ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XV, № 11 *РАДИОФИЗИКА* *1972*

УДК 62—501

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ*

А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк

Методами теории инвариантных многообразий точечных отображений исследуются системы с быстро вращающимися фазами Исследование условий существования интегральных многообразий проводится как в нерезонансном, так и в резонансном случаях.

Исследованию устойчивости стационарных резонансных состояний в системах дифференциальных уравнений с быстро вращающимися фазами посвящено довольно много работ. Их обзор изложен в работах [1—5]. Принятая в большинстве этих работ методика использует принцип усреднения для разделения быстрых и медленных движений.

В настоящей работе предлагается другой подход, использующий теорию инвариантных многообразий точечных отображений. Проводится исследование стационарных состояний как в нерезонансном, так и в резонансном случаях.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с быстро вращающимися фазами вида

$$\dot{\varphi} = \omega(x) + \mu\Phi(\varphi, x, \mu), \quad \dot{x} = \mu X(\varphi, x, \mu), \tag{1.1}$$

где $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r\}$, $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_s\}$, $\mu > 0$—малый параметр.

Правые части формул (1.1) предполагаются трижды непрерывно дифференцируемыми по переменным $x_1, \dots, x_s$, достаточное количество раз дифференцируемыми и периодическими с периодом 2π по угловым переменным $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

Известно, что в системе (1.1) имеет место резонанс, если для некоторого вектора x^p, для которого $\omega(x^p) \neq 0$, существует ненулевой целочисленный вектор $P = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, такой, что

$$P\cdot\omega(x^p) = p_1\omega_1(x^p) + p_2\omega_2(x^p) + \dots + p_r\omega_r(x^p) = 0. \tag{1.2}$$

Пусть x^p — одно из решений уравнения (1.2). Для дальнейшего существенно, сколько линейно-независимых целочисленных решений P допускает это уравнение при фиксированном значении x^p. Число этих решений m заключено между 1 и r—1. Таким образом, если для некоторого x^p $m \geqslant 1$, то x^p является решением m нелинейных уравнений вида (1.2), которые запишем в виде отдельной системы

$$P^1\omega(x^p) = P^2\omega(x^p) = \dots = P^m\omega(x^p) = 0. \tag{1.3}$$

Примем, что система (1.3) относительно x^p является системой общего

* Основные положения работы были изложены на Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений [6]. (Свердловск, июнь 1971 г.)

вида, тогда размерность многообразия ее решений относительно x^p равна $s-m$ и что это многообразие с помощью некоторых параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s-m}$ может быть в окрестности точки x^p представлено в виде

$$x_i = f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s-m}) \qquad i = 1, 2, \dots, s). \tag{1.4}$$

Далее будем различать случаи $m = s$, $1 \leqslant m < s$ и особый случай, когда $s < m$.

Вообще говоря, в последнем случае система (1.3) относительно x^p несовместна. Однако иногда существуют изолированные решения $x = x^p$ такой системы, представляющие практический интерес.

Рассмотрим одно из решений $x = x^p$ системы (1.3) при выполнении некоторого из перечисленных случаев. Как известно [3, 4], введя в рассмотрение расстройки $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ посредством формул

$$\psi_i = p_{i1}\varphi_1 + p_{i2}\varphi_2 + \dots + p_{ir}\varphi_r \qquad (i = 1, 2, \dots, m), \tag{1.5}$$

систему (1.1), заменяя m некоторых переменных $\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \dots, \varphi_{l_m}$ на такое же число переменных $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a(x) + \mu\Phi(\varphi, x, \psi, \mu), \\ \dot{\psi} &= b(x) + \mu\Psi(\varphi, \psi, x, \mu), \\ \dot{x} &= \mu X(\varphi, \psi, x, \mu), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где φ, ψ и x соответственно n-, m- и s-мерные векторы $(m + n = r)$.

В системе (1.6) компоненты вектора $b(x^p)$ равны нулю, а компоненты вектора $a(x^p)$, который будем впредь обозначать через ω, рационально линейно-независимы. Исследование системы (1.6) будем проводить раздельно для случая $m = 0$ $(n = r)$, когда система находится вдали от резонанса, и для случая $m > 0$, что соответствует резонансным состояниям системы (1.1).

