

УДК 621.373

РЕЖИМ БИЕНИЙ ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ ГЕНЕРАТОРА ВНЕШНЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОЙ СИЛОЙ

В. И. Королев

Рассматривается динамика генератора автоколебаний, находящегося под воздействием внешней синусоидальной силы. Получены укороченные уравнения первого и повторного усреднения. Для случая, когда нелинейность может быть представлена степенным рядом, исследованы режимы синхронизации и биений как внутри, так и вне полосы захватывания. Найдены условия устойчивости модулированного колебания. Рассмотрен пример, в котором нелинейная функция аппроксимирована полиномом пятой степени.

Строгое математическое рассмотрение явления синхронизации генератора автоколебаний внешней синусоидальной силой было впервые проведено в работе [1]. При аппроксимации анодно-сеточной характеристики электронной лампы полиномом третьей степени определена полоса синхронизации как для случая малых, так и больших сигналов. Показано, что при расстройках, находящихся вне полосы захватывания, существуют квазипериодические колебания (биения), которым на плоскости Ван-дер-Поля соответствуют предельные циклы.

В работах [2, 3] исследовано явление синхронизации генератора для случая, когда нелинейность может быть аппроксимирована полиномом пятой степени. В этих работах отмечено, что при такой нелинейности генератор, не возбужденный в отсутствие внешней силы, возбуждается при наличии внешнего сигнала определенной амплитуды и частоты. Это явление авторы назвали асинхронным возбуждением.

В работах [4, 5] исследована синхронизация генератора внешней синусоидальной силой для случая произвольной нелинейной функции, представленной степенным рядом. Здесь для случая, когда нелинейность может быть аппроксимирована полиномом седьмой степени, построены амплитудно-частотные характеристики, проведено разбиение плоскости «расстройка—амплитуда внешней силы» на области синхронизации и биений.

Однако в приведенных выше работах практически остался неосвещенным вопрос об условиях возникновения биений, зависимости их параметров от расстройки, устойчивости их стационарных амплитуд. Вместе с тем, вопрос об изучении режима биений в автоколебательных системах является актуальным потому, что в последнее время этот эффект используется в некоторых измерительных устройствах, например, в лазерных гироскопах.

В настоящей статье делается попытка рассмотреть динамику автоколебательной системы (режим периодических колебаний и режим биений), на которую действует внешняя синусоидальная сила. При этом предполагается, что нелинейность произвольна, но может быть представлена степенным рядом.

1. УКРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО И ПОВТОРНОГО УСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим укороченное уравнение в комплексной форме, приведенное в работе [4]:

$$\dot{z} = j\xi z + zF(zz^*) + j\varepsilon_0; \quad (1)$$

$$F(zz^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{n!(n+1)!} (zz^*)^n, \quad (2)$$

где z, z^* — медленно меняющиеся комплексно-сопряженные амплитуды, ξ — расстройка, ε_0 — амплитуда внешней силы. Переходя к переменным ρ и φ с помощью преобразования $z = \rho e^{i\varphi}$ и $z^* = \rho e^{-i\varphi}$, где ρ и φ — амплитуда и фаза вынужденных колебаний, уравнение (1) запишем в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho F(\rho^2) + \varepsilon_0 \sin \varphi, \\ \rho \dot{\varphi} &= \xi \rho + \varepsilon_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Состояния равновесия системы (3) определяются из алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 F(\rho_0^2) &= -\varepsilon_0 \sin \varphi_0, \\ \xi \rho_0 &= -\varepsilon_0 \cos \varphi_0, \end{aligned} \quad (4)$$

а их тип и устойчивость — коэффициентами характеристического уравнения

$$\rho^2 + 2(F + KF')\rho + F(F + 2KF') + \xi^2 = 0, \quad (5)$$

где $K = \rho^2$.

