

УДК 621.372.22

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВОЛН В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович

Рассматривается невырожденный трехчастотный процесс в активной системе, содержащей квадратичную реактивную нелинейность. Показано, что преобразование частоты в такой комбинированной среде может идти значительно эффективнее, чем при независимом генерировании накачки и ее последующем преобразовании. Для системы с алгебраической нелинейностью определена структура поля при стационарном взаимодействии попутных волн. Приведены результаты численного анализа.

Как известно, при невырожденном трехволновом взаимодействии в прозрачной квадратичной среде эффективность преобразования частоты «вверх», т. е. величина амплитуды волны наибольшей частоты ω_3 , определяется значениями амплитуд низкочастотных волн, служащих накачкой. Если амплитуда одной из волн (ω_2) велика, а другой (ω_1) незначительна, то полученное в результате преобразования число квантов волны $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$ будет равно (с точностью до нормирующих множителей) начальному числу квантов волны ω_1 . Это непосредственно вытекает из соотношений Менли—Роу [1]:

$$\bar{A}_3^2 + \bar{A}_1^2 = C_1, \quad \bar{A}_2^2 - \bar{A}_1^2 = C_2, \quad (1)$$

где $\bar{A}_{1,2,3}$ — нормированные амплитуды волн, $C_{1,2}$ — постоянные.

Следует ожидать, что если процесс преобразования $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$ осуществить непосредственно в активной системе (среде), где генерируется слабая волна ω_1 , то его эффективность при той же энергии накачки на частоте ω_2 должна существенно возрасти.

Действительно, при отдельных (независимых) процессах генерации частоты ω_1 и последующего преобразования в ω_3 энергия накачки ω_1 определяется уровнем стационарной генерации, т. е. в простейшем случае отношением линейного инкремента к коэффициенту нелинейного затухания. Это означает, что даже в случае достаточно больших инкрементов, если потери существенны, амплитуда стационарной генерации волн A_1 невелика, а следовательно, невелика и амплитуда волны A_3 , полученной затем в результате преобразования.

Если же комбинационное преобразование происходит в активной среде*, где генерируется или усиливается волна ω_1 , то отбор энергии у этой волны осуществляется непрерывно (распределенный отбор мощности), причем ее амплитуда остается малой на достаточно больших пространственно-временных интервалах и влияние нелинейного поглощения уменьшается.

Отметим, что сходные вопросы рассматривались в литературе, одна-

* Здесь не рассматриваются случаи, когда квадратичная нелинейность связана с активностью среды или одна из волн обладает отрицательной энергией, как, например, в системах типа плазма — пучок [2].

ко с несколько иной точки зрения. В частности, в работах [3, 4] исследовалось взаимодействие параметрически связанных волн в резонаторе лазера, причем показано, что в тех случаях когда потери, вносимые в резонатор при введении нелинейного элемента, не приводят к значительному снижению мощности лазера, то использование параметрического взаимодействия внутри резонатора позволяет в стационарном режиме получить большую выходную мощность.

В данной работе основное внимание уделяется динамике переходного режима, который, как показано, во многих случаях оказывается существенно эффективнее с точки зрения получения большей амплитуды параметрически генерируемой волны.

1. Рассмотрим невырожденное трехволновое взаимодействие в полуграниченной активно-реактивной среде, полагая, что на границу подается волна накачки ω_2 и малая затравка волны ω_1 , для которой среда активна.

