

УДК 538.56 : 519.25

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

(Обзор)

В. И. Кляцкин, В. И. Татарский

ВВЕДЕНИЕ

При распространении электромагнитных волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многоократного рассеяния вперед флюктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием. Начиная с некоторого расстояния становятся непригодными расчеты по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флюктуаций)*. Этот эффект был обнаружен экспериментально Грачевой и Гурвичем [2] в опытах по распространению света в турбулентной атмосфере и в дальнейшем исследовался более подробно в работах Гурвича, Каллистратовой, Тиме [3], Грачевой, Гурвича, Каллистратовой [4], Мирдуховича [5].

В последнее время появился ряд работ, в которых различными методами получены уравнения, позволяющие описывать и область сильных флюктуаций поля [6–17]. Метод получения этих уравнений, применявшийся в работах [10–17], основывался на аппроксимации процесса распространения волны в неоднородной среде диффузионным случайным процессом. В этом приближении для всех моментов поля могут быть получены замкнутые уравнения, пригодные и в области сильных флюктуаций, а для характеристического функционала поля можно получить уравнение типа Эйнштейна–Фоккера.

В настоящей работе мы попытаемся последовательно изложить основные результаты, полученные в этом направлении. Работа состоит из двух глав.

Первая глава посвящена общему рассмотрению процесса распространения световой волны в турбулентной среде. В первом разделе рассматривается стохастическое уравнение, описывающее процесс распространения волны в случайной среде, и выводятся некоторые точные следствия этого уравнения. Во втором разделе рассматривается модель, в которой возможно пренебречь продольным радиусом корреляции диэлектрической проницаемости по сравнению со всеми продольными масштабами задачи. Это предположение, эквивалентное замене реальной корреляционной функции показателя преломления на дельта-функцию по продольному направлению, позволяет получить замкнутые интегральные уравнения для всех моментов поля волны. Далее во всей

* Та область флюктуаций интенсивности, которая описывается первым приближением метода плавных возмущений, называется областью слабых флюктуаций. Основные результаты теоретического и экспериментального исследований в этой области подробно изложены в книге Татарского [1] (см. также ниже разд. 6 первой главы).

работе помимо указанного выше предположения используется также предположение о гауссово распределении вероятностей для флуктуаций показателя преломления. При этом удается свести упомянутые интегральные уравнения к дифференциальным и показать, что характеристический функционал поля удовлетворяет уравнению типа Эйнштейна—Фоккера, что позволяет считать процесс распространения волны диффузионным. В четвертом разделе излагается метод последовательных приближений для решения стохастического уравнения распространения волны, первым приближением в котором является описанное выше диффузионное приближение. Исследование второго приближения позволяет получить границы применимости диффузионного приближения и показать, что последнее может быть использовано и в области сильных флуктуаций поля. В пятом разделе рассмотрен конкретный пример, посвященный расчету функции взаимной когерентности в турбулентной среде, и рассмотрено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными. В заключительном разделе первой главы рассматриваются амплитудно-фазовые характеристики световой волны.

В целом ряде работ для описания распространения волн в среде со случайными неоднородностями используется уравнение диффузии лучей [18—21] (приближение геометрической оптики). При этом само уравнение диффузии (уравнение Эйнштейна—Фоккера—УЭФ) выписывается обычно на основании интуитивных соображений, опирающихся на аналогию с хорошо известными задачами, приводящими к этому уравнению. Само же динамическое уравнение задачи (в данном случае—уравнение лучей) используется только для подсчета коэффициентов, входящих в УЭФ. Как отмечалось в работах [22, 23], при этом остается неясным, при каких условиях можно считать оправданным применение УЭФ (ряд таких условий был предложен в [23] из физических соображений). В то же время ясно, что должны существовать некоторые условия, накладываемые на входящие в динамические уравнения функции, и некоторые ограничения на параметры, от которых зависит решение, при которых УЭФ будет являться логическим следствием динамических уравнений. Эти условия исследовалась в работе [24], где было показано, что УЭФ может быть обосновано лишь в малогловом приближении. Статистические характеристики амплитуды и фазы световой волны при этом, как показано в работе [25], определяются статистическими характеристиками лучей.

Во второй главе настоящей работы изучается распространение света в турбулентной среде в приближении геометрической оптики. В первом разделе рассматривается задача о диффузии лучей в случайно неоднородных средах, а во втором и третьем разделах рассматриваются амплитудно-фазовые флуктуации световой волны.

I. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия

Распространение монохроматического света в среде с крупномасштабными неоднородностями, когда деполяризация мала [26], с достаточной точностью может быть описано скалярным волновым уравнением

$$\Delta\psi + k^2[1 + \tilde{\epsilon}(r)]\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь ψ связано с компонентой электрического поля E соотношением $E = \psi \exp(-i\omega t)$, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \langle \epsilon \rangle$, $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon - \langle \epsilon \rangle}{\langle \epsilon \rangle}$ — флуктуирующая часть

диэлектрической проницаемости. Если пренебречь рассеянием на большие углы, то вместо (1) можно использовать параболическое уравнение для функции u , связанной с ψ соотношением $\psi = u \exp(ikx)$:

$$2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta_{\perp} u + k^2 \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) = 0, \quad (2)$$

$$\rho = \{y, z\}, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

При переходе от (1) к (2) отбрасывается слагаемое $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Начальным условием к (2) является

$$u(0, \rho) = u_0(\rho). \quad (3)$$

В дальнейшем мы будем исходить из уравнения (2).

Уравнение (2) с граничным условием (3) можно записать в виде интегро-дифференциального уравнения

$$u(x, \rho) = u_0(\rho) \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \tilde{\epsilon}(\xi, \rho) \right] +$$

$$+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \exp \left[i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \tilde{\epsilon}(\eta, \rho) \right] \Delta_{\perp} u(\xi, \rho), \quad (4)$$

которое в ряде случаев оказывается более удобным.

Если записать решение уравнения (4) в виде итерационного ряда, то легко убедиться в том, что функция $u(x, \rho)$ будет функционально зависеть лишь от предшествующих по x значений $\tilde{\epsilon}(\xi, \rho)$ из интервала $0 < \xi < x$. Отсюда следует, что $u(x, \rho)$ не меняется при варьировании функции $\tilde{\epsilon}(\xi, \rho)$ вне этого интервала, т. е. на участках $\xi < 0$, $\xi > x$. Следовательно, вариационная производная $\frac{\delta u}{\delta \tilde{\epsilon}}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} = 0 \quad (x' < 0, x' > x), \quad (5)$$

которое мы будем называть условием причинности. Для дальнейшего нам понадобится значение $\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')}$ при $x = x'$. Эта величина может быть найдена из уравнения (2), если его проинтегрировать по x в пределах $(0, x)$, а затем подействовать оператором $\frac{\delta}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')}$:

$$2ik \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} + \int_{x'}^x d\xi [\Delta_{\rho} + k^2 \tilde{\epsilon}(\xi, \rho)] \frac{\delta u(\xi, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} +$$

$$+ k^2 \delta(\rho - \rho') u(x', \rho') = 0.$$

Здесь мы учили, что $\frac{\delta \tilde{\epsilon}(\xi, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} = \delta(\xi - x') \delta(\rho - \rho')$, а нижний предел интегрирования 0 заменен на x' , так как согласно (5) $\frac{\delta u(\xi, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} = 0$ при $x' > \xi$. Полагая $x' = x$, получаем соотношение [10]

$$\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \epsilon(x, \rho')} = i \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho') u(x, \rho). \quad (6)$$

В более общем случае величина $\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')}$ при $0 < x' \leq x$ может быть выражена через функцию Грина уравнения (2), связывающую $u(x, \rho)$ и $u(x', \rho')$ при $0 < x' < x$:

$$u(x, \rho) = \int d\rho' G(x, \rho; x', \rho') u(x', \rho'),$$

при помощи соотношения [11]

$$\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} = i \frac{k}{2} G(x, \rho, x', \rho') u(x', \rho').$$

Решение уравнения (2) с начальным условием (3) можно, используя предложенный Фрадкиным [27, 28] метод, записать в операторной форме или в виде фейнмановского континуального интеграла [12]:

$$u(x, \rho) = \exp \left[\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \tau^2(\xi)} \right] \left\{ u_0 \left(\rho + \int_0^x d\xi \tau(\xi) \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \tilde{\epsilon} \left(\xi, \rho + \int_\xi^x d\eta \tau(\eta) \right) \right] \right\} \Big|_{\tau=0} = \quad (7)$$

$$= \int Dv \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[v^2(\xi) + \tilde{\epsilon} \left(\xi, \rho + \int_\xi^x d\eta v(\eta) \right) \right] \right\} u_0 \left(\rho + \int_0^x d\xi v(\xi) \right),$$

где

$$Dv = \prod_{\xi=0}^x dv(\xi) \left\{ \int \dots \int \prod_{\xi=0}^x dv(\xi) \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi v^2(\xi) \right] \right\}^{-1}.$$

В первом из равенств (7) после выполнения действия оператора в экспоненте на следующую за ним фигурную скобку следует положить $\tau = 0$. Явное представление решения в виде (7) в ряде случаев оказывается удобным для исследования (см. [12] и [16]).