Из характеристического уравнения (5) следует, что граница устойчивости, граница сечел и граница фокусов описывается, соответственно, уравнениями вида

$$F + KF' = 0; \quad (6)$$

$$F(F + 2KF') + \xi^2 = 0; \quad (7)$$

$$K^2(F')^2 - \xi^2 = 0. \quad (8)$$

После исключения фазы φ_0 из системы уравнений (4) получим уравнение семейства амплитудно-частотных характеристик в разрешенном относительно расстройки ξ виде

$$\xi^2 = \pm \left[\frac{\varepsilon_0^2}{K} - F^2(K) \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Качественный ход амплитудно-частотных характеристик определяется видом и взаимным расположением границ (6), (7), (8). Вид и взаимное расположение указанных границ, в свою очередь, определяются координатами точек пересечения с положительной полуосью K плоскости ξK . Число таких точек пересечения зависит от параметров (коэффициентов) нелинейной функции $F(K)$.

Для нахождения условий возникновения предельных циклов на плоскости Ван-дер-Поля и изучения зависимости их параметров от расстройки перейдем к новым переменным $u = z - z_0$, $u^* = z - z_0^*$, представляющим собой отклонения комплексных амплитуд от их равно-

весных значений. В новых переменных уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{u} = j\xi u + (z_0 + u) F(z_0 + u, z_0^* + u^*) - z_0 F(z_0, z_0^*), \quad (10)$$

где, согласно выражению (2),

$$\begin{aligned} F(z_0 + u, z_0^* + u^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{n!(n+1)!} [(z_0 + u)(z_0^* + u^*)]^n = \\ &= \sum_{\substack{\gamma, \nu, \\ m, n} = 0}^{\infty} \frac{a_{2(n+m+\gamma+\nu)+1}}{\gamma! \nu! m! n! (m+n+\gamma+\nu+1)!} z_0^{\gamma+\nu} z_0^{* \gamma+m} u^{n+m} u^{* n+\nu}. \end{aligned} \quad (11)$$

При переходе состояния равновесия через границу устойчивости (6) на плоскости ξK устойчивый фокус переходит в неустойчивый, а из сложной особой точки рождается предельный цикл. Поэтому можно считать, что в некоторой окрестности границы устойчивости (6) величина отклонения u от состояния равновесия изменяется по закону, близкому к гармоническому*, т. е.

$$u = w e^{i\Omega t}, \quad u^* = w^* e^{-i\Omega t}. \quad (12)$$

С учетом выражений (11) и (12) уравнение (10) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{w} &= j(\xi - \Omega) w + z_0 \sum_{\substack{\gamma, \nu, \\ m, n} = 0}^{\infty} \frac{a_{2(n+m+\gamma+\nu)+1}}{\gamma! \nu! m! n! (m+n+\gamma+\nu+1)!} \times \\ &\quad \times z_0^{\gamma+\nu} z_0^{* \gamma+m} w^{n+m} w^{* n+\nu} e^{i(m-\nu-1)\Omega t} + \\ &+ w \sum_{\substack{\gamma, \nu, \\ m, n} = 0}^{\infty} \frac{a_{2(n+m+\gamma+\nu)+1}}{\gamma! \nu! m! n! (m+n+\gamma+\nu+1)!} z_0^{\gamma+\nu} z_0^{* \gamma+m} w^{n+m} w^{* n+\nu} \times \\ &\quad \times e^{i(m-\nu)\Omega t} - z_0 F(z_0, z_0^*) e^{-i\Omega t}. \end{aligned} \quad (13)$$

При усреднении по явно входящему времени сумм, стоящих в правой части уравнения (13), отличные от нуля величины дадут только те члены, для которых выполняются следующие условия:

- а) для первой суммы — $m = \nu + 1$,
- б) для второй суммы — $m = \nu$.

В результате получим укороченное уравнение повторного усреднения:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= j(\xi - \Omega) w + z_0 z_0^* w \sum_{\gamma, \nu, n=0}^{\infty} \frac{a_{2(2\nu+\gamma+n)+3}}{\gamma! n! (\nu+1)! \nu! (2\nu+\gamma+n+2)!} \times \\ &\quad \times (z_0 z_0^*)^{\gamma+\nu} (w w^*)^{n+\nu} + w \sum_{\gamma, \nu, n=0}^{\infty} \frac{a_{2(2\nu+\gamma+n)+1}}{\gamma! n! (\nu!)^2 (2\nu+\gamma+n+1)!} (z_0 z_0^*)^{\gamma+\nu} (w w^*)^{n+\nu}. \end{aligned} \quad (14)$$

* Вдали от границы устойчивости закон модуляции не будет гармоническим и количественные характеристики для амплитуд нарушатся. Однако, качественное исследование процесса установления амплитуды биений, по-видимому, будет справедливым.