2. Рассмотрим систему (1.1) вдали от резонансных состояний. В силу введенных ранее предположений имеет место разложение

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi, x, \mu) &= \overline{\Phi}(x) + \widetilde{\Phi}(\varphi, x) + \mu(\dots), \\ X(\varphi, x, \mu) &= \overline{X}(x) + \widetilde{X}(\varphi, x) + \mu\overline{Y}(x) + \mu\widetilde{Y}(\varphi, x) + \mu^2(\dots), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где средние значения $\widetilde{\Phi}(\varphi, x)$; $\widetilde{X}(\varphi, x)$ и $\widetilde{Y}(\varphi, x)$ по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ равны нулю, многоточия обозначают члены, ограниченные по норме вместе со своими производными.

Вектор x^0 будем называть стационарным нерезонансным, если он удовлетворяет уравнению

$$\overline{X}(x^0) = 0, \tag{2.2}$$

а компоненты вектора $\omega(x^0) = \omega$ рационально линейно-независимы.

Предположим, что действительные части собственных чисел матрицы $H = \dfrac{\partial \overline{X}(x^0)}{\partial x}$ отрицательны. Исследование будет проводиться в достаточно малой окрестности $S(\varphi, x^0, \varepsilon)$ стационарного состояния x^0, определяемой неравенством $\| x - x^0 \| \leqslant \varepsilon$.

Произведем в системе (1.1) замену

$$x = x^0 + \mu v + \mu x^* + \mu u(\varphi), \tag{2.3}$$

где v — новая переменная, вектор x^* и вектор-функция $u(\varphi)$ подлежат определению.

Система примет вид

$$\dot{\varphi} = \omega + \mu\left\{\frac{\partial\omega(x^0)}{\partial x}\,[v + x^* + u(\varphi)] + \overline{\Phi}(x^0) + \widetilde{\Phi}(\varphi,\ x^0)\right\} + \mu^2\Phi^*,$$

$$\begin{aligned}\dot{v} = &-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left\{\omega + \mu\left[\frac{\partial\omega(x^0)}{\partial x}(v + x^* + u(\varphi)) + \overline{\Phi}(x^0) + \widetilde{\Phi}(\varphi,\ x^0)\right] + \mu^2\Phi^*\right\} + \\ &+ \widetilde{X}(\varphi,\ x^0) + \mu\left(\frac{\partial\overline{X}(x^0)}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{X}(\varphi,\ x^0)}{\partial x}\right)(x^* + v + u(\varphi)) + \\ &+ \mu\overline{Y}(x^0) + \mu\widetilde{Y}(\varphi,\ x^0) + \mu^2X^*.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Посредством выбора функции $u(\varphi)$ и вектора x^* можно значительно упростить второе из уравнений (2.4). Вводим следующие предположения:

1) Функция $\widetilde{X}(\varphi,\ x^0)$ разлагается в ряд Фурье

$$\widetilde{X}(\varphi,\ x^0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \exp\left(j\sum_{i=1}^{n} k_i\varphi_i\right), \tag{2.5}$$

где коэффициенты $X_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ при некотором $M > 0$ и достаточно большом $N > 0$ удовлетворяют оценкам

$$\| X_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \| \leqslant M(|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|)^{-N}. \tag{2.6}$$

Оценки (2.5) заведомо имеют место, если функция $\widetilde{X}(\varphi,\ x^0)$ аналитическая, либо достаточное количество раз дифференцируема по переменным $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$.

2) Компоненты вектора $\omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$ удовлетворяют условиям сильной несоизмеримости [7]

$$|k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n| > K(|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|)^{-n-1} \tag{2.7}$$

для каждого набора $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$, для которого соответствующий коэффициент $X_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ в разложении (2.5) отличен от нуля.

Система (2.4) упростится, если выбрать функцию $u(\varphi)$, удовлетворяющую векторному уравнению

$$\frac{\partial u(\varphi)}{\partial\varphi}\,\omega = \widetilde{X}(\varphi,\ x^0). \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что при введенных дополнительных предположениях искомая функция $u(\varphi)$ представима в виде ряда

$$\begin{aligned}u(\varphi) = -j\sum_{-\infty}^{+\infty} X_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n)^{-1} \times \\ \times \exp\left(j\sum_{i=1}^{n} k_i\varphi_i\right),\end{aligned} \tag{2.9}$$

ограничена и дважды непрерывно дифференцируема при достаточно большом $N > 0$.