Пусть характеристика активной нелинейности может быть представлена в виде

$$f(U) = -gU(1 - \alpha U^2), \quad (2)$$

а реактивная нелинейность квадратична по полю. Будем интересоваться преобразованием частоты «вверх» в такой среде. Представим поле в виде трех волн.

$$\begin{aligned} U(x, t) &= A_1(x, t) \exp [i(\omega_1 t - k(\omega_1)x + \varphi_1(x, t))] + \text{к. с.}, \\ V(x, t) &= A_2(x, t) \exp [i(\omega_2 t - k(\omega_2)x + \varphi_2(x, t))] + \\ &+ A_3(x, t) \exp [i(\omega_3 t - k(\omega_3)x + \varphi_3(x, t))] + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (3)$$

удовлетворяющих условиям синхронизма

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1, \quad k(\omega_3) = k(\omega_2) + k(\omega_1), \quad (4)$$

где связь k и ω определяется дисперсионным уравнением среды. Здесь существенно, что U и V — различные нормальные волны, причем активная нелинейность (2) непосредственно влияет лишь на поле U^* . Уравнения для комплексных амплитуд $a_j = A_j \exp(i\varphi_j)$ взаимодействующих волн в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} &= -\sigma_1 a_3 a_2^* + g_1 a_1 (1 - 3\alpha a_1 a_1^*), \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} &= -\sigma_2 a_3 a_1^*, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} &= \sigma_3 a_1 a_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v_{1,2,3}$ — групповые скорости волн, а $\sigma_{1,2,3} > 0$ — коэффициенты нелинейного взаимодействия, пропорциональные величине квадратичной нелинейности. Эти уравнения следует дополнить граничными условиями

$$|a_{1,2,3}(x=0)|^2 = A_{1,2,3}^2 \quad (6)$$

2. Исследуем вначале процесс преобразования частоты в комбинированной среде в тех случаях, когда справедливо приближение хаотич-

* Если активная среда резонансна, как, например, в оптике, то волны U и V могут быть и одного типа.

ческих фаз волн, которое допускает описание взаимодействия на языке квазичастиц*. Для нахождения уравнений относительно квадратов амплитуд волн или числа квазичастиц систему уравнений (5) следует усреднить по фазам. Соответствующая процедура для узких в ω , k -пространстве пакетов волн хорошо известна [5, 7]. В результате усреднения для стационарного процесса $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ получим

$$\begin{aligned} N_1' &= \chi_\varphi (N_1 N_3 - N_1 N_2 + N_2 N_3) + \bar{g}_1 N_1 (1 - \bar{\alpha} N_1), \\ N_2' &= \chi_\varphi (N_1 N_3 - N_1 N_2 + N_2 N_3), \\ N_3' &= -\chi_\varphi (N_1 N_3 - N_1 N_2 + N_2 N_3) \quad (\chi_\varphi \sim 1/\Delta k), \end{aligned} \quad (7)$$

где $N_1 = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 A_1^2$, $N_2 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 A_2^2$, $N_3 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 A_3^2$, $\bar{g} = 2g_1$, $\bar{\alpha} = \frac{3\alpha}{\sigma_2 \sigma_3}$, $\bar{\sigma}_{1,2,3} = \sqrt{2} \frac{\sigma_{1,2,3}}{v_{1,2,3}}$. Для простоты здесь предполагается, что длина корреляции

фаз (обратная ширина пакетов в k -пространстве) взаимодействующих волн одинакова. Заметим, что при взаимодействии волн, распространяющихся с существенно различными скоростями, такое предположение несправедливо.

Сравним амплитуду волны ω_3 , генерируемой в активной среде, при граничных условиях (6), с максимально достижимой амплитудой той же волны в прозрачной среде при условии, что на границу среды подается волна ω_1 , амплитуда которой соответствует стационарной генерации, т. е. при граничных условиях

$$N_{30} = 0, \quad N_{20} = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 A_2^2, \quad N_{10} = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \frac{1}{\alpha}. \quad (8)$$