Перейдем от переменных ω , ω^* , z_0 , z_0^* к новым переменным r , θ , ρ_0 , φ_0 с помощью преобразования

$$\omega = re^{j\theta}, \quad \omega^* = re^{-j\theta}, \quad z_0 = \rho_0 e^{j\varphi_0}, \quad z_0^* = \rho_0 e^{-j\varphi_0}, \quad (15)$$

где r — глубина модуляции, θ — фаза модулированных колебаний.

В новых переменных уравнение (14) запишется в виде системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \Phi(r, \rho_0), \\ r\dot{\theta} &= r(\xi - \Omega), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(r, \rho_0) &= \rho_0^2 \sum_{\gamma, \nu, n=0}^{\infty} \frac{a_{2(2\nu+\gamma+n)+3}}{\gamma! n! (\nu!) (\nu+1)! (2\nu+\gamma+n+2)!} \rho_0^{2(\gamma+\nu)} \times \\ &\times r^{2(n+\nu)} + \sum_{\gamma, \nu, n=0}^{\infty} \frac{a_{2(2\nu+\gamma+n)+1}}{\gamma! n! (\nu!)^2 (2\nu+\gamma+n+1)!} \rho_0^{2(\gamma+\nu)} r^{2(n+\nu)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Состояния равновесия системы (16) определяются уравнениями

$$\begin{aligned} r_0 \Phi(r_0, \rho_0) &= 0, \\ r_0 (\xi - \Omega) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из второго уравнения системы (18) следует, что для глубины модуляции r , отличной от нуля, частота модуляции Ω пропорциональна расстройке ξ . Из первого уравнения видно, что $r_0 = 0$ является состоянием равновесия — устойчивым, если

$$\Phi(r_0, \rho_0) < 0, \quad (19)$$

и неустойчивым в противном случае. Ненулевые состояния равновесия находятся из уравнения

$$\Phi(r_0, \rho_0) = 0. \quad (20)$$

Присоединяя к уравнению (20) уравнение (9), получим систему уравнений

$$\xi = \pm \left\{ \frac{\varepsilon_0^2}{\rho_0^2} - [F(\rho_0^2)]^2 \right\}^{1/2};$$

$$\Phi(r_0, \rho_0) = 0,$$

определяющую зависимость равновесной глубины модуляции r_0 от расстройки ξ через параметр ρ_0 . Устойчивость стационарной амплитуды биений определяется из первого уравнения системы (16), линеаризованного в окрестности состояния равновесия. Стационарная амплитуда биений будет устойчива, если выполняется неравенство

$$\Phi'_r(r_0, \rho_0) < 0, \quad (21)$$

и неустойчива, если выполняется неравенство, обратное последнему.

Если из системы уравнений (9) и (20) исключить величину ρ_0 , получим зависимость $r_0 = r_0(\xi)$ в явной форме. Однако исключение параметра ρ_0 не всегда представляется возможным. В таких случаях

целесообразно провести графическое построение кривых, определяемых уравнениями (9) и (20), с целью исключения ρ_0 .

Уравнение (9) определяет семейство амплитудно-частотных характеристик на плоскости $\xi\rho_0$. Все характерные особенности поведения этих кривых были отмечены в работе [4].

Опишем наиболее характерные особенности в поведении кривой $\Phi(r_0, \rho_0) = 0$. По физическому смыслу ρ_0 и r_0 суть положительные величины, поэтому будем исследовать только те участки кривой $\Phi(r_0, \rho_0) = 0$, которые расположены в первом квадранте плоскости $\rho_0 r_0$. Вид кривой (20) зависит только от вида нелинейности. Она может состоять из ряда ветвей.