Система (2.4) еще более упростится, если выбрать вектор x^* как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \overline{X}(x^0)}{\partial x} x^* + \overline{Y}(x^0) + \overline{Z}(x^0) = 0, \tag{2.10}$$

где вектор $\overline{Z}(x^0)$ равен среднему значению по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ от функции

$$\begin{gathered} Z(\varphi, x^0) = \frac{\partial \widetilde{X}(\varphi, x^0)}{\partial x} u(\varphi) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \times \\ \times \left[\frac{\partial \omega(x^0)}{\partial x} u(\varphi) + \widetilde{\Phi}(\varphi, x^0) \right]. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Детерминант системы (2.10) отличен от нуля в силу предположения о собственных числах матрицы $\frac{\partial \overline{X}(x^0)}{\partial x}$. Таким образом, система (2.4) приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered} \dot{\varphi} = \omega + \mu F(\varphi, v, \mu), \\ \dot{v} = \mu H v + \mu V(\varphi, v, \mu), \end{gathered} \tag{2.12}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{gathered} F(\varphi, v, \mu) = \frac{\partial \omega(x^0)}{\partial x} (v + x^* + u(\varphi)) + \overline{\Phi}(x^0) + \\ + \widetilde{\Phi}(\varphi, x^0) + \mu \Phi^*(\varphi, v, \mu), \\ V(\varphi, v, \mu) = A(\varphi) + B(\varphi) v + \mu V^*(\varphi, v, \mu), \\ A(\varphi) = \frac{\partial \overline{X}(x^0)}{\partial x} u(\varphi) + \frac{\partial \widetilde{X}(\varphi, x^0)}{\partial x} x^* + \widetilde{Y}(\varphi, x^0) - \\ - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \omega(x^0)}{\partial x} x^* + \overline{\Phi}(x^0) \right) + Z(\varphi, x^0) - \overline{Z}(x^0), \\ B(\varphi) = \frac{\partial \widetilde{X}(\varphi, x^0)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega(x^0)}{\partial x}, \\ H = \frac{\partial \overline{X}(x^0)}{\partial x}. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Очевидно, что функции $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ имеют нулевые средние по всем угловым переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Системы уравнений типа (2.12) и более общие рассматривались многими авторами [5, 8, 9]. Эта система является частным случаем системы, рассмотренной в работе [8], когда в последней отсутствует вектор ϑ.

В соответствии с основной теоремой работы [8] имеет место

Теорема 1. Пусть в окрестности $S(\varphi, x^0, \varepsilon)$ стационарного состояния x^0 выполнены все предположения относительно гладкости правых частей системы (1.1), условия (2.7), а также предположения относительно собственных чисел матрицы $H = \dfrac{\partial \overline{X}(x^0)}{\partial x}$. Тогда существуют такие фиксированные числа ε_0 и μ_0, что при $\mu < \mu_0$ система (1.1) допускает гладкое многообразие вида

$$x = x^0 + \mu x^* + \mu u(\varphi) + \mu f(\varphi, \mu) \tag{2.14}$$

— единственное и устойчивое в области

$$\Pi(x^0, x^*, u(\varphi), \varphi): \ \| x - x^0 - \mu x^* - \mu u(\varphi) \| \leqslant \mu\varepsilon_0.$$

Функция $f(\varphi, \mu) \to 0$ при $\mu \to 0$.

В системе (1.1), по самому определению отсутствия резонанса, предполагается, что компоненты вектора $\omega(x^0) = \omega$ рационально линейно-независимы. Так как средние значения функций $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ равны нулю, то

$$\left\| \int_0^\tau A(\varphi + \omega\xi)\, d\xi \right\| + \left\| \int_0^\tau B(\varphi + \omega\xi)\, d\xi \right\| < \delta(\tau)\tau, \tag{2.15}$$

где $\delta(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$.

