

УДК 533.951

## О НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОПРОКИДЫВАНИЯ

*Г. П. Берман, Г. М. Заславский*

В работе рассматриваются нелинейные плазменные колебания вблизи порога опрокидывания. Найден спектр этих колебаний. Рассмотрено взаимодействие двух нелинейных плазменных волн с сильно различающимися периодами. Получены условия, при которых между волнами не происходит обмена энергией. Найдены поправки к скорости каждой из волн. Обсуждается связь полученных результатов с численными экспериментами.

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование поведения нелинейных плазменных колебаний после опрокидывания волны носит в настоящее время скорее экспериментальный, чем теоретический характер, что объясняется большими трудностями задачи. Уже в первых численных экспериментах Бунемана [1] было показано, что развитие нелинейных плазменных колебаний приводит к многопоточности движения и стохастизации электронов. В дальнейшем различные численные исследования [2-4] показали, что наряду со случайным элементом движение электронов после опрокидывания нелинейной волны имеет также и некоторую регулярную компоненту. Одной из таких регулярных компонент являются «каверны», образующиеся в фазовом пространстве системы. Сравнительно большое время жизни каверн и их относительная устойчивость в целом привели к попыткам построения феноменологической теории их взаимодействия [3, 5, 6]. Наиболее четко наличие регулярной компоненты в движении электронов после опрокидывания волны было получено в численных экспериментах [4]. Авторами было показано, что развитие пучковой неустойчивости при определенных условиях приводит к образованию после опрокидывания квазипериодических нелинейных колебаний, структура которых будет обсуждаться ниже. Возникновение такого режима может быть связано с тем, что в процессе неустойчивости волны скорость укручения фронта достаточно мала и только небольшая часть энергии колебаний стохастизируется после опрокидывания. Хорошей аналогией этому процессу может служить картина образования мелких «барашков» в волнах на воде. Поскольку колебания являются сильно нелинейными, то взаимодействие различных масштабов должно происходить, вообще говоря, интенсивно, и для сохранения регулярных периодических структур должны быть выполнены некоторые специальные условия.

В связи с наблюдением в численных экспериментах квазипериодических нелинейных колебаний можно поставить следующий вопрос. Предположим, что для внешнего наблюдателя волновая картина проявляется в виде, скажем, двух нелинейных ленгмюровских волн, распространяющихся с различными скоростями. При каких условиях взаимодействие между такими волнами не разрушает их? Исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа. Такой подход, конечно, не дает

возможности выяснить поведение нелинейной волны после опрокидывания. Однако соответствующие критерии слабости взаимодействия нелинейных волн представляют собой необходимые условия их «существования». Иными словами, если в некотором стационарном режиме наблюдаются два масштаба нелинейных периодических волн, то их параметры должны удовлетворять некоторым ограничениям, которые выводятся ниже.

## 1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Нелинейные плазменные колебания электронов описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 4\pi (\rho - 1), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где выбрана система единиц

$$e = m = \rho_i = 1,$$

и  $\rho_i$  — плотность компенсирующего заряда неподвижных ионов. Решение в виде нелинейных волн, зависящих от переменной  $\xi = x - ut$  ( $u$  — скорость волны), было получено впервые в работе [7]. Введем константы интегрирования  $u, H$  следующим образом:

$$\rho(v - u) = \text{const} = -u,$$

$$\frac{1}{2} \Phi'^2 - 2\omega^2 [2u \sqrt{\Phi} - \Phi] = \text{const} = H < 0, \quad (1.2)$$

$$\sqrt{\Phi} = u - v,$$

где  $\omega$  — плазменная частота, а штрих означает дифференцирование по  $\xi$ . Тогда решение (1.1), полученное в [7], можно представить в виде

$$\psi = -\cos(\pm k\xi - \varepsilon \sqrt{1 - \psi^2}) \equiv \frac{u - \sqrt{\Phi}}{\varepsilon u}, \quad (1.3)$$

где  $\lambda = 2\pi/k$  — пространственный период волны; знак плюс берется в области  $\xi \in (+\lambda/2, 0)$ , знак минус — в области  $\xi \in (-\lambda/2, 0)$ ; параметр  $\varepsilon$  выведен вместо константы  $H$  с помощью соотношения