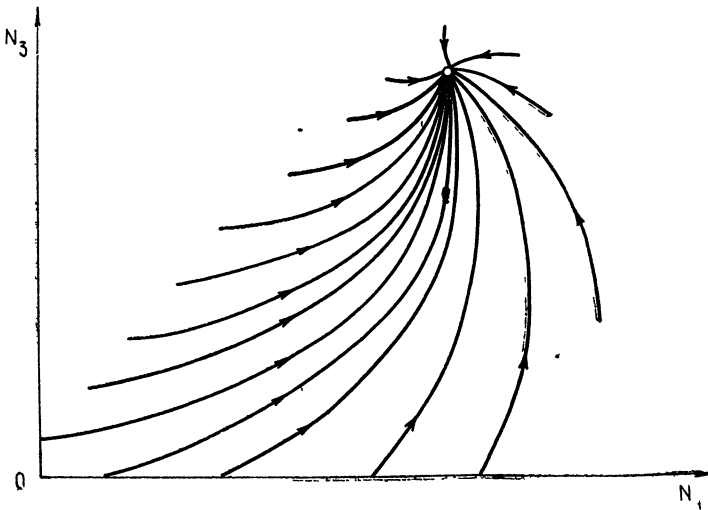


Рис. 1.

Непосредственно из вида фазового портрета системы (7), который представлен на рис. 1 (при сведении системы (7) к двумерной исполь-

* Такой подход часто называют приближением слабой турбулентности [6] или приближением баланса [1, 6].

зован интеграл $N_2 + N_3 = \text{const}$), следует, что максимальное значение поля на частоте ω_3 достигается в состоянии равновесия $N_3 \neq 0$. То же можно сказать и об амплитуде ω_3 в прозрачной среде.

Таким образом, достаточно сравнить равновесные значения амплитуд N_3 в активной и прозрачной средах при $x \rightarrow \infty$. В активной среде, согласно (6), (7), имеем

$$N_3^0 = N_3(\infty) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{N_{20}}{2} \right) - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{N_{20}^2}{4} \right)^{1/2} & \left(N_{20} \sim \frac{1}{\alpha} \right) \\ \frac{1}{\alpha} & \left(N_{20} \gg \frac{1}{\alpha} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Воспользовавшись системой (7) при $\bar{g} = 0$ и граничными условиями (8), найдем максимальную амплитуду волны ω_3 в прозрачной среде:

$$\bar{N}_3^0 = \begin{cases} \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{\alpha} + N_{20} - \left[\left(\frac{1}{\alpha} - N_{20} \right)^2 + \frac{N_{20}}{\alpha} \right]^{1/2} \right\} & \left(N_{20} \sim \frac{1}{\alpha} \right) \\ \frac{1}{2\alpha} & \left(N_{20} \gg \frac{1}{\alpha} \right) \end{cases} \quad (10)$$

Как следует из этих выражений, $N_3^0 > \bar{N}_3^0$, в частности, в заданном поле накачки $N_2 - N_3^0 = 2N_3^0$. Если ширина пакетов взаимодействующих волн существенно различна, то преимущество активной среды может оказаться еще более заметным.

3. Будем считать теперь фазы взаимодействующих волн детерминированными. По-прежнему рассмотрим процесс стационарной генерации волны A_3 ($\dot{A}_3 = 0$). Систему (5) при $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, используя интеграл

$$\bar{\sigma}_2 A_3^2 + \bar{\sigma}_3 A_2^2 = \bar{\sigma}_3 A_{20}^2 \left(\bar{\sigma}_{1,2,3} = \frac{\sigma_{1,2,3}}{\nu_{1,2,3}} \right), \text{ запишем в виде}$$

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{\bar{\sigma}_1}{\sqrt{\bar{\sigma}_3}} A_3 \sqrt{\bar{\sigma}_3 A_{20}^2 - \bar{\sigma}_2 A_3^2} \sin \Phi + \bar{g}_1 A_1 (1 - 3\alpha A_1^2), \\ A_3' &= -\sqrt{\bar{\sigma}_3} A_1 \sqrt{\bar{\sigma}_3 A_{20}^2 - \bar{\sigma}_2 A_3^2} \sin \Phi, \\ \Phi' &= \left(\frac{\sqrt{\bar{\sigma}_3} A_1 \sqrt{\bar{\sigma}_3 A_{20}^2 - \bar{\sigma}_2 A_3^2}}{A_3} - \frac{\bar{\sigma}_2 \sqrt{\bar{\sigma}_3} A_1 A_3}{\sqrt{\bar{\sigma}_3 A_{20}^2 - \bar{\sigma}_2 A_3^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\sigma}_1}{\sqrt{\bar{\sigma}_3}} \frac{A_3 \sqrt{\bar{\sigma}_3 A_{20}^2 - \bar{\sigma}_2 A_3^2}}{A_1} \right) \cos \Phi \quad (\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Исследуем качественно поведение решений этой системы. Согласно (11) в ее фазовом пространстве имеются плоскости, равновесные по $\Phi - \Phi_n = \frac{\pi}{2} (2n + 1)$. Движения на плоскостях равновесной фазы $\Phi = \Phi_n$ устойчивы по отношению к фазовым возмущениям в области, где