Вместо предположения о линейной независимости компонент вектора ω достаточно предположить выполнение условия (2.15), так как именно это условие и было использовано при доказательстве основной теоремы работы [8].

Отметим, что условие (2.15) может выполняться и при рационально зависимых компонентах вектора ω. Оно имеет место, если в разложениях функций $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ в ряды Фурье отсутствуют те гармоники $\exp\left(j\sum_{i=1}^{n} k_i\varphi_i\right)$, которые соответствуют выполнению равенства $k_1\omega_1 + \ldots \ldots + k_n\omega_n = 0$. Разумеется, в настоящей работе наряду с условием (2.15) требуется оценка (2.7).

Выясним теперь, как зависит требуемая теоремой 1 малость параметра μ от коэффициента K в неравенстве (2.7). Из доказательства основной теоремы работы [8] (согласно оценкам (19), (23), (28) этой работы) можно видеть, что величина τ должна быть выбрана достаточно большой так, чтобы функция $\delta(\tau)$, определяемая неравенством (2.15), была меньше некоторого фиксированного числа. Кроме того, величина $M^2\mu\tau$, где M — максимум норм функций $F(\varphi, v, \mu)$ и $V(\varphi, v, \mu)$, также должна быть меньше некоторого фиксированного числа. В связи с этим, естественно получить некоторые оценки, связанные с ростом норм функций $A(\varphi)$, $B(\varphi)$, $F(\varphi, v, \mu)$ и $V(\varphi, v, \mu)$ при $K \to 0$. Из разложения (2.9) функции $u(\varphi)$ в ряд Фурье следует, что при некотором $C_1 > 0$

$$\| u(\varphi) \| + \left\| \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \leqslant C_1 K^{-1}. \tag{2.16}$$

Из вида функции $Z(\varphi, x^0)$, системы (2.10) и оценки (2.16) следует, что некотором $C_2 > 0$

$$\| \overline{Z}(x^0) \| + \| F(\varphi, x_0) - \overline{Z}(x^0) \| + \| x^* \| \leqslant C_2 K^{-2}. \tag{2.17}$$

Согласно (2.13), (2.16) и (2.17) при некотором $C_3 > 0$

$$\begin{gathered} \| B(\varphi) \| \leqslant C_3 K^{-1}, \quad \| A(\varphi) \| \leqslant C_3 K^{-3}, \\ \| F(\varphi, v, \mu) \| \leqslant C_3 K^{-2}, \quad \| V(\varphi, v, \mu) \| \leqslant C_3 K^{-3}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Из (2.15) и (2.18) видно, что величина τ не более, чем порядка K^{-4}.

Таким образом, для справедливости теоремы 1 заведомо достаточно, чтобы при некотором $C > 0$ имела место оценка

$$\mu < C K^{+10}. \tag{2.19}$$

Принятая здесь методика доказательства теоремы 1, как и в других работах [3, 4], предполагает выполнение оценки (2.7), не имеющей места для всюду плотного множества векторов ω.

Можно, однако, показать, что и в этом всюду плотном множестве существует некоторое подмножество, для которого теорема 1, при выполнении всех остальных предположений, остается справедливой.

Действительно, пусть для некоторого вектора ω^* имеет место оценка (2.7) с соответствующей константой $K^* = K^*(\omega^*)$ и вектор $\omega(x^0)$ близок к вектору ω^*

$$\| \omega(x^0) - \omega^* \| \leqslant \delta < \mu < C K^{+10}(\omega^*). \tag{2.20}$$

Систему дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega^* + (\omega(x^0) - \omega^*) + \mu F(\varphi, v, \mu), \\ \dot{v} &= \mu H v + \mu V(\varphi, v, \mu), \end{aligned} \tag{2.21}$$

откуда в связи с (2.20) следует, что и в этом случае не нарушены условия существования устойчивого инвариантного многообразия. Заметим, что компоненты вектора $\omega(x^0)$ могут быть рационально линейно-зависимыми, однако, равенство $k_1 \omega_1(x^0) + \ldots + k_n \omega_n(x^0) = 0$ возможно лишь при

$$| k_1 | + | k_2 | + \ldots + | k_n | \geqslant \sqrt[n+2]{K^*/\delta}. \tag{2.22}$$