2. Приближение дельта-коррелированных вдоль направления распространения флуктуаций диэлектрической проницаемости

Как отмечалось выше, поле $u(x, \rho)$ функционально зависит лишь от предшествующих значений $\tilde{\epsilon}(\xi, \rho')$. Однако может существовать статистическая связь между $u(x, \rho)$ и последующими значениями $\tilde{\epsilon}(x', \rho')$, так как значения $\tilde{\epsilon}(x', \rho')$ при $x' > x$ коррелированы со значениями

$\tilde{\varepsilon}(\xi, \rho)$ при $\xi < x$. Ясно, что корреляция поля $u(x, \rho)$ с последующими значениями $\tilde{\varepsilon}(x', \rho')$ заметна при $x' - x \leq l_{\parallel}$, где l_{\parallel} — продольный радиус корреляции ε . В то же время характерный радиус корреляции поля $u(x, \rho)$ по продольному направлению имеет величину порядка x (см., например, [1]). Поэтому в рассматриваемой задаче существует малый параметр l_{\parallel}/x , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении можно положить $l_{\parallel} = 0$. В этом случае значения полей $u(\xi_i, \rho_i)$ при $\xi_i < x$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\tilde{\varepsilon}(\eta_j, \rho_j)$ при $\eta_j > x$, т. е.

$$\left\langle \prod_{i, j} u(\xi_i, \rho_i) \tilde{\varepsilon}(\eta_j, \rho_j) \right\rangle = \left\langle \prod_i u(\xi_i, \rho_i) \right\rangle \left\langle \prod_j \tilde{\varepsilon}(\eta_j, \rho_j) \right\rangle \quad (8)$$

$(\xi_i < x, \eta_j > x).$

Используя свойство (8), легко получить уравнение для статистических моментов поля $u(x, \rho)$. Покажем это на примере $\langle u \rangle$. Для этого воспользуемся уравнением (4). Усредняя его, учтем, что во втором слагаемом в правой части величина $\tilde{\varepsilon}(\eta, \rho)$ в экспоненте берется всегда при значениях $\eta > \xi$, т. е. статистически независима от второго множителя $\Delta_{\perp} u(\xi, \rho)$. Поэтому при усреднении (4) эти множители можно усреднить независимо:

$$\begin{aligned} \langle u(x, \rho) \rangle &= u_0(\rho) \left\langle \exp \left[i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho) \right] \right\rangle + \\ &+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left[i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \tilde{\varepsilon}(\eta, \rho) \right] \right\rangle \Delta_{\perp} \langle u(\xi, \rho) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученное уравнение является замкнутым, так как не содержит других неизвестных функций, кроме $\langle u \rangle$. Аналогичным образом можно получить уравнение для момента произвольного порядка:

$$\begin{aligned} M_{n, m}(x, \rho_1, \dots, \rho_n; \rho'_1, \dots, \rho'_m) &= \langle u(x, \rho_1), \dots, u(x, \rho_n) \times \\ &\times u^*(x, \rho'_1), \dots, u^*(x, \rho'_m) \rangle. \end{aligned}$$

Для этого необходимо сначала записать дифференциальное уравнение для $u(x, \rho_1), \dots, u^*(x, \rho'_m)$, а затем преобразовать его в интегро-дифференциальное уравнение типа (4). После этого, используя (8), можно выполнить усреднение. Уравнение для $M_{n, m}$, полученное таким образом в [1], имеет вид

$$\begin{aligned} M_{n, m}(x, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) &= M_{n, m}^0(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho_i) - \sum_{j=1}^m \tilde{\varepsilon}(\xi, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle + \\ &+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}(\eta, \rho_i) - \sum_{j=1}^m \tilde{\varepsilon}(\eta, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle \times \end{aligned} \quad (10)$$

$$\times \left(\sum_{l=1}^n \Delta_{\rho_l} - \sum_{k=1}^m \Delta_{\rho'_k} \right) M_{n,m}(\xi, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}),$$

где $\{\rho_i\}$ — совокупность всех ρ_i , а через $M_{n,m}^0$ обозначена величина

$$M_{n,m}^0(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) = u_0(\rho_1), \dots, u_0(\rho_n) u_0^*(\rho'_1), \dots, u_0^*(\rho'_m).$$

3. Уравнения для моментов волнового поля в среде с гауссовым распределением флуктуаций диэлектрической проницаемости

При выводе уравнений (10) было использовано лишь свойство дельта-коррелированности флуктуаций диэлектрической проницаемости вдоль направления распространения волны, сам же закон распределения не конкретизировался. Рассмотрим теперь частный случай гауссова закона распределения для ϵ . В этом случае статистические характеристики ϵ полностью описываются корреляционной функцией

$$B_\epsilon(x, \rho; x', \rho') = \langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) \tilde{\epsilon}(x', \rho') \rangle.$$

Условие дельта-коррелированности эквивалентно замене B_ϵ на эффективную корреляционную функцию

$$B_\epsilon^{\text{эфф}}(x, \rho; x', \rho') = \delta(x - x') A(x, \rho, \rho'), \quad (11)$$

причем A определяется из условия равенства интегралов от B_ϵ и $B_\epsilon^{\text{эфф}}$ по x' :

$$A(x, \rho, \rho') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' B_\epsilon(x, \rho; x', \rho').$$

В случае статистической однородности поля $\tilde{\epsilon}$, который мы для простоты рассмотрим, $A = A(\rho - \rho')$, т. е. A не зависит от x . В рассматриваемом случае легко можно найти величину

$$\left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}(\eta, \rho_i) - \sum_{j=1}^m \tilde{\epsilon}(\eta, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle$$

и после ее вычисления свести уравнение (10) к дифференциальному уравнению [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{n,m} &= \frac{i}{2k} [\Delta_1 + \dots + \Delta_n - \Delta'_1 - \dots - \Delta'_m] M_{n,m} - \\ &\quad - \frac{k^2}{8} Q(\rho_1, \dots, \rho'_m) M_{n,m}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{n,m} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\rho_i - \rho_j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m A(\rho_i - \rho'_k) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n A(\rho'_k - \rho'_l). \end{aligned} \quad (13)$$

В рассматриваемом случае гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций совокупность уравнений (12), а также объединяющее их уравнение для характеристического функционала поля u можно получить и другим методом [10], который мы проиллюстрируем на уравнении для $\langle u \rangle$. Усредняя (2), получим

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\perp} \right) \langle u(x, \rho) \rangle + k^3 \langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) \rangle = 0. \quad (14)$$

Для нахождения последнего слагаемого используем полученную Фурье- [29] и Новиковым [30] формулу

$$\langle \tilde{\epsilon}(r) R[\tilde{\epsilon}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle \tilde{\epsilon}(r) \tilde{\epsilon}(r') \rangle \langle \delta R[\tilde{\epsilon}] / \delta \tilde{\epsilon}(r') \rangle, \quad (15)$$

позволяющую вычислять корреляцию гауссовой случайной функции $\tilde{\epsilon}(r)$ ($\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$) с функционалом $R[\tilde{\epsilon}]$ от нее. Формула (15) может быть доказана, например, путем разложения $R[\tilde{\epsilon}]$ в функциональный ряд Тейлора.

