического функционала.

В энтропийной теории преобразования с инвариантной мерой [12] рассматриваются математические преобразования ($\hat{T}$), мерой которых является информационная энтропия $h(\hat{T})$. Исследуемые физические преобразования описываются дифференциальными уравнениями (2.3), (2.4), решения которых (3.1), (3.10) могут быть представлены в форме

$$x_{n+1} = \hat{T} x_n,^*$$

где $\hat{T}$ — оператор преобразования, аналогичный изучаемым в [12]. Как и в [12], исследуемые преобразования имеют инвариантную меру $p = p(0)\exp\Delta S$ (см. (1.30), (1.32), (1.37), (2.13)) на каждом участке постоянства управлений. При этом условие $\Delta S = \mathrm{const}$ реализуется за счет организации управляемого процесса (при кусочно-постоянных $x^{2\,1}(\tau_i)$). Такие процессы обладают свойством перемешивания.

Изложенное связывает критерий с теорией информации. При этом величина $M\dfrac{d\,\Delta S_i}{dt}$ (аналогичная здесь $h(\hat{T})$) является информационной мерой преобразования. Учитывая, что $h(\hat{T})$ является инвариантом

* x_n, $x_{n+1}, \ldots$ — значения $x(\tau_k)$, соответствующие моментам (τ_k) расцепления корреляций.

сохраняющего меру преобразования, это открывает принципиальную возможность сравнительной оценки налагающихся процессов в различных объектах посредством критерия (1.19), (1.39), (1.40), (3.22).

Таким образом, использование собственного функционала определенного на траекториях системы, имеет конкретный физический и термодинамический смысл для исследуемых налагающихся процессов преобразования и задач управления*, так как связывает излагаемый подход как с математическими методами оптимальности управления, так и с теорией информации, открывая возможность введения общей оценки эффективности различных процессов преобразования. Исходя из поставленной задачи—уменьшить неопределенность системы, в работе сформулирован исходный функционал и найдены уравнения его экстремалей; ими оказались уравнения теории необратимых процессов. Оптимальные управления, минимизирующие этот функционал, позволяют более точно идентифицировать исследуемый процесс; обеспечивают минимальные случайные отклонения координат; создают процесс преобразования, отличающийся максимальной эффективностью.

Результаты настоящей работы помогают понять смысл «функционала на траектории», определить область его применения и изучить оптимальные системы, в которых реализуется минимум указанного критерия. Такой критерий, наряду с используемыми функционалами, имеет право на существование и применение во многих задачах оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, изд. Наука, М., 1970.
2. В. С. Лернер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 11, (1971).
3. Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд. Мир, М., 1968
4. Л. Д. Ландау, Е. И. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
5. В. С. Лернер, Применение физического подхода к некоторым задачам управления, изд. Картя Молдовеняскэ, Кишинев, 1969.
6. С. Р. Гроот, П. Мазур, Неравновесная термодинамика, изд Мир, М., 1964.
7. А А. Красовский, Статистическая теория переходных процессов в системах управления, изд. Наука, М, 1968
8. Р. Е. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, изд. Наука, М, 1964.
9. И П. Базаров, Термодинамика, Физматгиз, М, 1961.
10. А. А Фельдбаум, Основы теории оптимальных автоматических систем, изд. Наука, М, 1966
11. В. С. Лернер, В сб. Вопросы теории управляющих систем, изд. АН МССР, Кишинев, 1965
12. П. Биллингслей, Эргодическая теория и информация, изд. Мир, М, 1969.

Кишиневский политехнический институт

Поступила в редакцию 22 июня 1971 г.

OVERLAPPING MACROPROCESSES OPTIMAL CONTROL BASED ON PHYSICAL APPROACH

V. S. Lerner

The article considers an optimal control of overlapping macroprocesses using a „physical functional“ defined on the system trajectories as the optimality criterion. An optimal control system realizing such criterion is synthetized.

* Такой функционал, как показано в разделе 1, минимизирует случайные колебания координат, уменьшая воздействие на управляемый объект случайных возмущающих сил и может быть восстановлен по ковариационной матрице процесса.