Оценка (2.22) следует из очевидного неравенства

$$\begin{gathered} | k_1 \omega_1(x^0) + \ldots + k_n \omega_n(x^0) | \geqslant | k_1 \omega_1^* + \ldots + k_n \omega_n^* | - \\ - | k_1 (\omega_1(x^0) - \omega_1^*) + \ldots + k_n (\omega_n(x^0) - \omega_n^*) | \geqslant \\ \geqslant K^* (| k_1 | + \ldots + | k_n |)^{-n-1} - \delta (| k_1 | + \ldots + | k_n |). \end{gathered}$$

3. Рассмотрим теперь систему (1.6) в резонансном случае, когда число расстроек m отлично от нуля. При введенных ранее предположениях относительно гладкости правых частей системы (1.1) имеют место разложения

$$\begin{aligned} X(\varphi, \psi, x, \mu) &= \overline{X}(\psi, x) + \widetilde{X}(\varphi, \psi, x) + \mu \overline{Y}(\psi, x) + \mu \widetilde{Y}(\varphi, \psi, x) + \mu^2(\ldots), \\ \Psi(\varphi, \psi, x, \mu) &= \overline{\Psi}(\psi, x) + \widetilde{\Psi}(\varphi, \psi, x) + \mu \overline{\Omega}(\psi, x) + \mu \widetilde{\Omega}(\varphi, \psi, x) + \mu^2(\ldots), \\ \Phi(\varphi, \psi, x, \mu) &= \overline{\Phi}(\psi, x) + \widetilde{\Phi}(\varphi, \psi, x) + \mu(\ldots), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где многоточия обозначают члены, ограниченные вместе со своими производными по норме. Средние значения функций $\widetilde{X}(\varphi, \psi, x)$, $\widetilde{Y}(\varphi, \psi, x)$, $\widetilde{\Psi}(\varphi, \psi, x)$, $\widetilde{\Omega}(\varphi, \psi, x)$ и $\widetilde{\Phi}(\varphi, \psi, x)$ по угловым переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ равны нулю. Для исследования системы (1.6) вблизи резонансной точки x^p произведем замену переменных

$$x = x^{\mathrm{p}} + \mu x^* + \mu^2 x^{**} + \mu z + \mu A(\varphi),$$
$$\psi = \psi^0 + \mu\psi^* + \mu y + \mu B(\varphi), \tag{3.2}$$

где z и y — новые переменные, функции $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$, а также посточнные векторы x^*, x^{**}, ψ^0 и ψ^* подлежат определению.

Система (1.6) примет вид

$$\dot{\varphi} = \omega + \mu\left[\frac{\partial a(x^{\mathrm{p}})}{\partial x}(x^* + z + A(\varphi)) + \overline{\Phi}(\psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \right.$$
$$\left. + \widetilde{\Phi}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}})\right] + \mu^2\Phi^*,$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial A(\varphi)}{\partial x}\left\{\omega + \mu\left[\frac{\partial a(x^{\mathrm{p}})}{\partial x}(x^* + z + A(\varphi)) + \overline{\Phi}(\psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\widetilde{\Phi}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}})\right] + \mu^2\Phi^*\right\} + \overline{X}(\psi^0, x^{\mathrm{p}}) +$$
$$+ \widetilde{X}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \mu\left(\frac{\partial\overline{X}}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial x}\right)(x^* + z + A(\varphi)) +$$
$$+ \mu\left(\frac{\partial\overline{X}}{\partial\psi} + \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\psi}\right)(\psi^* + y + B(\varphi)) + \mu\overline{Y}(\psi^0\, x^{\mathrm{p}}) + \mu\widetilde{Y}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \mu^2 X^*, \tag{3.3}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi}\left\{\omega + \mu\left[\frac{\partial a(x^{\mathrm{p}})}{\partial x}(x^* + z + A(\varphi)) + \overline{\Phi}(\psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \widetilde{\Phi}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}})\right] + \right.$$
$$\left. + \mu^2\Phi^*\right\} + \frac{\partial b(x^{\mathrm{p}})}{\partial x}(x^* + z + A(\varphi) + \mu x^{**}) + \frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 b(x^{\mathrm{p}})}{\partial x^2}(x^* + z + A(\varphi))^2 +$$
$$+ \overline{\Psi}(\psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \widetilde{\Psi}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \mu\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x} + \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial x}\right)(x^* + z + A(\varphi)) +$$
$$+ \mu\left(\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\psi} + \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial\psi}\right)(\psi^* + y + B(\varphi)) + \mu\overline{\Omega}(\psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \mu\widetilde{\Omega}(\varphi, \psi^0, x^{\mathrm{p}}) + \mu^2 Y^*.$$

