

УДК 621.371.255

**К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНЫХ  
СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

*А. И. Кон, В. И. Татарский*

Рассматривается функция взаимной когерентности для частично когерентного источника света в турбулентной среде. Исследуется поведение эффективного радиуса когерентности  $\rho_{эфф}$ , определяющего угловую ширину пучка. Рассматривается также зависимость средней интенсивности света в турбулентной среде от степени когерентности исходного пучка. Показано, что средние интенсивности для когерентного и некогерентного источников становятся близкими при достаточно сильном уровне турбулентности.

В настоящей работе рассматривается влияние турбулентных флуктуаций диэлектрической проницаемости на характеристики светового пучка, описываемые его функцией когерентности второго порядка. В большинстве теоретических работ, посвященных распространению света в неоднородной среде, рассматриваются источники чисто когерентного излучения. Однако степень когерентности источника в ряде случаев может оказаться существенным фактором, даже если мы интересуемся такой сравнительно грубой характеристикой, как средняя интенсивность света. Ниже рассматриваются источники частично когерентного излучения в турбулентной среде и исследуется влияние степени когерентности источника на характеристики светового пучка.

Рассмотрим источник света в плоскости  $x = 0$ . Его функция когерентности

$$\Gamma^0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \overline{u_0(\mathbf{R} + (1/2)\boldsymbol{\rho}) u_0^*(\mathbf{R} - (1/2)\boldsymbol{\rho})}, \tag{1}$$

где  $u_0$  — поле в плоскости  $x = 0$  и черта означает усреднение по флуктуациям поля  $u_0$ . Для полностью когерентного источника  $\Gamma^0$  имеет вид произведения

$$\Gamma_{\text{ког}}^0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = u_0(\mathbf{R} + (1/2)\boldsymbol{\rho}) u_0^*(\mathbf{R} - (1/2)\boldsymbol{\rho}), \tag{1a}$$

так что комплексная степень когерентности [1] в этом случае по модулю равна единице:

$$|\gamma(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})| = \frac{|\Gamma^0(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})|}{[|\Gamma^0(\mathbf{R} + (1/2)\boldsymbol{\rho}, 0) \Gamma^0(\mathbf{R} - (1/2)\boldsymbol{\rho}, 0)|]^{1/2}} = 1.$$

В турбулентной среде функция когерентности

$$\Gamma(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \langle u(x, \mathbf{R} + (1/2)\boldsymbol{\rho}) u^*(x, \mathbf{R} - (1/2)\boldsymbol{\rho}) \rangle,$$

где  $u(x, \mathbf{R})$  — поле на расстоянии  $x$  от источника и угловые скобки обозначают усреднение по флуктуациям диэлектрической проницаемости, удовлетворяет уравнению, полученному Долиным [2] (см. также [3-5]):

$$\frac{\partial \Gamma(x, \mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \Gamma + \frac{\pi k^2}{4} H(x, \boldsymbol{\rho}) \Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь

$$H(x, \rho) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e(x, \kappa) (1 - \cos \kappa \rho) d^2 \kappa \quad (3)$$

и  $\Phi_e(x, \kappa) = \Phi_e(x; 0, x_y, x_z)$  — трехмерная спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости, являющаяся плавной функцией продольной координаты  $x$ .

Решение уравнения (2) с начальным условием (1а) имеет вид [3]

$$\Gamma(x, R, \rho) = \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int d^2 R' \int d^2 \rho' \Gamma^0(R', \rho') \exp \left\{ \frac{ik}{x} (\rho - \rho') \times \right. \\ \left. \times (R - R') - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H \left[ x', \rho \frac{x'}{x} + \rho' \left( 1 - \frac{x'}{x} \right) \right] dx' \right\}. \quad (4)$$

Если считать входящую в (4) функцию  $\Gamma^0(R', \rho') = u_0(R' + (1/2)\rho') u_0^*(R' - (1/2)\rho')$  случайной и произвести усреднение по флуктуациям  $u_0$ , то мы получим выражение для функции  $\Gamma(x, R, \rho)$ , соответствующее частично когерентному источнику света с начальной функцией когерентности общего вида (1).

Рассмотрим теперь некоторые следствия формулы (4). Проинтегрируем (4) по  $R$  и введем обозначения

$$\gamma(x, \rho) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x, R, \rho) d^2 R, \quad \gamma_0(\rho) = \gamma(0, \rho). \quad (5)$$

Тогда на основании (4) получаем простое соотношение

$$\gamma(x, \rho) = \gamma_0(\rho) \exp \left[ - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H(x', \rho) dx' \right] \quad (6)$$

для усреднений по пучку функции когерентности [3].