Точки пересечения кривой (20) с осью ρ_0 определяются уравнением

$$\Phi(0, \rho_0) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{a_{2\gamma+1}}{\gamma!(\gamma+1)!} \rho_0^{2\gamma} + \rho_0^2 \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{a_{2\gamma+3}}{\gamma!(\gamma+2)!} \rho_0^{2\gamma} = 0, \quad (22)$$

которое совпадает с уравнением (6). Действительные положительные корни последнего определяют границы устойчивости на плоскости $\xi\rho^2$.

Таким образом, границы устойчивости вынужденного гармонического колебания совпадают с точками бифуркации для зависимости стационарной амплитуды биений r_0 от расстройки ξ , т. е. при переходе через границу устойчивости вынужденных колебаний, определяемую уравнением (6), обязательно появляются биения, амплитуда которых растет по мере удаления от границы устойчивости и равна нулю на самой границе.

Точки пересечения кривой (20) с осью r_0 находятся из уравнения

$$\Phi(r_0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{n!(n+1)!} r_0^{2n} = 0. \quad (23)$$

Функции $\Phi(r_0, 0)$ и $F(\rho_0^2)$ (см. укороченное уравнение (3)) определяются одним и тем же выражением. В автономном режиме генератора уравнение $F(\rho_0^2) = 0$ определяет стационарную, отличную от нуля, амплитуду автоколебаний.

Совпадение значения амплитуды автоколебаний с амплитудой биений, определяемой бифуркационной кривой $\Phi(r_0, \rho_0) = 0$, при $\rho_0 \rightarrow 0$ указывает на то, что при достаточно малом ρ_0 (что возможно при достаточно больших расстройках) биения получаются за счет сложения независимо существующих собственных и вынужденных колебаний. Кроме того, можно сделать вывод, что если при отсутствии внешней силы генератор не возбуждается ни при каких начальных условиях, то бифуркационная кривая $\Phi(r_0, \rho_0) = 0$ не пересекает ось r_0 .

Неравенство (21) при $\rho_0 \rightarrow 0$ совпадает с условием устойчивости стационарной амплитуды автоколебаний генератора при отсутствии внешней силы. Следовательно, при $\rho_0 \rightarrow 0$ устойчивой будет та ветвь бифуркационной кривой $\Phi(r_0, \rho_0) = 0$, которая соответствует устойчивой стационарной амплитуде автоколебаний автономной системы. О поведении бифуркационной кривой в точках, не близких к координатным осям, каких-либо общих заключений сделать нельзя.

Более детальное ее поведение рассмотрим на частном примере.

2. ПОВЕДЕНИЕ ГЕНЕРАТОРА ПРИ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПОЛИНОМОМ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Рассмотрим в качестве примера синхронизацию генератора автоколебаний внешней синусоидальной силой для случая, когда нелинейность может быть аппроксимирована полиномом пятой степени.

Укороченные уравнения (1) и (14) в этом случае запишутся в виде

$$\dot{z} = j\xi z + a_1 z + \frac{1}{2} a_3 z^2 z^* - \frac{1}{12} a_5 z^3 z^{*2} + j\varepsilon_0; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = j(\xi - \Omega) w + a_1 w + a_3 z_0 z_0^* w + \frac{1}{2} a_3 w^2 w^* - \\ - \frac{1}{2} a_5 z_0 z_0^* w^2 w^* - \frac{1}{4} a_5 z_0^2 z_0^{*2} w - \frac{1}{12} a_5 w^3 w^{*2} \end{aligned} \quad (25)$$

или после использования преобразования (15) в переменных ρ, φ, r, θ

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \rho \left(a_1 + \frac{1}{2} a_3 \rho^2 - \frac{1}{12} a_5 \rho^4 \right) + \varepsilon_0 \sin \varphi, \\ \dot{\rho} \dot{\varphi} = \xi \rho + \varepsilon_0 \cos \varphi; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = r \left[a_1 + a_3 \rho^2 + \frac{1}{2} a_3 r^2 - \frac{1}{12} a_5 (3\rho^4 + 6\rho^2 r^2 + r^4) \right], \\ r \dot{\theta} = r(\xi - \Omega). \end{aligned} \quad (27)$$