Все функции в уравнениях (3.3) берутся при $x = x^{\mathrm{p}}$, $\psi = \psi^0$.

Определение стационарной резонансной точки (ψ^0, x^0) проводится в зависимости от соотношения между размерностью m вектора расстроек $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ и размерностью s вектора $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

1. При $m = s$ полагаем $x^0 = x^{\mathrm{p}}$, а компоненты вектора ψ^0 определяются как решение системы нелинейных уравнений

$$\overline{X}(\psi^0, x^0) = 0. \tag{3.4}$$

Предполагается, что система s уравнений (3.4) относительно $m = s$ неизвестных $\psi_1^0, \psi_2^0, \ldots, \psi_m^0$ имеет некоторое изолированное решение.

2. В случае $m < s$ в достаточно малой окрестности x^{p} существует резонансная гиперповерхность, определяемая формулами (1,4). Стационарное резонансное состояние (ψ^0, x^0) определяется как решение системы

$$x_i^0 = f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-m}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$
$$\overline{X}(\psi^0, x^0) = 0. \tag{3.5}$$

Предполагается, что и в этом случае существует изолированное решение системы (3.5).

3. В особом случае $m > s$ предполагалось существование изолированного решения x^p системы (1.3). Полагая $x^0 = x^p$, компоненты вектора ψ^0, а также вектора x^* находим как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} &\overline{X}(\psi^0, x^0) = 0, \\ &\frac{\partial b(x^0)}{\partial x} x^* + \overline{\Psi}(\psi^0, x^0) = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

При этом полагается, что ранг матрицы $\frac{\partial b(x^0)}{\partial x}$ равен s.

Как будет видно далее, в общем случае необходимо полагать, что ранг матрицы $\frac{\partial b(x^0)}{\partial x}$ равен $min(m, s)$. Таким образом, естественно предположение, что во всех трех случаях определяется изолированное стационарное состяние (ψ^0, x^0), а в особом случае и компоненты вектора x^*. Вследствие этого, исследование системы (1.6) производится в достаточно малой окрестности стационарного резонансного состояния

$$S(\varphi, x^0, \psi^0, \varepsilon): \| x - x^0 \| + \| \psi - \psi^0 \| \leqslant \varepsilon.$$

Систему (3.3) можно упростить, выбрав функции $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$, удовлетворяющие соотношениям.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi} \omega = \widetilde{X}(\varphi, \psi^0, x^0), \\ &\frac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi} \omega = \widetilde{\Psi}(\varphi, \psi^0, x^0) + \frac{\partial b(x^0)}{\partial x} A(\varphi). \end{aligned} \tag{3.7}$$

При этом примем, что

а) функции $\widetilde{X}(\varphi, \psi^0, x^0)$ и $\widetilde{\Psi}(\varphi, \psi^0, x^0)$ разлагаются в ряды Фурье

$$\begin{aligned} &\widetilde{X}(\varphi, \psi^0, x^0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \exp\left(j \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_i\right), \\ &\Psi(\varphi, \psi^0, x^0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \exp\left(j \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi_i\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где коэффициенты $X_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ и $\Psi_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ при некотором $M > 0$ и достаточно больших $N_1 > N_2 > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &\| X_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \| \leqslant M(|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|)^{-N_1}, \\ &\| \Psi_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \| \leqslant M(|k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|)^{-N_2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

б) компоненты вектора $\omega\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ удовлетворяют оценкам (2.7) для каждого набора $k_1, k_2, \ldots, k_n$, для которого соответствующие коэффициенты $X_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ и $\Psi_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ в разложении (3.8) отличны от нуля.