Так как решение $u(x, \rho)$ уравнения (2) является функционалом о $\tilde{\epsilon}$, можно записать

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) \tilde{\epsilon}(x', \rho') \rangle &= B_{\epsilon}(x, \rho, x', \rho'), \\ \langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) \rangle &= \int_0^x dx' \int d\rho' B_{\epsilon}(x, \rho, x', \rho') \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя вместо $B_{\epsilon}(x, \rho, x', \rho')$ эффективную корреляционную функцию (11), получим

$$\langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) \rangle = \frac{1}{2} \int d\rho' A(\rho - \rho') \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x, \rho')} \right\rangle,$$

причем при интегрировании по x учтена четность δ -функции в результате чего появляется множитель $1/2$. Подставляя усредненное соотношение (6), имеем

$$\langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) \rangle = i \frac{k}{4} A(0) \langle u(x, \rho) \rangle,$$

так что уравнение (14) принимает вид

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\perp} \right) \langle u(x, \rho) \rangle + i \frac{k^3}{4} A(0) \langle u(x, \rho) \rangle = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) совпадает с уравнением для $M_{1,0}$, получаемым из (12).

Аналогичным способом можно получить и остальные уравнения (12).

Полное статистическое описание поля $u(x, \rho)$ можно получить из характеристического функционала

$$\Psi_x[v, v^*] = \langle \exp \{i \int d\rho [u(x, \rho)v(\rho) + u^*(x, \rho)v^*(\rho)]\} \rangle.$$

Дифференцируя Ψ_x по x , используя уравнение (2) и соотношение (6), можно получить и уравнение для Ψ_x . Оно имеет вид [10]

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\rho \left[v(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta \Psi_x}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta \Psi_x}{\delta v^*(\rho)} \right] - \frac{k^2}{8} \int d\rho d\rho' A(\rho - \rho') \hat{M}(\rho) \hat{M}(\rho') \Psi_x,$$
 (18)

$$\text{где } \hat{M}(\rho) = v(\rho) \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)}.$$

Уравнение (18), как легко показать [10, 15], эквивалентно совокупности уравнений (12). Уравнение (18) является бесконечномерным аналогом уравнения Эйнштейна — Фоккера, в связи с чем описанное приближение распространения волны в среде с гауссовыми дельта-коррелированными флюктуациями можно назвать диффузионным.

Выпишем в явном виде уравнения для функции $\Gamma_2(x, R, \rho) = \langle u(x, R + \frac{1}{2}\rho) u^*(x, R - \frac{1}{2}\rho) \rangle$ и для функции $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2) = \langle u(x, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho'_1) u^*(x, \rho'_2) \rangle$, вытекающие из (12), при $n = m = 1$ и $n = m = 2$:

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = \frac{i}{k} \frac{\partial^2}{\partial R \partial \rho} \Gamma_2 - \frac{k^2}{4} D(\rho) \Gamma_2, \quad D(\rho) = A(0) - A(\rho),$$
 (19)

$$\Gamma_2(0, R, \rho) = u_0 \left(R + \frac{1}{2} \rho \right) u_0^* \left(R - \frac{1}{2} \rho \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} &= \frac{i}{2k} [\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta'_1 - \Delta'_2] \Gamma_4 - \frac{k^2}{4} [D(\rho_1 - \rho'_1) + D(\rho_2 - \rho'_2) + \\ &+ D(\rho_1 - \rho'_2) + D(\rho_2 - \rho'_1) - D(\rho_2 - \rho_1) - D(\rho'_2 - \rho'_1)] \Gamma_4, \end{aligned}$$
 (20)

$$\Gamma_4(0, \rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2) = u_0(\rho_1) u_0(\rho_2) u_0^*(\rho'_1) u_0^*(\rho'_2).$$

Уравнение (19) было получено Долинным [6], Бераном [31]. Уравнение (20) было впервые получено Шишовым [7]. Уравнение (12) для моментов произвольного порядка помимо упоминающихся выше работ было получено другим методом в работе Чернова [8].

Как было отмечено Долиным [6], уравнение (19) эквивалентно так называемому малоугловому приближению уравнения переноса излучения. Действительно, подставляя в (19)

$$\Gamma_2(x, R, \rho) = \int d\mathbf{x} J(x, R, \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x}\rho),$$

для функции J можно получить уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\mathbf{x}}{k} \nabla_R J = -\gamma J + \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') J(x, R, \mathbf{x}'),$$
 (21)

где $\gamma = \frac{k^2 A(0)}{4} = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x})$ — коэффициент экстинкции, $f(\mathbf{x}) = \frac{\pi k^2}{2} \Phi_e(0, \mathbf{x})$ — индикаториса рассеяния, $\Phi_e(x_1, x_2, x_3)$ — трехмерная спектральная плотность корреляционной функции $B_e(r)$.

Уравнение (19) для Γ_2 может быть решено в общем случае для произвольной функции $D(\rho)$ и произвольных начальных условий. Что касается уравнения для Γ_4 , то его аналитическое решение получить не удается и необходимо прибегать к численным методам.

Помимо уравнений для средних значений произведения полей $u(x, \rho_1), \dots, u^*(x, \rho_m')$, где все продольные координаты x однаковы, могут быть получены уравнения и для функций $\langle u(x_1, \rho_1), \dots, u^*(x_m, \rho_m') \rangle$ при несовпадающих значениях x [14]. Границные условия к этим уравнениям содержат функции $M_{n,m}$ при совпадающих значениях продольных аргументов.

Отметим также, что представление решения в операторной форме или в виде континуального интеграла (7) при использовании предположений о гауссово распределении ϵ и дельта-коррелированности по продольной координате позволяют вычислить $\langle u(x, \rho) \rangle$ и $\Gamma_2(x, R, \rho)$. В этих случаях удается разрешить и уравнение (12). В тех случаях, когда решение уравнений (12) получить не удается, представление (7) также не позволяет найти явное выражение для $M_{n,m}$, однако оно оказывается удобным для исследования асимптотического поведения моментов [16].

4. Метод последовательных приближений и условия применимости диффузионного приближения

Рассмотрим теперь более общий метод получения уравнений для моментов, частным случаем которого является приближение диффузионного случайного процесса. Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения для среднего поля.

Будем считать, что флюктуации ϵ имеют гауссово распределение, но корреляционная функция $B_\epsilon(x, \rho, x', \rho')$ не заменяется на B_ϵ^{eff} .

Усредним уравнение (2) и для нахождения $\langle \epsilon u \rangle$ используем формулу Фурье—Новикова (15). В результате получим выражение (16), подстановка которого в уравнение для $\langle u \rangle$ дает

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_\perp \right) \langle u \rangle + k^2 \int_0^x dx' \int d\rho' B_\epsilon(x, \rho, x', \rho') \times \\ \times \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} \right\rangle = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) не является замкнутым, так как содержит новую неизвестную функцию $\left\langle \frac{\delta u}{\delta \epsilon} \right\rangle$. Чтобы получить уравнение для этой функции,

подействуем на уравнение (2) оператором $\frac{\delta}{\delta \epsilon(x', \rho')}$ при $x' < x$ и усред-

ним. Для вычисления величины $\left\langle \frac{\tilde{\epsilon}(x, \rho) \delta u(x, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} \right\rangle$ снова воспользуемся

формулой (15). В результате получим

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} \right\rangle + k^2 \int_0^x dx'' \int d\rho'' B_\epsilon(x, \rho, x'', \rho'') \times \quad (23)$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^2 u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x', \rho') \delta \varepsilon(x'', \rho'')} \right\rangle = 0.$$

Уравнение (23) снова оказывается незамкнутым, так как содержит вторую вариационную производную от u . Продолжая этот процесс, можно получить бесконечную зацепляющуюся цепочку уравнений. Замкнутое уравнение в приближении диффузионного случайногопроцесса получается при замене в уравнении (22) функции B_ε на $B_\varepsilon^{\text{эфф}} = \delta(x - x') A(\rho - \rho')$, так как в этом случае возникает величина $\langle \delta u(x, \rho) / \delta \varepsilon(x', \rho') \rangle$ при совпадающих значениях $x = x'$, которая согласно (6) выражается через $\langle u \rangle$. Замену B_ε на $B_\varepsilon^{\text{эфф}}$ можно произвести не в первом уравнении цепочки (22), а в одном из последующих уравнений. Если это сделать, например, в уравнении (23), то под знаком интеграла появляется величина $\left\langle \frac{\delta^2 u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x, \rho'') \delta \varepsilon(x', \rho')} \right\rangle$. Ее можно получить из уравнения (6) (в котором ρ' заменено на ρ''), если действовать на это равенство оператором $\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x', \rho')}$ и усреднить:

$$\left\langle \frac{\delta^2 u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x, \rho'') \delta \varepsilon(x', \rho')} \right\rangle = i \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho'') \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x', \rho')} \right\rangle. \quad (24)$$

Подставляя это выражение в (23), получим замкнутое уравнение для $\left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \varepsilon(x', \rho')} \right\rangle$. После этого система уравнений (22), (23) может быть решена, и мы находим второе приближение для $\langle u \rangle$.