$$\Delta = A_3^4 - \frac{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 A_{20}^2 + 2 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 A_1^2}{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} A_3^2 + \frac{\bar{\sigma}_3^2 A_1^2 A_{20}^2}{\bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2} < 0,$$

и неустойчивы, где $\Delta > 0$.

При $\sin \Phi = \pm 1$ система (11) имеет единственное состояние равновесия $A_{1p} = A_{3p} = 0$ — неустойчивый фокус (при не слишком большой величине g_1). Рассматриваемая система (11) при $\Phi = \Phi_n$ также неустойчива и на бесконечности. Следовательно, все траектории входят в ограниченную область, содержащую неустойчивое состояние равновесия; это означает существование на плоскости $\Phi = \Phi_n$ устойчивого по отношению к амплитудным возмущениям предельного цикла. Помимо равновесных плоскостей $\Phi = \Phi_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, рассматриваемая система (11)

имеет еще отличные от нуля состояния равновесия в плоскостях $\Phi = n\pi$: $A_{1p} = 1/3\alpha$, $A_{3p} = C$, где C — корень уравнения $\Delta = 0$. Можно

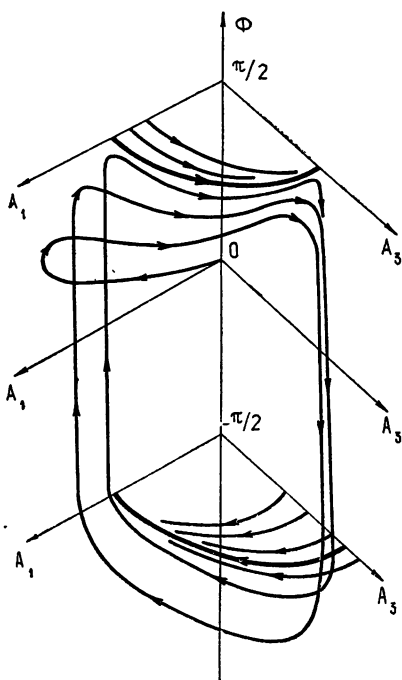


Рис. 2.

показать, что в приближении заданного поля A_2 это состояние равновесия всегда устойчиво. Установившийся режим без пространственных осцилляций, соответствующий этому состоянию равновесия, существует только в идеализированной системе. При учете малого затухания волны на частоте ω_3 это устойчивое состояние равновесия исчезает. Таким образом, изображающая точка, двигаясь вблизи поверхности Φ_n , достигает границы устойчивости фазовых движений, после чего, уходя от плоскости Φ_n , попадает в область быстрых по Φ движений и скачком переходит в окрестности плоскости $\Phi_{n\pm 1}$, двигаясь там в противоположном (по отношению к движению вблизи плоскости Φ_n или $\Phi_{n\pm 2}$) направлении, после чего все повторяется (см. рис. 2). Существование такого периодического или квазипериодического движения в фазовом пространстве означает, что при $x \rightarrow \infty$ в рассматриваемой среде может установиться режим биений между амплитудами A_1 и A_3 , которому сопутствуют скачки фазы Φ^* .