Выберем теперь векторы x^*, x^{**} и ψ^* как решение системы уравнений

$$\frac{\partial b(x^0)}{\partial x} x^* + \overline{\Psi}(\psi^0, x^0) = 0, \tag{3.10a}$$

$$\frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial x}x^* + \frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}\psi^* + \overline{Y}(\psi^0, x^0) + \overline{Z}_1 = 0, \tag{3.10б}$$

$$\frac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial x}x^* + \frac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}\psi^* + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x^0)}{\partial x^2}(x^*)^2 + \\ + \frac{\partial b(x^0)}{\partial x}x^{**} + \overline{\Omega}(\psi^0, x^0) + \overline{Z}_2 = 0, \tag{3.10в}$$

где $\overline{Z}_1$ и $\overline{Z}_2$ — средние значения по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ векторных функций

$$Z_1(\varphi) = -\frac{\partial A(\varphi)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial a(x^0)}{\partial x}A(\varphi) + \widetilde{\Phi}(\varphi, \psi^0, x^0)\right] + \\ \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial x}A(\varphi) + \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\psi}B(\varphi), \\ Z_2(\varphi) = -\frac{\partial B(\varphi)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial a(x^0)}{\partial x}A(\varphi) + \widetilde{\Phi}(\varphi, \psi^0, x^0)\right] + \\ + \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial x}A(\varphi) + \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial\psi}B(\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b(x^0)}{\partial x^2}A^2(\varphi). \tag{3.11}$$

Вопрос о существовании и отыскании решений системы (3.10) зависит от перечисленных ранее трех случаев.

А. При $m = s$ из уравнения (3.10 а) определяется вектор x^*, из уравнения (3.10 б) — вектор ψ^* и из последнего уравнения (3.10 в) — вектор x^{**}. Предполагается при этом, что детерминанты квадратных матриц $\frac{\partial b(x^0)}{\partial x}$ и $\frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}$ отличны от нуля.

Б. В случае $m < s$ из совокупности уравнений (3.10 а, б) определяются однозначно векторы x^* и ψ^*. Предполагается, что детерминант квадратной матрицы

$$I_1 = \left(\left(\begin{matrix} \frac{\partial b(x^0)}{\partial x}, & 0 \\ \frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial x}, & \frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi} \end{matrix}\right)\right)$$

отличен от нуля.

Система уравнений (3.10 в) для определения вектора x^{**} недоопределена. В качестве вектора x^{**} принимается одно из ее решений.

В. В особом случае $m > s$, как было ранее показано (3.6), векторное уравнение (3.10 а) использовалось для определения резонансного стационарного состояния (ψ^0, x^0) и одновременно вектора x^*.

Пусть детерминант квадратной матрицы

$$I_2 = \left(\left(\begin{matrix} \frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}, & 0 \\ \frac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}, & \frac{\partial b(x^0)}{\partial x} \end{matrix}\right)\right)$$

отличен от нуля. Система уравнений (3.10 б, в) позволяет однозначно определить векторы ψ^* и x^{**}.

Таким образом, система дифференциальных уравнений после выбора векторов x^*, ψ^* и x^{**} приводится к следующему виду

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega + \mu\Phi(\varphi, z, y) + \mu^2\Phi^*,\\
\dot{z} &= \mu F_{11}(\varphi) + \mu\,\frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial x}\,z + \mu\,\frac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}\,y +\\
&\quad + \mu F_{12}(\varphi)z + \mu F_{13}(\varphi)y + \mu^2 Z^*,\\
\dot{y} &= \mu F_{21}(\varphi) + \left[\frac{\partial b(x^0)}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 b(x^0)}{\partial x^2}\,x^* + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \frac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial x}\right)\right]z + \mu\,\frac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi}\,y +\\
&\quad + \mu F_{22}(\varphi)z + \mu F_{23}(\varphi)y + \mu^2 Y^* + \frac{\mu}{2}\,\frac{\partial^2 b(x^p)}{\partial x^2}\,z^2,
\end{aligned}
\qquad (3.12)
$$

где средние значения вектор-функций $F_{11}(\varphi)$, $F_{21}(\varphi)$ и матриц $F_{12}(\varphi)$, $F_{13}(\varphi)$, $F_{22}(\varphi)$, $F_{23}(\varphi)$ по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ равны нулю.