Второе приближение является уже гораздо более точным, чем приближение диффузионного случайногопроцесса. В общем виде показать это довольно затруднительно, но этот вопрос можно исследовать на примере, допускающем точное решение. В качестве такого примера можно рассмотреть уравнение

$$2ik \frac{du}{dx} + k^2 \tilde{\varepsilon}(x) u(x) = 0 \quad (u(0) = u_0),$$

отличающееся от (2) отсутствием члена $\Delta_\perp u$. Если положить $B_\varepsilon(x, x') = \sigma_\varepsilon^2 \exp(-|x - x'|/l)$, то

$$\bar{u}(x) = u_0 \exp[-\mu(\tau - 1 + e^{-\tau})],$$

где $\tau = x/l$, $\mu = \frac{k^2}{4} l^2 \sigma_\varepsilon^2$, l — радиус корреляции $\tilde{\varepsilon}$.

Решения первого и второго приближений соответственно имеют вид

$$\bar{u}_1(x) = u_0 \exp(-\mu\tau),$$

$$\bar{u}_2(x) = \frac{u_0}{1 - \mu} [\exp(-\mu\tau) - \mu \exp(-\tau)].$$

Сравнивая \bar{u}_1 , \bar{u}_2 и \bar{u} при $\tau \gg 1$, легко установить, что приближенные решения могут быть хорошей аппроксимацией точного решения лишь при $\mu \ll 1$. Кроме того, функция u_2 , в отличие от u_1 , имеет в нуле тот

же вид, что и точное решение. На рис. 1 приведены функции \bar{u}_1 , \bar{u}_2 и \bar{u} при $\mu=0,2$ ($\bullet\bullet\bullet$ — \bar{u}/u_0 , $\circ\circ\circ$ — \bar{u}_1/u_0 , $\times\times\times$ — \bar{u}_2/u_0). Отличие второго приближения от точного решения не превосходит в данном случае 2,5%!

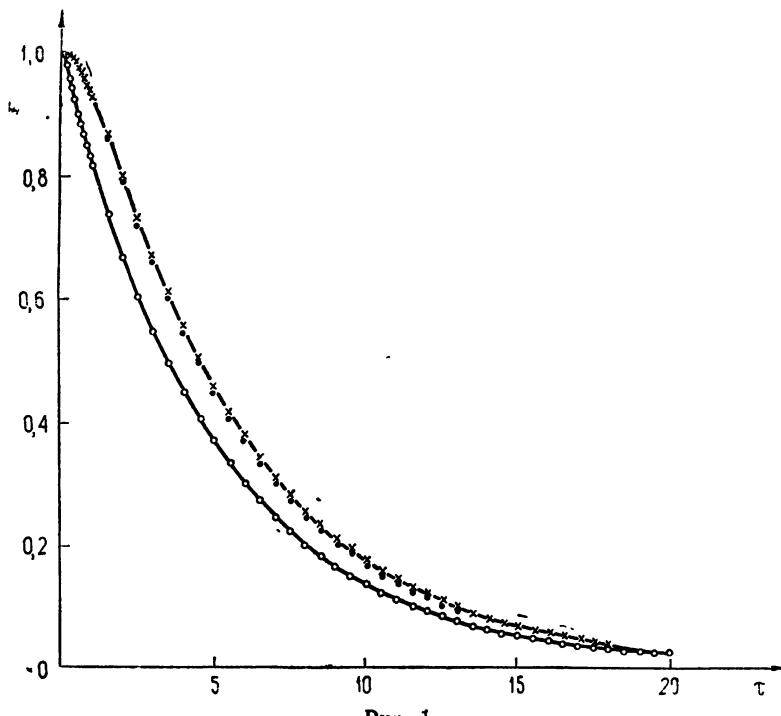


Рис. 1.

Уравнения второго приближения могут быть решены для $\langle u \rangle$ и Γ_2 . Сравнение первого и второго приближений позволяет найти условия применимости приближения диффузионного случайного процесса. При этом оказывается, что условия применимости для $\langle u \rangle$ имеют вид

$$\gamma l \ll 1, \quad x \gg l, \quad kl \gg 1, \quad (25)$$

где $\gamma = \frac{k^2}{4} A(0)$ — коэффициент экстинкции, l — радиус корреляции поля

$\tilde{\epsilon}$. В то же время условия применимости первого приближения для $\Gamma_2(x, R, \rho)$ имеют вид

$$\rho \ll x, \quad kx |\nabla_\perp A(\rho)| \ll 1 \quad (D_{\varphi\varphi}(x, \rho) \ll k\rho), \quad (26)$$

где $D_{\varphi\varphi}(x, \rho)$ — структурная функция комплексной фазы, вычисленная методом плавных возмущений [1].

Важно подчеркнуть, что условия (25) и (26) практически независимы, так как накладывают ограничения на различные параметры. В частности, может оказаться, что условия (26) выполняются в том случае, когда условие $\gamma l \ll 1$ нарушается. Отметим также, что условие (26) налагает ограничения только на локальные характеристики флуктуаций $\tilde{\epsilon}$ и поэтому может быть записано и для турбулентной среды.

Условия применимости параболического уравнения (2) исследовались в работе [12], где производилось сравнение решений уравнений (1)

и (2), записанных в операторной форме (7). При этом оказалось, что условия применимости параболического уравнения выполняются во всей области применимости диффузационного приближения.

5. Решение уравнения для функции взаимной когерентности и некоторые экспериментальные данные

Уравнение (17) для среднего поляя легко может быть решено. Его решение имеет вид

$$\langle u(x, \rho) \rangle = u_0(x, \rho) \exp\left(-\frac{\gamma}{2} x\right),$$

где $u_0(x, \rho)$ — решение в случае отсутствия флюктуаций, $\gamma = \frac{k^2}{4} A(0)$ — коэффициент экстинкции.

Можно в общем случае решить и уравнение для функции Γ_2 . Это решение было получено Бреммером [32] и Долинным [33] при исследовании уравнения переноса излучения в малоугловом приближении (21), эквивалентного уравнению (19), еще до получения уравнения для Γ_2 . Позднее аналогичное решение исследовалось в работах [13, 34]. Если в (19) произвести преобразование Фурье по переменной R , которая не входит в коэффициенты уравнения, то мы получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое легко решается методом характеристик. Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, R, \rho) &= \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \int dR' d\rho' \Gamma_2(0, R - R', \rho - \rho') \times \\ &\times \exp\left[\frac{i k R' \rho'}{x} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D\left(\rho - \rho' \frac{\xi}{x}\right)\right], \end{aligned} \quad (27)$$

где $\Gamma_2(0, R, \rho)$ — начальное значение функции когерентности при $x = 0$. Формулу (27) можно использовать и для частично когерентных источников [35], когда $\Gamma_2(0, R, \rho)$ не имеет вида

$$u_0\left(R + \frac{1}{2} \rho\right) u_0^*\left(R - \frac{1}{2} \rho\right).$$

Для частного случая плоской падающей волны, когда $\Gamma_2(0, R, \rho) = \text{const} = |u_0|^2$, интеграл по R' в (27) вычисляется и дает $\delta(k \rho'/x)$, после чего формула приобретает простой вид:

$$\Gamma_2(x, R, \rho) = |u_0|^2 \exp\left[-\frac{k^2 x}{4} D(\rho)\right]. \quad (27a)$$

Если рассмотреть флюктуации диэлектрической проницаемости, вызванные турбулентными флюктуациями температуры, то в значительном интервале волновых чисел трехмерная спектральная плотность $\Phi_\epsilon(x)$ имеет вид

$$\Phi_\epsilon(x) = A C_\epsilon^2 x^{-11/3} \quad (x_{\min} \ll x \ll x_{\max}),$$

где $A = 0,033$ — численная константа, C_ϵ^2 — структурная характеристика флюктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от метеорологических условий [1]. В этом случае функция $D(\rho)$ вычисляется и равна

$$D(\rho) = 2\pi \int d\mathbf{x} \Phi_e(\mathbf{x}) [1 - \exp(i\mathbf{x}\rho)] = NC_e^2 \rho^{5/3},$$

где $N = 36\pi^2 A\Gamma(7/6)/5 \cdot 2^{2/3}\Gamma(11/6) = 1,46$. Подставляя это выражение в (27), можно рассчитать как функцию $\Gamma_2(x, \rho, R)$, так и среднюю интенсивность волны $\langle I(x, R) \rangle = \Gamma_2(x, R, 0)$.