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{|H|}{2\omega^2 u^2}}. \quad (1.4)$$

Значениям  $\varepsilon \ll 1$  соответствуют линейные колебания, а при  $\varepsilon = 1$  ( $H = 0$ ) происходит опрокидывание волны. Связь между волновым числом  $k$  и параметрами  $u, \varepsilon$  находится из дисперсионного уравнения

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2 \int_{-1}^1 \frac{d\psi}{\psi'}$$

и имеет вид

$$\omega = ku. \quad (1.5)$$

Отметим характерную особенность нелинейных плазменных колебаний [7]: хотя они и являются агармоническими, однако  $\omega$  не зависит от  $\varepsilon$  (т. е. от энергии).

Перейдем к определению спектра нелинейной плазменной волны (1.3). Его удобно находить для переменной  $\Phi$ . Записывая разложение

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{in k \xi}, \quad (1.6)$$

имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \frac{1}{2\pi} k \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \Phi(\xi) e^{-in k \xi} d\xi = \\ &= -\frac{u^2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1 - \varepsilon \psi)^3}{\sqrt{1 - \psi^2}} \sin [n (\arcsin \psi + \varepsilon \sqrt{1 - \psi^2})] d\psi \end{aligned}$$

или после замены  $\psi = -\cos \theta$  и несложных преобразований

$$\Phi_n = \begin{cases} \frac{2u^2}{n^2} (-1)^{n-1} J_n(\varepsilon n) & (n \neq 0) \\ u^2 \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2\right) & (n = 0) \end{cases} \quad (1.7)$$

Далее удобно ввести канонически сопряженные переменные  $a_q, a_q^*$  для системы (1.1):

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \sum_{q \neq 0} |q| (a_q + a_{-q}^*) e^{iqx}, \\ v &= v_0 + \omega \sum_{q \neq 0} \operatorname{sgn} q (a_q - a_{-q}^*) e^{iqx}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система (1.1) в новых переменных приводится к уравнению

$$\begin{aligned} \dot{a}_q + i(\omega + qv_0) a_q + \frac{i}{4} \omega \sum_{q_1, q_2} V_{qq_1 q_2} (a_{q_1} a_{q_2} \delta_{q-q_1-q_2} + \\ + 2a_{q_1}^* a_{q_2} \delta_{q+q_1-q_2} + a_{q_1}^* a_{q_2}^* \delta_{q+q_1+q_2}) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$V_{qq_1 q_2} = |q| \operatorname{sgn} (q_1 q_2) + |q_1| \operatorname{sgn} (q q_2) + |q_2| \operatorname{sgn} (q q_1).$$

Для периодического решения (1.3)  $q = nk$  и зависимость  $a_n$  от времени имеет вид

$$a_n = b_n e^{-in\omega t}, \quad (1.10)$$

где  $b_n$  не зависит от  $t$ . Из формул (1.1), (1.2), (1.8) находим связь

$$a_q = -\frac{|q|}{4\omega^2} \Phi_q(t) + \frac{\operatorname{sgn} q}{2\omega} v_q(t) \quad (q \neq 0), \quad (1.11)$$

$$a_{-q}^* = -\frac{|q|}{4\omega^2} \Phi_q(t) - \frac{\operatorname{sgn} q}{2\omega} v_q(t).$$

где  $\Phi_q(t), v_q(t)$  находятся из разложений

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \sum_q \Phi_q(t) e^{iqx}, \\ v(x, t) &= \sum_q v_q(t) e^{iqx}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Для периодической волны из (1.2), (1.7), (1.10) следует

$$\begin{aligned}\Phi_n(t) &= \Phi_n e^{-in\omega t}, \quad v_n(t) = v_n e^{-in\omega t}, \\ v_n &= \begin{cases} \frac{\varepsilon u}{n} (-1)^n \left[ \frac{\partial}{\partial z} J_n(z) \right]_{z=\varepsilon n} & (n \neq 0) \\ -u \frac{\varepsilon^2}{2} & (n = 0) \end{cases}.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Подставляя (1.12), (1.13) в (1.10), находим искомый спектр

$$b_n = \frac{\varepsilon}{2k|n|} (-1)^n J_{n-1}(\varepsilon n) \quad (n \neq 0). \quad (1.14)$$