Будем рассматривать систему (3.12) в пространстве векторов (φ, v), где в качестве переменной v берется совокупность переменных z и y, причем $\|v\| = \|z\| + \|y\|$. При этом введем следующее обозначение

$$
H(\mu) = \left(\!\!\left(\begin{matrix} \mu\,\dfrac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial x}, & \mu\,\dfrac{\partial\overline{X}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi} \\[2ex] \dfrac{\partial b(x^0)}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 b(x^0)}{\partial x^2}\,x^* + \dfrac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial x}\right), & \mu\,\dfrac{\partial\overline{\Psi}(\psi^0, x^0)}{\partial\psi} \end{matrix}\right)\!\!\right). \qquad (3.13)
$$

Система дифференциальных уравнений примет окончательный вид

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \omega + \mu\Phi(\varphi, v) + \mu^2\Phi^*,\\
\dot{v} &= \mu F(\varphi) + H(\mu)v + \mu\mathbb{A}(\varphi)v + \mu^2 V^*.
\end{aligned}
\qquad (3.14)
$$

Асимптотика собственных значений и собственных векторов матрицы $H(\mu)$ рассмотрена В. М. Волосовым и Б. И. Моргуновым [3, 4]. Ими сформулированы достаточные условия, при которых все собственные значения различны и имеют отрицательные действительные части первого порядка малости μ:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}\lambda_i = -\mu a_i + \mu b_i(\mu),\\
a_i > 0;\quad \lim_{\mu\to 0} b_i(\mu) = 0\\
(i = 1, 2, \ldots, m + s).
\end{gathered}
\qquad (3.15)
$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть в окрестности $S(\varphi, x^0, \psi^0, \varepsilon)$ стационарного резонансного состояния (ψ^0, x^0) выполнены все предположения относительно гладкости правых частей системы (1.6), а также условия (2.7) и (3.15).

Тогда существуют такие фиксированные числа ε_0 и μ_0, что при $\mu < \mu_0$ система (1.6) допускает гладкое многообразие вида

$$
x = x^0 + \mu u^* + \mu^2 x^{**} + \mu A(\varphi) + \mu f_1(\varphi, \mu), \qquad (3.16)
$$

$$\psi = \psi^0 + \mu\psi^* + \mu B(\varphi) + \mu f_2(\varphi, \mu),$$

единственное и устойчивое в области

$$\Pi(x^0, \psi^0, x^*, \psi^*, x^{**}, \varphi): \begin{cases} \|x - x^0 - \mu x^* - \mu^2 x^{**} - \mu A(\varphi)\| \leqslant \varepsilon_0, \mu, \\ \|\psi - \psi^0 - \mu\psi^* - \mu B(\varphi)\| \leqslant \mu\varepsilon_0. \end{cases}$$

Функции $f_1(\varphi, \mu)$ и $f_2(\varphi, \mu)$ стремятся к нулю вместе с μ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Тр. симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1961, стр. 93.
2. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Лекции по методу интегральных многообразий, изд. Наукова думка, Киев, 1968.
3. В М. Волосов, Б И. Моргунов, Ж вычислит. матем. и мат. физики, **8**, № 2, 251 (1968).
4 В. М. Волосов, Б. И Моргунов, Пятая летняя математическая школа, Киев, 1968.
5. В М Волосов, Механика в СССР за 50 лет, **1**, изд. Наука, М., 1968, стр. 115.
6 Ю. И. Неймарк, А. С. Гуртовник, Всесоюзн. конф. по кач. теории диффер. ур., Тезисы докл., Свердловск, 1971
7. В. И. Арнольд, УМН, **18**, вып 6, стр. 91 (1963).
8. А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 11, 1597 (1969).
9 Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, изд. Мир. М , 1966.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 марта 1971 г.

INTEGRAL MANIFOLDS OF SOME NONLINEAR SYSTEMS

A. S. Gurtovnik, Yu. I. Neimark

Systems with quickly rotating phases are investigated using methods of the theory for invariant manifolds of point mappings. Existence conditions for the integral manifolds are studied in both nonresonance and resonance cases.