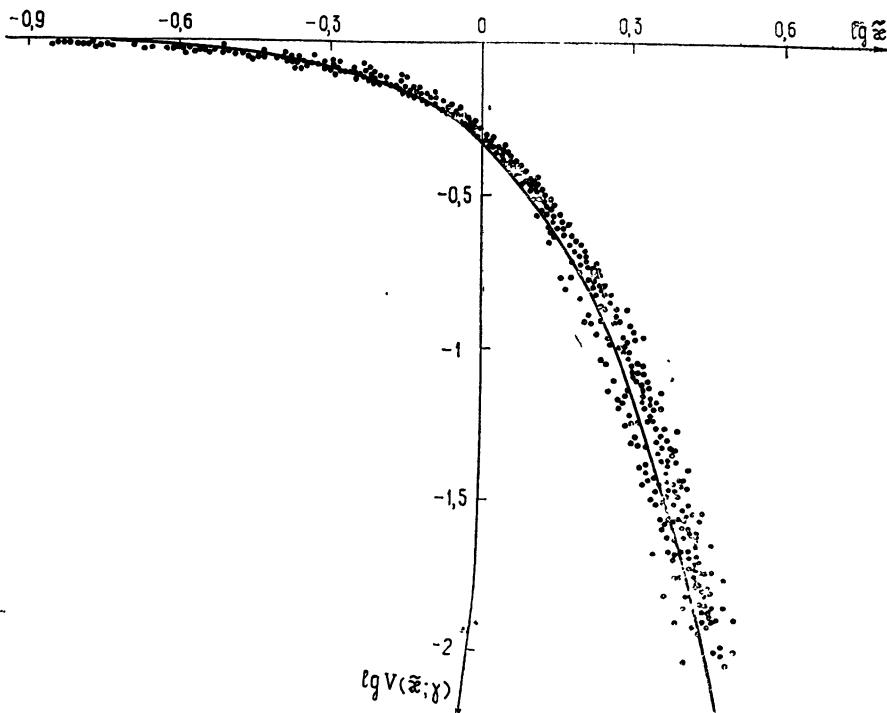


Рис. 2 Пространственный спектр функции когерентности второго порядка. Точки—экспериментальные данные по [36], непрерывная кривая построена на основании формулы (27) с учетом влияния внутреннего масштаба турбулентности, описываемого параметром γ (см. [36]).

На рис. 2 приведен полученный в работе [36] пространственный спектр функции когерентности. На тот же график нарисована теоретическая зависимость, построенная на основании (27). В работе [37] экспериментально изучалось поведение пространственно-ограниченных пучков в атмосфере. На рис. 3 результаты измерения средней интенсивности сопоставляются с кривой, построенной на основании формулы (27).

Что касается уравнения для Γ_4 , то его аналитическое решение получить не удается. Приближенное решение уравнения (20) (с учетом однократного рассеяния в смысле теории переноса излучения) приведено в [13, 15] для случая турбулентных флюктуаций диэлектрической проницаемости. В работе Дапксаманской и Шишова [38] приводятся результа-

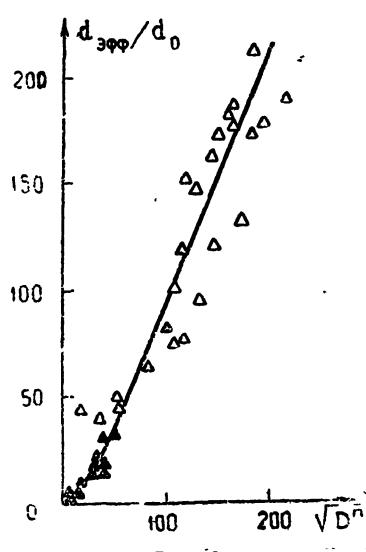


Рис. 3

ленного решения этого уравнения для корреляционной функции диэлектрической проницаемости в виде гауссовой кривой. В этой работе получено насыщение флюктуаций интенсивности, качественно согласующееся с результатами, описанными в [2-5].

Отметим, что функция Γ_4 описывает также флюктуации смещения пространственно-ограниченных пучков в случайно неоднородных средах [13, 39].

6. Амплитудно-фазовые флюктуации световой волны

Рассмотрим теперь статистическое описание амплитудно-фазовых флюктуаций световой волны.

Вводя комплексную фазу волны $\varphi = \chi + iS$, где $\chi = \ln \frac{A}{A_0}$ — уровень амплитуды, а S — флюктуации фазы волны относительно фазы падающей волны (xk), можно написать уравнение метода плавных возмущений (МПВ):

$$2ik \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Delta_{\perp} \varphi + (\nabla_{\perp} \varphi)^2 + k^2 \tilde{\epsilon} = 0, \quad u = \exp(\varphi). \quad (28)$$

Точные решения уравнений (2) и (28) эквивалентны. В первом приближении МПВ в уравнении (28) опускается член $(\nabla_{\perp} \varphi)^2$, т. е. рассматривается уравнение

$$2ik \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \Delta_{\perp} \varphi_0 + k^2 \tilde{\epsilon}(x, p) = 0. \quad (29)$$

Решение в этом случае является гауссовым случайнм полем, и статистические свойства амплитудных флюктуаций описываются параметром $\sigma_0^2 = \langle \chi_0^2(x, p) \rangle$ [1]. При этом оказывается, что условием справедливости первого приближения МПВ для амплитудных флюктуаций является условие $\sigma_0^2 \ll 1$. В области $\sigma_0^2 \geq 1$ (которая называется областью сильных флюктуаций) необходимо изучать полное уравнение (28).

Отметим, что диффузионное приближение для уравнения (2) не накладывает ограничения на амплитудные флюктуации и, следовательно, уравнения для моментов поля $u(x, p)$ (12) справедливы и в области сильных флюктуаций амплитуды.

Статистические свойства решения (28) также могут быть описаны в диффузионном приближении. Однако в силу нелинейности уравнения (28) уравнения для моментов функции $\varphi(x, p)$ оказываются незамкнутыми.

Отделяя в (28) минимую часть, получаем уравнения для уровня амплитуды $\chi(x, p)$ и интенсивности волны $I = \exp(2\chi)$:

$$2k \frac{\partial \chi}{\partial x} + \Delta_{\perp} S + 2\nabla_{\perp} \chi \nabla_{\perp} S = 0; \quad (30)$$

$$k \frac{\partial I}{\partial x} + \nabla_{\perp} (I \nabla_{\perp} S) = 0. \quad (31)$$

Экспериментальное изучение распределения вероятностей для уровня амплитуды [2] показало, что это распределение как в области слабых, так и в области сильных флюктуаций близко к нормальному распределению, хотя «хвосты» этого распределения в настоящее время плохо изучены, а именно они и определяют распределение вероятностей для интенсивности волны. Что касается флюктуаций угла прихода волны

в точку наблюдения, связанных с флуктуацией $\nabla_{\perp} S$, то они хорошо описываются первым приближением МПВ [40].

Для случая плоской падающей волны граничными условиями к (30), (31) являются условия $\chi(0, \rho) = 0$, $I(0, \rho) = 1$, и решения этих уравнений будут однородными случайными полями в плоскости $x = \text{const}$.

Усредненное уравнение (31), получаем соотношение

$$\langle I(x, \rho) \rangle = 1, \quad (32)$$

выражающее закон сохранения энергии для рассматриваемой задачи.

Умножая (31) на χ и усредняя, получаем, с учетом (32) и пространственной однородности, соотношение.

$$\langle \chi(x, \rho) I(x, \rho) \rangle = \frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \langle \nabla_{\perp} I(\xi, \rho) \nabla_{\perp} S(\xi, \rho) \rangle. \quad (33)$$

Величины, стоящие в левой части (32), (33), определяются одноточечным распределением вероятностей для поля $\chi(x, \rho)$, а величина в правой части (33) связана с корреляцией величин $\nabla_{\perp} I$ и $\nabla_{\perp} S$.