Приведем асимптотические выражения для  $b_n$  [8] при  $\varepsilon \rightarrow 1$ , т. е. вблизи границы опрокидывания волны:

$$b_n \approx \begin{cases} (-1)^n \frac{\Gamma(1/3)}{k\pi 2^{5/3} 3^{1/6}} \frac{1}{n^{4/3}} & (1 \ll n < N) \\ (-1)^n \frac{N^{1/6}}{k\sqrt{\pi} 2^{3/2} 3^{1/6}} \frac{\exp(-n/N)}{n^{3/2}} & (n \gg N) \end{cases}, \quad (1.15)$$

где введен параметр

$$N = (1 - \varepsilon)^{-3/2}. \quad (1.16)$$

Из (1.16) нетрудно видеть, что число  $N$  характеризует степень близости волны к опрокидыванию. С другой стороны, из (1.15) следует, что спектр волны экспоненциально обрывается при  $n > N$ , т. е.  $N$  определяет эффективное число гармоник в спектре нелинейной волны и тем самым характеризует степень нелинейности. В частности, при колебаниях малой амплитуды  $\varepsilon \ll 1$  и  $N \sim 1$ .

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим теперь взаимодействие двух нелинейных плазменных волн с параметрами, близкими к границе опрокидывания, т. е.

$$N_{1,2} \gg 1 \quad (2.1)$$

(индексы 1, 2 здесь и в дальнейшем будут относиться соответственно к 1-й и 2-й волнам).

Естественно, что мы можем рассмотреть только случай достаточно слабого взаимодействия между волнами и условия этого приведем ниже. Уравнение движения (1.9) для каждой из волн с учетом их взаимодействия принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{a}_q^{(l)} + i(\omega + qv_0^{(l)}) a_q^{(l)} + \frac{i}{4} \omega \sum_{q_1, q_2 \neq 0} V_{qq_1q_2} (a_{q_1}^{(l)} a_{q_2}^{(l)} \delta_{q-q_1-q_2} + \\ + 2a_{q_1}^{(l)*} a_{q_2}^{(l)} \delta_{q+q_1-q_2} + a_{q_1}^{(l)*} a_{q_2}^{(l)*} \delta_{q+q_1+q_2}) =\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$= -iqv_0^{(p)} a_q^{(l)} - \frac{i}{2} \omega \sum_{q, q_1 \neq 0} V_{q, q_1} (a_{q_1}^{(l)} a_{q_2}^{(p)} \delta_{q-q_1-q_2} + \\ + a_{q_1}^{(l)*} a_{q_2}^{(p)} \delta_{q+q_1-q_2} + a_{q_1}^{(l)} a_{q_2}^{(p)*} \delta_{q+q_1+q_2} + a_{q_1}^{(l)*} a_{q_2}^{(p)*} \delta_{q-q_1+q_2}),$$

где индекс  $l$  принимает значения 1, 2, а индекс  $p$  — соответственно 2, 1. Правая часть (2.2) описывает взаимодействие волн. Первый член в правой части дает перенормировку скорости одной волны за счет общего среднего движения другой волны.

Укажем сразу случай (характерный не только для плазменных колебаний), при котором сдвиг скоростей волн является, по существу, единственным эффектом их взаимодействия. Пусть, например,

$$k^{(1)} \gg k^{(2)} N_2 \quad (2.3)$$

и выполняется неравенство (2.1). Согласно (1.5)

$$u^{(2)}/u^{(1)} \gg N_2 \gg 1, \quad (2.4)$$

и, принимая во внимание (1.2), (1.3), (2.3), мы видим, что мелкомасштабная волна ( $l=1$ ) имеет амплитуду, в  $k^{(1)}/k^{(2)}$  раз меньшую амплитуду крупномасштабной волны ( $l=2$ ) (см. рис. 1). В правой части системы (2.2) величины  $q_i$  следует принять равными  $q_i = n_i k^{(l)}$ , где индекс  $l$  тот же, что и в фурье-гармонике  $a_{q_i}^{(l)}$ . Это означает, что  $\delta$ -функции во втором члене правой части (2.2) отбирают в силу (2.3) только такие члены, в которых  $a_{n_i}^{(2)}$  имеет значения  $n_i \gg N_2$ . Следовательно, согласно (1.15), такие члены экспоненциально малы ( $\sim \exp(-n_i/N_2)$ ). Таким образом, при условии (2.3) происходит только перенормировка скоростей волн.