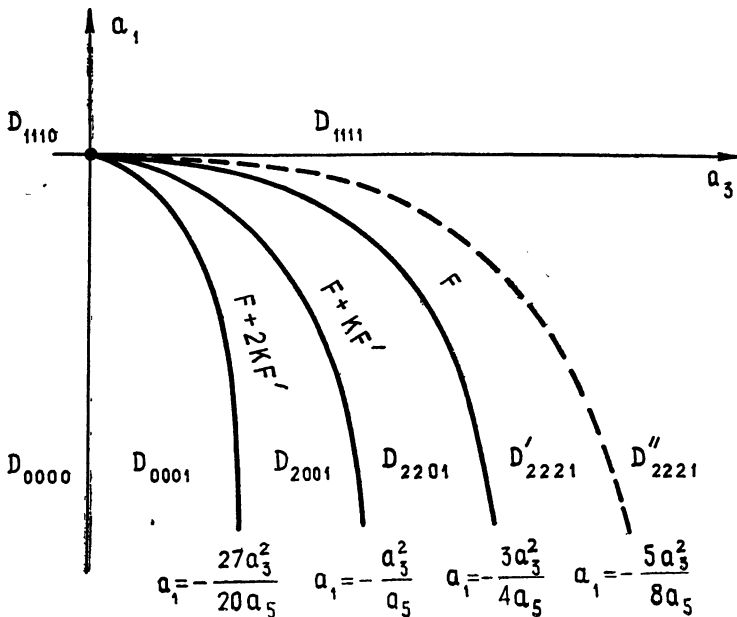


Рис. 1.

Уравнения амплитудно-частотных характеристик (9) и бифуркационной кривой (20) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\xi = \pm \left[\frac{\epsilon_0^2}{\rho_0^2} - \left(a_1 + \frac{1}{2} a_3 \rho_0^2 - \frac{1}{12} a_5 \rho_0^4 \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (28)$$

$$3a_5 \rho_0^4 + 6a_5 \rho_0^2 r_0^2 + a_5 r_0^4 - 12a_3 \rho_0^2 - 6a_3 r_0^2 - 12a_1 = 0. \quad (29)$$

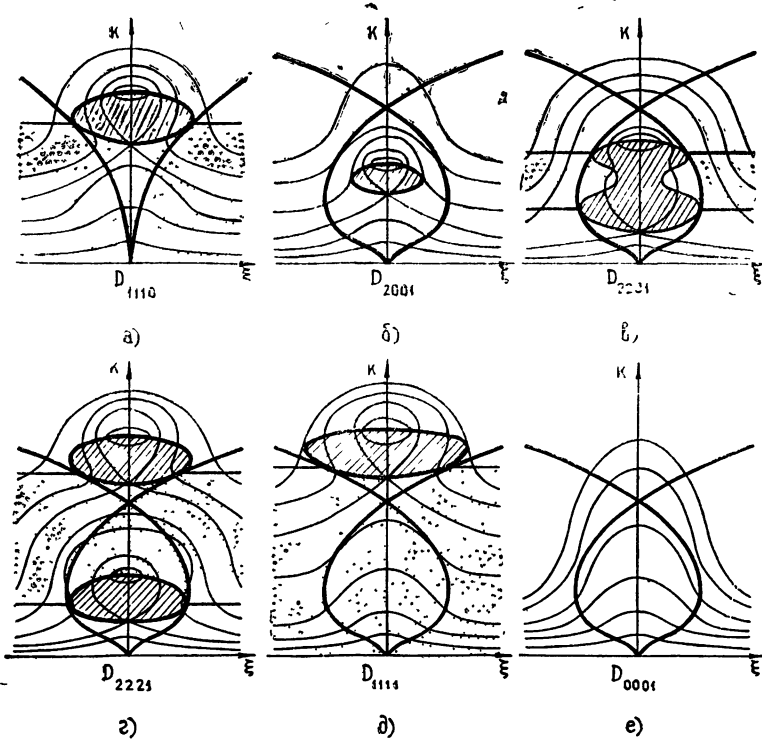


Рис. 2.