Аналитически определить амплитуду предельного цикла, а тем более значения полей в переходном режиме при заданных граничных условиях не удается. Поэтому было проведено численное решение на ЭВМ системы (5) при $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Полученные зависимости $A_{1,3}$ от x при

различных граничных условиях** представлены на рис. 3—5. Решение проводилось для системы радиодиапазона—связанных через нелинейную емкость линий передачи, из которых одна содержала активные элементы — туннельные диоды. Значения параметров брались равными

* Подобные периодические режимы наблюдались экспериментально при исследовании «внутренних параметрических генераторов» в работе [8].

** Граничные условия для фаз оказываются несущественными (это связано с существованием быстрых движений (по Φ)).

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 25 \text{ МГц}, & \omega_2 &= 15 \text{ МГц}, & \omega_3 &= 40 \text{ МГц}, \\ \nu_1 &= 0,688 \cdot 10^6, & \nu_2 &= 0,327 \cdot 10^7, & \nu_3 &= 0,217 \cdot 10^8, \\ \bar{\sigma}_1 &= 15,2, & \bar{\sigma}_2 &= 1,26, & \bar{\sigma}_3 &= 0,318 \end{aligned}$$

$$(\bar{\sigma}_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3} / \nu_{1,2,3}).$$

На рис. 3 представлена зависимость $\frac{A_3(x)}{A_{30}}$ и $\frac{A_1(x)}{\bar{A}_{10}}$ при $\frac{A_{10}}{\bar{A}_{10}} = 0,1$, $\frac{A_{20}}{\bar{A}_{20}} = 1,25$, $\frac{A_{30}}{\bar{A}_{30}} \approx 0^*$. Из решения видно, что для достижения максимальной амплитуды A_3 (здесь $\frac{A_{3 \max}}{\bar{A}_{30}} = 4$) длина взаимодействия должна равняться $\sim 8 \lambda_3$. В более длинной системе значение A_3 на выходе снижается до амплитуды $A_3 = 1,2 \bar{A}_{30}$, которая соответствует биениям.

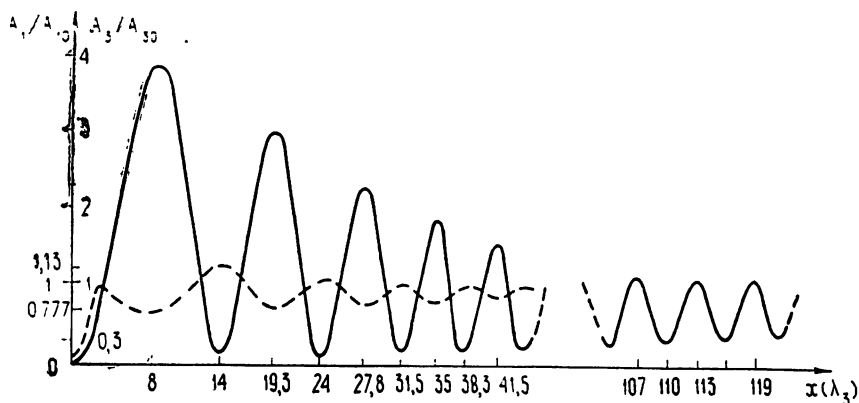


Рис. 3.

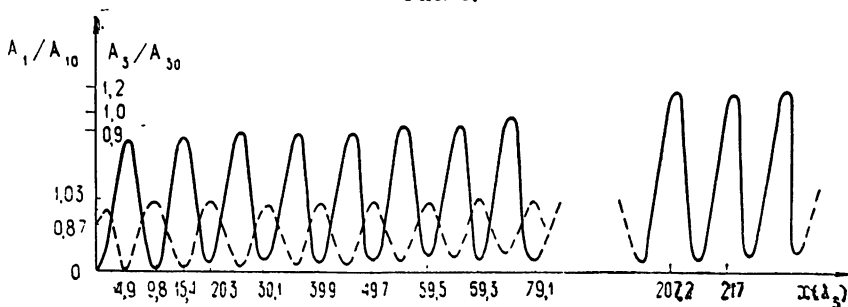


Рис. 4.