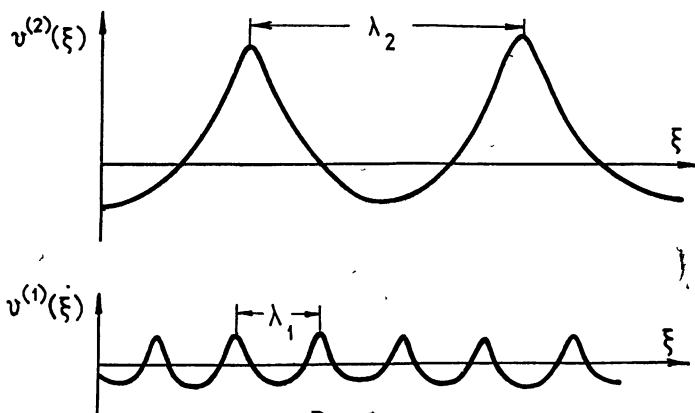


Рис. 1.

Рассмотрим случай, когда между волнами возможно резонансное взаимодействие. Для изучения влияния резонанса, очевидно, достаточно ограничиться наиболее простым случаем:

$$k^{(1)} = k^{(2)} N_2. \quad (2.5)$$

Будем искать решение системы (2.2) в виде

$$a_n^{(1)} = (A_n^{(1)} + f_n^{(1)}) \exp[-in(\omega + k^{(1)}v_0^{(2)})t], \\ a_n^{(2)} = (A_n^{(2)} + f_n^{(2)}) \exp[-in(\omega + k^{(2)} + v_0^{(1)})t], \quad (2.6)$$

где  $A_n^{(l)}$  — медленно меняющиеся функции времени,  $f_n^{(l)}$  — быстро меняющиеся функции времени. Будем также считать

$$f_n^{(l)} \ll A_n^{(l)}, \quad (2.7)$$

а соответствующее условие применимости (2.7) приведем ниже.

Подставляя (2.6) в (2.2) и учитывая (2.5), (2.7), находим

$$\begin{aligned} f_n^{(1)} &= \frac{\omega k^{(1)}}{\Omega} \{ \alpha_n^{(1)} A_{n-1}^{(1)} A_{N_2}^{(2)} e^{-i\Omega t} - \beta_n^{(1)} A_{n+1}^{(1)} A_{N_2}^{(2)*} e^{i\Omega t} \}, \\ f_n^{(2)} &= -\frac{\omega k^{(2)}}{\Omega} \{ \alpha_n^{(2)} A_1^{(1)} A_{N_2-n}^{(2)*} e^{i\Omega t} + \beta_n^{(2)} A_1^{(1)*} A_{N_2+n}^{(2)} e^{-i\Omega t} \}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^{(1)} &= n - B_{n-1}^{(1)} - (n-1) B_{N_2}^{(2)} \\ \alpha_n^{(2)} &= -n B_{N_2-n}^{(2)} + (n-N_2) B_1^{(1)} B_{N_2-n}^{(2)} + N_2 \\ \beta_n^{(1)} &= n B_{N_2}^{(2)} + B_{n+1}^{(1)} B_{N_2}^{(2)} - (n+1) \\ \beta_n^{(2)} &= n B_1^{(1)} - (n+N_2) + N_2 B_1^{(1)} B_{N_2+n}^{(2)} \\ B_n^{(l)} &= J_{n+1}(\varepsilon^{(l)} n) / J_{n-1}(\varepsilon^{(l)} n) \end{aligned} \right\} \quad (n > 0), \quad (2.9)$$

$$\Omega = \omega(N_2 - 1) + N_2 k^{(2)} (\nu_0^{(1)} - \nu_0^{(2)}).$$

Используя выражения (2.8) для  $f_n^{(l)}$ , после подстановки (2.6), (2.8) в (2.2) и удержания только медленно меняющихся во времени членов, получаем следующие уравнения для  $A_n^{(l)}$ :