На рис. 2 а—г приведены амплитудно-частотные характеристики, построенные для различных областей D_{mnef} , границы которых показаны жирными линиями на рис. 1. Как следует из работы [4], индексам m, n, e и f соответствует число действительных положительных корней полиномов:

$$F + 2KF' = 0, \quad F + KF' = 0, \quad F = 0, \quad F' = 0.$$

На рис. 2 приведено также разбиение плоскости $\xi \rho_0^2$ на области с различными типами состояний равновесия. Здесь точкам заштрихованных областей соответствуют состояния равновесия типа седла, областям, отмеченным точками, — неустойчивые узлы или фокусы. В остальных областях — устойчивые состояния равновесия типа узлов или фокусов.

Уравнение (29) на плоскости $\rho_0^2 r_0^2$ определяет семейство гипербол с асимптотами

$$r_0^2 = k_{1,2} \rho_0^2 + b_{1,2},$$

где

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6}, \quad b_{1,2} = \frac{3a_3}{a_5} \frac{2 + k_{1,2}}{3 + k_{1,2}}.$$

Уравнения (22) и (23), определяющие точки пересечения кривой

$\Phi(r_0, \rho_0) = 0$ с координатными осями, для рассматриваемого случая имеют вид

$$a_5 \rho_0^4 - 4a_3 \rho_0^2 - 4a_1 = 0; \quad (30)$$

$$a_5 r_0^4 - 6a_3 r_0^2 - 12a_1 = 0. \quad (31)$$

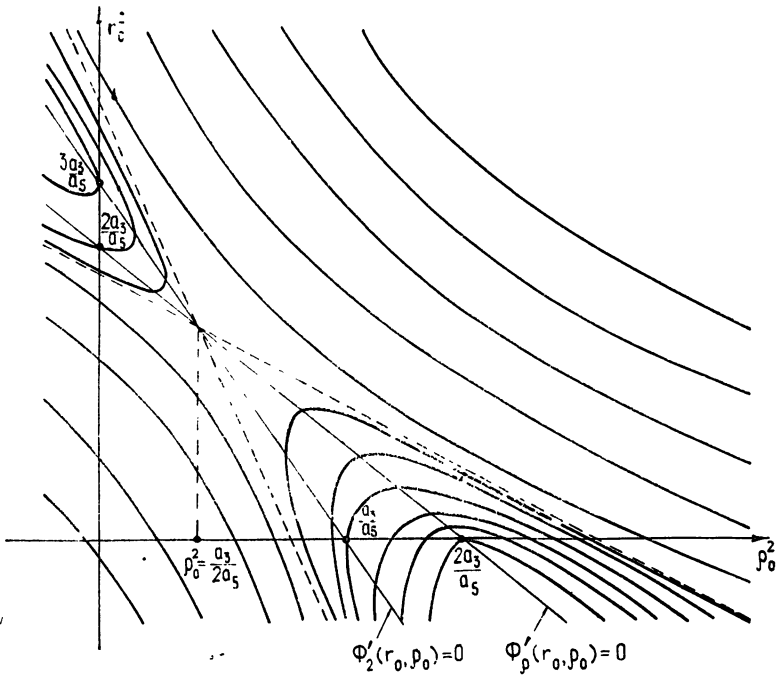


Рис. 3.

На рис. 3 показано семейство бифуркационных кривых, построенных при постоянных значениях параметров a_1 и a_3 . На рис. 4 в координатах $\rho_0^2 r_0^2$ приведены кривые, определяемые уравнениями (28) и (29), построенные для различных областей разбиения рис. 1.

Рассмотрим связь между режимами генератора и положением ветвей гиперболы (29) в нашем конкретном случае. Будем задавать значения параметров a_1 и a_3 в различных областях разбиения рис. 1.

Область D_{2201} . При значениях параметров a_1 и a_3 , выбранных в этой области, генератор в автономном случае находится в недо возбужденном режиме. При таких значениях a_1 и a_3 ветвь MM гиперболы пересекает ось ρ_0^2 плоскости $\rho_0^2 r_0^2$ в двух точках (верхняя часть рисунка 4 а). На плоскости $\xi \rho_0^2$ в этом случае имеются две границы устойчивости.