Непосредственный физический смысл  $\gamma(x, \rho)$  заключается в том, что она определяет угловой спектр светового пучка. Действительно, если в плоскости  $x = \text{const}$  поместить линзу, перехватывающую весь пучок, и рассмотреть распределение интенсивности в ее фокальной плоскости, то среднее значение интенсивности  $I$  на расстоянии  $r$  от оптической оси линзы будет пропорционально

$$I(r) \sim \iint \gamma(x, \rho) \exp \left( \frac{ikr}{f} \rho \right) d^2 \rho, \quad (7)$$

где  $f$  — фокусное расстояние линзы. Таким образом, характерный масштаб функции  $\gamma(x, \rho)$  по  $\rho$  определяет угловую ширину пучка. Мы будем называть этот характерный масштаб «эффективным радиусом когерентности».

Следует отметить, что вводимый таким образом эффективный радиус когерентности не совпадает с радиусом когерентности, определяемым как характерный масштаб комплексной степени когерентности  $\gamma$ . Рассмотрим, например, чисто когерентный источник света с распределением поля в его плоскости в виде

$$u_0(\rho) = A \exp \left( - \frac{\rho^2}{2a^2} - \frac{ik\rho^2}{2F} \right). \quad (8)$$

Здесь  $a$  — характерный размер пучка,  $F$  — радиус кривизны его фазового фронта (если  $F < 0$ , то пучок расходящийся). Комплексная степень когерентности, соответствующая (8), равна по модулю единице, так что радиус когерентности такого источника равен бесконечности. В то же время функция  $\gamma_0(\rho)$ , соответствующая (8), равна

$$\gamma_0(\rho) = \pi a^2 |A^2| \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{k^2 a^2}{F^2} \right) \rho^2 \right] \quad (9)$$

и

$$\rho_{\Phi\Phi}^2 = \frac{4a^2 F^2}{k^2 a^4 + F^2}. \quad (10)$$

Если, например,  $|F| = \infty$ , то  $\rho_{\Phi\Phi} = 2a$ , хотя рассматриваемый пучок является полностью когерентным. Бесконечный радиус когерентности для источника типа (8) указывает на принципиальную возможность получения от него резкой интерференционной картины с  $I_{\min} = 0$ . Если, например, одно из отверстий интерферометра помещается на оси пучка, а второе — на расстоянии порядка  $a$  от него, то для получения интерференционной картины с  $I_{\min} = 0$  потребуется использовать ослабитель, выравнивающий интенсивности на обоих отверстиях. Если же такой ослабитель не используется, то интерференционная картина будет замыкаться на расстояниях порядка  $\rho_{\Phi\Phi}$ .

Таким образом,  $\rho_{\Phi\Phi}$  определяет не только угловую ширину пучка, но имеет также непосредственное отношение к возможности получения интерференционной картины, если при этом не используются амплитудно-фазовые корректоры.

Рассмотрим случай, когда источник света обладает частичной пространственной когерентностью. Пусть, например,

$$u_0(\rho_1) = A \exp \left[ -\frac{\rho_1^2}{2a^2} - \frac{ik\rho_1^2}{2F} + i\varphi(\rho_1) \right], \quad (8a)$$

где  $\varphi(\rho_1)$  — случайная фаза, имеющая среднее значение, равное нулю, и распределенная по гауссову закону. Если

$$\overline{[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]^2} = F(\rho_1 - \rho_2),$$

то для функции  $\Gamma^0(R, \rho)$  легко получить формулу

$$\Gamma^0(R, \rho) = |A^2| \exp \left[ -\frac{R^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{4a^2} - \frac{ik\rho R}{F} - \frac{1}{2} F(\rho) \right].$$

В этом случае функция  $\gamma_0(\rho)$  имеет вид

$$\gamma_0(\rho) = \pi a^2 |A^2| \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{k^2 a^2}{F^2} \right) \rho^2 - \frac{1}{2} F(\rho) \right].$$

Формула (9) получена с учетом известного равенства

$$\overline{\exp [i[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]]} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \overline{[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]^2} \right\}.$$

При дальнейших расчетах мы используем квадратичную аппроксимацию функции  $F(\rho)$ :

$$F(\rho) = \rho^2 / 2\rho_k^2,$$

где  $\rho_k$  — радиус когерентности источника, являющийся характерным

масштабом комплексной степени когерентности  $\gamma(\mathbf{R}, \rho)$ . Заметим, что  $\rho_k$  связано с угловой шириной пучка  $\psi_0$  (в области  $x \gg x_0$ , где сформировалась его диаграмма направленности) выражением

$$\psi_0 = \frac{1}{ka} \sqrt{1 + a^2/\rho_k^2} \quad \left( x \gg x_0 = \frac{ka^2 \rho_k}{\sqrt{a^2 + \rho_k^2}} \right),$$