$$\dot{A}_n^{(1)} = i \frac{[\omega k^{(1)}]^2}{\Omega} |A_{N_2}^{(2)}|^2 (\alpha_{n+1}^{(1)} \beta_n^{(1)} - \alpha_n^{(1)} \beta_{n-1}^{(1)}) A_n^{(1)}, \quad (2.10)$$

$$\dot{A}_n^{(2)} = i \frac{[\omega k^{(2)}]^2}{\Omega} |A_1^{(1)}|^2 (\alpha_n^{(2)} \alpha_{N_2-n}^{(2)} - \beta_n^{(2)} \alpha_{N_2+n}^{(2)} B_n^{(2)}) A_n^{(2)}.$$

Выражения, аналогичные (2.8)–(2.10), можно получить и для  $n < 0$ . Мы их здесь приводить не будем.

Из (2.10) следует, что резонансное взаимодействие в первом порядке теории возмущений приводит к следующим решениям:

$$\begin{aligned} A_n^{(l)}(t) &= A_n^{(l)}(0) \exp(-i \Delta\omega^{(l)} t), \\ \Delta\omega^{(1)} &= -\frac{[\omega k^{(1)}]^2}{\Omega} |A_{N_2}^{(2)}|^2 (\alpha_{n+1}^{(1)} \beta_n^{(1)} - \alpha_n^{(1)} \beta_{n-1}^{(1)}), \\ \Delta\omega^{(2)} &= -\frac{[\omega k^{(2)}]^2}{\Omega} |A_1^{(1)}|^2 (\alpha_n^{(2)} \alpha_{N_2-n}^{(2)} - \beta_n^{(2)} \alpha_{N_2+n}^{(2)} B_n^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Упростим теперь выражения (2.11) для  $1 \ll n \leq N_2$ . Используя (2.5), (2.9) и (1.15), имеем

$$\Delta\omega^{(1)} \sim -n \frac{\omega}{8\pi} N_2^{-11/3}, \quad (2.12)$$

$$\Delta\omega^{(2)} \sim 0,1 n^2 \omega N_2^{-3}.$$

Прежде чем обсуждать полученный результат, остановимся на усло-

виях применимости используемой теории возмущений. Из (2.6) следует, что условие медленности изменения амплитуд  $A_n^{(1)}$  имеет вид

$$\Delta\omega^{(1)} \ll n\omega; \quad (2.13)$$

$$\Delta\omega^{(2)} \ll nk^{(2)}v_0^{(1)}. \quad (2.14)$$

Учитывая, что неравенство (2.13) должно выполняться для  $n \leq N_1$ , а (2.14) — для  $n \leq N_2$ , находим условие их справедливости  $N_2 \gg 1$ , которое уже использовалось нами. Используя выражения (2.8) для  $f_n^{(1)}$  и подставляя их в (2.7), приходим еще к одному дополнительному ограничению:

$$1 \ll N_1 \ll N_2^{7/8}. \quad (2.15)$$

Неравенство (2.15) означает, что мелкомасштабная волна не должна быть слишком близка к границе опрокидывания.

Обратимся теперь к выражениям (2.12). Первое из них означает, что мелкомасштабная волна приобретает сдвиг скорости, равный

$$\Delta u^{(1)} = -\frac{1}{8\pi} u^{(1)}/N_2^{11/8}. \quad (2.16)$$

Вторая формула в (2.12) показывает, что в крупномасштабной волне возникают дополнительные нелинейные осцилляции, приводящие к периодическому расплыванию и сжатию волнового пакета. Причиной этого эффекта является зависимость сдвига скорости  $\Delta u^{(2)}$  от  $n$  и связанная с ней дисперсия внутри пакета. Характерное время расплывания пакета  $T^{(2)}$  находится из (2.12):

$$T^{(2)} \sim \frac{20\pi}{\omega} N_2^3. \quad (2.17)$$

Описанные процессы, однако, не приводят к обмену энергией между волнами. Изменение энергии нелинейных волн за счет их взаимодействия может произойти лишь в более высоком порядке теории возмущений за счет членов  $\sim (f^{(1)})^2$ .