Исследуем более подробно зависимость глубины модуляции от расстройки при различном положении ветви MM гиперболы. Ради удобства пояснения выделим на рис. 4 а амплитудно-частотную характеристику ABC , соответствующую некоторой амплитуде внешней силы. При изменении расстройки ξ от нуля до ξ_1 (участок AB амплитудно-частотной характеристики) в системе существуют устойчивые вынужденные колебания. На участке BC состояния равновесия для вынужденных колебаний неустойчивы. При смене устойчивости состояния равновесия в точке B амплитудно-частотной характеристики в системе возникают

биения как результат взаимодействия собственных колебаний генератора, возбужденного под действием внешней силы и вынужденных колебаний (см. рис. 5 а). В этом случае биения возникают и исчезают мягко.

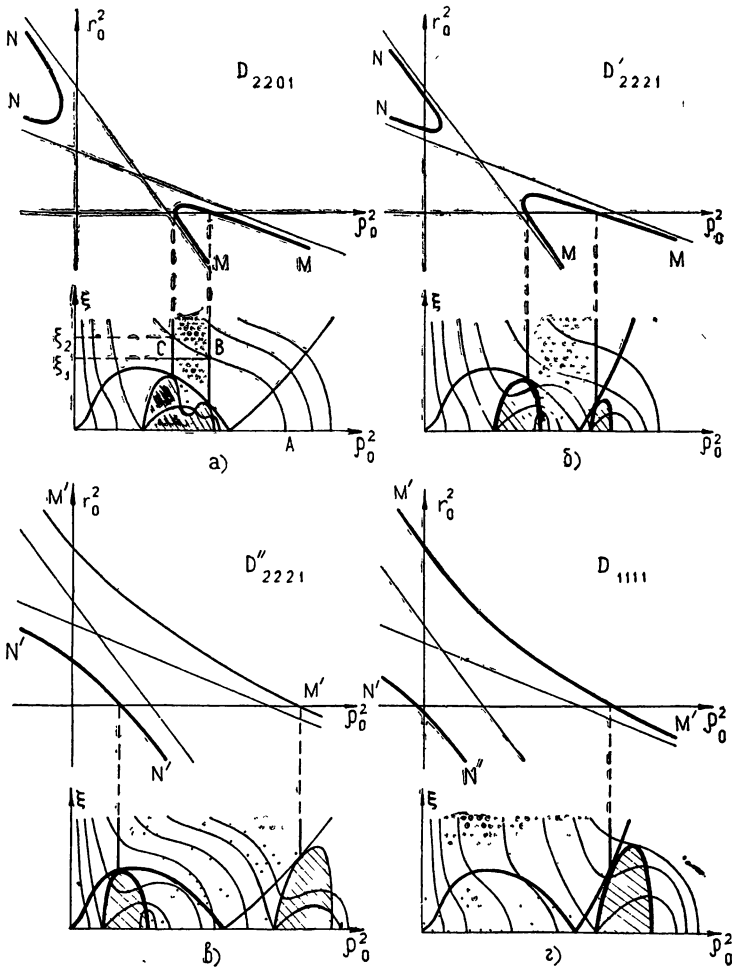


Рис. 4.

На рис. 5 точками обозначены устойчивые и крестиками — неустойчивые состояния равновесия.

Область D'_{2221} . При задании параметров a_1 и a_3 в этой области генератор возбуждается при отсутствии внешней силы. Ветвь NN гиперболы пересекает ось r_0^2 в двух точках (см. рис. 4 б).

Условия возникновения биений в интервале расстройок $\xi_1 < \xi < \xi_2$ такие же, как и в области D_{2201} . При расстройках $\xi > \xi_4$ в системе возникают биения в результате сложения независимо существующих собственных и вынужденных колебаний (рис. 5 б).

В интервале расстройок $\xi_3 < \xi < \xi_4$ существуют только вынужденные колебания.

На границе, разделяющей области D'_{2221} и D''_{2221} (пунктирная линия на рис. 1), ветви MM и NN гиперболы сливаются со своими

асимптотами. В генераторе такому положению ветвей гиперболы соответствует уменьшение полосы вынужденных колебаний в интервале расстроек $\xi_3 < \xi < \xi_4$ до нуля.