позволяющим оценить  $\rho_k$ . Тогда

$$\gamma_c(\rho) = \pi a^2 |A^2| \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{k^2 a^2}{F^2} + \frac{1}{\rho_k^2} \right] \rho^2 \right\}. \quad (9a)$$

Вернемся к соотношению (6) и рассмотрим случай статистически однородной турбулентной среды, для которой структурная функция диэлектрической проницаемости может быть аппроксимирована выражением

$$D_\varepsilon(x, \rho) = C_\varepsilon^2(x) [(\rho^2 + l_0^2)^{1/3} - l_0^{2/3}]. \quad (11)$$

Структурной функции (11) соответствует спектральная плотность:

$$\Phi_\varepsilon(x) = N C_\varepsilon^2 l_0^{11/3} (x l_0)^{-11/6} K_{11/6}(x l_0), \quad (12)$$

$$N = [9 \cdot 2^{1/6} \pi^{3/2} \Gamma(5/3)]^{-1}.$$

Отметим, что представление спектральной плотности в виде (12) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные [6] по температурным флуктуациям как в инерционном, так и в вязком интервале спектра. С другой стороны, выражение (11) имеет достаточно простой вид, и им удобно аппроксимировать структурную функцию  $\varepsilon$  как в инерционном, так и в вязком интервале. Масштаб  $l_0$  связан с масштабом  $\lambda_0$ , определяемым как точка пересечения асимптотических разложений  $D_\varepsilon(\rho) \sim \rho^2$  и  $D_\varepsilon(\rho) \sim \rho^{2/3}$ , соотношением

$$\lambda_0/l_0 = 3^{3/4}.$$

Подставляя (12) в (3), после вычисления интеграла можно получить формулу

$$H(x, \rho) = M C_\varepsilon^2(x) [(\rho^2 + l_0^2)^{5/6} - l_0^{5/3}], \quad (13)$$

$$M = \frac{4\Gamma(7/6)}{5\sqrt{\pi}\Gamma(5/3)} \approx 0,464,$$

а в соответствии с (9), (13) и (16) найдем усредненную функцию когерентности в плоскости  $x$ :

$$\gamma(x, \rho) = \pi a^2 |A^2| \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\rho_k^2} + \frac{k^2 a^2}{F^2} \right) \rho^2 - \right. \\ \left. - \frac{\pi M}{4} k^2 \overline{C_\varepsilon^2} x [(\rho^2 + l_0^2)^{5/6} - l_0^{5/3}] \right\}, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$\overline{C_\varepsilon^2} = \frac{1}{x} \int_0^x C_\varepsilon^2(x') dx'.$$

Формула (14) позволяет исследовать поведение величины  $\rho_{\text{эфф}}$

в турбулентной среде. Если определить  $\rho_{эфф}$  как то значение  $\rho$ , при котором  $\gamma(x, \rho)$  убывает в  $e$  раз по сравнению с  $\gamma(x, 0)$ , то для  $\rho_{эфф}$  получим уравнение

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2 a^2}{F^2} + \frac{1}{\rho_k^2}\right) \rho_{эфф}^2 + \pi M \overline{C}_\varepsilon^2 k^2 x [(\rho_{эфф}^2 + l_0^2)^{5/6} - l_0^{5/3}] = 4, \quad (15)$$

решение которого имеет вид

$$\rho_{эфф}^2 = l_0^2 \left[ \left( \frac{B}{\alpha} \right)^6 \zeta(\gamma) - 1 \right]. \quad (16)$$

Здесь

$$B = \frac{1}{4} \pi M \overline{C}_\varepsilon^2 x l_0^{5/3} k^2, \quad \alpha = \frac{1}{4} l_0^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{k^2 a^2}{F^2} + \frac{1}{\rho_k^2} \right),$$

$$\gamma = \left( \frac{\alpha}{B} \right)^5 \left( 1 + \frac{\alpha + 1}{B} \right)$$

и  $\zeta(\gamma)$  — корень уравнения

$$\zeta + \zeta^{5/6} = \gamma. \quad (17)$$

В области  $\gamma \ll 1$ , которой соответствует  $\alpha \ll B$ , функция  $\zeta(\gamma)$  равна

$$\zeta(\gamma) \approx \gamma^{6/5}.$$

В этом случае

$$\rho_{эфф}^2 \approx l_0^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{B} \right)^{6/5} - 1 \right], \quad B \gg \alpha. \quad (18)$$

Если одновременно выполняются условия  $B \gg \alpha$ ,  $B \gg 1$ , то из (18) получаем

$$\rho_{эфф}^2 = \frac{6}{5} \frac{l_0^2}{B}, \quad B \gg \alpha, \quad B \gg 1, \quad (18a)$$

при этом эффективный радиус когерентности мал по сравнению с внутренним масштабом турбулентности  $l_0$ .