Если одноточечное распределение вероятностей для χ — гауссово, то следствием (32) будет выражение

$$\langle \chi(x, \rho) \rangle = -\sigma_{\chi}^2, \quad (34)$$

где σ_{χ}^2 — дисперсия уровня амплитуды, и в этом случае $\langle \chi I \rangle = \sigma_{\chi}^2$.

Если же при расчете амплитудных флуктуаций справедливо предположение о возможности использования для $\nabla_{\perp} S$ выражения из первого приближения МПВ, то правую часть (33) можно вычислить в диффузионном приближении [41], и мы получаем

$$\sigma_{\chi}^2 \sim \ln \sigma_0 \quad (\sigma_0^2 \gg 1). \quad (35)$$

Таким образом, следствием совместного использования предположений о нормальности одноточечного распределения вероятностей для уровня амплитуды и о возможности замены $\nabla_{\perp} S$ на выражение из первого приближения МПВ является выражение (35), которое, однако, не согласуется с экспериментальными данными относительно поведения σ_{χ}^2 в зависимости от σ_0^2 [2-5].

Более полную информацию относительно амплитудно-фазовых флуктуаций плоской световой волны можно получить, ограничиваясь следствием справедливости приближения геометрической оптики.

II. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

1. Диффузия лучей в среде со случайными неоднородностями

С чисто формальной точки зрения к уравнению Эйнштейна—Фоккера (УЭФ) приводит следующая схема. Пусть $\xi = \{\xi_1(s), \dots, \xi_n(s)\}$ удовлетворяет системе динамических уравнений

$$\frac{d\xi_i(s)}{ds} = v_i(\xi, s) + f_i(\xi, s), \quad (36)$$

где $v_i(\xi, s)$ — детерминированные функции, а $f_i(\xi, s)$ — случайные функции ($n+1$) переменной, обладающие свойствами

а) $f_i(\xi, s)$ — гауссово случайное поле в $(n+1)$ -мерном пространстве (ξ, s) ,

б) $\langle f_i(\xi, s) \rangle = 0,$

(37)

в) $\langle f_i(\xi, s) f_k(\xi', s') \rangle = 2\delta(s - s') F_{ik}(\xi, \xi', s).$

В этом случае плотность вероятностей для решения системы (36), т. е. функция

$$P_s(x) = \langle \delta(\xi(s) - x) \rangle$$

(здесь $\xi(s)$ — решение (36), соответствующее определенной реализации $f(\xi, s)$, а усреднение производится по множеству всех реализаций f) удовлетворяет УЭФ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_s(x)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x_k} \{ [v_k(x, s) + A_k(x, s)] P_s(x) \} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(x, x, s) P_s(x)] = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь введено обозначение

$$A_k(x, s) = \left. \frac{\partial F_{kl}(x, y, s)}{\partial x_l} \right|_{y=x}$$

и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Изложенные факты хорошо известны (см., например, [42, 43]). Удобный для практического использования вывод уравнения (38), основанный на использовании формулы Фурпушу—Новикова (15), приведен в работе [24]. В этой же работе развит метод для нахождения поправок к уравнению (38), учитывающих конечность радиуса корреляции поля f вдоль оси s , что позволяет тем самым установить пределы применимости уравнения (38) для реальных физических систем.

Обратимся к уравнениям лучей. Обычно в качестве независимой переменной s используется длина луча l . Принимая l за независимую переменную, запишем уравнения лучей в форме

$$\frac{dr_k(l)}{dl} = \tau_k(l), \quad \frac{d\tau_i(l)}{dl} = (\delta_{ik} - \tau_i \tau_k) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r_k}, \quad (39)$$

где $\mu = \ln n$, n — показатель преломления. Если ввести 6-векторы $\xi = \{r, \tau\}$, $v = \{\tau, O\}$, $f = \{O, a\}$, где $a_i = (\delta_{ik} - \tau_i \tau_k) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r_k}$, то систему уравнений (39) можно записать в виде (36). Условия (37 а, б) могут быть приняты без особых оговорок. Однако, что касается перехода к аппроксимации корреляционной функции для f при помощи δ -функции, то здесь мы сталкиваемся с непреодолимым затруднением. Дело в том, что $a_i = a_i(r, \tau) \equiv a_i(\xi)$ и не зависит от $s = l$. Формально можно считать, что функция $B_{kl}(\xi, \xi', s, s')$ (не зависящая в данном случае от s, s') имеет по переменной $s - s'$ бесконечный интервал корреляции, ибо при сколь угодно большом росте величины $s - s'$, но фиксированных ξ, ξ' , эта функция не убывает. Таким образом, записать УЭФ, соответствующее динамической системе (39), не удается. Можно, однако, записать уравнения лучей, взяв за независимую переменную координату x . Если уравнение луча искать в форме $R_\perp = R_\perp(x)$, где $R_\perp = \{y, z\}$ — поперечное смещение, то вместо (39) будем иметь динамическую систему

$$\frac{d}{dx} R_{\perp}(x) = \frac{\tau_{\perp}}{\sqrt{1 - \tau_{\perp}^2}}, \quad \frac{d}{dx} \tau_{\perp} = \frac{a_{\perp}(R_{\perp}, \tau_{\perp}, x)}{\sqrt{1 - \tau_{\perp}^2}}, \quad (40)$$

где $\tau_{\perp} = \{\tau_y, \tau_z\}$, $a_{\perp} = \{a_2, a_3\}$. Заметим, однако, что в этой форме уравнение лучей можно использовать лишь до первой точки поворота, где обращается в нуль знаменатель $\sqrt{1 - \tau_{\perp}^2}$. Отсюда вытекает, что в статистической задаче (40) можно использовать лишь в области, где малая вероятность отрицательных τ_x , т. е. в области малых угловых отклонений луча. А так как в этой области $\sqrt{1 - \tau_{\perp}^2} \approx 1$, то мы вместо (40) получаем приближенную систему уравнений для лучей в малоугловом приближении:

$$\frac{d}{dx} R_{\perp}(x) = \tau_{\perp}(x), \quad \frac{d}{dx} \tau_{\perp}(x) = \nabla_{\perp} \mu(R_{\perp}, x). \quad (41)$$

Для системы (41) $s = x$ уже является числом аргументов f , и поэтому здесь можно перейти к УЭФ. Соответствующее УЭФ согласно (38) имеет вид

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \tau_{\perp} \frac{\partial P_x}{\partial R_{\perp}} = D \frac{\partial^2 P_x}{\partial \tau_{\perp}^2}, \quad (42)$$

где D — коэффициент диффузии, который возникает при вычислении F_{kl} в модели статистически однородных и изотропных флюктуаций μ :

$$D = \pi^2 \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \Phi(\kappa). \quad (43)$$

Здесь $\Phi(\kappa)$ — трехмерная спектральная плотность корреляционной функции μ . Выражение (43) для D совпадает с приводившимся в работах [18–21]. Уравнение (42) легко решается, и его решение, соответствующее начальному условию $P_0(R_{\perp}, \tau_{\perp}) = \delta(R_{\perp}) \delta(\tau_{\perp})$, имеет вид гауссова распределения с моментами

$$\begin{aligned} \langle R_{\perp i}(x) R_{\perp k}(x) \rangle &= \frac{2}{3} D \delta_{ik} x^3, \\ \langle R_{\perp i}(x) \tau_{\perp k}(x) \rangle &= D \delta_{ik} x^2, \\ \langle \tau_{\perp i}(x) \tau_{\perp k}(x) \rangle &= 2D \delta_{ik} x. \end{aligned} \quad (44)$$

Эти выражения хорошо известны. На основе системы (41) легко получить и продольную корреляционную функцию смещений луча [24]:

$$\frac{\langle R_{\perp}(x) R_{\perp}(x') \rangle}{\sqrt{\langle R_{\perp}^2(x) \rangle \langle R_{\perp}^2(x') \rangle}} = \left(1 + \frac{3}{2} \xi\right) (1 + \xi)^{-3/2}, \quad \xi = \frac{x - x'}{x_{\min}}. \quad (45)$$

Рассмотрим теперь задачу о совместной диффузии двух лучей. В этом случае мы имеем следующую динамическую систему второго порядка:

$$\frac{d R_{\perp i}}{dx} = \tau_{\perp i}, \quad \frac{d \tau_{\perp i}}{dx} = \frac{\partial \mu(R_{\perp i}, x)}{\partial R_{\perp i}}, \quad (46)$$