До сих пор мы рассматривали взаимодействие между волнами, которое определялось, в основном, резонансом на одной гармонике (2.5). Нетрудно видеть, что полученные результаты сохраняются, если резонансы возникают на нескольких гармониках. Число последних, однако, будет входить в неравенства (2.13), (2.14) и не должно быть слишком большим. Это означает, что условие типа (2.5), выражающее необходимость сильного различия масштабов взаимодействующих волн, сохраняется.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как уже отмечалось, в случае, когда при опрокидывании нелинейной плазменной волны только малая часть ее энергии переходит в хаотическое движение, турбулентный режим может содержать большую по энергии часть регулярного периодического движения. Это движение, в принципе, должно мало отличаться от точного решения типа (1.3). Поскольку, однако, при опрокидывании могут возникать волны разных масштабов, то возникает вопрос о характере спектра колебаний в квазистационарном режиме. Ответ на этот вопрос в настоящее время отсутствует, однако из полученных результатов вытекают определенные ограничения на характер спектра. Действительно, если выполняются условия (2.15) и

$$k^{(1)} \neq k^{(2)} N_2, \quad (3.1)$$

то нелинейные плазменные колебания не разрушаются в результате взаимодействия. Наоборот, в случае, когда (3.1) не выполняется и, например, длины волн одного порядка, возникает очень интенсивное взаимодействие, в результате которого понятие отдельной волны теряет смысл. Таким образом, для существования нескольких масштабов регулярного движения должно выполняться условие (3.1), означающее, что размеры этих масштабов сильно отличаются друг от друга. Подчеркнем, что для этого заключения существенна близость нелинейных волн к опрокидыванию. Выразим ограничение на различие масштабов (3.1), используя неравенство (2.15):

$$k^{(1)} \geq k^{(2)} N_1^{3/7},$$

или, с учетом (1.16),

$$\frac{\lambda^{(1)}}{(1 - \varepsilon^{(1)})^{9/14}} \leq \lambda^{(2)}, \quad (1 - \varepsilon^{(1)}) \ll 1. \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2) показывает границу мелкомасштабных колебаний, которые могут возбуждаться после опрокидывания на фоне крупномасштабной волны в квазистационарном режиме. Подчеркнем, что последнее означает достаточно большое время жизни возникших упорядоченных (периодических) движений.

В связи со сделанным выводом интересно обсудить численные эксперименты Дэвиса и Берса [4]. Их результаты показывают, что после опрокидывания нелинейной плазменной волны возникала мелкомасштабная периодическая волна с частотой, равной плазменной частоте, и с амплитудой, много меньшей амплитуды основной волны. Как отмечалось в [4], изменение скорости одной из волн приводило к изменению скорости другой, что может быть следствием связи между этими волнами. Тем не менее, общая картина регулярных колебаний, наблюдавшаяся в [4], была похожа на простую суперпозицию двух нелинейных плазменных волн. Не исключено, что описанные данные численных экспериментов Дэвиса и Берса могут быть интерпретированы с помощью результатов настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. O. Vineman, Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
2. J. M. Dawson, C. G. Hsi, R. Shanny, Rep. at the 3-d Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nuclear Fusion, Novosibirsk, 1968.
3. K. V. Roberts, H. L. Berk, Phys. Rev. Lett., **19**, № 6, 297 (1967).
4. J. A. Davis, A. Bers, Symposium on Turbulence of Fluids and Plasmas, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1968.
5. B. V. Kadomtsev, O. P. Pogutse, Phys. Rev. Lett., **25**, № 17, 1155 (1970).
6. M. Kako, T. Taniuti, T. Watanabe, Preprint, Nagoya University, 1971.
7. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, Докл. АН СССР, **80**, № 2, 193 (1951).
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

Институт физики СО АН АССР

Поступила в редакцию  
27 декабря 1971 г.

#### ON NONLINEAR PLASMA OSCILLATIONS NEAR THE BOUNDARY OF BREAKING

G. P. Berman, G. M. Zaslavskii

We consider nonlinear plasma oscillations near the boundary of breaking. The spectrum of these oscillations has been found. The interaction of two nonlinear plasma waves with strongly different periods has been considered. The conditions have been obtained under which the energy exchange between waves does not take place. The corrections on each wave velocity are found. The agreement of the results obtained with numerical experiments is discussed.