Если  $B \gg \alpha$ , но  $B \ll 1$ , т. е.  $\alpha \ll B \ll 1$ , то из (18) получаем

$$\rho_{эфф}^2 = \left( \frac{4}{\pi M \overline{C}_\varepsilon^2 x} \right)^{6/5}, \quad 1 \gg B \gg \alpha. \quad (18b)$$

В обоих случаях ((18a) и (18b)) радиус когерентности определяется только параметрами турбулентности и не зависит от исходных параметров пучка. Мы можем поэтому назвать случай  $B \gg \alpha$  случаем сильной турбулентности.

При условии  $\gamma \gg 1$ , которое может иметь место при  $B \ll \alpha$  или  $\alpha \approx B \ll 1$ , решение уравнения (7) принимает вид

$$\zeta(\gamma) = \gamma \left[ 1 - \gamma^{-1/6} + \frac{5}{6} \gamma^{-2/6} - \frac{55}{72} \gamma^{-3/6} + \dots \right],$$

а вместо (16) получаем

$$\rho_{эфф}^2 = \frac{4}{1/a^2 + k^2 a^2 / F^2 + 1/\rho_k^2} \left\{ 1 - B \left[ \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{5/6} - 1 \right] + O(B^2) \right\}. \quad (19)$$

Последняя формула относится к случаю слабой турбулентности, когда

эффективный радиус когерентности в основном определяется источником света.

Перейдем к рассмотрению средней интенсивности, которую можно получить из (4), полагая  $\rho = 0$ . В рамках прежней модели источника света после подстановки в (9) квадратичной аппроксимации функции  $F(\rho) \approx \rho^2/\rho_k^2$  выражение для  $\bar{I}(x, \mathbf{R}) = \Gamma(x, \mathbf{R}, 0)$  можно привести к виду

$$\bar{I}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \left( \frac{ka|A|}{x} \right)^2 \int_0^\infty J_0 \left( \frac{kR\rho'}{x} \right)' \times \\ \times \exp \left[ -\frac{g_1^2(x)}{4a^2} \rho'^2 - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H(x', \rho'(1-x'/x)) dx' \right] \rho' d\rho' \quad (20)$$

после интегрирования по  $\mathbf{R}'$  и угловой переменной, связанной с  $\rho'$ . Здесь введено обозначение

$$g_1(x) = \left[ 1 + k^2 a^4 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{F} \right)^2 + \frac{a^2}{\rho_k^2} \right]^{1/2} \quad (21)$$

Заметим, что радиус когерентности источника  $\rho_k$  входит в (20) только через параметр  $g_1(x)$ . Если рассмотреть чисто когерентный источник света, для которого  $\rho_k = \infty$ , то вместо  $g_1(x)$  будет входить функция

$$g(x) = \left[ 1 + k^2 a^4 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{F} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (21a)$$

и выражения (20), (21) совпадут с приведенными в [3]. Таким образом, неполная когерентность источника в отношении средней интенсивности эквивалентна некоторому изменению исходного радиуса кривизны  $F$ .

Рассмотрим подробнее выражение для средней интенсивности на оси пучка. Используем ту же модель (13) для функции  $H(x, \rho)$ , причем будем считать  $C_s(x) = \text{const}$ . Тогда для  $\bar{I}(x, 0)$  легко получить формулу

$$\bar{I}(x, 0) = I_0(x) p \int_0^\infty \exp \left\{ -pt - B \int_0^1 [(t\xi^2 + 1)^{5/6} - 1] d\xi \right\} dt, \quad (22)$$

где

$$p = \left( \frac{I_0 g_1(x)}{2a} \right)^2, \quad I_0(x) = \left( \frac{ka^2 A}{x g_1(x)} \right)^2,$$

а  $B$  определено (16). Величина  $I_0(x)$  представляет собой интенсивность на оси пучка, создаваемую тем же источником света в отсутствие турбулентности.

В случае малых  $p$  выражение (22) принимает асимптотическую форму:

$$\bar{I}(x, 0) = I_0(x) \int_0^\infty \exp(-t - \mu t^{5/6}) dt = I_0(x) f(\mu), \quad (23)$$

$$B p^{1/6} \ll 1,$$

где  $\mu = \frac{3}{8} B p^{-5/6}$ . Отметим, что выражение (23) легко получить непосредственно из (20) и для случая переменного  $C_s$ .