Если амплитуда волны A_1 на границе близка к равновесному значению $1/\sqrt{3\alpha}$, то периодический по x режим устанавливается на двух-трех периодах биений, а значение $\frac{A_{3 \max}}{\bar{A}_{30}} \leq 1,2$ (см. рис. 4). Таким образом,

амплитуда волны A_3 достигает значений, существенно превышающих \bar{A}_{30} , лишь при условии, что на достаточно большом пространственном интервале величина A_1 остается малой (см. рис. 3 и 4).

* Здесь \bar{A}_{10} — максимальные значения амплитуд, достижимые в среде с $g = 0$ при $A_{10} = 1/\sqrt{3\alpha}$.

В случае, когда скорости волн сильно различаются ($v_1 = 0,595 \cdot 10^7$, $v_2 = 0,539 \cdot 10^{10}$, $v_3 = 0,495 \cdot 10^7$), зависимости $\frac{A_3(x)}{\bar{A}_{30}}$, $\frac{A_1(x)}{\bar{A}_{10}}$ приведены на рис. 5 (решение найдено для системы с параметрами $\omega_1 = 1$ Гц, $\omega_2 = 1$ МГц, $\omega_3 = 1,001$ ГГц, $\sigma_1 = 40$, $\sigma_2 = 0,125 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_3 = 11,16$. Амплитуда волны ω_3 в данном случае на порядок превышает значение A_{30} при длине взаимодействия $\sim 27 \lambda_3$, а при увеличении длины быстро переходит к равновесному значению. Численный расчет показал также справедливость приближения заданного поля A_2 при $A_{20}^2 \geq 1/3 \alpha$.

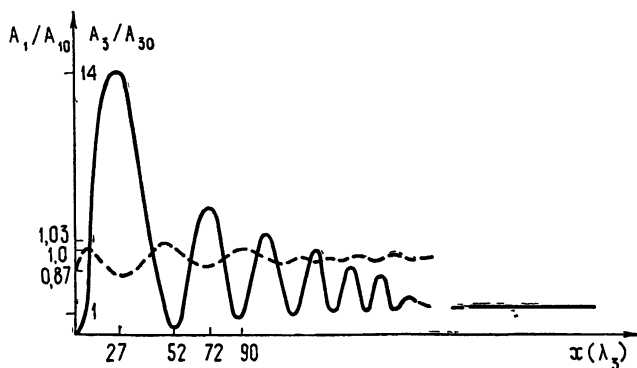


Рис. 5.

В заключение отметим, что полученные результаты применимы при рассмотрении процесса нестационарного взаимодействия пространственно-однородных полей в резонаторе.

Авторы признательны А. В. Гапонову, Г. И. Фрейдману, В. М. Фюртису за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
2. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, № 4 (10), 1308 (1969).
3. J. Falk, J. M. Yarborough, E. O. Ammann, IEEE J. Quant. Electr., 7, № 7, 359 (1971).
4. M. K. Oshman, S. E. Harris, IEEE J. Quant. Electr., 4, № 8, 491 (1968).
5. Б. Б. Кадоцев, Турбулентность плазмы, сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., 1964, стр. 188.
6. С. А. Ахманов, С. А. Чиркин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 787 (1970).
7. Б. П. Кирсанов, А. С. Селиваненко, В. Н. Цытович, О статистическом и динамическом описании нелинейных взаимодействий, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968, стр. 87.
8. R. G. Smith, J. V. Parker, J. Appl. Phys., 41, № 8, 3401 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 января 1972 г.

ON PARAMETRIC WAVE TRANSFORMATION IN ACTIVE MEDIA

S. Ya. Vyshkind, M. I. Rabinovich

A nondegenerated three-frequency process in the active system containing a quadratic reactive nonlinearity is considered. It is shown that the frequency transformation in such a combined medium occurs more effectively than at the independent generation of pump and its further transformation. The field structure is determined at the stationary interaction of passing waves. The results of numerical analysis are given.