$i = 1, 2$ — номера лучей. Соответствующее УЭФ для системы (46), согласно (38), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_x(R_{\perp 1}, R_{\perp 2}, \tau_{\perp 1}, \tau_{\perp 2}) + \tau_{\perp 1} \frac{\partial P_x}{\partial R_{\perp 1}} + \tau_{\perp 2} \frac{\partial P_x}{\partial R_{\perp 2}} = \\ = D \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial \tau_{\perp 1}^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial \tau_{\perp 2}^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_{\perp 1} \partial \tau_{\perp 2}} W_{\alpha\beta}(R_{\perp 1} - R_{\perp 2}) P_x, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$W_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(\rho)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 2, 3, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad \text{и}$$

$$A(\rho) = 2\pi \int d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x}\rho), \quad \rho = R_{\perp 1} - R_{\perp 2}.$$

В уравнении (47) можно ввести новые переменные $\rho = R_{\perp 1} - R_{\perp 2}$, $R = \frac{1}{2}(R_{\perp 1} + R_{\perp 2})$, $l = \tau_{\perp 1} - \tau_{\perp 2}$, $\tau = \frac{1}{2}(\tau_{\perp 1} + \tau_{\perp 2})$. После перехода к новым переменным оказывается возможным выполнить интегрирование по R и τ и получить в результате уравнение для функции

$$P_x(\rho, l) = \langle \delta(R_{\perp 1} - R_{\perp 2} - \rho) \delta(\tau_{\perp 1} - \tau_{\perp 2} - l) \rangle,$$

описывающей относительную диффузию двух лучей,

$$\frac{\partial P_x(\rho, l)}{\partial x} + l \frac{\partial P_x}{\partial \rho} = D_{\alpha\beta}(\rho) \frac{\partial^2 P_x}{\partial l_\alpha \partial l_\beta}. \quad (48)$$

Здесь

$$D_{\alpha\beta}(\rho) = 2[D \delta_{\alpha\beta} - W_{\alpha\beta}(\rho)] = 2\pi \int d\mathbf{x} x_\alpha x_\beta \Phi(\mathbf{x}) [1 - \cos \mathbf{x}\rho]. \quad (49)$$

Если l_0 — радиус корреляции градиентов показателя преломления, то при $\rho \gg l_0$ $D_{\alpha\beta}(\rho) = 2D \delta_{\alpha\beta}$. Это соотношение означает, что при больших по сравнению с l_0 начальных расстояниях между лучами их относительная диффузия происходит с удвоенным коэффициентом диффузии, что соответствует независимой диффузии каждого луча. Совместное распределение вероятностей в этом случае можно считать гауссовым.

В общем же случае уравнение (48) решить не удается. Ясно лишь, что при переменном коэффициенте диффузии (49) решение не является гауссовым распределением. При этом можно показать [24], что средний квадрат расстояния между лучами растет пропорционально кубу проходимого расстояния, но коэффициент в этой формуле различен в области малых и больших взаимных расстояний. Эти две области отделены друг от друга небольшой областью экспоненциального роста, начало которой совпадает с началом области сильных флюктуаций интенсивности волны.

Остановимся на пределах применимости диффузационного приближения для лучей, рассмотренного выше. Как уже отмечалось, УЭФ для диффузии лучей удается обосновать только в малоугловом приближении. Отсюда, согласно (44), возникает условие

$$\langle \tau_{\perp}^2 \rangle \ll 1 \quad \text{или} \quad D_x \sim \frac{\sigma_{\mu}^2 x}{l_0} \ll 1 \quad (x \gg l_0), \quad (50)$$

где σ_{μ}^2 — дисперсия флюктуаций показателя преломления. Это условие накладывает очень слабое ограничение на поперечное смещение луча: $\langle R^2(x) \rangle \ll x^2$. Рассмотрение поправок, связанных с конечностью продольного радиуса корреляции, не приводит к новым ограничениям.

Отметим, что в другом предельном случае (когда луч уходит очень далеко в неоднородную среду) устанавливается изотропное в пространстве распределение вероятностей для луча, аналогичное распределению Бульца в статистической физике [44].

2. Амплитудно-фазовые флуктуации световой волны в случайно неоднородных средах

Рассмотрим теперь амплитудно-фазовые флуктуации плоской световой волны.

В приближении геометрической оптики система уравнений для уровня амплитуды и фазы волны принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{k} \nabla_{\perp} S \nabla_{\perp} \chi &= -\frac{1}{2k} \Delta_{\perp} S(x, \rho) \quad (\chi(0, \rho) = 0), \\ -\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} S)^2 &= \frac{k}{2} \tilde{\epsilon}(x, \rho) \quad (S(0, \rho) = 0). \end{aligned} \quad (51)$$

Система уравнений (51) исследовалась в работах [45–47, 25].

Решение уравнения для χ можно записать в виде [45]*

$$\chi(x, \rho) = -\frac{1}{2k} \int_0^x d\xi \Delta_{\perp} S(\xi, R(x, \xi; \rho)), \quad (52)$$

где $R(x') \equiv R(x, x'; \rho)$ — попеченные смещения лучей, определяющих лучевую трубку, которые удовлетворяют уравнению

$$R(x, x'; \rho) = \rho - \frac{1}{k} \int_{x'}^x d\xi \nabla_{\perp} S(\xi, R(x, \xi; \rho)). \quad (53)$$

При этом, в силу предполагаемой единственности лучей,

$$R(\xi_1, \xi; R(x, \xi_1; \rho)) \equiv R(x, \xi; \rho). \quad (54)$$

Траектории лучей, приходящих в точку наблюдения (x, ρ) , определяются величиной $\nabla_{\perp} S$, уравнение для которой, в свою очередь, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla_{\perp} S + \frac{1}{k} (\nabla_{\perp} S \nabla_{\perp}) \nabla_{\perp} S = \frac{k}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}(x, \rho). \quad (55)$$

Решение уравнения (55) также можно записать в виде интеграла по тому же лучу:

$$\nabla_{\perp} S(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}(\xi, R(x, \xi; \rho)). \quad (56)$$

Подставляя (56) в (53), можно исключить фазу волны из рассмотрения, и мы приходим к уравнению для траектории [25]

$$\frac{d^2 R(x')}{dx'^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \tilde{\epsilon}(x', R(x')) \quad (57)$$

с граничными условиями

* Соотношения (52)–(54) справедливы и при наличии дифракционных эффектов.

$$R(x) = \rho, \quad \left. \frac{dR(x')}{dx'} \right|_{x'=0} = 0. \quad (58)$$

При этом выражение (52) для уровня амплитуды принимает вид

$$\begin{aligned} \chi(x, \rho) = -\frac{1}{4} \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \frac{\partial^2}{\partial \rho_i \partial \rho_k} \tilde{\epsilon}(\eta, R(x, \eta; \rho)) \times \\ \times \left. \frac{\partial R_k(\xi, \eta, \rho)}{\partial \rho_i} \right|_{\rho=R(x, \xi; \rho)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Таким образом, как уровень амплитуды, так и градиент фазы, определяющий угол прихода волны в точку наблюдения при заданной реализации поля $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$, определяется единственным «динамическим» уравнением (57) с граничными условиями (58). Лучи, определяемые уравнением (57), отличаются от лучей в разд. 1 тем, что для них граничные условия ставятся в разных пространственных точках (при $x' = 0$ и $x' = x$). В связи с этим обстоятельством процесс распространения лучей, описываемый уравнением (57) с условиями (58), не имеет характера диффузационного случайного процесса (даже при условии δ -коррелированности поля $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$ вдоль оси x), и плотность вероятностей для этих лучей является условной плотностью вероятностей для всей совокупности лучей, рассмотренных в разд. 1 настоящей главы.

Лучи, определяемые уравнением (57) с условиями (58), описывают флуктуации лучевой трубки, которые определяют флуктуации интенсивности волны в точке наблюдения. В работе [48] производился расчет флуктуаций площади сечения лучевой трубки в случае, когда можно пользоваться методом последовательных приближений для уравнения (57).

Отметим, что, как показано в работе [47], как само решение уравнения для χ , так и все статистические характеристики его определяются решением уравнения для фазы волны $S(x, \rho) \equiv S[\tilde{\epsilon}]$.