При условии  $B\rho^{1/6} \ll 1$  можно использовать асимптотику  $H(x, \rho) = MC_e^2(x) \rho^{5/3}$ , что после подстановки в (20) приводит к выражению (23), в котором

$$\mu = \frac{\pi M}{4} k^2 x \left( \frac{2a}{g_1(x)} \right)^{5/3} \int_0^1 C_e^2(\eta x) (1-\eta)^{5/3} d\eta. \quad (24)$$

Функция  $f(\mu)$  исследована в [3]. Здесь  $\mu = \frac{1}{2} D_{1, \text{сф}} \left( x, \frac{2a}{g_1(x)} \right)$ , где  $D_{1, \text{сф}}$  — средний квадрат флуктуаций комплексной фазы для сферической волны. Таким образом,  $\bar{I}$  зависит от среднего квадрата разности фаз на базе  $2a/g_1(x)$ . Если мы рассмотрим слабокогерентный источник, для которого  $\rho_k \ll a$ ,  $\rho_k \ll \frac{\lambda x}{a}$ , то  $g_1(x) \approx \frac{a}{\rho_k}$  и  $\frac{2a}{g_1} \approx 2\rho_k$ . В этом случае интенсивность зависит от среднего квадрата разности фаз на радиусе когерентности.

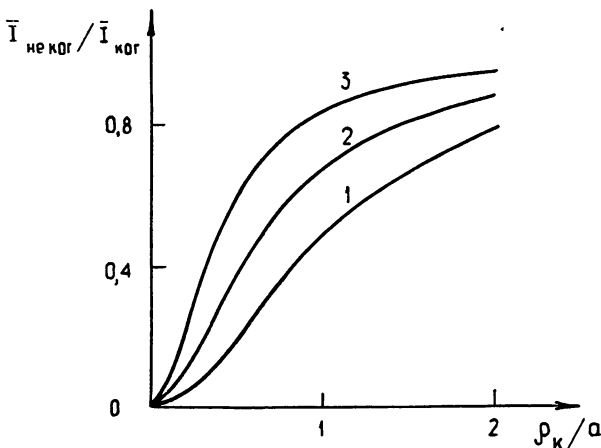


Рис. 1. Отношение средних интенсивностей на оси пучка для частично когерентного и полностью когерентного источников (кривая 1 — в отсутствие турбулентности, кривая 2 —  $\mu_{\text{ког}}=3$ , кривая 3 —  $\mu_{\text{ког}}=10$ ).

Отношение средней интенсивности на оси пучка для частично когерентного и полностью когерентного источников представлено на рис. 1 в зависимости от величины  $\rho_k/a$ . Различные кривые отличаются параметром  $\mu_{\text{ког}}$ , определяемым выражением (24), в котором  $g_1$  заменено на  $g$ . Если выполняются неравенства  $\mu_{\text{ког}} \gg 1$ ,  $\mu \gg 1$ , так что в обоих случаях справедлива асимптотическая формула [3]  $f(\mu) = 1,10 \mu^{-6/5} - 1,49 \mu^{-12/5} + \dots$ , то

$$\frac{\bar{I}_{\text{неког}}}{\bar{I}_{\text{ког}}} \approx 1 - 1,35 \left( \frac{1}{\mu^{6/5}} - \frac{1}{\mu_{\text{ког}}^{6/5}} \right) + \dots$$

и величины  $\bar{I}_{\text{ког}}$  и  $\bar{I}_{\text{неког}}$  близки друг к другу, т. е. в области  $\mu \gg 1$  средняя интенсивность уже не зависит от степени когерентности источника.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.  
 2. Л. М. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).

3. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
4. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 594 (1969).
5. M. Beran, J. Opt. Soc. Amer., 60, № 4, 518 (1970).
6. N. Boston, J. Fluid Mechanics (to be published).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
3 января 1972 г.

## TO THE THEORY OF PARTIALLY COHERENT LIGHT BEAM PROPAGATION IN TURBULENT ATMOSPHERE

*A. I. Kon, V. I. Tatarskii*

The function of mutual coherence is considered for a partially coherent light source in a turbulent medium. The behaviour of the effective radius of the coherence  $\rho_{\text{eff}}$  determining the angular beamwidth is investigated. The dependence of the mean light intensity in the turbulent medium on the initial beam coherence is also considered. It is shown that the mean intensities for coherent and incoherent sources become close at a sufficiently strong level of turbulence.

---