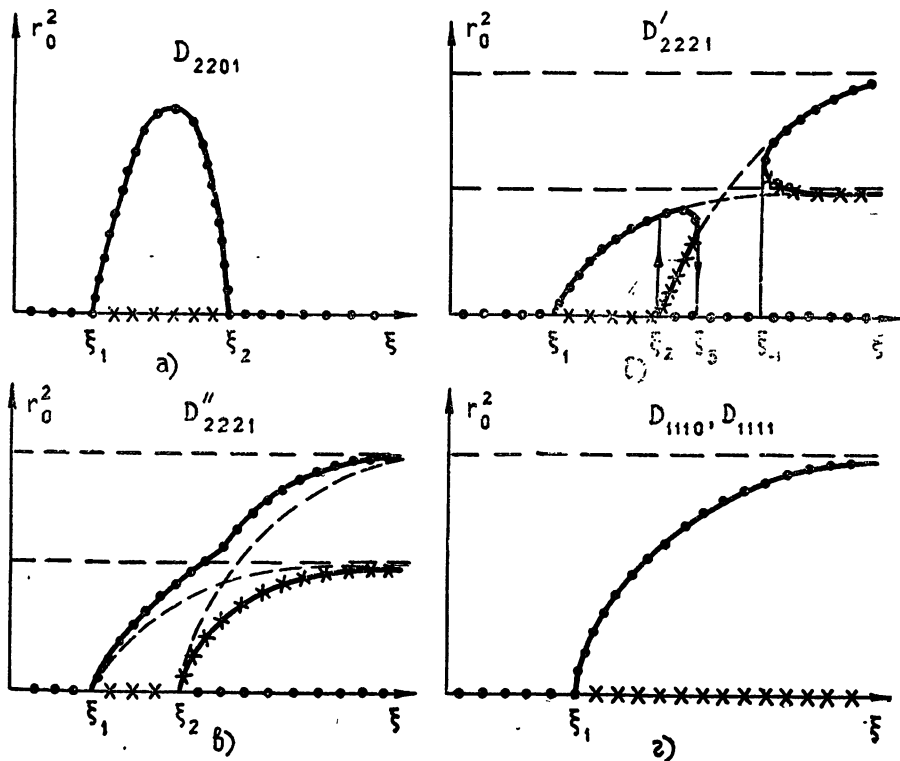


Рис. 5.

Область D''_{2221} . Для значений параметров a_1 и a_3 , заданных в этой области, положение ветвей гиперболы показано на рис. 4в. Точкам ветви $M'M'$ соответствует устойчивая стационарная глубина модуляции в интервале расстроек $\xi > \xi_1$, а точкам ветви $N'N'$ — неустойчивая стационарная глубина модуляции. При непрерывном изменении расстройки в прямом и обратном направлениях отсутствует гистерезисный характер установления биений. В интервале расстроек $\xi > \xi_2$ биения возникают жестко (рис. 5в).

Области D_{1110}, D_{1111} . Положения ветвей гиперболы для параметров a_1 и a_3 , заданных в этих областях, показаны на рис. 4г. При этом режим биений существует для расстроек $\xi > \xi_1$. В этом интервале расстроек биения возникают и исчезают мягко (рис. 5г).

В заключение автор выражает большую признательность Л. В. Постникову за ценные замечания при обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, Собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1965, стр. 51.
2. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1947.
3. Е. Н. Секерская, ЖТФ, 5, вып. 2, 253 (1935).
4. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 406 (1969).
5. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, 1711 (1969).

**BEAT REGIME OF GENERATOR SYNCHRONIZATION BY AN EXTERNAL
SINUSOIDAL FORCE***V. I. Korolev*

The dynamics of the self-oscillation generator being under the action of the external sinusoidal force is considered. The abbreviated equations of the first and repeated averaging are derived. For the case when the nonlinearity may be represented as a power series, the synchronization and beat regimes have been investigated both inside and outside the trapping band. The example in which the nonlinear function is approximated by the fifth power polynom is considered.