3. Применимость диффузационного приближения для описания амплитудно-фазовых флуктуаций волны

Уравнение для уровня амплитуды можно переписать в виде

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{k} \nabla_\perp (I \nabla_\perp S) = 0 \quad (I(0, \rho) = 1), \quad (60)$$

где $I = \exp(2\chi) = u(x, \rho) u^*(x, \rho) / |u_0|^2$ — интенсивность волны. В силу пространственной однородности поля $\tilde{\epsilon}(r)$ случайные поля $u(x, \rho)$, $I(x, \rho)$, $S(x, \rho)$ будут однородными полями в плоскости $x = \text{const}$. С помощью уравнений (51), (60) можно получить выражение для одноточечной корреляции интенсивности и фазы волны:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle IS \rangle = \frac{k}{2} \langle \tilde{\epsilon} I \rangle + \frac{1}{2k} \langle I (\nabla_\perp S)^2 \rangle; \quad (61)$$

с другой стороны, имеет место соотношение

$$\nabla_1 \nabla_2 \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) |_{\rho_1=\rho} = \langle I [(\nabla_\perp \chi)^2 + (\nabla_\perp S)^2] \rangle, \quad (62)$$

где $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle$ — функция взаимной когерентности, рассматриваемая в первой главе. В приближении геометрической оптики выражение (62) упрощается и принимает вид

$$\nabla_1 \nabla_2 \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) \Big|_{\rho_1=\rho}^{\Gamma_0} = \langle I(\nabla_{\perp} S)^2 \rangle. \quad (63)$$

Левая часть (63) может быть вычислена в приближении диффузионного случайногопроцесса. В этом приближении функция Γ для плоской волны описывается формулой (27 а), а $\langle \tilde{e}(x, \rho) I(x, \rho) \rangle = 0$. Следовательно, в приближении геометрической оптики и диффузионном приближении*

$$\begin{aligned} \langle I(\nabla_{\perp} S)^2 \rangle &= \frac{k^2}{4} \Delta_{\perp} D(0)x = k^2 \gamma, \\ \langle IS \rangle &= \frac{k}{16} \Delta_{\perp} D(0)x^2, \end{aligned} \quad (64)$$

где $\gamma = \pi^2 \int_0^\infty d\chi \chi^3 \Phi_e(\chi) x = \frac{1}{k^2} \langle (\nabla_{\perp} S_0)^2 \rangle$ — дисперсия угла прихода волны

в точку наблюдения в первом приближении метода плавных возмущений (параметр, характеризующий интенсивность фазовых флуктуаций [46],

$$S_0(x, \rho) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \tilde{e}(\xi, \rho).$$

Корреляция $\langle IS \rangle = \frac{1}{2i} \langle uu^* \ln u/u^* \rangle$ определяется одноточечным

распределением вероятностей поля $u(x, \rho)$ и, вообще говоря, обусловлена всеми моментами $u(x, \rho)$. Выражение (64) для этой корреляции было вычислено в диффузионном приближении. Следуя разд. 4 первой главы, можно получить условия применимости формул (64), которые в некоторой степени будут характеризовать условия применимости диффузионного приближения для одноточечного распределения вероятностей в приближении геометрической оптики. Эти условия для турбулентной среды имеют вид [25]

$$x_m x \gg 1, \quad \gamma \ll 1, \quad (65)$$

где величина x_m характеризует внутренний масштаб турбулентности.

Таким образом, при выполнении условий (65) справедливы расчеты амплитудно-фазовых флуктуаций в приближении диффузионного случайногопроцесса в геометрооптическом приближении. Условия (65) при этом совпадают с условиями (50), описывающими применимость диффузионного приближения для лучей в турбулентной среде, которые, как было показано в предыдущем разделе, и определяют все статистические характеристики световой волны.

Попытаемся проанализировать полученные результаты с точки зрения их применимости к распространению света в турбулентной атмосфере.

В основу рассмотрения было положено параболическое уравнение (приближение квазиоптики). Это уравнение остается справедливым лишь в случае, когда можно пренебречь обратным рассеянием. Для света, рассеивающегося в турбулентных флуктуациях показателя преломления, углы $\theta \sim \lambda/l_0$, в которых заключена основная часть рассеянного поля, имеют порядок $10^{-5} - 10^{-4}$. Так как флуктуации диэлектри-

* Отметим, что формулы (64) справедливы и в случае негауссовых флуктуаций \tilde{e} .

ческой проницаемости в атмосфере также очень малы ($\delta \sim 10^{-6}$), то обратным рассеянием света на турбулентных неоднородностях практически можно пренебречь всегда. Нарушение этого условия можно ожидать лишь в области миллиметровых волн, но даже и в этом случае отклонения весьма малы.

С другой стороны, малость угла рассеяния θ приводит к сильному взаимодействию рассеянных волн между собой и с падающей волной. Именно этот эффект, несмотря на малость δ , и вызывает сильные флуктуации поля. В результате, как это отмечалось выше, оказываются несправедливыми методы расчета, основанные на той или иной форме метода возмущений. Предлагаемая теория использует малость другого параметра — характерного продольного масштаба неоднородностей по сравнению со всеми другими продольными масштабами задачи. Здесь имеется аналогия с неравновесной кинетической теорией газов, где для построения разложений используется малость времени взаимодействия молекул (в нашем случае продольная координата играет роль времени). В результате, несмотря на то, что возникающие условия применимости теории и содержат ограничения на величину флуктуаций δ , эти ограничения оказываются настолько слабыми, что хорошо выполняются в реальной атмосфере даже для достаточно протяженных трасс. К сожалению, за это расширение области применимости приходится платить как относительной сложностью самой теории, так и сложностью ее результатов, т. е. необходимостью прибегать к численным методам расчета (например, для функции G_4). Кроме того, так как предлагаемая теория оперирует с функциями когерентности различных порядков, то возникают сложности в тех случаях, когда необходимо рассчитывать фазовые флуктуации. Однако основное затруднение, с которым приходилось сталкиваться в методе плавных возмущений — невозможность описывать световое поле в области сильных флуктуаций, — устраняется в новой теории. По-видимому, во всех тех случаях, когда интересующие нас статистические характеристики светового поля в турбулентной атмосфере могут быть выражены через функции когерентности, предлагаемая теория способна дать практический приемлемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере*, изд. Наука, М., 1967.
2. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
3. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1360 (1968).
4. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 56 (1970).
5. М. И. Мордухович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 275 (1970).
6. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
7. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
8. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 594 (1969).
9. М. J. Begap, T. L. Ho, J. Opt. Soc. Am., 59, № 9, 1134 (1969).
10. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
11. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, № 9, 952 (1969).
12. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 58, № 2, 624 (1970).
13. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1068 (1970).
14. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1069 (1970).
15. В. И. Татарский, *Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса*, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1970.
16. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 60, № 4, 1300 (1971).
17. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).

18. В. Я. Харанен, Докл. АН СССР, 88, № 2, 253 (1953).
19. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изв. АН СССР, М., 1958.
20. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 34 (1958).
21. В. М. Комиссаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 292 (1966).
22. Д. Б. Келлер, сб. Гидродинамическая неустойчивость, изд. Мир, М., 1964, стр. 265.
23. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изв. АН СССР, М., 1961.
24. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 5, 706 (1971).
25. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 6, 897 (1972).
26. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 12, 1762 (1967).
27. Е. С. Фрадкин, Тр. ФИАН, 29, 3 (1965).
28. E. S. Fradkin, Acta Physica, 19, 175 (1965); Nucl. Phys., 76, 588 (1966).
29. K. Furutsu, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1963).
30. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, № 5 (11), 1919 (1964).
31. М. Вегап, J. Opt. Soc. Am., 60, № 4, 518 (1970).
32. Н. Вегтегер, J. Res. NBS, 68-D, 503 (1964).
33. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 380 (1964).
34. A. M. Whitman, M. J. Vegen, J. Opt. Soc. Am., 60, № 12, 1595 (1970).
35. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
36. А. В. Артемьев, А. С. Гурвиц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 5, 734 (1971).
37. М. А. Каллистратова, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 8, 1200 (1971).
38. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 16 (1970).
39. В. И. Кляцкин, А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 9, 1381 (1972).
40. А. С. Гурвиц, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 1, 66 (1968).
41. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 540 (1972).
42. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
43. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
44. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 6, 960 (1971).
45. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 55, № 28, 662 (1958).
46. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 5, 723 (1969).
47. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1506 (1969).
48. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теория вероятности и ее применение, 14, № 2, 357 (1969).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
17 апреля 1972 г.